Les progressions de l'infini : rôles du discret et du continu au XVIIè siècle

Jean Dhombres
Université de Nantes

Les progressions géométriques ont joué un rôle historiquement important dans l'appréhension de l'infini et du continu, rôle que l'on aurait bien tort de réduire à la seule attribution d'une valeur finie à une somme comportant un nombre infini de termes. Bien sûr, acquise sous une forme ou sous une autre, et pour $|x|$ strictement inférieur à l'unité, une formule telle que

$$\text{(G)} \qquad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} x^n ,$$

n'a pu manquer d'être l'amorce de l'étude des séries, la série du binôme au premier chef,

$$(1-x)^{\alpha} = 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 - \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + ...,$$

pour un exposant α quelconque, (G) correspondant à $\alpha = -1$, et plus généralement les séries entières

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n \ .$$

Grâce à sa versatilité d'emploi, notamment par le calcul explicite du reste, la série géométrique a servi d'exemple typique pour approcher un nombre réel quelconque et partant pour comprendre un continu tel que l'ensemble des points d'une droite situés entre deux points donnés sur celle-ci puisque le ressort de l'écriture décimale illimitée d'un nombre réel x quelconque en dépend. En écrivant

$$\pm \sum_{n=-N}^{n=\infty} \frac{x_n}{10^n},$$

où, pour chaque n, x_n est un entier compris entre 0 et 9, et N un entier positif ou nul, grâce à la relation (G) appliquée avec $x = \frac{9}{10}$, on constate qu'un nombre pour lequel l'entier x_n est toujours égal à 9 à partir du rang n' (> 0), a pour valeur :

$$\pm\left(\sum_{n=-N}^{n=n'-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n'-1}}\right)$$

Le choix d'un regard historique

Mon propos n'est certainement pas de dérouler la longue histoire des interventions de la série géométrique, qui pourrait débuter par la légende du roi qu'aurait ruiné la promesse d'une récompense d'un grain de blé doublé successivement sur chaque case de l'échiquier. J'entends ne rendre compte que de quelques utilisations de cette série, celles qui ont pu façonner certains des concepts sur l'infini et le continu, reconnaissant bien volontiers le côté subjectif - mais toute histoire n'est-elle pas une construction ? - et avouant sans gêne puiser très sélectivement dans l'immense réservoir des mathématiques du passé.

Certes, en affichant la simple recherche des déterminations de la formule (G), je pourrais préserver mon étude contre toute attaque, du côté de la méthodologie notamment : souvent l'on prend ainsi prétexte de la positivité d'un fait mathématique pour en faire le récit, dressant une longue liste d'intervenants au fil des âges et des articles publiés ou manuscrits. Mais tel n'est pas ici l'enjeu : une formule, et tout particulièrement une formule analytique, est rarement un point d'aboutissement mais le plus souvent un point de départ. Comment ne pas songer au rôle de la formule (G) dans le façonnage de la théorie des anneaux normés, les algèbres de Banach (idéaux maximaux, etc), sous l'impulsion de N. Wiener d'abord, puis de I.M. Gelfand, D.A. Raikov, G.E. Chilov, etc, juste avant la seconde guerre mondiale ? Une autre piste serait la théorie de la stabilité du calcul des valeurs et des vecteurs propres des matrices par la méthode de relaxation, baptisée sous le double patronyme de Gauss et de Seidel. A vrai dire, la formule (G) est suffisamment simple et générale pour se retrouver au départ de bien des théories ou pratiques mathématiques, le calcul symbolique n'étant pas l'une des moindres. N'appartient-il pas à l'historien des mathématiques - et à l'épistémologue - d'effectuer la sélection de ces filiations ? Une démarche dont on reconnaîtra qu'elle évite l'insupportable visée téléologique - l'explication de l'avant par l'après - sans que l'on ait à se départir de la dynamique, c'est-à-dire de ce sens d'une visée dans la recherche mathématique, alors même que cette visée est bien rarement l'objectivation pensée aujourd'hui.

Les facteurs historiques ne sont certes pas les seuls à créer l'objectivité mathématique et le logicien aura soin d'une explication tout autre alors que les mathématiciens choisissent à cet effet aussi bien la conception architecturale, l'efficacité, l'esthétique manifestée par l'élégance ou, plus souvent qu'on ne le pense, le dévoilement du réel. Pourtant, un platonicien convaincu ne peut guère se désintéresser du mouvement par lequel le regard se détourne du mur de la caverne et un phénoménologiste ne saurait récuser la délimitation des strates qui font d'une théorie mathématique un être-là dont les cadres s'imposent objectivement, sinon inéluctablement.

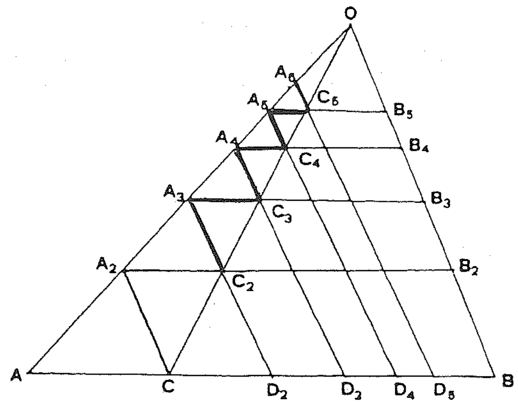
C'est en tout cas sur l'articulation entre une formule et certains concepts du continu que j'ai choisi de porter un regard historique. Si j'ai adopté de préférence des textes du XVIè siècle et de la première moitié du XVIIè siècle, textes suivis avec attention et longuement cités, c'est que la méthode historique exige une telle concentration qui ne saurait exclure le recours épisodique à des œuvres d'Euclide aussi bien qu'à celles de scolastiques.

Une expérience : le morcelage du continu

C'est peut-être une expérience de dessin qui est à l'origine de la composition du continu chez un auteur que tout le monde crédite à juste titre de la première résolution mathématique du paradoxe de Zénon, celui de l'Achille courant désespérément derrière une tortue. Cet auteur est Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667), père jésuite dont la formation mathématique s'effectua au Collège romain au cours de la première décennie du XVIIe siècle. Il fut l'animateur de ce que l'on peut appeler l'école mathématique belge, ayant comporté des maîtres comme Guldin, de la Faille ou Tacquet[1].

[1] Sur ses élèves, comme sur la vie de Grégoire de Saint-Vincent, on peut consulter divers articles d'érudition. En particulier, H. Bosmans, "Deux lettres inédites de G. de Saint-Vincent", *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*, 26 (1901-1902), pp. 22-40; et surtout le texte de cet auteur paru dans la *Biographie nationale belge*, 21, (1911-1913), colonnes 141-171; P. Bockstaele, "Four letters from G. a Sancto Vincentio to Chr. Grienberger", *Janus*, 1969, 56, pp. 63-107; Omer Van de Vyver, "L'Ecole de mathématiques des Jésuites de la province franco-belge au XVIIème siècle", *Archivium Historicum Societatis Iesu*, vol . XLIX, 1980, n°97, pp. 265-278.

Figure 1



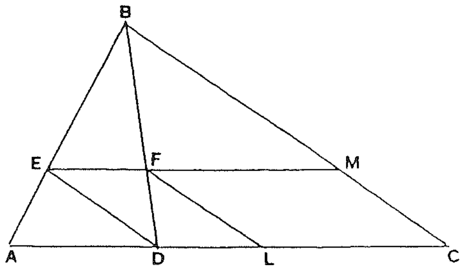
Le donné visuel est un triangle OAB, avec choix arbitraire d'un point C entre les points A et B, point déterminant une sécante OC. De C, on mène une parallèle au côté OB coupant le côté OA en A_2. Du point A_2, on mène une parallèle à la base AB, coupant la sécante OC en C_2. De C_2, à nouveau on mène parallèlement à OB la droite C_2A_3 puis A_3C_3 parallèlement à AB, et ainsi de suite. Alternativement sur le côté OA et sur la sécante OC, deux familles de points sont ainsi établies A, A_2, A_3, A_4, A_5, etc; C, C_2, C_3, C_4, etc. Naturellement, en traçant des parallèles à OB, on peut rabattre tous ces points sur la droite AB générant ainsi une famille A, C, D_2, D_3, D_4, etc, ou encore, en traçant des parallèles à la base AB, les rabattre sur OB pour avoir cette fois B, B_2, B_3, B_4, etc.

Dans cette situation, c'est la concaténation de deux faits qui dut frapper Grégoire de Saint-Vincent. D'une part, on peut "voir" la longueur OB toute entière, mais on la voit aussi morcelée en segments distincts CA_2, C_2A_3, C_3A_4, etc, segments déplacés qui correspondent aux segments alignés BB_2, B_2B_3, B_3B_4, etc. D'autre part, l'opération de constitution des différents segments est répétitive : c'est la **même** construction qui est sans cesse itérée. De telle sorte que la simplicité de l'itération suggère qu'un calcul est possible, qu'une loi régulière préside à la composition en segments de la longueur OB. Il s'avère que cette régularité est celle de la progression géométrique.

Pour prouver cette affirmation, il suffit de calculer avec des proportions sur une seule étape : une figure réduite est bien plus commode et cette simplification est un des avantages de l'itération.

Adoptons les notations mêmes de Grégoire de Saint-Vincent qui, naturellement, ne fait pas usage des indices numériques (nous les avons d'abord adoptés par souci de simplification), mais utilise le rang des lettres dans l'alphabet latin pour se faire entendre.

Figure 2



Appliqué deux fois, le théorème dit de Thalès fournit :

$$\frac{AD}{EF} = \frac{DB}{FB} \quad \text{et} \quad \frac{DC}{FM} = \frac{DB}{FB}.$$

Puisque le parallélogramme DEMC procure EM = DC, on dispose de la proportion :

(1) $$\frac{AD}{EF} = \frac{EM}{FM}.$$

Ce que l'on peut encore écrire selon une proportion ne faisant jouer que des longueurs portées sur la base AC :

$$\frac{AD}{DL} = \frac{DC}{LC}.$$

Un calcul d'algèbre des proportions conduit aussitôt à :

$$\frac{AD}{DL} = \frac{DC}{LC} = \frac{AD + DC}{DL + LC} = \frac{AC}{DC}.$$

Dont on déduit :

(2) $$\frac{AD}{EF} = \frac{AC}{DC}.$$

Les relations (1) et (2) constituent un groupement simple qui fait saisir la permanence de l'itération : le rapport d'une longueur comme AD à la longueur suivante EF est un invariant car s'il est égal au rapport dans lequel D divise la base AC (soit $\frac{AC}{DC}$), il l'est aussi bien au rapport dans lequel le nouveau point F divise la nouvelle base EM (soit $\frac{EM}{FM}$). En posant $r = \frac{AC}{DC} = \frac{EM}{FM}$, on manifeste à son tour

que $\frac{AD}{EF} = r$. Traduite dans le langage des lettres indexées de la figure 1, cette invariance donne :

(3) $$r = \frac{AC}{A_2C_2} = \frac{A_2C_2}{A_3C_3} = \frac{A_3C_3}{A_4C_4} = \dots .$$

Une permanence que l'on peut aussi bien lire sur la seule base AB :

(4) $$\frac{AC}{CD_2} = \frac{CD_2}{D_2D_3} = \frac{D_2D_3}{D_3D_4} = \dots ,$$

ou encore, moyennant la similitude des triangles ACA_2, $A_2\,C_2\,A_3$, $A_3\,C_3\,A_4$, etc, lire sur le seul côté OB :

(5) $$\frac{BB_2}{B_2B_3} = \frac{B_2B_3}{B_3B_4} = \frac{B_3B_4}{B_4B_5} = \dots .$$

Autrement dit, les points A, C, D_2, D_3, D_4, etc, déterminent sur le segment AB des intervalles successifs dont les longueurs forment une progression géométrique[2] et les points B, B_2, B_3, B_4, etc, forment de même sur le segment BO une autre progression géométrique. D'autres progressions sont obtenues avec les points A, A_2, A_3, A_4, etc, sur OA ou les points C, C_2, C_3, C_4, etc, sur OC.

On remarquera de plus que la comparaison de (1), après traduction sur l'axe AC, avec (2), montre que la longueur DC (fig. 2) est moyenne géométrique des longueurs AC et LC ($DC = \sqrt{AC.LC}$). En abscisse (dans la fig. 1), ce résultat pourrait facilement lancer une progression géométrique à rebours en quelque sorte, avec les segments BA, BC, BD_2, BD_3, BD_4, etc. Ce n'est pas la voie empruntée ici par Grégoire de Saint-Vincent, mais il la connaît bien sûr[3].

Si s'avère notable la présence de progressions géométriques générées par l'itération très simplement menée, la "visualisation" ne

---

[2] En posant $\frac{AC}{A_2C_2} = r$ $(r>1)$, on a pour $n \geq 2$, $A_nC_n = \frac{AC}{r^{n-1}}$, $D_{n-1}D_n = \frac{AC}{r^{n-1}}$ en convenant de poser $D_1 = C$ et, avec $B_1 = B$, toujours pour $n \geq 2$, $B_{n-1}B_n = \frac{BB_2}{r^{n-2}}$.

[3] Evangelista Torricelli adopte une figure encore plus simple que la figure (1), et il met en évidence la progression géométrique des longueurs AC, A_2C_2, A_3C_3, etc, dans son manuscrit *De dimensione parabolæ*, lemme XXIV : "*Si duae rectæ lineæ invicem concurrant, et inter ipsas descriptum sit quoddam flexilineum constans ex lineis alternatim parallelis; erunt omnes lineæ quæ inter se parallelæ sunt, in continua proportione*". Ensuite, en traçant des parallèles, il représente la somme totale sur le segment AB (lemme XXVI). Voir : *Opere di Evangelista Torricelli*, G. Loria e G. Vassura (ed.), vol. 1, Faenza, 1919, pp. 147-148.

vaut cependant pas preuve de la composition du continu AB par AC + CD_2 + D_2D_3 + D_3D_4 + etc, celle du continu OB par BB_2 + B_2B_3 + B_3B_4 + etc, ou encore celle du continu OC par CC_2 + C_2C_3 + C_3C_4 + etc. Grégoire de Saint-Vincent entend bien réussir cette preuve : tel est l'objet de la deuxième partie de son deuxième livre consacré aux progressions géométriques.

"L'expérience" que nous venons de décrire se trouve quant à elle insérée juste avant, dans la première partie de ce même livre 2, à la proposition 70 précisément. Cet emplacement est tout à fait voulu comme on peut s'en rendre compte en reprenant l'organisation générale de l'ouvrage après un historique rapide. L'*Œuvre géométrique* [4] de Grégoire de Saint-Vincent parut très tardivement à Anvers en 1647 : elle comporte dix livres et culmine à 1225 pages in folio; c'est un des textes mathématiques les plus copieux parmi tous les textes du XVIIè siècle et sans doute de bien d'autres époques. Les résultats essentiels étaient déjà rédigés dans les années 1617-1625, alors que le savant dévoilait les mathématiques à un public restreint d'apprentis jésuites, à Anvers d'abord, puis à Louvain[5]. Le contenu est sagement divisé en fonction des sections coniques : un livre particulier pour le cercle, trois autres pour l'ellipse, la parabole et l'hyperbole respectivement, un livre enfin pour les surfaces du second degré (selon la terminologie actuelle). Mais dans cette géométrie du second degré s'insèrent des livres conçus comme aides techniques, le premier concerne "*la puissance des lignes*" et met en place les proportions et l'algèbre correspondante, le second est entièrement consacré à la progression géométrique sur laquelle retour est fait au huitième livre pour l'adapter à la mesure des aires et des volumes, grâce à la théorie du *ductus* du septième livre, un chapitre très original de l'*Opus*

[4] *P. Gregorii a S^{to} Vincentio Opus geometricum quadraturæ circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*, I. et I. Meursios, Anvers, 1647.

[5] La Bibliothèque Royale de Bruxelles possède un important fonds de manuscrits laissés par Grégoire de Saint-Vincent. Ils sont reliés en gros volumes, allant chacun de 300 à presque 600 pages (Numéros 5770-5793). Mais la chronologie n'est pas respectée. Un essai de datation fut effectué par Hermann van Looy dans sa dissertation doctorale de la Katholieke Universiteit te Leuven (*Chronologie en analyse van de mathematische handschriften van G. a Sancto Vincentio*, 1979). Les conclusions sont reprises dans deux articles du même auteur, dont le second est une traduction du premier : H. van Looy, "Chronologie et analyse des manuscrits mathématiques de Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667)", *Archivium Historicum Societatis Iesu*, vol XLIX, 1980, n°97, pp. 279-303 ; "A chronology and historical analysis of the mathematical manuscripts of Gregorius a Sancto Vincentio (1584-1667)", *Hist. Math.*, 11, 1984, pp. 57-75. Une étude antérieure est due à E. Sauvenier-Gauffin, "Les manuscrits de G. de Saint-Vincent", *Bull. Soc. des Sciences de Liège*, 1951, pp. 413-436 ; 563-590, 711-737.

geometricum quoique totalement oublié aujourd'hui[6]. Le dernier livre de l'ouvrage en est la honte, en ce sens que Grégoire prétend y démontrer la possible quadrature du cercle, et d'ailleurs celle des autres coniques.

En première partie du deuxième livre, intitulée *De progressionibus geometricis* (Des progressions géométriques), Grégoire de Saint-Vincent traite des "*progressions inchoatives, c'est-à-dire non terminées, en ce sens que le terme* [final] *des progressions ne sera pas encore pris en considération*"[7]. Il s'agit bien sûr des progressions géométriques finies. L'exposé est "abstrait" mais, à la manière du livre 5 des *Eléments* d'Euclide, puisque si l'auteur utilise des grandeurs de même genre, il les représente toutes par des segments de droite, utilisant donc le minimum de spatialité ; l'objet de calcul est la raison, c'est-à-dire le rapport de deux grandeurs de même genre.

La proposition 70 dont nous venons de fournir le contenu détonne pourtant dans l'ensemble des 74 propositions de la première partie. Car la figure qui y est utilisée n'est pas un alignement de segments, mais elle fait intervenir des lignes tracées dans des triangles[8]. Le spatial géométrique est à l'œuvre. En outre, c'est la première fois qu'intervient un procédé dûment itératif auquel un beau développement était promis dans le reste de l'ouvrage. En tout cas, Grégoire annonçait ce rôle de l'itération dès l'introduction du livre 2 l'avait particulièrement frappé l'expression "*Et hoc semper fiat*" qui intervient chez Euclide, notamment au livre X des *Eléments*. Ainsi, à la proposition 1 de ce livre on lit : "*Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une*

[6] Une traduction française de ce septième livre, avec un commentaire, devrait paraître prochainement dans *Sciences et Techniques en Perspective*.

[7] Argumentum du livre 2, *Opus geometricum*, p. 52 ("*progressionum inchoatarum*"). Afin d'alléger la présentation, nous donnons directement une traduction française de certains passages de l'ouvrage. Voir Jean Dhombres, *Une algèbre de raison au 17e siècle : la quadrature de l'hyperbole par Grégoire de Saint-Vincent*, livre à paraître. Nous reviendrons sur la signification attribuée au mot "terme" sous la plume de Grégoire de Saint-Vincent.

[8] Auparavant, au livre 2, seules les figures des propositions 31, 35, 36, 38, 40 et 69 présentent une spatialité semblable, mais elles sont très classiques dans leur fond puisqu'il s'agit de construire soit une moyenne proportionnelle, soit de montrer l'effet du théorème de Thalès, soit enfin (à la proposition 69) d'illustrer géométriquement l'importante propriété algébrique $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ sur laquelle nous reviendrons. Au contraire, la proposition 70 fait jouer l'itération et un processus infini dont rend compte la figure.

certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées"[9]. Grégoire se réfère tout autant à Archimède dont la formulation diffère pourtant de celle d'Euclide, par exemple dans la *Quadrature de la Parabole*[10], voire dans la *Mesure ducercle*[11]. "*Cette petite formule titilla particulièrement mon esprit et me contraignit à des pensers chagrins*"[12] avouait non sans inquiétude le Père jésuite. La proposition 70 manifeste le résultat de telles "pensées". De sorte que cette proposition, que nous avons qualifiée d'expérience, constitue certainement un pivot, le passage de la progression finie à la progression infinie, c'est-à-dire de l'interminé au terminé dit précisément Grégoire de Saint-Vincent. Ce passage, que nous rangeons aujourd'hui dans le domaine de l'analyse et qui, pendant longtemps, fut considéré comme du ressort de l'algèbre, est d'abord inscrit en ce début du XVIIè siècle sous la bannière de la géométrie.

Voici le texte original de la proposition 70. On notera que l'énoncé littéral joue sur des segments qui ne sont pas alignés, le premier objectif étant de montrer la stabilité de l'itération avant de les sommer en les alignant.

[9] *Les Œuvres d'Euclide*, traduction F. Peyrard, Paris, 1816, Patris, tome second, p. 113. La traduction latine généralement adoptée est justement le "*hoc semper fiat* " pour rendre le "κἀι τοῦτο ἀεὶ γίγνηται", et si l'on fait toujours la même chose. Au livre XII des *Eléments*, Euclide reprend la même formulation pour la mesure du cercle : "*et si l'on continue toujours de faire la même chose*".

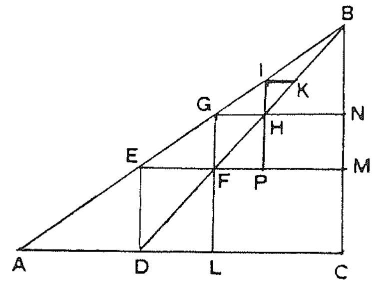
[10] A la proposition 24 de ce livre, on lit "*et nous continuons à inscrire dans les segments apparaissant successivement des triangles...*", ce qui, avec la suppression de l'adverbe "toujours" s'avère moins précis (*Archimède*, tome premier, La mesure du cercle, trad. C. Mugler, Les Belles Lettres, Paris, 1970, tome 2, p. 193).

[11] Dans ce texte d'Archimède, la formulation est plus prudente encore. Mugler traduit par : "*que les segments de cercle aient à la fin une somme inférieure...*" mais il éprouve le besoin de préciser: "*(sc. si on répète les opérations de division en deux parties égales)*", (trad. Mugler, op. cité, p. 137). A vrai dire, aussi bien dans d'autres livres, au lieu de la formulation d'une continuation indéfinie, Archimède préfère fixer le moment à partir duquel on peut s'arrêter. Ainsi, dans *De la Sphère et du cylindre* : "*En divisant en deux parties égales.... nous trouverons comme restes des segments dont la somme est inférieure à l'aire Θ*" (trad. Mugler, tome 1, proposition 9, p. 26) et dans le livre *Sur les Conoïdes et les Sphéroïdes*, Archimède choisit de porter l'accent sur la possibilité même de l'arrêt de l'itération: "*Il est dès lors possible d'inscrire au cercle un polygone...*"(ει δυνατον...., trad. Mugler, tome 1, proposition 4, p. 167). Les réticences mêmes d'Archimède - quelquefois porteuses de précision - disent suffisamment que la continuation indéfinie faisait problème dès l'Antiquité.

[12] "*Titillavit me hæc particula, et coëgit morosiore cogitatione circa hæc versari*", *Opus geometricum*, op. cité, p. 51.

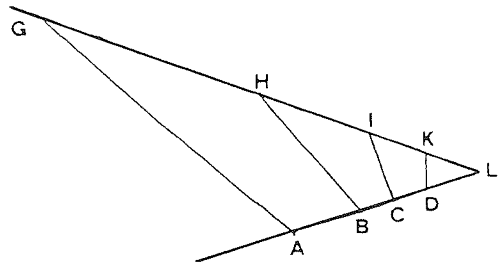
Propositio LXX *: Sit ABC triangulum diuisum rectâ lineâ DB, ducanturq̃ ; linee DE, EF, FG, GH, HI, IK basi AC, et lateri BC parallele quot libuerit. Dico omnes AD, EF, GH, IK, item DE, FG, HI, etc, esse in eadem continuata analogia.*

figure 3



Ceci obtenu, au lieu d'avancer directement dans la seule voie itérative qu'il inaugure avec la proposition 70, Grégoire de Saint-Vincent propose d'abord quelques récréations ; on peut supposer qu'il le fait dans l'intention de souligner l'intrusion de la géométrie, celle du continu spatial, dans un livre qui paraissait ne relever jusque là que de l'algèbre, du moins celle qui est liée à la théorie des proportions dont les règles sont précisément indépendantes de la nature des grandeurs en cause. Ainsi, à la proposition 71, il prend deux progressions géométriques sur deux droites concourantes en L. Joignant par des segments les termes de rang correspondant dans les deux progressions (figure 4), Grégoire indique que les aires des triangles constituent également une progression géométrique[13], de même que les aires des trapèzes ABHG, BCIH, CDKI, etc. Ces digressions ne sauraient trop durer!

Figure 4



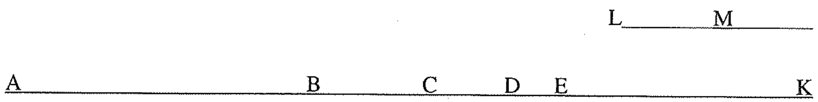
[13] La raison de la progression des aires est le produit des raisons des progressions sur chacune des deux droites. Nous retrouverons ce résultat.

Des formes de la formule (G) : le continu morcelé et le discret continué

Si le dessin de la proposition 70 invente un morcelage du continu, le dessein n'en est pas moins la composition de ce continu et, dès la proposition 75 qui est la première de la deuxième partie du livre 2, Grégoire de Saint-Vincent se met à l'œuvre. Pour démontrer d'abord une évidence visuelle : sur leur droite respective, les points A, A_2, A_3, A_4, etc, ou C, C_2, C_3, C_4, etc, ou encore B, B_2, B_3, B_4, etc, restent en deçà du point O (figure 1). L'énoncé adopté à cet effet simplifie les données dans la mesure où il suffit de considérer une seule progression géométrique, et surtout que l'on peut abandonner la spatialité de la représentation figurée pour revenir à la simple linéarité de la représentation des longueurs.

1) Présence de l'infini: une preuve par récurrence

"*Proposition 75 : Si l'on a une grandeur AB qui soit à la grandeur BK comme la grandeur BC à la grandeur CK, je dis que la proportion de AB à BC peut être poursuivie en acte sans terme* [final] *à l'intérieur de la grandeur AK, de telle manière qu'elle ne parvienne jamais à K*"[14].



La conclusion de cette proposition 75 présente une indéniable connotation philosophique. Grégoire de Saint-Vincent entend prouver la poursuite en acte d'une progression ; c'est incontestablement à un théorème d'existence qu'il s'attaque. Nous allons donc surveiller la preuve fournie par le jésuite brugeois afin de saisir le pur jeu algébrique qu'il instaure par la manipulation des proportions et, ce faisant, nous familiariser avec celles-ci. La chose peut paraître fastidieuse au début, surtout par comparaison avec notre algèbre, mais dans cette proposition 75 la récurrence non explicite du raisonnement

[14] "*Si fuerit magnitudo AB, ad magnitudinem BK, ut magnitudo BC ad magnitudinem CK. Dico proportionem AB ad BC, sine termino continuari actu posse intra magnitidunem AK, ita ut numquam ad K perveniatur*", Proposition 75, livre 2, *Opus geometricum*, op. cité, p. 95.

de Grégoire exige une attention assez scrupuleuse[15].

L'hypothèse fixe au départ les points extrêmes A et K, et deux points intermédiaires B et C, de telle sorte que

$$(1) \qquad \frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK}.$$

De fait, le point B est choisi arbitrairement entre A et K tandis que le point C est déterminé par la relation (1). Il conviendrait donc d'établir que C est effectivement situé entre les points B et K, c'est-à-dire que la longueur BC est inférieure à BK, et ce pour tout choix possible de B. Grégoire de Saint-Vincent ne le fait pas et, quand bien même le résultat serait exact, il nous faudra expliquer une telle absence qui, en fait, est l'indice non d'une faute mais bien plutôt d'un présupposé. Nous y reviendrons.

En tout cas, $\frac{AB}{BC}$ est une raison fixée et, en respectant la règle discrète que nous notons (G_d) pour repérage ultérieur, l'on peut construire itérativement une progression de points D, E, F, etc :

$$(G_d) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{CD} = \frac{CD}{DE} = \frac{DE}{EF} = \dots .$$

Le but de la proposition est de prouver qu'ainsi établis tous les points D, E, F, etc, sont en deçà du point K. Comme pour tout raisonnement par récurrence - et c'est ce dont il s'agit puisqu'il faut interpréter (G_d)

[15] Pour vérification du commentaire, voici le texte traduit de la démonstration fournie par Grégoire de Saint-Vincent (proposition 75, livre 2): "*Que ce qu'est AB à BC, BC le soit à L. Parce que AB est donc à BK comme BC à CK, en alternant on aura que ce qu'est AB à BC (c'est-à-dire BC à L), BK l'est à CK. Et derechef en alternant, ce que BC est à BK, L l'est à CK. Partant, puisque BC (par hypothèse) est moindre que BK, L également sera moindre que CK. Donc, de CK on pourra soustraire CD égale à L. Or, AB, BC et L étaient toutes trois en proportion continue, donc AB, BC et CD sont aussi toutes trois en proportion continue. Maintenant, à ces trois grandeurs en proportion continue AB, BC et CD, qu'on pose la quatrième proportionnelle continue M. Parce que j'ai montré un peu auparavant que BK est donc à BC comme CK est à L (c'est-à-dire CD), on aura dividendo et en inversant que BC est à CK comme CD à DK. Je puis montrer que M est moindre que DK grâce au raisonnement même par lequel, auparavant, j'ai montré que L est moindre que CK. On pourra, par conséquent, de DK retrancher DE égale à M. Les quatre grandeurs AB, BC, CD, DE sont donc en proportion continue. Et, ainsi, nous démontrerons que la proportion AB à BC, à l'intérieur de la ligne AK, peut être continuée en acte sans terme final, de telle façon qu'elle ne parvienne pas à K. Ce qu'il fallait démontrer*".

comme une itération, un répétition indéfinie - Grégoire de Saint-Vincent commence par situer le premier point, le point D. Parce que la démarche suivie doit présenter un caractère suffisamment général, elle est très détaillée et constructive. Il pose d'abord une grandeur L comme troisième proportionnelle des deux premières longueurs AB et BC données, et l'inscrit d'ailleurs dans la figure au-dessus du segment AK :

$$(2) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{BC}{L}.$$

Une telle construction est licite dans le cadre même de la théorie des proportions : Clavius, le maître de Grégoire de Saint-Vincent au Collège Romain, l'avait dûment incorporée au corpus euclidien dans son édition latine commentée des *Eléments*[16] en 1574. Echangeant les termes moyens dans la première proportion de (1) qui définit C à partir de A, B, et K, Grégoire obtient la proportion:

$$(3) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{BK}{CK}.$$

Comparant (2) et (3), et échangeant encore les termes moyens, il dispose de :

$$(4) \qquad \frac{BC}{BK} = \frac{L}{CK}.$$

La relation (4) est bien adaptée pour indiquer que L est une longueur strictement inférieure à CK puisque l'on sait déjà - quoique ceci n'ait pas été démontré - que la longueur BC est strictement inférieure à BK. Cette obtention d'une inégalité à partir de proportions convenablement agencées maintient la pure tradition euclidienne (livre V des *Eléments*).

Remarquons que le point D n'est pas encore intervenu et, de fait, Grégoire le construit maintenant en posant

$$CD = L,$$

ce qui assure la position du point D avant le point K grâce à L < CK. Mais il faut alors **prouver** que le point D ainsi construit correspond au point D défini au départ par l'itération (G_d). C'est chose facile puisque,

[16] *Euclidis elementorum libri XV...*, Auctore Christophore Clavio, Romæ, apud Vincentium Accoltum, 1574, 2 vol.

simultanément, AB, BC, CD (selon (G_d)) et AB, BC, L (par construction) sont en progression géométrique ; or une telle progression est déterminée par ses deux premiers termes[17], d'où l'égalité L = CD.

Cette première étape acquise, il faut maintenant attaquer l'étape générale et tout est préparé pour pouvoir le faire par analogie avec la démarche utilisée lors la première étape. Ce ne peut cependant être une simple répétition car, en chemin, on a dû utiliser la proportion (1) qui fixe quantitativement la position de C par rapport à K, alors que dans l'étape générale on ne connaît pas *a priori* la relation liant DK, EK, etc, avec les quantités précédentes. Ainsi le propos, de pur calcul, est-il d'établir en général une relation de la forme (1) pour les points successifs. Car, ceci acquis, la démarche même de la première étape sera renouvelable, et la récurrence dûment prouvée. Avec cet objectif, le point suivant E doit être considéré comme **point générique** de la suite, alors que D était bien le premier point. Ce mode d'attaque d'une récurrence par un point particulier est normal, compte tenu de l'absence de notation indexée.

Précisément, comme à la première étape, Grégoire construit une longueur M qu'il définit comme quatrième proportionnelle de trois grandeurs selon :

$$(5) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{CD}{M},$$

grandeur M qu'il pose à son tour sur la figure, au-dessus de AK. En élidant la proportion intermédiaire $\frac{BC}{CD}$, l'auteur indique que le rang ne compte pas et que $\frac{AB}{BC}$ intervient comme raison de la progression géométrique; c'est un élément **générique**. De sorte que l'évocation d'une troisième proportionnelle lors de la première étape apparaît désormais comme un événement fortuit qui tient à la seule contiguïté de B et C; en fait si $\frac{AB}{BC} = r$, il faudrait lire $r = \frac{BC}{L}$ et maintenant $r = \frac{CD}{M}$; et ainsi de suite.

[17] Pour Grégoire de Saint-Vincent, et pour les mathématiciens de son époque, la raison d'une progression géométrique est le rapport du premier terme au second, c'est-à-dire l'inverse de ce que nous appelons raison aujourd'hui, ce qui trompe parfois les commentateurs.

De même qu'à la première étape, Grégoire évite de faire jouer le nouveau point, E en l'occurrence, alors que la comparaison de (5) et de (G_d) fournit évidemment l'égalité M = DE, de sorte que l'inégalité à atteindre M < DK fixera E, point générique, entre son prédécesseur (D en l'occurrence) et le point K. La tactique est de faire intervenir DK et, telle que définie au livre V, la manipulation des proportions s'y prête fort bien. Pourtant, Grégoire commence par inverser la proportion (4) où L = CD, ce qui est une gêne pour la récurrence dans la mesure où cette relation ne présente pas un caractère générique. Il faudra y revenir. En tout cas, il dispose de la proportion:

$$\frac{BK}{BC}=\frac{CK}{CD}, \tag{6}$$

et puisque BK> BC et CK> CD (ce sont des hypothèses de la récurrence), Grégoire utilise la règle dite *dividendo* :

$$\frac{BK\text{-}BC}{BC}=\frac{CK\text{-}CD}{CD},$$

pour avoir:

$$\frac{CK}{BC}=\frac{DK}{CD},$$

proportion qu'il inverse encore :

$$\frac{BC}{CK}=\frac{CD}{DK}. \tag{7}$$

La récurrence est cette fois enclenchée, car la relation (7) est l'analogue exact de la relation (1) : elle fixe quantitativement le point D entre C et K de la même façon que le point C est fixé entre B et K et d'ailleurs comme B est fixé entre A et K. De sorte que l'analogie formelle[18] avec la première étape procure l'inégalité M < DK. L'affaire est entendue :*"on pourra par conséquent retrancher de DK une grandeur DE égale à M. Donc les quatre grandeurs AB, BC, CD, DE sont en proportion continue"*[19]. De sorte que la conclusion admoneste par un "ainsi" la récurrence que nous venons de faire

[18] Voici la suite des calculs conduits comme à la première étape. La relation (7) donne par échange des moyens $\frac{BC}{CD}=\frac{CK}{DK}$, et puisque $\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD}$, (5) se lit encore $\frac{BC}{CD}=\frac{CD}{M}$. Donc $\frac{CK}{DK}=\frac{CD}{M}$, et en échangeant les moyens $\frac{CD}{CK}=\frac{M}{DK}$. On a prouvé l'inégalité CD < CK. D'où la conclusion M < DK.

[19] *"poterit ergo ipsi M, ex DK abscindi DE aequalis. Sunt igitur quatuor magnitudines AB, BC, CD, DE continuae proportionales"* p. 95).

ressortir : *"Et ainsi nous démontrerons que la proportion de AB à BC, à l'intérieur de la ligne AK, peut être continuée en acte sans terme* [final] *de telle façon qu'elle ne parvienne pas à K"*[20]. Ce que clôt un sonore : *"Quod erat demonstrandum"*.

2) Horizon discret, horizon continu ; analyse et synthèse

Le genre dont voudrait relever la démarche de Grégoire de Saint-Vincent au cours de cette preuve est le genre analytique, entendu au sens classique, celui de Pappus, puisque d'abord sont posés selon la règle (G_d) les points B, C, D, etc, et, les supposant construits, un calcul permet d'établir d'autres relations :

$$\frac{AB}{BK}=\frac{BC}{CK}=\frac{CD}{CK}=\frac{DE}{DK}=\dots,$$

dont sont déduites les inégalités successives CD < CK, DE < EK, etc, qui, en retour, justifient le placement avant le point K des points C, D, E, etc, ce qui en constitue l'existence même. Ce genre analytique est développé de façon algébrique, nous l'avons bien constaté. Mais bientôt cette référence à l'algèbre allait à elle seule caractériser la démarche analytique elle-même.

Magistralement menée, la récurrence analytique se déroule convenablement à l'exception de la position initiale du point C qui n'est pas prouvée, à l'exception aussi, dans ce qui relève de l'étape générale de la récurrence, d'une intervention de la relation (3), *a priori* non générique. De fait, les deux exceptions relèvent d'un même horizon que, par opposiiton avec la démarche analytique, l'on peut qualifier de synthétique. Cet horizon tient à la définition d'une série géométrique chez Grégoire de Saint-Vincent car il faut la distinguer - du moins en un premier temps - de celle d'une progression géométrique. Certes, une progression géométrique est *"la succession d'un nombre quelconque de termes selon la même raison"*[21], de sorte que, satisfaisant (G_d), les longueurs AB, BC, CD, etc, constituent une telle progression. C'est ce que nous rangeons sous la dénomination de **discret continué**. Mais la série géométrique est une notion plus globale où précisément intervient *a priori* le continu : *"J'appelle série géométrique une quantité finie, divisée en succession*

[20] *"Atque ita demonstrabimus proportionem AB ad BC, intra lineam AK sine termino posse actu continuari, ita ut nunquam ad K perueniatur"* (Proposition 75, livre 2, *Opus geometricum*, p. 95).

[21] Définition 2, livre 2, *Opus geometricum*, p. 54, " *Progressio Geometrica est quotcunque terminorum secundum eandem rationem continuatio*".

ininterrompue selon une raison donnée quelconque"[22]. Une série géométrique représente **à la fois** une grandeur telle que AK **et** une division de cette grandeur par les points B, C, D, etc, selon une règle itérative notée ici (G_c) pour résumer, c étant mis pour continu :

$$(G_c) \qquad \frac{AK}{BK} = \frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK} = \frac{DK}{EK} = \dots .$$

Une série, selon Grégoire de Saint-Vincent, est un **continu morcelé**.

Du point de vue du calcul, les deux notions ne sont certes pas indépendantes, mais l'une engageant l'analytique et l'autre le synthétique, leurs horizons sont différents. Or, ceux-ci se recouvrent dans la démonstration de la proposition 75, et c'est ce qui en fait tout l'intérêt, malgré la complication que cela paraît procurer. Intérêt majeur, car si la pensée mathématique ultérieure allait bientôt gommer la notion de série comme continu au profit de la notion discrète de progression - un gommage qui substitue le premier vocable pour le couler dans le sens du second - du moins pouvons-nous vérifier qu'**il a fallu combiner le continu et le discret pour aboutir à une théorie de la convergence**.

Il ne s'agit pourtant pas ici de mettre en place une logique. Pour Grégoire de Saint-Vincent, si les deux concepts de "série" et de "progression" sont utiles et ne constituent pas des définitions seulement nominales et dénuées de représentation mathématique effective, c'est qu'un calcul explicite les relie, et c'est ce calcul même qui, sous-jacent à la preuve de la proposition 75 du livre 2, la dirige en fait. Il est facile d'en rendre compte.

Partons de la "série géométrique" AK, laquelle comporte donc

$$(G_c) \qquad \frac{AK}{BK} = \frac{BK}{CK} = \frac{CK}{DK} = \frac{DK}{EK} = \dots .$$

La règle *dividendo* des proportions donne aussitôt

$$\frac{AK\text{-}BK}{BK} = \frac{BK\text{-}CK}{CK} = \frac{CK\text{-}DK}{DK} = \frac{DK\text{-}EK}{EK} = \dots ,$$

une suite de proportions que nous allons noter (G_i) :

[22] Définition 1, livre 2, *Opus geometricum*, p. 54, "*Geometricam seriem voco quantitatem finitam, diuisam secundum continuationem cuiuscunque rationis datæ*".

$$(G_i) \qquad \frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK} = \frac{CD}{DK} = \frac{DE}{EK} = \dots .$$

Si i est mis ici en indice dans (G), c'est d'une part que la relation itérative (G_i) sert d'intermède[23] dans la proposition 75 et, d'autre part, que le discret et le continu y apparaissent simultanément puisqu'il y a en numérateur les grandeurs AB, BC, CD, etc, et en dénominateur BK, CK, DK, etc, ces dernières grandeurs étant liées au point final K. Mais ce n'est pas tout. Des seules relations (G_i), on peut déduire les relations (G_d) selon un calcul qui apparaît fréquemment au livre 2. De même, à partir de (G_i) seulement, l'on peut aussi bien retrouver (G_c). Démontrons ces deux assertions.

De la première proportion dans (G_i), on déduit par échange des moyens

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{CK} .$$

Avec la règle d'addition bien particulière des proportions[24], l'égalité précédente fournit :

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BK}{CK} = \frac{AB+BK}{BC+CK} = \frac{AK}{BK} .$$

On peut tirer deux proportions de ce qui précède (2è et 4è terme, 1er et 4è terme):

$$(8) \qquad \frac{AK}{BK} = \frac{BK}{CK} ,$$

et

$$(9) \qquad \frac{AB}{BC} = \frac{AK}{BK} .$$

Comme lors du calcul effectué pour la proposition 70, les proportions (8) et (9) établissent une stabilité. Quoique Grégoire ne le fasse pas explicitement - il le suggère - , il est plus clair de poser $r = \frac{AK}{BK}$. Il suffit de se déplacer d'un cran dans (G_i) pour que la forme des relations (8) et (9) devienne respectivement

[23] Grégoire est tout à fait conscient du rôle de cet intermède et il lui consacre une proposition, la proposition 76, à la suite donc de la proposition 75.
[24] Une règle que nous avons déjà vue à l'œuvre lors de la proposition 70. Nous reviendrons sur cette règle car elle est certainement à l'origine d'une des preuves de la formule (G), notre point de mire dans cette étude.

$$\frac{BK}{CK}=\frac{CK}{DK}\,(=r),$$

et

$$\frac{BC}{CD}=\frac{BK}{CK}\,(=r).$$

Est notable la permanence de la raison r, de sorte que

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD}.$$

L'itération est enclenchée, et pour les points B, C, D, E, etc, apparaissent deux progressions géométriques ayant même raison. D'une part,

$$(G_c) \qquad \frac{AK}{BK}=\frac{BK}{CK}=\frac{CK}{DK}=\frac{DK}{EK}=\dots$$

et d'autre part,

$$(G_d) \qquad \frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD}=\frac{CD}{DE}=\frac{DE}{EF}=\dots$$

Ces deux progressions ne diffèrent que par leur premier terme; pour la première il s'agit de AK, la totalité, et pour la seconde progression le premier terme est AB.

Si (G_d), (G_c), et (G_i) sont des relations équivalentes[25] du point de vue du calcul, le statut qu'elles confèrent aux deux concepts grégoriens de "série et de "progression" ne permet pas de les confondre car, dans la série, on part d'une totalité, alors que dans une progression on excède cette totalité sans qu'elle intervienne *ab ovo*. Posé brutalement, le point K n'intervient pas dans (G_d). De là à prétendre que ce point peut être construit, il n'y a certes qu'un pas, mais c'est bien ce pas qui inaugure une théorie de la convergence. Pour le faire, il faut donc adopter un parti pris ontologique, qui correspond à la mise en existence d'une grandeur mathématique

[25] Nous avons démontré l'équivalence de (G_c) et (G_i) et le fait que (G_i) implique (G_d). L'implication réciproque nécessite préalablement que soit fixé un lien entre AK et la raison $\frac{AB}{BC}$; ce lien peut être la relation (1) et la proposition 75 montre alors l'équivalence de (G_i) et de (G_d). On peut aussi poser AK comme somme de la série AB + BC + CD +... , auquel cas il y a équivalence de (G_c) et de (G_d). En quel sens peut-on parler de somme infinie? Tel est précisément l'objet du travail minutieusement organisé par Grégoire de Saint-Vincent.

comme AK, au lieu de partir de celle-ci comme d'un acquis.

3) L'ontologie analytique

La double conception initiale de Grégoire de Saint-Vincent - "série" et "progression", ou discret continué et continu morcelé - , énoncée en termes modernes cette fois, revient à ne pas séparer la somme dans une série représentée par ses termes successifs (selon (G_d)) de son reste explicité (selon (G_c)) : avec AB + BC, il y a CK; avec AB + BC + CD, il y a nécessairement DK; etc. Ainsi, la permanence de l'évocation d'un continu global est nette.

Ceci se voit particulièrement à la propositon 70, par exemple sur la figure 2. Il y a aussi bien stabilité "discrète" de la raison $\frac{AD}{EF}$ (c'est-à-dire $\frac{AC}{A_2C_2}$ dans la figure 1) que stabilité "continue" de la raison $\frac{AC}{DC}$ $(\frac{DC}{LC})$, stabilité entérinée par la moyenne géométrique $DC = \sqrt{AC.LC}$.

La force du raisonnement de Grégoire de Saint-Vincent, après avoir nettement localisé les deux concepts par des définitions, est de construire le premier par le second. Son succès réduira de fait le premier au second. Tel est le mouvement indiqué par la proposition 75 où la relation (G_d) est *in fine* envisagée presque seule aux dépens de la relation (G_c). Presque devons-nous ajouter, car il subsiste des rémanences de (G_c) et du continu morcelé au cours de la preuve. Ainsi, K figure *ab ovo* dès l'énoncé de la proposition 75 : AK est une totalité continue qui reste à l'horizon. De la même façon, la position du point C entre les points B et K est acquise sans discussion parce qu'il est présupposé par Grégoire - ou considéré comme évident - que l'on dispose de la proportion

$$(10) \qquad \frac{AB}{BC}=\frac{AK}{BK},$$

ce qui n'est autre que l'égalité des raisons des deux progressions géométriques (G_d) et (G_c). Ainsi instituée, bien que le point B soit quelconque entre A et K, cette proportion prouve que la longueur AK dépasse toujours AB et, derechef, BK dépasse BC. De la même façon, comme AK dépasse BK, AB dépasse BC, et ce résultat non explicité par Grégoire est pourtant bien présent à son esprit (décroissance des termes). Enfin, la proportion (4) avec L = CD, loin d'être particulière, est-elle pensée comme générique (ce qui justifie la récurrence) puisque :

(G'i) $$\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{BK} = \frac{CD}{CK} = \frac{DE}{DK} = \ldots,$$

résultat qui provient encore de l'égalité des raisons des progressions (G_d) et (G_c). Si le mouvement de la pensée est dirigé vers (G_d), la forme (G_c) ne cesse d'intervenir, sous les substituts éventuels (G_i) et (G'_i).

Au fond, il vaudrait mieux concevoir que le donné de départ pour la proposition 75 est simultanément constitué des relations (G_d) et (G_i), c'est-à-dire que la proportion (1) est d'emblée itérée. Sous la **seule** régulation de (G_d), le jeu consiste à montrer qu'est effectivement possible la construction du point D entre C et K, du point E entre D et K, etc; même si de temps à autre l'on doit utiliser (G_i) dans le calcul. Grégoire emploie effectivement une tournure propre à une construction (*"poterit ergo ipsi L, ex CK sumi æqualis "*), tournure qu'il renouvelle explicitement (*"poterit ergo ipsi M, ex DK abscindi DE æqualis"*), ayant soin d'introduire des quantités intermédiaires L, M, dûment construites et évaluées par rapport aux autres données, et seulement ensuite placées en situation et rendues égales à CD et DE. Cette construction est itérative et vaut pour les points F, G, etc. Grégoire de Saint-Vincent ne se contente pas de la visualisation géométrique fournie par l'itération à la proposition 70 (lorsque la construction par le dessin est évidemment réalisable) ; il prouve par le calcul cette possibilité à l'infini ; il garantit donc la poursuite de l'itération (*"je dis que la proportion de AB à BC peut être poursuivie en acte..."*).

Cette preuve analytique de la constructibilité des points D, E, F, etc, serait pourtant redondante si l'on prenait comme définition de ces points celle portée par les relations (G_i). En effet, avec cette relation, à chaque étape, par exemple après celle qui fournit le point D situé strictement entre C et K, il est loisible de diviser en E le segment restant DK selon la proportion fixée par la position du point B :

$$\frac{DE}{EK} = \frac{AB}{BK}.$$

Et le point E ne coïncide ni avec D, ni avec K. Mais, de fait, une telle remarque rendrait inutile la démonstration de la proposition 75 tout entière, puisque les points successivement construits selon (G_i) sont évidemment situés avant le point K, sans jamais coïncider avec ce

point. Si Grégoire fournit une preuve et un énoncé, c'est que ceux-ci ont pour rôle de mettre en exergue la loi de progression (G_d), loi à partir de laquelle il n'est plus besoin de faire intervenir le point final K - ou la totalité AK - , du moment qu'est fixée la raison que nous avons notée r, et qui est de fait inférieure à l'unité comme le calcul a pu le prouver. Quoique la donnée initiale prenne la totalité AK en compte - elle est *a priori-*, la stratégie choisie pour la preuve consiste à s'en débarrasser au profit de la seule progression (G_d); donnée potentielle de l'énoncé, c'est elle qui est établie *"en acte"*. Au point que Grégoire de Siant-Vincent estime avoir lié le point K à la seule progression AB, BC, CD, etc.

Pour se déployer, la démarche adoptée doit pourtant partir de la totalité AK. Il y a un lien net entre la conception synthétique du continu chez Grégoire[26] et la preuve analytique qu'il adopte pour cette proposition 75 qui, selon lui, a vertu ontologique pour le point K lui-même. Si Grégoire de Saint-Vincent ne pense pas d'abord un discret qui serait sommé, mais un continu dont seul le morcelage est discret, il n'en prépare pas moins la voie pour le discret continué.

Le genre analytique est certes le genre courant en algèbre. Mais pour un théorème d'existence, le choix d'un tel genre est très rare. En le privilégiant, pour établir en acte la progression infinie AB, BC, CD, DE, etc, donc en indiquant la validité d'une démarche algébrique, Grégoire de Saint-Vincent marque une **défiance vis-à-vis de l'évidence géométrique** portée par la proposition 70. **Confirmée par la définition de la convergence, une rigueur est à l'œuvre.**

4) Le terme d'une progression

La contructibilité établie, reste précisément à éliminer le reste, ou plus exactement à exprimer la totalité du continu AK comme somme des segments AB, BC, CD, DE, etc. Grégoire de Saint-Vincent choisit une démarche logiquement irréprochable ; celle de définir en quel sens on peut affirmer qu'une totalité est décomposée, alors qu'elle n'est jamais atteinte à une étape déterminée de l'itération. Le "terme" est l'horizon du voyage, à proprement parler de l'itération, et l'important fut de se dégager de la forme spécifique du reste. Ce désengagement a été d'autant plus difficile que demeure l'évidence liée à une "série géométrique" puisque les restes d'une "progression géométrique" finie forment à leur tour une progression géométrique : avec (G_d), on lit automatiquement (G_c) et donc (10) qui est l'égalité

[26] Conception manifestée par sa définition d'une "série géométrique".

des raisons. Cette forme spécifique doit pourtant être élidée pour que la théorie de la convergence débute. C'est ce qui a lieu.

Une définition limpide est venue s'inscrire dès les premières pages du livre 2 de l'*Opus geometricum*, après celle de "série géométrique" et de "progression géométrique", mais elle n'a pas encore servi : "*Le terme de la progression est la fin des séries à laquelle s'il nous est permis de poursuivre à l'infini, aucune progression ne peut aboutir, mais à laquelle il est possible d'accéder d'aussi près que de n'importe quel intervalle donné* "[27]. Par l'arbitraire d'un intervalle de longueur quelconque, c'est bien le continu en soi qui sert de référence à cette remarquable définition du "terme"[28] d'une progression, d'une suite, d'un discret. Certes, dès Euclide par exemple, une grandeur fixée quoique quelconque[29] permettait le jeu de la démonstration, mais on n'en était pas encore à attribuer un nom au comportement décrit. C'est ici un intervalle, "*une quantité LM ou autre, petite à volonté*"[30] qui, en mesurant l'obtention d'une limite nulle, mesure *ipso facto* toute autre limite. Naturellement, le continu est un donné géométrique; il ne pose aucun problème d'existence. La **généralité** du propos de Grégoire de Saint-Vincent mérite d'être soulignée alors que ses exemples sont tous pris sur des séries géométriques. Il a su attribuer un nom générique à un comportement : voilà l'originalité.

Mais, chez les Anciens, une grandeur nulle ne présentait aucun sens, en particulier parce qu'elle ne saurait en s'additionnant dépasser toute grandeur donnée. Du coup, l'expression limite nulle ne pourrait que paraître déplacée. Grégoire de Saint-Vincent ne l'utilise pas, comme on le verra nettement à l'occasion de la proposition 78. Cependant, créant la surprise, à la proposition 77 il envisage d'abord ce que nous appelons une limite infinie (les suites en jeu sont croissantes), même si la définition d'une telle limite n'est pas plus individualisée :

[27] Definitio tertia : "*Terminus progressionis est seriei finis, ad quem nulla progressio pertinget, licet in infinitum continuetur; sed quouis interuallo dato proprius ad eum accedere poterit*", *Opus geometricum*, p. 55.

[28] Par coquetterie linguistique, le mot "terme" possède deux acceptions chez Grégoire de Saint-Vincent, terme général de la progression d'une part et terme final d'autre part. Nous préciserons en ajoutant au besoin entre crochets le mot [final]. On parle encore en français du terme d'un loyer au sens de fin d'une période et de terme comme élément de vocabulaire.

[29] Par exemple au livre X des *Eléments*, proposition 1.

[30] "*Detur enim quantitas LM aut alia quantumuis parua*", proposition 78, début de la démonstration, *Opus geometricum*, p. 96.

On se donne une proportion[31] *quelconque de plus petite inégalité* [32]*AB à AC. Je dis que si on la continue*[33], *on doit pouvoir exhiber une grandeur supérieure à n'importe quelle grandeur donnée.*[34]

L

A B C D E K

La démonstration débute ainsi : "Qu'on se donne en effet une grandeur quelconque L. Il est patent que si l'on prend plusieurs fois BC, excès de la deuxième grandeur AC sur la première AB, la somme deviendra plus grande que la grandeur L". Comme on peut s'y attendre, pour montrer qu'au bout d'un certain nombre d'étapes la grandeur AK est dûment supérieure à la grandeur L, c'est l'axiome d'Eudoxe-Archimède qui intervient dans la démonstration dont la suite est facilement imaginable. Cette proposition acquise, le cas de la limite nulle - mais sans ce vocabulaire - est envisagé:

"*Que d'une grandeur AK soit ôtée une partie quelconque AB, et que du reste BK soit ôté BC en suivant cette loi : que comme AB est à BK de même BC soit à CK. Je dis que si l'on poursuit toujours cette ablation, il restera de AK une quantité moindre qu'une quantité donnée. Cela s'applique à tous les cas relevant de la première proposition du livre X.*"[35]

A B C D E K

L M N O P R

[31] Au XVIIè siècle comme au siècle suivant, l'expression "*proportio*" désignait aussi bien une véritable proportion avec quatre termes que la raison ("*ratio*") à deux termes seulement, composante si l'on veut de la proportion. La "*proportio*" d'une progression géométrique en désigne souvent la raison (alors rapport du premier au second terme).

[32] C'est-à-dire que AB est strictement inférieure à AC, et donc en écriture moderne $\frac{AB}{AC} < 1$ (Le nombre 1 n'était pas encore admis en tant que nombre entier au même titre que les autres).

[33] "*Dico si hæc continuetur*" : c'est-à-dire si, à partir du rapport $\frac{AB}{AC}$, on construit une proportion continue : $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$, etc, comme celle qui est déduite de la condition posée lors de l'énoncé de la proposition 75, livre 2.

[34] Proposition 77, *Opus geometricum*, p. 96.

[35] " *A magnitudine AK auferatur quæuis pars AB, et a residuo BK auferatur BC, ea lege vt sicut est AB ad BK, ita sit BC ad CK. Dico si hæc ablatio semper fiat, relinqui ex AK quantitatem data minorem* ". Proposition 78, livre 2, *Opus geometricum*, p. 96.

En inversant la raison de la progression géométrique, c'est-à-dire en construisant une autre progression à partir de la quantité donnée, la démonstration peut reposer sur la seule proposition 77, qui traite de la limite infinie.

C'est après ces considérations, aussi nettes que novatrices, que Grégoire place un scholie épistémologiquement précis, car il n'entend pas se faire piéger au vu du seul vocabulaire. Si la démarche suivie à la proposition 75 était constructive, si elle prouvait une existence, avec les propositions 77 et 78 il insiste sur le fait qu'il n'a accordé aucune existence effective à une quantité moindre qu'une quantité quelconque : "*Lorsqu'il est dit dans la proposition que* ***si l'on poursuit toujours cette ablation il restera de AK une quantité moindre qu'une quantité donnée,*** *le sens de cette proposition n'est pas qu'après que l'ablation ait été continuée jusqu'à son terme à l'infini, il reste de AK une quantité moindre qu'une quantité donnée; ou qu'après toute la série achevée, il reste encore une quantité moindre qu'une quantité donnée. Mais, qu'ayant enlevé des termes de AK selon la raison susdite, à un certain moment des retranchements, la part résiduelle de AK sera plus petite qu'une quantité donnée. Que ceci soit dit pour contenter certains*"[36]. La définition du terme d'une progression a un sens, mais il ne faut pas chercher plus loin et attribuer des qualités cachées à ce sens explicite.

Certes, Grégoire de Saint-Vincent s'inscrit dans la lignée de la proposition 1 du livre X comme il le souligne lui-même en terminant l'énoncé de la proposition 78 : " ***est universalis primæ decimi***". Chez Euclide même, c'est essentiellement une inégalité qui gère l'ablation : on doit seulement enlever plus de la moitié de ce qui reste. Il est vrai qu'Euclide termine son énoncé de la proposition I au livre X en évoquant le cas de l'égalité : "*La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés*"[37]. Chez Grégoire de Saint-Vincent, c'est par contre une proportion, donc une égalité, qui gère l'itération, le cas frontière d'Euclide étant en quelque sorte préféré : on doit toujours enlever la même proportion[38]. Si la liberté porte sur la

[36] "*Quod in gratiam quorundam dictum sit*" (*Opus geometricum*, p. 97). Phrase que, selon la suggestion de J.P. Le Goff, l'on pourrait encore traduire par un : "*A bon entendeur, salut*".

[37] *Euclidis opera omnia*, ed. I.L. Heiberg et H. Menge, Lipsiae, t. III, 1886.

[38] C'est ce qu'indique la forme (G_i) ou encore la forme (G_c), de sorte que AB, BC, CD, etc, aussi bien que AK, BK, CK, etc, forment des progressions géométriques.

raison de celle-ci[39], qui n'est pas nécessairement $\frac{1}{2}$, Grégoire introduit une rigidité, comme un privilège acquis par la progression géométrique aux dépens des inégalités et de leur maniement. Cette rigidité n'est que provisoire ; elle ne figure que dans les exemples afin de mieux asseoir la signification à donner au mot terme, une limite qui, par contre, a été définie en toute généralité.

Démonstrativement parlant, la filiation de Grégoire de Saint-Vincent à Euclide est très précise car le déroulement de la proposition 78 suit exactement celle adoptée par l'Alexandrin à la proposition I du livre X. Du moins, si l'on remplace l'opération d'addition ou de report chez Euclide par la multiplication par une raison fixe, c'est-à-dire si l'on adopte derechef les proportions et leur manipulation. La façon de procéder de Grégoire de Saint-Vincent est donc mieux adaptée que celle d'Euclide, puisque ce dernier doit finalement comparer l'entier n avec 2^n. Une amélioration qui a exigé une préparation. Au cours de sa preuve, Euclide fait jouer l'axiome (additif) d'Eudoxe-Archimède qui est énoncé dans une définition[40] du livre 5 des *Eléments* : deux grandeurs a et b étant données, a<b, il existe un entier n tel que na>b. Grégoire de Saint-Vincent adopte un succédané de cet axiome, ou plutôt il en fait intervenir un raffinement multiplicatif : nous dirions aujourd'hui qu'il utilise le fait que, lorsque $\beta>1$, β^n tend vers l'infini avec n. C'est ce qu'il a exprimé précisément, en termes de progression géométrique, à la proposition 77 que nous avons décrite.

[39] La stabilité de la proportion notée

$$\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK} = \frac{CD}{DK} = \ldots, \text{ avec } 0 < x < 1,$$

qui n'est autre que (G_c), fournit $1-x = \frac{AB}{AK} = \frac{BC}{BK} = \frac{CD}{CK} = \ldots$, c'est-à-dire ($G_i$) et dont en particulier le n-ème terme vaut $(1-x)x^{n-1}$ AK et tend vers 0 à l'infini lorsque $x = \frac{BC}{AB} = \frac{CD}{BC} = \ldots$, c'est-à-dire lorsque l'on dispose d'une progression géométrique, AB, BC, CD, etc, de raison x (c'est la forme (G_d)). Le quotient $\frac{1-x}{x}$ prend toutes les valeurs possibles entre 0 et l'infini lorsque x reste confiné dans l'intervalle ouvert $0<x<1$. Ce qui correspond à la liberté complète du choix du point B entre A et K à la proposition 75. Est donc quelconque la raison de la progression AB, BC, CD, etc, (mais inférieure à 1, bien entendu).

[40] "*Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles lorsque ces grandeurs étant multipliées peuvent se surpasser mutuellement*" (trad. F. Peyrard, op. cité).

5) Le continu recomposé

Afin que tout soit désormais prêt pour que l'on puisse travailler avec le "terme" d'une progression géométrique comme conclusion, Grégoire présente les résultats sous forme de plusieurs équivalences, toutes faisant intervenir la totalité elle-même. Privilège reste au continu. Cependant, il ne retient en conclusion que la seule progression géométrique sous la forme que nous avons qualifiée de discrète : un tournant est effectivement pris.

"On se donne une grandeur quelconque AK[41]*. Si on a :*
AB à BK comme BC à CK[42] *;*
AB à AK comme BC à BK[43] *;*
ou AK, BK et CK sont en proportion continue[44]*;*
AB à BC comme BK à CK[45] *;*
AB à BC comme AK à BK[46] *.*

Je dis que la grandeur AK est égale à la progression tout entière des grandeurs en proportion continue, de raison AB à BC continuée à l'infini ou, ce qui revient au même, que le terme de la série dont la raison AB à BC est continuée à l'infini est K.[47]

A B C D E F I K

Les formes équivalentes que nous avons notées (G_c) (G_d), ou (G'_i) sont remplacées par la seule forme (G_d). Telle est la conclusion, véritable aboutissement de l'expérience géométrique de la proposition 70.

---

41 Pour décrire cet énoncé en termes modernes, posons $AB = a$, $\frac{BC}{AB} = x$ et $AK = y$, avec la relation entre x, y et a donnée par la formule que nous avons dénotée (G) : $y = \frac{a}{1-x}$.

42 $\frac{a}{y-a} = \frac{xa}{y - a(1+x)}$. C'est la forme que nous avons noté (G_i).

43 $\frac{a}{y} = \frac{xa}{y-a}$. C'est la forme que nous avons noté (G'_i).

44 $\frac{y}{y-a} = \frac{y-a}{y-a(1+x)}$. C'est la forme que nous avons noté (G_c).

45 $\frac{1}{x} = \frac{y-a}{y-a(1+x)}$. C'est la forme que nous avons noté (G_i).

46 $\frac{1}{x} = \frac{y}{y-a}$. C'est la forme déduite de la raison commune à (G_c) et (G_d).

47 Proposition 79, livre 2, *Opus geometricum*, p. 97.

Pour organiser la preuve de cette proposition 79, grâce aux résultats acquis dans la proposition 75, Grégoire de Saint-Vincent part d'un continu donné (AK) - qui va se trouver être le terme (K) - continu sur lequel opère une décomposition itérative, avec à la clef deux progressions géométriques : (G_c) et (G_d). Deux et non pas une seule car les restes jouent leur rôle. Le caractère constructif de la proposition 75 - le théorème d'existence - assure que la somme d'une progression géométrique a un terme, c'est-à-dire que la raison $\frac{AB}{BC}$ itérée conduit à un terme, disons K'. Le but de la proposition 79 est d'établir que ce terme K' coïncide avec K. Le raisonnement administré est donc par l'absurde, très proche de ses analogues antiques utilisés pour la méthode d'exhaustion[48]. Indéniablement, Grégoire de Saint-Vincent fait fond sur la rigueur ancienne, à laquelle il a su adapter ses définitions et ses preuves.

"Démonstration : Puisque AB est à BK comme BC est à CK, la raison AB à BC pourra toujours être continuée dans les limites de la grandeur AK en sorte qu'elle ne parvienne jamais à K (prop. 75 de ce livre), c'est-à-dire que AK sera supérieure à une série finie quelconque de termes[49]*. Donc AK n'est pas inférieure à la série tout entière de raison AB à BC. Puis, parce que AB est à BK comme BC à CK, si la raison AB à BC est toujours continuée, on aura (prop. 76 de ce livre) : ce que AB à BK, c'est-à-dire ce que BC est à CK, CD l'est à DK et DE à EK et ainsi de suite à l'infini*[50]*. En conséquence, si l'on continue toujours la raison AB à BC, ne restera finalement de AK qu'une grandeur inférieure à une grandeur quelconque donnée*[51] *(prop. 78 de ce livre). C'est pourquoi AK ne saurait être supérieure à la série de raison AB à BC ; car, si elle était supérieure, elle devrait l'être par un certain excès. Soit IK cet excès. Dans ce cas*[52]*, AI sera égale à une série de raison AB à CD ; donc la raison AB à BC continuée à volonté ne dépassera jamais I ; donc aussi restera de AK une grandeur toujours supérieure à IK ; et, par conséquent, pas moindre qu'une grandeur donnée quelconque. Contre ce qui a déjà*

---

48 Voir J. Dhombres, Le raisonnement par l'absurde dans la pratique des mathématiciens, à paraître.

49 Terme est pris ici dans son sens de terme général. On peut aussi bien avoir $\frac{AB}{BK}$ inférieur ou supérieur à l'unité. En revanche, le rapport $\frac{AB}{BC}$ est supérieur à l'unité, de sorte que la raison (au sens moderne) de la progression géométrique AB, BC, CD, etc, soit inférieure à l'unité.

50 C'est la forme (G_i).

51 *"ex AK magnitudo quavis datâ minor".*

52 *"igitur AI seriei rationis AB ad CD æqualis erit".*

été démontré ! Donc AK ne sera pas supérieure à la série de raison AB à BC. En conséquence, puisqu'on a montré auparavant qu'elle n'est pas non plus inférieure, elle doit nécessairement être égale. C.Q.F.D[53].

Si continu et discret sont imbriqués dans une preuve[54] qui, malgré la rigueur cherchée, donne vaguement l'impression d'un cercle vicieux[55], par ses conclusions nettes la proposition signale un tournant de l'ouvrage, **le passage à l'analytique des séries**. Ce tournant ne fait pourtant qu'inaugurer une parenthèse dans l'*Opus geometricum* de Grégoire de Saint-Vincent, mais aussi court qu'il ait été il marqua les successeurs du mathématicien jésuite.

6) Le discret continué

Car désormais, la lecture de la proposition 79 peut être sélective, et ne mettre en jeu que la série géométrique **infinie** AB + BC + CD + DE + ... Une question posée dès la proposition suivante indique l'objectif: "*inuenire magnitudinem, quæ omnibus terminis totius seriei datæ in infinitum continuatæ, sit æqualis*"[56]. Tant est forte la pratique

[53] Grégoire poursuit: *Les démonstrations des hypothèses restantes se ramènent à la première. Car si AB est à AK comme BC à BK, on aura dividendo : AB est à BK comme BC est à CK. Donc, d'après* la *première démonstration, le terme de la raison AB à BC toujours continuée est en K.*
2° Si AK, BK, et CK sont en proportion continue, on aura dividendo : AB est à BK comme BC est à CK. Donc derechef, la proposition est évidente de par la première démonstration.
Enfin, si l'on a : AB est à BC comme BK est à CK (ou AK à BK), on aura en permutant, soit AB est à BK comme BC est à CK, soit AB est à AK comme BC est à CK. D'où derechef, la proportion est pleinement justifiée à l'aide de la première démonstration".

[54] Par contraste, Torricelli ne s'embarrasse nullement d'un appareil analytique aussi compliqué et ne prétend nullement à une rigueur à l'ancienne : dès l'évidence géométrique de la proposition 70 examinée, il obtient directement la "somme" d'une série géométrique puisque celle-ci se "voit" grâce au segment AB (figure 1) et il lui suffit de faire jouer la similitude: "*Suppositis infinitis magnitudinibus in continua proportione Geometrica maioris inaequalitatis, erit prima magnitudo media proportionalis inter primam differentiam et inter aggregatum omnium*", lemme XXVII (Voir, *Opere di Evangelista Torricelli*, G. Loria e G. Vassura (ed.), vol. 1, Faenza, 1919, page 149). De fait, Torricelli explique ce que Grégoire de Saint-Vincent donne à la proposition 80 en 3°, comme nous allons le voir. En outre, Torricelli indique en un scholie que Cavalieri avait préalablement obtenu l'expression de la somme d'une progression géométrique.

[55]Le cercle vicieux tient à l'existence même d'un point final pour la progression AB, BC, CD, ertc. C'est l'ontologie de la proposition 75 qui gêne, car il a fallu poser ce que l'on voulait construire. Il s'en faut de peu que le raisonnement de Grégoire de Saint-Vincent soit irréprochable.

[56] *Opus geometricum*, Proposition 80, op. cité, p. 97.

géométrique, ce sont trois constructions qui sont aussitôt proposées, là où nous verrions plutôt des formules, mais les preuves sont toutes issues de la proposition 79 que nous avons fournie. S'agit-il d'ailleurs de preuves puisque l'enjeu est une lecture orientée de la proposition 79. Grégoire de Saint-Vincent a préparé la voie : le point K a reçu un nom, son existence est acquise et il ne reste qu'à le construire pratiquement, ce qui relève de la géométrie ordinaire.

1° Si l'on pose un point M entre A et B, de sorte que AM = AB - BC (BM = BC), K s'obtient par le jeu d'une quatrième proportionnelle[57]:

$$\frac{AM}{BC} = \frac{BC}{CK}.$$

A_________M_________B_________C_________________K

2° K s'obtient par une autre quatrième proportionnelle

$$\frac{AM}{AB} = \frac{BC}{BK}.$$

3° K s'obtient par une troisième proportionnelle

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AB}{AK}.$$

Confronté à tout cet apparat démonstratif et explicatif, on comprend qu'un historien se soit alors laissé entraîné à écrire[58] que Grégoire de Saint-Vincent était le premier à avoir véritablement traité d'une série infinie, abolissant les remarques pertinentes d'Oresme et d'autres au XIVè siècle à propos de séries telles que $\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{n}{2^n}$, voire oubliant la façon dont dans la *Quadrature de la Parabole* Archimède travaillait sur l'égalité :

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3}\ \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{4}{3}.$$

[57] La formule est facile à vérifier en notations modernes avec AB = a, BC = ax, CD = ax^2, etc, AM = a (1-x) et AK = $\frac{a}{1-x}$. Il en est ainsi des deux suivantes.

[58] C.R. Wallner, "Uber die Enstehung des Grenzbegriffes", *Bibliotheca Mathematica*, (3), IV, 1903, p. 246-259.

Avec $\frac{AB}{1-\frac{BC}{AB}}$, c'est la formulation 3° qui correspond le mieux à la forme $\frac{a}{1-x}$ de la formule (G). Mais on constate qu'il ne s'agit pas de la forme (G) explicite, puisque la seule algèbre en jeu est celle des proportions, et non l'algèbre polynomiale qui permet d'écrire 1-x. De sorte que Grégoire doit recourir à la construction du point M. A tout le moins, pour bien renforcer le discret qui vient d'être sommé, Grégoire de Saint-Vincent réécrit la proposition 79 : c'est la proposition 82 qui indique qu'à partir de la seule progression géométrique AB, BC, CD, etc, dont la somme est AK, alors $\frac{AB}{BK} = \frac{BC}{CK}$; $\frac{AB}{AK} = \frac{BC}{BK}$, etc. Ceci n'apporte guère par rapport à la proposition 79, si ce n'est une formulation libératoire. **Le discret devient la référence en lieu et place du continu.**

7) Florilège et dépassement de la formule (G) : l'unité des mathématiques

A partir de l'obtention de la proposition 79 et de la réorientation fournie par la proposition 82, Grégoire de Saint-Vincent se lance dans une débauche de résultats, qui tous exploitent l'une des formes de la proposition : faisant jouer l'algèbre des proportions, ce sont des variations de calcul pour dire le contenu de la formule (1)... sans que jamais pourtant on ne l'écrive (AK = ...). Ainsi, la proposition 84 exprime que le rapport des sommes de deux progressions géométriques de même raison est celui de leur premier terme[59]; la suivante évoque la somme d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{3}$ (Fidèle à sa terminologie, Grégoire parle de raison triple), puis de raison $\frac{1}{4}$, etc. "*Mais assez dit à ce sujet. N'importe qui pourra, en effet, à partir de la proposition 80 de ce livre bien comprise, représenter la série tout entière d'une proportion rationnelle, c'est-à-dire de nombre à nombre, et en conséquence, le rapport de cette série à son premier terme*". Le numérique n'est pas l'essentiel.

Car, et ceci peut surprendre, Grégoire entend revenir au continu lui-même. Si désormais il use de la forme (G), disons de la

59 Autrement dit, $\frac{AM}{AB}$ ne dépend que de la raison de la progression géométrique.

proposition 82 ou d'autres formes plus générales du discret, c'est afin de dire des propriétés du continu, et non pour explorer les séries elles-mêmes. La parenthèse de l'analytique des séries est en quelque sorte terminée, ce qui entraîne un nouveau renversement de perspective : **le discret est devenu un outil au service du continu.** Envisagée en premier, une question évoque effectivement la mise en place de cet outil : une raison étant donnée, ainsi qu'un continu, comment trouver des points en progression géométrique selon cette raison qui, comme somme des intervalles découpés, pourvoient le continu de départ[60] ? Sur cette nouvelle lancée apparaît une proposition particulièrement intéressante, la proposition 116. Elle énonce[61]: "*Soient deux quantités AB et CD ; soit AB divisée en E et G de telle façon que AE ne soit pas inférieure à la moitié de AB, et EG pas inférieure à la moitié de EB; qu'on divise de la même manière CD en F et H, et soient AE, EG et CF, FH proportionnelles et que cela puisse se faire indéfiniment. Je dis que AB tout entière est à CD tout entière comme AE est à CF.*"

A E G I B

C F H O D

Grâce à la seule donnée d'une raison, d'une propriété de la discrétisation de deux continus, la proposition 116 déduit un résultat les concernant. Cet énoncé général, notons-le bien, contient l'itération : avec le "*et hoc semper fieri possit*" inséré dans les hypothèses mêmes de la proposition 116, Grégoire de Saint-Vincent suppose explicitement qu'il est possible de poursuivre indéfiniment l'itération sous les conditions indiquées. Ce qui signifie que la proportion $\frac{AE}{EG} = \frac{CF}{FH}$ dont on dispose par hypothèse se poursuit de la même façon pour les points ultérieurs de division E, G, I, de la première grandeur ou F, H, O, de la seconde, sous la forme $\frac{EG}{GI} = \frac{FH}{HO}$, et que, de plus, est respectée la règle des inégalités (ôter plus de la moitié).

60 En termes modernes, $\frac{a}{1-x}$ étant donné, ainsi que x, trouver a, et à sa suite ax, ax^2, ..., etc (*Opus geometricum*, Prop. 90, p. 103-104).

61 "*Sint duæ quantitates AB,CD, sitque AB diuisa in E et G, ita vt AE, sit non minor dimidio AB, et EG non minor dimidio EB; eodem modo diuisa sit CD in F et H, sintque AE, EG; CF, FH proportionales; et hoc semper fieri possit. Dico totam AB essse ad totam CD, vt est AE ad CF*"", *Opus geometricum*, chap 2, page 119 et suivantes.

Chaque fois qu'il voudra utiliser cette proposition, il lui faudra donc démontrer effectivement la possibilité d'une dichotomie indéfinie respectant toujours les proportions requises. Une méthode est donc mise en instance, de sorte qu'est évacuée toute considération *a priori* sur la dichotomie issue des mathématiques grecques. Quoique portant sur le continu, et parce que joue la discrétisation, Grégoire fait fi désormais des objections ontologiques au profit d'une vérification d'ordre mathématique : la stabilité algorithmique du processus de dichotomie. Ceci est corroboré par le fait majeur : la progression géométrique ne joue plus aucun rôle dans la proposition 116, car la décomposition du continu qui intervient pour AB comme pour CD est beaucoup plus générale. Mais, avant d'examiner le déroulement de la preuve de cette proposition 116, et en quelque sorte pour mettre en appétit, il n'est pas indifférent d'en montrer quelques-unes des conséquences utiles. Au livre 6 consacré à l'hyperbole, Grégoire y a recours en effet pour établir un résultat fondamental sur le comportement des aires hyperboliques.

Il démontre que si l'on dispose des points selon une progression géométrique sur l'une des asymptotes d'une hyperbole, les aires découpées sous la courbe par des parallèles à l'autre asymptote sont égales. C'est la proposition 130 du livre 6 : les aires des trapèzes curvilignes $A_1 A_2 B_2 B_1$; $A_2 A_3 B_3 B_2$, etc, sont égales lorsque les longueurs AA_1, AA_2, AA_3, AA_4, etc, sont en progression géométrique (figure 5). Ce résultat indique que les aires hyperboliques transforment une progression géométrique en une progression arithmétique : l'une des progressions porte sur des longueurs, et l'autre sur des aires, mais qu'importe, **c'est un comportement logarithmique qui est en cause**[62]. Ce qui installe dans le giron de la géométrie savante, donc noble, le logarithme né dans la deuxième décennie du XVIIè siècle par les efforts de Neper, mais confiné dans la pratique des calculateurs et des algébristes. Ainsi, le discret continué de Grégoire de Saint-Vincent, poursuivi comme outil pour le continu spatial, se révèle intégrateur de méthodes algébriques en géométrie : c'est bien un procédé qui renforce l'unité de la mathématique.

62 Ce n'est pas Grégoire de Saint-Vincent qui le déclare sous cette forme, mais l'un de ses disciples, le Père Alphonse de Sarasa dans un ouvrage paru deux ans après l'*Opus geometricum* : *Solutio Problematis a R.P. Marino Mersenno minimo propositi...*, I. et I. Meursios, Anvers, 1649. Voir J. Dhombres, "Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction", *Arch. Hist. Exact Sc.*, vol. 36, n° 2, 1986, pp. 91-181.

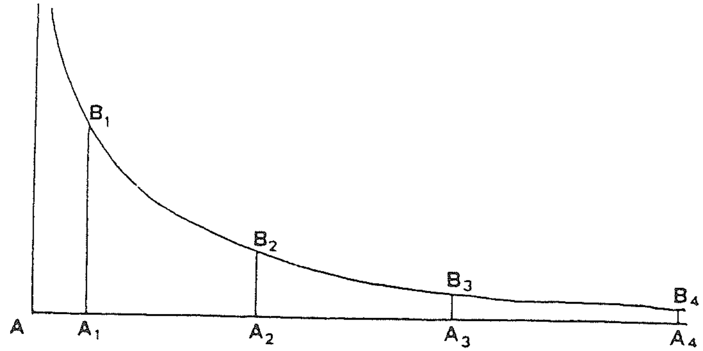


Figure 5

Il serait intéressant de montrer que cette "quadrature" de l'hyperbole dépasse les quadratures anciennes. En ce sens qu'aucune aire rectangle n'est assignée par égalité à l'aire d'un trapèze hyperbolique, mais qu'est obtenue une égalité à l'infini entre des aires inconnues (quoique calculables, mais seulement par approximation grâce aux logarithmes pour lesquels des tables sont précisément dressées[63]). Sans définition qui en fournirait l'existence *a priori*, sans ontologie, la démarche de Grégoire de Saint-Vincent fait entrer le logarithme dans le calcul intégral : **des quadratures, il est passé à l'intégration**. Le fait objectif est son travail sur l'exponentielle, fonction qui restait non nommée à son époque[64]: il la définit à partir des aires, comme primitive si l'on tient à rattacher sa façon à quelque chose qui viendra plus tard, et il en donne les règles de calcul.

Mais préciser de tels jugements exigerait un développement qui sortirait des limites assignées à la présente étude ; il faut sagement revenir aux progressions sommées à l'infini, en reprenant les explications de la proposition 116 du livre 2 dont les services sont éminents dans tout l'ouvrage du père jésuite puisqu'elle règle la méthode d'exhaustion.

63 C'est ce qu'explique en 1649 A. de Sarasa, élève de Grégoire de Saint-Vincent, lequel vraisemblablement tient la plume si l'on en juge par les manuscrits préparatoires à l'ouvrage.

64 A propos de ces difficultés, il suffit peut-être de rappeler le problème de de Beaune auquel Descartes est confronté. Voir C. Scriba, "Uber Auftauchen und Behandlung von Differentialgleichung in 17. Jahrhundert", *Humanismus und Technik*, 15, n° 3, 1972, p. 1-40 ; J. Vuillemin, *Mathématique et métaphysique chez Descartes*, Paris, Vrin, 1960, chap. 1.

8) Une preuve à l'ancienne : le discret décrypte le continu

Examinons la démonstration par l'absurde que propose Grégoire de Saint-Vincent au livre 2, en la commentant par des références euclidiennes. " *Si , en effet, la proportion de AB à CD n'est pas égale à celle de AE à CF, elle sera plus grande ou plus petite. Admettons d'abord qu'elle soit plus petite. Posons donc que AB est à CD dans un rapport plus petit que celui de AE à CF.* [La quantité] *AB aura à une quantité plus petite que CD (par exemple CK* [65]*) le même rapport que AE à CF (d'après la proposition 8 du livre V* [66]*). Et puisque ne sera indéfiniment soustrait des quantités AB et CD et de leurs restes pas moins de leur moitié, si l'on continue cette soustraction pour quelques termes, disons par exemple pour trois* [67]*, CF, FH et HO, il restera finalement OD inférieure à KD (d'après la première proposition*[68] *du livre X). C'est pourquoi CO sera supérieure à CK. Si alors on enlève de AB autant de parties, conformément à la proportion AE, EG, et GI, on aura par hypothèse que AE est à EG comme CF est à FH, et EG à GI comme FH à HO.*

[65] Ici, en nommant - explicitement - la quantité CK (définie par la proportion $\frac{AE}{CF} = \frac{AB}{CK}$), Grégoire de Saint-Vincent fait - implicitement - appel à la quatrième proportionnelle. La nature des quantités n'étant pas autrement spécifiée, c'est donc une quatrième proportionnelle abstraite qui est en jeu.

[66] Ici, et dans toute cette démonstration, Grégoire de Saint-Vincent fait référence aux *Éléments* d'Euclide. L'énoncé de la proposition du livre V des *Eléments* est le suivant : "*Deux grandeurs étant inégales, la plus grande a avec une même grandeur une plus grande raison que la plus petite, et une même grandeur a avec la plus petite une plus grande raison qu'avec la plus grande* ". La référence sert donc à placer le point K avant le point D si l'on adopte l'image des segments ou à fixer l'inégalité CD > CK si l'on prend le langage "universel" des quantités. On remarquera que Grégoire de Saint-Vincent n'adopte toutefois pas les facilités géométriques du langage des segments. Il utilise le terme de quantité ("*Sint duae quantitates*") au lieu du terme attendu de grandeur ("*duae magnitudines* ").

[67] Comme chez Euclide, il y a toujours une difficulté de notation. Faute d'une écriture indexée des suites, il faut choisir une lettre pour fixer les choses. Nous avons déjà rencontré cette façon à propos de la récurrence dans la proposition 75.

[68] Cette proposition 1 du livre X a déjà été énoncée plus haut, au début du présent article. C'est pour pouvoir utiliser une telle référence que Grégoire de Saint-Vincent a besoin d'imposer des ablations qui, à chaque étape, dépassent la moitié de la quantité encore disponible. Au fond, et en termes modernes, il aurait seulement besoin d'une convergence vers 0.

C'est pourquoi, en permutant [69]*, ce que AE est à CF, EG le sera à FH et ce que EG est à FH, GI le sera à HO. Donc ce qu'est AE (un des antécédents) à CF (un des conséquents), tous les antécédents*[70] *(c'est-à-dire la ligne*[71] *AI) le seront à tous les conséquents (c'est-à-dire la ligne CO) (proposition 12 du livre V* [72]*). Mais ce que AE est à CF, par construction, AB le sera à CK. Donc AI est à CO comme AB à CK, ce qui est absurde, comme cela ressort clairement des Eléments* [73]*. Donc la proportion de AB à CD n'est pas inférieure à celle de AE à CF.*

Soit maintenant, si cela est possible[74]*, que la proportion de AB à CD soit supérieure à celle de AE à CF.*

A E G K I B

C F H O D

[69] Au départ, les divisions se présentent séparément pour la grandeur AB ou pour la grandeur CD. La permutation les mêle avantageusement : $\frac{AE}{EG} = \frac{CF}{FH}$ implique $\frac{AE}{CF} = \frac{EG}{FH}$ $(= \frac{GI}{HO}$, etc) selon la proposition 16 du livre V des *Eléments*. Techniquement, la simple opération de permutation est le tournant de la preuve de la proposition 116.

[70] Cette expression ("*tous les antécédents*") est mise pour indiquer la somme (finie) des antécédents.

[71] Jusqu'ici, Grégoire de Saint-Vincent gardait le vocabulaire universel des quantités. Il laisse passer le vocabulaire de "ligne".

[72] Grégoire de Saint-Vincent a mis par erreur l'indication de la proposition 8 des *Eléments*. Il s'agit de la proposition 12.

[73] La proportion $\frac{AI}{CO} = \frac{AB}{CK}$ est impossible lorsque AI < AB et CO > CK. Cela résulte de la proposition 14 du livre V des *Eléments* : "*Si la première a avec la seconde la même raison que la troisième avec la quatrième, et si la première est plus grande que la troisième, la seconde sera plus grande que la quatrième; si la première est égale à la troisième, la seconde sera égale à la quatrième; et si la première est plus petite que la troisième, la seconde sera plus petite que la quatrième*".

[74] "*Sit iam, si fieri potest.* "

Dans ces conditions[75]*, une certaine ligne inférieure AK aura vis-à-vis de CD le même rapport que AE à CF (proposition 8 du livre V). Et, puisque l'on ne retranche indéfiniment pas moins de la moitié, après la soustraction d'un certain nombre de parties, par exemple trois, AE, EG et GI, il restera finalement IB inférieure à KB. C'est pourquoi AI sera supérieure à AK. Si maintenant on en enlève autant de la quantité CD, par exemple les parties CF, autant de la autant de la quantité CD, par exemple les parties CF, FH et HO, on aura par hypothèse et par permutation que AE est à CF comme EG est à FH, de même comme GI est à HO; donc ce que AE (un des antécédents) est à CF (un des conséquents), tous les antécédents (c'est-à-dire la ligne AI) le seront à tous les conséquents (c'est-à-dire la ligne CO) (proposition 12 du livre V). Mais par construction, ce que AE est à CF, AK le sera à CD; donc AI est à CO comme AK à CD. Ce qui est absurde comme cela ressort clairement des Eléments*[76]*. Donc le rapport de AB à CD n'est pas supérieur à celui de AE à CF. La vérité de la proposition est donc évidente."*

Indéniablement, et comme nous pouvions nous y attendre, cette démonstration par double raisonnement par l'absurde et double jeu sur les proportions (inégalités et égalités) se rattache à la façon de procéder des Anciens, à la méthode d'exhaustion logique. Le balancement de la phrase est d'une part identique à celui qui figure pour l'emploi de la méthode d'exhaustion aussi bien chez Euclide que chez Archimède[77]. D'autre part, il y a le même emprunt à la quatrième proportionnelle, comme nous l'avons fait remarquer au cours de la démonstration et les références sont explicites au livre V des *Eléments*. Enfin, l'égalité s'obtient au terme d'une contradiction pour les deux inégalités contraires, contradiction qui elle-même provient

---

75 On pourrait s'attendre à une démonstration très courte de cette deuxième branche de l'alternative. En effet, pour retrouver la situation précédente, il suffit d'échanger AB et CD qui jouent un rôle symétrique, et donc pouvoir conclure. On aurait $\frac{AB}{CD} \geq \frac{AE}{CF}$, mais par le même effet $\frac{CD}{AB} \geq \frac{CF}{AE}$ et donc nécessairement l'égalité cherchée $\frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CF}$. Grégoire de Saint-Vincent ne procède pas ainsi, alors qu'Euclide à la proposition 2 du livre XII avait donné l'exemple d'une simplification de la méthode d'exhaustion grâce au jeu sur la symétrie des figures. L'attitude de Grégoire de Saint-Vincent témoigne d'une préoccupation analytique au nom de laquelle tous les possibles doivent être systématiquement inventoriés.

76 La proportion $\frac{AI}{CO} = \frac{AK}{CD}$ est impossible lorsque AI > AK et CO < CD.

77 " *Si enim non est proportio AB ad CD æqualis proportioni AE ad CF, erit vel maior vel minor: sit primo minor...Sit iam, si fieri potest, proportio AB ad CD maior proportione AE ad CF: itaque aliqua minor quam AK...quod esse absurdum patet ex elementis...*"

d'inégalités incompatibles.

L'originalité de Grégoire de Saint-Vincent ne réside donc pas dans la façon de démontrer, mais dans la place réservée à la proposition 116. Elle survient en dehors d'un contexte géométrique (le livre 2 est algébrique), comme pour localiser ou mieux baliser le recours au raisonnement par l'absurde. Et, en deuxième lieu, c'est la généralité du résultat, indépendamment de la nature des grandeurs en jeu, qui compte.

Une écriture en termes modernes[78] nous fait mieux saisir cette généralité. Soient x et y deux grandeurs, qui s'identifient pour nous à des nombres réels positifs et qui représentent x = AB et y = CD. Soit α un nombre réel avec $0<\alpha$. On suppose $\alpha = \frac{x_1}{y_1} = \frac{x_2}{y_2} = \ldots = \frac{x_n}{y_n} = \ldots$ pour des grandeurs $x_1 = AE$, $x_2 = EG$, $x_3 = GK$; $y_1 = CF$, $y_2 = FH$, $y_3 = HO$, grandeurs assujetties aux inégalités[79]:

$$x > x_1 > \frac{x}{2} \text{ et } y > y_1 > \frac{y}{2};\quad (x-x_1) > x_2 > \frac{(x-x_1)}{2} \text{ et } (y-y_1) > y_2 > \frac{(y-y_1)}{2};$$

et plus généralement est imposé:

$$x-(x_1+\ldots+x_n) > x_{n+1} > \frac{x-(x_1+\ldots+x_n)}{2} \text{ et}$$

$$y-(y_1+\ldots+y_n) > y_{n+1} > \frac{y-(y_1+\ldots+y_n)}{2}, \text{ etc.}$$

---

78 Dans cette reconstruction, nous avons choisi de manipuler des inégalités strictes. Le texte de Grégoire de Saint-Vincent est imprécis à cet égard mais la tradition euclidienne, lorsqu'il s'agit d'inégalités, est de traiter séparément le cas des égalités. Grégoire de Saint-Vincent n'utilise guère la façon euclidienne de signaler une inégalité par l'expression "*retranchée du reste*".

79 Ne figurent pas explicitement chez Grégoire de Saint-Vincent, même sous la forme rhétorique qui est la seule adoptée dans le texte, certaines des inégalités à respecter à chaque étape pour les termes aussi bien en x qu'en y : $(x-x_1) > x_2$ et $(y-y_1) > y_2$ ou plus généralement, $x-(x_1+\ldots+x_n) > x_{n+1}$; $y-(y_1+\ldots+y_n) > y_{n+1}$. Sans doute tant elle paraissent évidentes grâce à la représentation géométrique par des segments : $AB > AE > \frac{AB}{2}$; $CD > CF > \frac{CD}{2}$; $EB > EG > \frac{EB}{2}$; $FD > FH > \frac{FD}{2}$; etc. Nous ne pouvons donc pas dire que la proposition 116 du livre 2 soit entièrement dégagée d'une vision géométrique quant à la démonstration, bien que le géométrique y joue un rôle particulièrement minime.

Voilà tout le contenu analytique des hypothèses[80] faites à la proposition 116, et ce pour tout entier $n \geq 1$. La conclusion de la proposition est:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n}{\sum_{n=1}^{n=\infty} y_n} = \frac{x_1}{y_1} = \alpha\,.$$

Le résultat est numérique, en tout cas mis sous la forme d'une proportion, et non géométrique.

Le lecteur moderne, disposant de la théorie des limites de suites réelles, peut être déçu par un résultat qui lui paraît maladroitement encombré de conditions inutiles. Il constate évidemment que x_n, comme la suite y_n, converge vers 0 et que la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n$ converge vers x, de même que $\sum_{n=1}^{n=\infty} y_n$ converge vers y. La convergence du rapport s'en déduit aisément. Grégoire n'en est pas encore à isoler la convergence de $\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n$ comme une propriété à partir de laquelle on peut construire d'autres propriétés : cette convergence doit pour lui être une conséquence d'hypothèses qu'il importe de fixer, et nous assistons bien à des balbutiements : le spectacle n'en est que plus riche.

Loin de disposer de la théorie des limites, Grégoire de Saint-Vincent contribue à son établissement. Le résultat décrit par une écriture analytique contient en effet deux choses. D'une part, portant sur des grandeurs en division de la grandeur initiale, il y a une totalisation $x = \sum_{n=1}^{n=\infty} x_n$ ("*totam AB*"). Totalisation à partir d'une décomposition générale de la grandeur continue initiale x (= AB) : le fait majeur est qu'il n'y a aucune règle particulière de formation des x_n les uns à partir des autres de sorte qu'est dépassé le stade de la

80 A nos yeux, ces hypothèses restrictives sous forme d'inégalités servent seulement à assurer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} x_n$ vers x et de la série $\sum_{n=1}^{n=\infty} y_n$ vers y. Nous ne pouvons cependant pas généraliser à ce point la pensée de Grégoire de Saint-Vincent.

progression géométrique. **On est justifié de parler de série**. La restriction sur la décomposition de x en des éléments qui servent à le décrire par recomposition porte seulement sur des inégalités à respecter, inégalités destinées à assurer la convergence. Celles-ci expliquent à elles-seules que le texte comporte explicitement: "*et hoc semper fieri possit*", car on peut ne pas pouvoir réaliser les découpages indiqués (par exemple si les quantités AB et CD sont *a priori* dans un rapport autre que celui initialement choisi de x_1 à y_1). Naturellement, fait problème le fait que dans la totalisation la somme soit infinie. Grégoire de Saint-Vincent y a pourvu par la définition du terme (final) d'une progression.

D'autre part, le résultat de la proposition 116 fournit la maintenance de la proportion $\frac{x_1}{y_1} = \alpha = \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$, proportion par ailleurs quelconque. Deux exhaustions menées parallèlement sur deux grandeurs corrélées par le rapport de leurs parties permettent de conclure à la stabilité de ce rapport pour les grandeurs elles-mêmes. **Le discret détermine le continu**. Cette maintenance ne pouvait que passer pour avantageuse dans le nouveau pays mathématique que Grégoire de Saint-Vincent explorait. Précisément parce qu'il s'agissait, dans la mesure des aires par exemple, d'établir en général une telle proportion. Dans certains cas, celle-ci pouvait conduire effectivement à une quadrature au sens ancien, mais, dans d'autres elle restait l'indication d'une relation précise entre deux aires par ailleurs inconnues. Ainsi, en demeurant au niveau des raisons, la démarche évitait le recours aux grandeurs elles-mêmes, et supprimait de la sorte une étape de la méthode classique d'exhaustion, celle que nous pouvons qualifier d'exhaustion du rapport. Loin d'être une faute contre la rigueur, cette suppression d'une étape marque une extension de la méthode qui s'attaquait ainsi directement aux raisons. Celles-ci devenaient le cœur de la démonstration : il y a là indéniablement une algébrisation des objets.

Mais à procéder ainsi, il y avait un autre avantage, d'ordre épistémologique cette fois. Puisqu'était signalée l'intervention explicite de la quatrième proportionnelle dont Clavius dans ses commentaires des *Eléments* avait indiqué en 1574 qu'elle manquait à l'inventaire des présupposés euclidiens. Effectivement, la quatrième proportionnelle abstraite (c'est-à-dire en dehors du cas des longueurs bien réglé par le théorème de Thalès) intervient à la proposition 116, précisément à la manière dont elle se rencontre dans l'Antiquité afin d'introduire une grandeur intermédiaire que l'on compare alors aux grandeurs données. Mais, ceci est fait une fois pour toutes, de sorte que pour le calcul des aires on peut éviter l'intervention de la quatrième proportionnelle dans les autres étapes de la méthode d'exhaustion. Et du coup, on peut éviter tout autant le recours à la procédure du raisonnement par l'absurde. C'est bien ce que nous pouvons constater en lisant avec attention la démonstration de la proposition 106 du livre 6 relative à la quadrature de l'hyperbole. Ainsi donc, en isolant le raisonnement par l'absurde, Grégoire de Saint-Vincent modifie la donne classique de la méthode d'exhaustion. Il en permet l'algébrisation et celle-ci porte cette fois sur les raisonnements.

Un paradoxe de Zénon : le retour au continu

L'algébrisation par discrétisation permet à Grégoire de Saint-Vincent de se débarrasser en sus d'un des paradoxes anciens auxquels le nom de Zénon était attaché[81]. Il le fait pour illustrer sa proposition 80, avant même d'envisager la proposition 116 (dont nous avons vu qu'elle réglait l'exhaustion spatiale). Le mieux est de fournir l'argumentation en son intégralité, d'autant que, souvent cité sans référence, le texte n'a pas été traduit jusqu'ici, sans doute à cause de la lourdeur scolastique du finale (que nous avons reporté en note).

"Scholie: Si l'on décide d'utiliser la seconde construction de la proposition 80, on aura, en une seule opération, la proportion de la première grandeur au reste de la série. Si, par contre, nous utilisons la première construction, nous obtiendrons la proportion des première et seconde grandeurs prises ensemble au reste de la série.

Le présent sujet me remet en mémoire ce que j'ai dit en préface, dans l'argumentaire de ce livre, lorsqu'il a été fait mention de l'argument de Zénon d'Elée, par lequel il croyait qu'il pouvait bannir toute raison [d'être] *du mouvement. Or, le nerf de cet argument a eu auprès de l'auteur tant de poids qu'il le jugeait digne du surnom d'"**Achille le plus invincible des chefs**". Il était persuadé que ce nerf aurait une si grande solidité qu'il égalerait la force probante de toutes les Démonstrations philosophiques.*

Je reprendrai le raisonnement de Zénon dans les termes mêmes dont j'ai usé dans ma préface. Il consistait en deux [corps] *qui se meuvent; d'abord Achille courant à toute vitesse, en face la tortue*

[81] Sur les paradoxes de Zénon, voir M. Caveing, *Zénon d'Elée. Prolégomènes aux doctrines du continu. Etude historique et critique des Fragments et Témoignages*, Vrin, Paris, 1982 ; F. Cajori, "History of Zeno's arguments on motion", *Amer. Math. Monthly*, XXII, 1915, pp. 1-16; 39-47; 109-115; 179-186; 215-220; 253-258; 292-297; B. Russell, *The Principles of mathematics*, Cambridge, 1903.

rampant aussi lentement que possible.

A B D E C

Qu'on suppose, disait-il, qu'Achille le plus rapide des coureurs, partant du point A veuille rattraper une tortue qui rampe sur le chemin BC en une course très lente. Pendant le temps qu'Achille va de A à B, la tortue s'est déplacée d'un certain espace et arrive en D. Donc Achille n'a pas encore rattrapé la tortue. Derechef, pendant le temps qu'Achille court à partir de B pour rattraper la tortue qui était en D, la tortue s'est déplacée jusqu'au point E. Donc Achille parvenu en D n'a pas encore rattrapé la tortue, et ceci écherra indéfiniment! Puisque le continu est divisible à l'infini, en conséquence Achille ne rattrapera jamais la tortue. Il nous appartient de détruire ce nerf à partir de la théorie de ce livre; ce que nous avons réalisé, vous le savez, puisque nous avons assigné le point exact où Achille attrape la tortue.

Pour défaire ce nœud Gordien à partir des principes de ce livre, nous supposons qu'Achille, non moins que la tortue, avance uniformément dans sa course. En sorte que la vitesse, acquise dans la première partie du mouvement, reste dans le même état jusqu'au dernier moment de temps où ils parcourent leur espace. Supposons de plus (parce que tout mouvement est une espèce [particulière] *de quantité) que ces deux mouvements, puisqu'on les suppose uniformes dans leurs parties, se trouvent avoir entre eux une certaine proportion; il est nécessaire que cela arrive entre toutes les quantités qui appartiennent à la même espèce, comme sont deux mouvements droits et uniformes.*

Donc, qu'on suppose que la proportion de ces deux mobiles, au point de vue de la vitesse, consiste en une raison double, de telle sorte qu'Achille franchisse un espace deux fois plus vite que la tortue. Par conséquent, pendant le temps que la tortue avance jusqu'à un quart de stade, Achille aura parcouru la moitié. Partant, les lignes AC et DC étant prolongées en raison double à partir[82] *du point C, qu'on les divise en B, F, H, etc, etc, E, G, I, suivant une raison double; en sorte que AC soit double de BC et DC de EC, de même BC double de FC, EC double de GC, etc.*

[82] A nouveau, comme à la proposition 70, c'est à partir du terme final C que la construction est effectuée. Ce qui signe ici un raisonnement par synthèse.

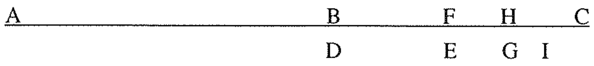


figure 6

Qu'on place ainsi Achille en A et soit AC représentant un chemin en longueur ou stade. Quant à la tortue, on la place au milieu du stade, au point B (ou D) en posant DC égal BC. Parce qu'Achille commence à se déplacer en A, au moment où la tortue commence sa course à partir de D, Achille sera donc parvenu de A en B dans le temps où la tortue, partie de D, atteindra E. Et pendant le temps qu'Achille parti de B atteindra F, en ce même [temps] *la tortue parviendra de E en G, et ainsi de suite. Mais, parce que le terme de la progression de raison AB à BF se place en C (comme on l'a démontré*[83] *à la proposition 85), de même puisque la progression suivant la raison de BF à FH (ou de DE à EG) trouve sa fin au point C (selon la même proposition), en conséquence le concours de ces deux mobiles (Achille et la tortue) se trouvera au point C. Que si, au lieu d'une proportion double, on suppose une proportion triple, alors le concours sera déterminé par la proposition 86 de ce livre. Si elle est quadruple, ce sera la proposition 87 qui servira, et ainsi de suite.*

Le raisonnement captieux de Zénon crée des embarras à celui qui ne tient pas compte de la différence qui surgit ici à l'intérieur d'une progression double, progression qui rend double[84] *le fil conducteur de la démonstration. Autre chose en effet est une progression par parties égales, et autre une progression par parties proportionnelles. Ici, la course de chacun des deux est supposée se faire par parties uniformes, c'est-à-dire par égalités (puisque le premier pas ne diffère pas du second ou du troisième, bien que deux pas d'Achille, par exemple, demandent le même temps qu'un seul de la tortue). Or, c'est conformément à ces pas que se fait la course de chacun des deux. Mais Zénon dans le cours de son raisonnement divise le mouvement des coureurs à l'aide de parties proportionnelles suivant lesquelles les mobiles ne se déplacent nullement! Et partant, il tombe dans le même sophisme que quelqu'un qui dirait, pendant le temps que je diviserai la ligne AE en quatre parties égales, un autre la subdiviserait suivant une certaine série par parties proportionnelles.*

[83] C'est la proposition qui somme une série géométrique $2a = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{a}{2^n}$.

[84] Un doublement manifesté sur la figure adoptée par Grégoire de Saint-Vincent : il y a deux lignes de lettres de part et d'autre du segment AC.

A coup sûr, on assignerait plus vite les termes des quatre parties égales que les termes infiniment [nombreux] *des parties proportionnelles. Car Achille et la tortue, parcourant l'espace AE par parties égales, trouvent facilement le terme de leurs parties égales; mais Zénon pendant que cela se passe, veut que l'espace AE soit divisé par les coureurs en parties proportionnelles,* [parties] *suivant lesquelles les mobiles ne se rapprochent pas*"[85].

Indéniablement, l'explication que fournit Grégoire de Saint-Vincent fait fond sur les mathématiques : il se nicherait même *in cauda* quelque dénigrement des arguments philosophiques[86] ("*Verum hæc in gratiam Philosophorum dicta sufficiant*"). Tant il sait que c'est là que réside la difficulté, Grégoire se garde d'opposer le discret et le continu pour résoudre le paradoxe : bien au contraire son raisonnement se base sur le continu, dûment représenté à partir des vitesses uniformes d'Achille et de la tortue, vitesses qui ont nécessairement un rapport, une raison qui relève de la théorie des proportions. Le cadre "continuiste" est délimité avec soin.

Cependant, Grégoire déroge au penchant analytique - au sens de Pappus - que nous avons jusqu'à présent décrit puisque le style d'exposition est d'emblée synthétique : la longueur AC est posée **d'abord**, puis le milieu B, point de départ de la tortue (figure 6). C'est à partir du continu AC qu'est construite la progression géométrique "*en acte*" de raison $\frac{1}{2}$ (au sens moderne) AB, BF, FH, etc, progression

[85] *Opus geometricum*, p. 101-103. Ce texte se termine par les phrases suivantes: "*En outre, il faut répondre à l'argument suivant lequel "**avant qu'Achille ne parvienne de A à B, la tortue s'est avancée de B en F**". Que le sens de cette proposition coïncide avec celui où l'on dirait qu'Achille doit assigner le point B avant qu'il ne désigne le point F, ce qui est contraire à une course selon le rapport du mouvement. Car toute assignation de ce genre de choses contient une connotation de subsistance* [dans l'intelligence], *comme le pensent les Mathématiciens, tout au moins selon l'esprit; donc, partant, d'un certain repos qui contredit le mouvement. Mais ces réflexions destinées aux Philosophes suffisent*".

[86] Du coup, il n'est pas utile d'aborder ici l'intéressante critique que Bergson adresse à de telles résolutions du paradoxe. Remarquons bien que Grégoire de Saint-Vincent se plie au raisonnement de Zénon tel que rapporté par Aristote dans la *Physique*.

dédoublée en DE, EG, GI, etc. En effet, F est contruit comme milieu de BC, H comme milieu de FC, etc, et de même E comme milieu de DC, G comme milieu de EC, etc. Puisque AB + BF + FH + ... = 2 AB = AC et DE + EG + GI + ... = 2 DE = DC, ce n'est qu'après qu'ait été construit le point C qu'il est ensuite prouvé qu'il s'agit du point de rencontre d'Achille et de la tortue. En privilégiant cette fois le mode synthétique, Grégoire de Saint-Vincent tente d'apparaître sans réplique possible, prenant appui sur toute la tradition euclidienne. Il l'annonçait dès sa vigoureuse préface au livre 2 : "*Et je ne voudrais pas que l'on se mît das la tête que nous entrons dans un domaine qui contredît les lois de la logique: au contraire, plus clair que le jour, nous montrerons par notre méthode que sont aussi bien levées les plus graves apories pour lesquelles, en matière de quantité, dans les gymnases et les Lycées des Philosophes, ceux-ci ont coutume de se déchirer.* "[87]

L'exposé synthétique, brillant, n'est pourtant possible qu'une fois analytiquement établi le continu comme somme d'un découpage en progression géométrique: **c'est un aboutissement**. Il fait date dans le déroulement scientifique.

Quelques années plus tard, Isaac Barrow, professeur lucasien de mathématiques à Cambridge, renverse la perspective établie par Grégoire de Saint-Vincent : c'est sur l'évidence "géométrique" du continu, ramassée dans le nécessaire rattrapage de la tortue par Achille, qu'il explique la sommation d'une série géométrique. Il le fait vers 1664-1665 dans ses *Lectiones mathematicae*[88], à l'occasion de la troisième conférence intitulée *De l'identité de l'Arithmétique et de la Géométrie* au cours de laquelle il se propose, à propos de la science des nombres, non de la supprimer de la "*République des mathématiques*" mais *"I will rather restore it into its lawful Place, as being removed out of its proper Seat, and ingraff and unite it again into its native Geometry, the Stock from whence it has been plucked"*[89]. Il ne s'agit pas d'un tic de mathématicien, désireux de manipuler dans tous les sens possibles les objets déjà étudiés par ses prédécesseurs. Barrow indique fermement un ordre selon lequel les mathématiques

[87] *Opus geometricum*, Argument du livre 2, p. 51. Voir aussi A. Tacquet, *Arithmeticæ theoria et praxis*, 1656 (p. 502-503). Pour un traitement antérieur du paradoxe d'Achille et de la tortue, voir Richard Suiseth, *Liber calculationem*, Padoue, 1477.

[88] I. Barrow, *Lectiones mathematicae*, Trad. anglaise par J. Kirkby, *The usefulness of mathematical learning explained and demonstrated : being Mathematical lectures read in the Publick schools at the University of Cambridge*, London, S. Austin, 1734, Réédition, F. Cass, 1970.

[89] I. Barrow, *The usefulness of mathematical...*, opus cité, p. 29.

doivent se déployer et le continu géométrique est premier. L'argument se déroule ainsi à partir d'une figure :

A E F G H Æ Z

Un point mobile A (Achille) se déplace d'un mouvement uniforme sur une ligne droite AZ, de même que le point E (la tortue) qui possède une vitesse trois fois moindre. Lorsque A s'est rendu en E, E est déjà en F, avec $EF = \frac{AE}{3}$; de même lorsque A parvient en F, E est en G avec $FG = \frac{EF}{3}$, *"et ainsi de suite, ad infinitum, jusqu'à ce que le point A rattrape E en Æ"*[90]. La rencontre en Æ ne fait aucun doute : c'est un donné relatif au continu. Il n'y a rien à prouver! De sorte que la longueur AÆ est décomposée selon AE + EF + FG + ..., soit $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots$ du moins si la longueur AE est prise pour l'unité. D'ailleurs, puisque les points mobiles A et E se rencontrent en Æ, c'est que la longueur AÆ parcourue par A est triple de celle EÆ parcourue par E. *"Donc A Æ est à AE comme 3 à 2"*. D'où l'égalité numérique :

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots = \frac{3}{2}$$

Isaac Barrow explique aussitôt que le résultat de sommation est général, adaptable à toutes les raisons inférieures à l'unité. Il exécute un calcul à partir d'un quelconque rapport des vitesses $\frac{R}{S}$ (R > S), de sorte que

$$\frac{AE + EÆ}{EÆ} = \frac{R}{S},$$

donc *dividendo* $\frac{AE}{EÆ} = \frac{R\text{-}S}{S}$ ou $\frac{AÆ}{AE} = \frac{R}{R\text{-}S}$. Mais comme l'interprétation par les vitesses pourvoit aussi bien la proportion $\frac{AE}{EF} = \frac{R}{S}$, on dispose finalement de :

$$\frac{AÆ}{AE} = \frac{AE}{AE - EF}.$$

[90] I. Barrow, *The usefulness of mathematical...*, opus cité, p. 32.

"The Sum of any Series of Numbers continually decreasing from Unity, or to Nothing, in any Proportion, will be to Unity, as the Antecedent, or greater Term of the proportion, is to the Excess of the Antecedent above the Consequent" [91]. C'est une façon d'indiquer la somme d'une progression géométrique : elle correspond à la troisième forme choisie par Grégoire de Saint-Vincent dans sa proposition 80 du livre 2.

La conclusion de Barrow est épistémologique ; les propriétés du continu sont fondatrices[92] : *"So easily are Arithmetical Conclusions, (otherwise sufficiently intricate and difficult to be investigated) drawn from the Consideration of Geometry"* [93]. Si, par rapport à la tradition euclidienne, l'on peut s'étonner de l'incorporation de la vitesse, donc du temps et du mouvement dans le domaine de la géométrie, celle-ci n'est pas scandaleuse puisque Barrow a pris soin de définir la géométrie comme l'étude de la quantité en tant que telle : *"The same way Geometry proposes Magnitude for the Subject of its Enquiry, not the peculiar Magnitude of this or that Body, but Magnitude taken universally ; together with its general Affections, viz. Divisibility, Congruence, Proportionality, a Capacity of different Situation and Position, Mobility, etc, declaring these to be inherent to it, and after what manner they are so"*[94].

Grégoire de Saint-Vincent ne désavouerait peut-être pas cette déclaration de principe, car elle renforce l'unité des mathématiques, mais au moins il avait su utiliser la vitalité propre du discret. Symptomatiquement toutefois, il épouvait le besoin de figurer spatialement des résultats que l'on peut qualifier d'algébriques, par exemple la formule (G) qui est notre guide au long de cette étude[95]. Et le verbe "figurer" décrit trop insuffisamment son objectif : car c'est bien aux propriétés spatiales qu'il veut aboutir en fin de compte. Ainsi, à l'issue du chapitre 2 du livre 2, où figurent à la fois les propositions 79, 82 et 116 que nous avons commentées longuement, Grégoire ajoute deux chapitres phénoménologiques. *"Ce que nous avons démontré jusqu'ici dans la seconde partie sur les progressions géométriques, s'applique sans aucune différence aux lignes, aux surfaces et aux corps. Pour cette raison en effet, afin d'indiquer*

[91] I. Barrow, *The usefulness of mathematical...*, opus cité, p. 32-33.

[92] I. Barrow sait très bien que ce qu'il professe s'oppose à la démarche de John Wallis qui avait publié son *Arithmetica infinitorum* à Oxford en 1655. De la même façon, en plus virulent encore, Thomas Hobbes s'opposait à l'utilisation de l'algèbre en géométrie.

[93] I. Barrow, *The usefulness of mathematical...*, opus cité, lecture 3, p. 33.

[94] I. Barrow, *The usefulness of mathematical...*, opus cité, lecture 1, p. 13.

[95] Par opposition, voir H.J.M. Bos, On the representation of curves in Descartes' Géométrie, *Arch. Hist. Ex. Sc.*, 24, 1981, pp. 295-338.

l'universalité des propositions, nous avons perpétuellement employé le nom de "grandeur" et non [celui] *de "ligne". Parce que toutefois, s'ils sont alignés à l'extérieur les uns des autres, les progressions des surfaces et des corps semblablement semblables ont beaucoup de propriétés, il nous a paru bon de les étudier en détail dans cette troisième et quatrième partie"*.

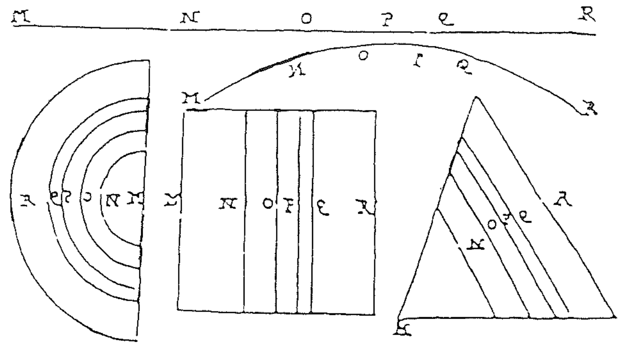


Figure 7

Quelques dessins viennent aussitôt, certains reproduits ci-dessus, et avec eux l'annonce d'une double recherche. D'une part, il y a la décomposition d'un donné spatial, c'est-à-dire l'investigation du continu par le discret. Joue l'itération qui sera largement présente dans l'ouvrage et son rôle dépasse la seule progression géométrique. D'autre part, Grégoire veut évoquer l'agrégation de figures semblables composant, par leur ensemble, une nouvelle figure qu'il s'agit d'étudier. Les progressions géométriques jouent alors le rôle majeur: c'est le modèle.

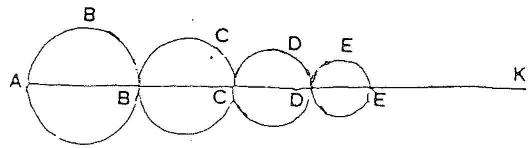


Figure 8

Cette seconde démarche le conduit à figurer des progressions géométriques en abscisse et à interpréter les diverses formes de (G) par des figures posées sur cette base : la proposition fondatrice étant qu'à une progression géométrique en abscisse correspond des plans semblables formant également par leurs aires une progression géométrique (proposition 124 de l'*Opus geometricum*, livre 2). Or, la raison de cette nouvelle progression géométrique spatiale est le carré de la raison de la première progression représentée linéairement et, par conséquent, la seconde se voit tout autant sur le dessin linéaire, puisqu'il suffit d'omettre les termes de rang pair[96]. La pratique de ce genre de propriétés devient vite fastidieuse, mais elle témoigne du besoin de géométriser, une force baroque en l'occurrence. A titre d'unique exemple, voici l'énoncé traduit de la proposition 141 et le dessin correspondant.

Proposition 141: Inscrite dans un triangle AGK, on se donne une série de carrés, ayant leurs bases alignées et dont le terme [final] *de la longueur est K. Par F, on divise en deux parties égales le côté LM du premier carré, puis on mène par F la droite FK qui rencontre AG en I. Je dis que le triangle AIK est égal à la série des carrés et le triangle IGK est égal à celle des triangles LGM, TMN, etc.*

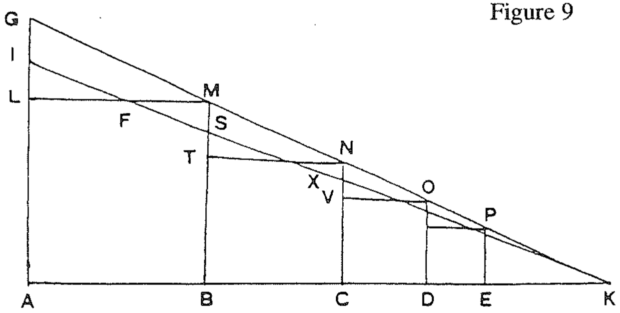


Figure 9

La force du discret

Si la crispation de Barrow sur le continu est d'une nature bien différente de la position de Grégoire de Saint-Vincent qui explore le discret en vue du continu et l'illustre à satiété, il est particulièrement éclairant d'associer à ces démarches celle issue d'une autre lecture des *Eléments* d'Euclide, démarche adoptée par des mathématicien

[96] La somme $\frac{a\alpha}{1-x^2}$ se lit de deux manières sur la figure, comme somme des figures carrées ou comme somme des segments de rang pair.

aussi différents que François Viète, Luca Valerio[97] ou Pierre de Fermat. A partir d'une proposition euclidienne, ce dernier auteur sera notre cible principale.

1) Illustration d'une propriété euclidienne

Le résultat de base est une propriété que nous pouvons écrire sous la forme des quotients

(1) $$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}\ .$$

Euclide énonce : *"Si tant de grandeurs qu'on voudra sont proportionnelles, un des antécédents sera à un des conséquents, comme la somme des antécédents est à la somme des conséquents"* [98]. La démonstration n'est qu'une suite directe de la définition subtile d'une proportion par les équimultiples[99] (définition 5 du livre V) jointe à la propriété que nous traduisons par la distributivité[100]:

(2) $$n\,(A + B + C) = nA + nB + nC.$$

Parce que l'algèbre des proportions est aujourd'hui oubliée, on a du mal à comprendre à quel point la relation (1) était inscrite dans la pratique des mathématiciens, jusqu'au XVIIè siècle inclusivement. Bien entendu, Grégoire la fait intervenir et lui donne même un statut important[101]. Mais, dans sa quête des interprétations continues du discret, il ne peut manquer d'en fournir une figuration géométrique. A dire vrai, il choisit plutôt une complication de cette relation, à savoir l'énoncé

[97] Dans son *De Centro gravitatis solidorum libri tres*, Bononiæ, 2è édition, 1661; voir H. Bosmans, "La démonstration par l'analyse infinitésimale chez Luc Valerio", *Ann. Soc. Sc. Bruxelles*, 37, 1913, pp. 211-228 ; D.T. Whiteside, "Patterns of mathematical thought in the seventeenth century", *Arch. Hist. Ex. Sc.*, 1, 1961/62, pp. 179-388.

[98] Proposition 12 du livre 5, trad. de F. Peyrard, op. cité, p. 262, t. 2.

[99] Voir J. Dhombres, *Nombre, mesure et continu; épistémologie et histoire*, Nathan, Paris, 1978, chap. 1.

[100] Propriété à laquelle Euclide donne une autre formulation, $\frac{nA}{A} = \frac{nA + n\,B + nC}{A + B + C}$ (proposition 1 du livre V).

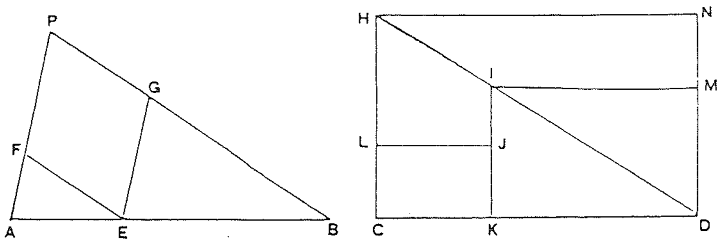
[101] La proposition 12 du livre V des *Eléments* est dûment citée par Grégoire de Saint-Vincent, et il insiste sur son importance dans une correspondance justificative avec le Père C. Grienberger du Collège romain (lettre du 22 mai 1625 par exemple).

$$(3) \qquad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \text{ et } \frac{a'}{b}=\frac{c'}{d} \text{ impliquent } \frac{a+a'}{c+c'}=\frac{b}{d}.$$

Cette implication (3) se réduit aisément à (1) à partir de l'échange des termes moyens :

$$\frac{a}{c}=\frac{a'}{c'}=\frac{b}{d}.$$

Afin de lui conférer une figuration spatiale en "réalisant" la relation (1), Grégoire adopte des triangles et des rectangles. Il part de deux segments AB et CD sur lesquels sont tracées deux figures, triangle et rectangle. Ces segments sont divisés par les points E et K respectivement dans un même rapport $(\frac{AE}{CK} = \frac{AB}{CD})$ et sur chacun des quatre segments ainsi générés, il construit deux par deux des figures semblables aux figures initiales. D'un côté les triangles AFE et EGB, et de l'autre les rectangles CKJL et DMIK (figure 10). La conclusion, qui se veut une visualisation de (1), est que la somme des aires des figures AFE et EGB est à la somme des aires des figures CKJL et KDMI comme l'aire de la figure APB à celle de la figure CDNH. Telle est la proposition 69 du livre 2 de l'*Opus geometricum*.



figures 10

La visualisation est si peu efficace qu'on peut se demander si ce n'est pas la technique de calcul qui est seule en cause, comme un plaisir scolaire. Car la justification de cette géométrisation de l'algèbre des proportions exige une certaine attention si l'on veut respecter scrupuleusement les règles. Elle repose sur la similitude : les aires de deux figures rectilignes semblables sont entre elles comme le carré du rapport des longueurs de deux longueurs homologues (Prop. 20 du livre VI des *Eléments* d'Euclide). Dès lors, à partir de l'hypothèse de division des segments et de la relation (1),

$$\frac{AE}{CK}=\frac{EB}{KD}=\frac{AE+EB}{CK+KD}=\frac{AB}{CD}.$$

Soit, par échange de termes moyens :

$$\frac{AE}{AB}=\frac{CK}{CD} \text{ et } \frac{EB}{AB}=\frac{KD}{CD}.$$

En élevant au carré :

$$\left(\frac{AE}{AB}\right)^2=\left(\frac{CK}{CD}\right)^2 \text{ et } \left(\frac{EB}{AB}\right)^2=\left(\frac{KD}{CD}\right)^2.$$

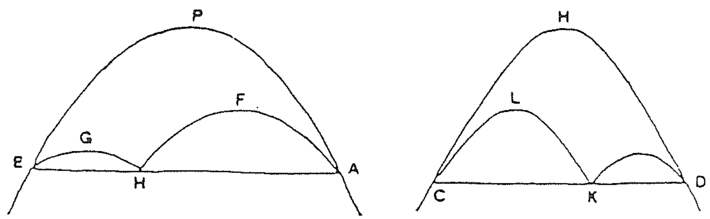
Donc

$$\frac{\text{Aire tr. AFE}}{\text{Aire tr. APB}}=\frac{\text{Aire rect. CKJL}}{\text{Aire rect. CDNH}}; \quad \frac{\text{Aire tr. EGB}}{\text{Aire tr. APB}}=\frac{\text{Aire rect. KDMI}}{\text{Aire rect. CDNH}}.$$

Et, grâce à (3), la conclusion annoncée :

$$\frac{\text{Aire tr. AFE + Aire tr. EGB}}{\text{Aire rect. CKJL + Aire rect. KDMI}}=\frac{\text{Aire tr. APB}}{\text{Aire rect. CDNH}}.$$

Pour bien marquer la généralité de (1), ce que la formulation algébrique (1) dit bien plus facilement, Grégoire de Saint-Vincent fournit d'autres figures où les triangles et les rectangles sont remplacés par des cercles, ou encore d'une part des paraboles, d'autre part des hyperboles. Pour dire l'universalité, Grégoire impose la profusion baroque.



Eodem modo ſi curuilinea, cum diuerſæ ſpeciei curuilineis, tres nempe parabolæ ſimiles, cum tribus hyperbolis ſimilibus, conferantur, eadem his quoque demonſtrandi ratio conueniet: cùm tam parabolæ ſimiles, quàm hyperbolæ ſint in duplicata ratione ſubtenſarum. Conſtat igitur huius theorematis vniuerſalis veritas.

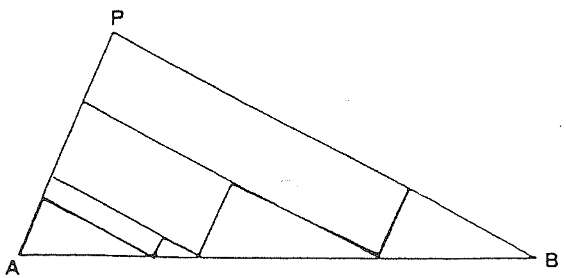
Figures 11

Si le dessin est plaisant, on ne peut manquer de trouver peu probante cette dernière figuration, ou plutôt on doit remarquer combien est nécessaire le discours en accompagnement : on n'évite par l'expression rhétorique. Quant à l'universalité, elle reste un leurre : chez Euclide en effet, la propriété de la similitude quant aux aires est d'abord restreinte aux seules figures rectilignes, et étendue ensuite aux cercles seulement [102] (c'est la proposition 2 du livre XII des *Eléments*). Son extension aux paraboles et hyperboles, au 17e siècle du moins, n'avait rien de prouvé... et on peut avancer qu'elle est gravement fautive en avant-scène d'un ouvrage dont le but, précisément, est de déterminer les aires relatives à de telles courbes !

Grégoire de Saint-Vincent prépare bien plutôt une extension de la relation (1): c'est, repéré géométriquement, le rythme de l'itération qui lui convient. En divisant le segment AB en n segments, x_1, x_2, x_3,...x_n où AB = $\sum_{k=1}^{k=n} x_k$, et de même CD en n segments y_1, y_2, y_3,...y_n , où CD = $\sum_{k=1}^{k=n} y_k$, de telle sorte que pour tout k, $1 \leq k \leq n$, $\frac{x_k}{y_k} = \frac{AB}{CD}$, il retrouve la force de la proposition 116. Sur les segments découpés sur AB il porte des triangles semblables au triangle APB et des rectangles semblables au rectangle CDNH sur les segments découpés sur CD.

Pour les triangles, un simple jeu de droites parallèles prévaut à la construction. Et ce jeu peut se poursuivre (figure 12).

Figure 12



Pour les rectangles, comme indiqué ci-dessous (figure 13), le jeu porte sur les deux diagonales, et il peut de la même façon se poursuivre.

[102] Dont les diamètres sont respectivement AB, CD, AE, EB, CK et KD.

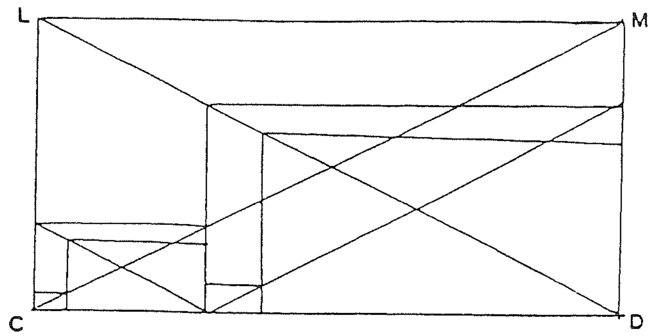


Figure 13

Mais, au final, compte tenu des hypothèses ($\frac{x_k}{y_k} = \frac{AB}{CD}$), on obtient seulement le bien piètre résultat :

$$\left(\frac{AB}{CD}\right)^2 = \frac{\sum_{k=1}^{k=n} x_k^2}{\sum_{k=1}^{k=n} y_k^2} .$$

Nous avons vraiment abandonné Euclide et le cadre, éventuellement numérique, que pourrait fournir la relation (1).

2) L'algèbre des séries : l'adégalisation

Dans le cadre numérique qui s'impose au livre VII puisqu'il concerne les nombres entiers, Euclide énonce à nouveau la relation (1) : "*Si tant de nombres qu'on voudra sont proportionnels, un des antécédents sera à un des conséquents, comme la somme des antécédents à la somme de conséquents*"[103]. A cette proposition, une extension est proposée au livre IX, extension pour laquelle nous utilisons d'abord une écriture algébrique : si x_1, x_2, ... x_n sont en proportion continue, c'est-à-dire si

(3) $$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3} = ... = \frac{x_{n-1}}{x_n}$$

[103] Proposition 12, livre VII, trad. F. Peyrard, op. cité, tome 1, p. 408.

on a :

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_{n-1}}{x_2 + ... + x_n}. \tag{4}$$

En appelant S_n la somme (finie) $x_1 + ... + x_n$, on dispose donc de la proportion :

$$\frac{S_n - x_n}{S_n - x_1} = \frac{x_1}{x_2}. \tag{5}$$

Si les notations indexées n'existent ni chez Euclide, ni d'ailleurs au cours de la première moitié du XVIIe siècle, un équivalent de la formule (5) est en fait prononcé : "*Si tant de nombres qu'on voudra sont successivement proportionnels, et si du second et du dernier on retranche un nombre égal au premier, l'excès du second sera au premier comme l'excès du dernier est à la somme de tous ceux qui sont avant lui*" [104].

Cette formulation, qui se réfère explicitement à des nombres entiers, convient si $x_2 > x_1$ (progression géométrique croissante) et on la déduit facilement de (5) par utilisation de la règle de calcul :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{implique} \quad \frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}.$$

Soit

$$\frac{x_n - x_1}{S_{n-1}} = \frac{x_2 - x_1}{x_1}. \tag{6}$$

Acceptons alors trois faits (H_1), (H_2) et (H_3) que nous énonçons volontairement dans le langage moderne :

(H_1) S_n admet S comme limite lorsque n tend vers l'infini (ce qui suppose $x_1 > x_2$);
(H_2) x_n tend vers 0 ;
(H_3) les proportions subsistent à la limite.

Alors, de la relation (5), on tire aussitôt la valeur de la somme de la série géométrique tout entière.

$$\frac{S - 0}{S - x_1} = \frac{x_1}{x_2}. \tag{7}$$

[104] Proposition 35, livre IX, trad. F. Peyrard, op. cité, tome 2, p. 104.

Soit

$$S = \frac{x_1^2}{x_1 - x_2}. \tag{8}$$

La formulation (8) est rhétoriquement indiquée chez F. Viète[105]. Si elle est équivalente aux formulations fournies par Grégoire de Saint-Vincent à la proposition 79 de son livre 2, et si on la trouve beaucoup plus tard chez I. Barrow[106], la démarche suivie est pourtant autre, d'inspiration arithmétique et algébrique. On le constate bien à partir d'un texte de Fermat dont le titre même fait directement référence aux progressions géométriques : *Sur la transformation et la simplification des équations de lieux, pour la comparaison sous toutes les formes des aires curvilignes, soit entre elles, soit avec les rectilignes, et en même temps sur l'emploi de la progression géométrique pour la quadrature des paraboles et hyperboles à l'infini*"[107].

Ce texte très riche qui fut vraisemblablement écrit[108] à la suite d'une lecture de l'*Arithmetica infinitorum* [109] de Wallis, quoique publié en 1679 seulement[110], entendait illustrer le fait que la progression géométrique est *"très féconde en quadratures"*[111]. De fait, Fermat disposait du calcul avant 1647 comme en atteste une lettre à Digby (20 avril 1657), où il indique qu'il l'avait fait parvenir à Torricelli[112]. La somme d'une série est d'emblée donnée sous la forme que nous repérons par la lettre (F) :

(F) "*Etant donnée une progression géométrique dont les termes décroissent à l'infini, la différence de deux termes qui constituent cette progression est au plus petit terme, comme le plus grand des*

[105] F. Viète, *Variorum de rebus mathematicis responsorum libri VIII*, Tours. 1593; *Opera mathematica*, Leiden, 1646 p. 347-435.
[106] I. Barrow, *Lectiones mathematicae*, trad. anglaise, op. cité, p. 32, en note.
[107] De œquationum localium transmutatione et emendatione ad multimodam curvilineorum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricœ in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usus, *Œuvres de Fermat*, P. Tannery, C. Henry, (éd.), Paris, Gauthier-Villars, t. I, pp. 255-288.
[108] Voir P. Tannery, Sur la date des principales découvertes de Fermat, *Bull. Sc. Math. Astr.*, (2), 7, 1883, pp. 116-128 ; M. S. Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat (1601-1665)*, Princeton, 1973.
[109] J. Wallis, *Arithmetica infinitorum, sive Nova methodus inquirendi in curvilineorum quadraturam aliaque difficiliora Matheseos Problemata*, Oxoni Typis L. Lichtfield, 1656, 216 p. in-4°.
[110] P. de Fermat, *Varia opera*, S. Fermat (éd.), Toulouse, 1679.
[111] P. de Fermat, *De œquationum...*, op. cité.
[112] *Œuvres de Fermat*, op. cité, tome II, p. 338.

termes de la progression est à la somme de tous les autres à l'infini"[113].

En termes algébriques, x_1 étant le premier terme, S la somme infinie, et x_n le terme général ($x_n = x_1x^n$, $n \geq 1$, x étant la raison au sens moderne prise inférieure à l'unité) :

$$\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{x_1}{S - x_1} \quad (9)$$

Or, avec $x = \frac{x_1}{x_2}$, on a $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}} = \frac{1-x}{x}$, de sorte que (9) est une forme possible[114] de la formule (8), autrement dit de (G). Une forme suffisamment souple pour l'usage qu'en veut faire Fermat, et il ne convient pas de fixer l'entier n dans le membre de gauche[115], mais bien plutôt de le laisser libre.

En tout cas, cette somme infinie est pour Fermat un départ pour les quadratures, le seul même : *"Unico, quod notissimum est, proportionis geometricæ attributo tota hæc methodus innititur"*.[116] Il s'attaque aussitôt aux *"hyperboles"* et aux *"paraboles"* généralisées, c'est-à-dire à des courbes pour lesquelles il y a constance du produit ou du quotient d'une puissance de l'abscisse par une puissance de

113 Une traduction de ce texte figure au tome III des *Œuvres de Fermat*, op. cité, pp. 216-237. Nous n'avons pas toujours suivi cette traduction trop algébrisante.

114 (9) donne en particulier $\frac{x_1 - x_2}{x_2} = \frac{x_1}{S - x_1}$.

115 Comme le fait malencontreusement le traducteur des *Œuvres de Fermat*. Le rapport $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}}$ se calcule avec deux termes successifs quelconques, en retranchant le plus petit x_{n+1} du plus grand x_n. L'essentiel est que ce rapport ne dépende pas du premier terme de la progression (x_1 disparaît dans le quotient). C'est dans le second membre $\frac{x_1}{S - x_1}$ que figure explicitement le premier terme. L'indépendance de $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}}$ par rapport au premier terme est exploitable dans la mesure où l'on peut calculer sur une autre progression géométrique, de même raison quoique de premier terme autre. Fermat va jouer de cette possibilité.

116 P. de Fermat, *De æquationum...*, op. cité, p. 255 : *"Toute cette méthode dérive d'une seule propriété bien connue de la progression géométrique"*.

l'ordonnée : α et β étant des nombres positifs[117], $AG^\alpha . EG^\beta = \text{cste}$, ou $\frac{AG^\alpha}{EG^\beta} = \text{cste}$. En attribuant éventuellement un signe à α, ce que Fermat ne fait pas, on peut ranger sous un même registre le cas du produit (hyperbole) et celui du quotient (parabole) : $AG^\alpha\ EG^\beta = \text{cste}$. Chez Fermat, une représentation analytique des courbes est posée dès le départ, quoiqu'il ne s'agisse pas vraiment d'une équation cartésienne puisqu'il use de deux points courants :*"Hyperbolas autem definimus infinitas diversæ speciei curvas... sit ut potestas quædam rectæ AH ad potestatem similem rectæ AG, ita potestas rectæ GE, vel similis vel diversa a præcedente, ad potestatem ipsi homogeneam rectæ HI"*[118] :

$$\frac{AG^\alpha}{AH^\alpha} = \frac{EG^\beta}{IH^\beta}$$

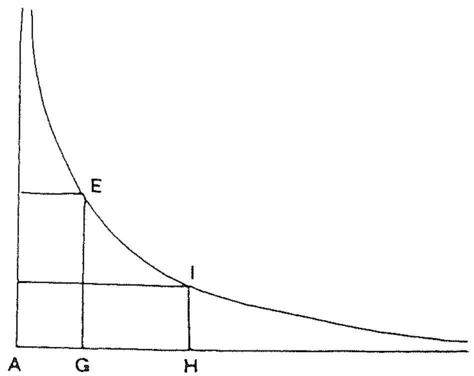


Figure 14

117 Fermat indique les cas où les exposants α et β sont entiers, mais aussi bien les cas $\alpha = \frac{1}{n}$; $\beta = \frac{1}{m}$ *(sed etiam latera simplicia, quorum exponens est unitas*, p. 256). On peut estimer qu'il envisage tous les nombres rationnels comme exposants α et β. Or, à propos de l'œuvre de Grégoire de Saint-Vincent, nous avons déjà souligné la difficulté conceptuelle présentée par une exponentielle à cette époque (exposants quelconques), difficulté qui ne bloque pourtant pas le calcul sur des exposants manipulés comme s'il s'agissait de simples rationnels. C'est au final que la généralité s'impose... naturellement !

118 P. de Fermat, *De æquationum*, op. cité, p. 256 : *"Je définis hyperboles des courbes d'espèces variant à l'infini ..., on aura toujours le même rapport entre une puissance déterminée de AH et la même puissance de AG d'une part, et une puisssance de GE (semblable ou différente par rapport à la précédente) et la même puissance de HI d'autre part"*.

Fermat installe en abscisse (figure 15) une progression géométrique croissante[119] de raison q ($q > 1$), à partir d'un premier terme AG suivi de AH = qAG, AO = q^2AG, ..., etc.

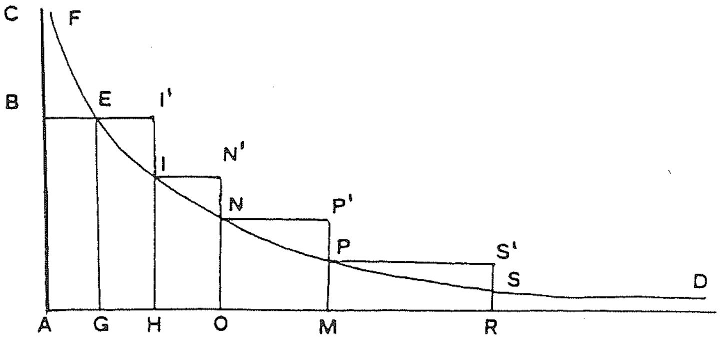


Figure 15

Les aires des parallélogrammes GHI'E, HON'I, OMP'N, etc, forment une autre progression géométrique[120], ce que Fermat démontre en utilisant les seuls outils de la théorie des proportions (notamment la composition des raisons, c'est-à-dire leur produit au sens moderne), se contentant de calculer le rapport des deux premières aires, rapport égal à l'inverse de la raison de la progression géométrique en abscisse dans le cas de "l'hyperbole" particulière choisie ($\alpha = 2$, $\beta = 1$).

La restriction du calcul aux seuls deux premiers termes ne présente pas de gêne, du moins si le lecteur prend conscience du rôle effectif de la progression géométrique en abscisse : AG, AH, AO, AM, AR, etc, à laquelle correspond une autre progression géométrique en ordonnée : GE, HI, ON, MP, RS, etc. Cette correspondance vient de la propriété même de définition de "l'hyperbole" puisque :

$$\left(\frac{AH}{AG}\right)^{\alpha} \left(\frac{HI}{GE}\right)^{\beta} = \left(\frac{AO}{AH}\right)^{\alpha} \left(\frac{ON}{HI}\right)^{\beta} = \text{etc.}$$

[119] Il choisit de travailler d'abord sur le cas $\alpha = 2$, $\beta = 1$. Mais son raisonnement est général pour les courbes $AG^{\alpha}\ EG^{\beta}$ = cste avec $\alpha > \beta$ (> 0): " *Fingantur termini progressionis geometricæ in infinitum extendendi...* " . La traduction française de ce texte, produite au tome III des *Œuvres de Fermat* interprète par une progression *"décroissant indéfiniment"* ! *"Imaginons les termes d'une progression géométrique étendue à l'infini"*.

[120] Les points I', N', et P' ne sont pas nommés sur la figure dont se sert Fermat.

Dans le cas de l'hyperbole ordinaire, soit $\alpha = \beta = 1$, Grégoire de Saint-Vincent avait pris soin d'établir qu'à une progression géométrique en abscisse, la courbe faisait correspondre une progression géométrique en ordonnée (au livre 6). Pour lui, cette propriété jouait en partie le rôle que prendra ultérieurement l'équation cartésienne[121] (xy = constante). Comme d'autres mathématiciens de son époque, Fermat n'avait d'ailleurs envisagé les courbes plus générales que parce qu'elles conservaient les progressions géométriques[122]. Les aires des parallélogrammes successifs GHI'E, HON'I, OMP'N, etc, correspondent bien au produit des termes correspondant de deux progressions géométriques : ces produits forment aussi une progression géométrique (comme Grégoire de Saint-Vincent avait tenu à le montrer géométriquement dans sa proposition 71 du livre 2 que nous avons déjà mentionnée). En l'occurrence, si la première raison est q, la seconde raison est q élevée à la puissance $-\frac{\alpha}{\beta}$, d'où la valeur de la raison du produit : $\frac{\alpha-\beta}{\beta}$ en exposant de $\frac{1}{q}$.

Le calcul du rapport des deux premiers termes est bien générique et lorsque $\alpha > \beta$, puisque $q > 1$, la sommation infinie des aires de parallélogrammes est possible à partir de la relation (9). En l'occurrence, dans cette relation S désigne maintenant l'aire que nous notons $\mathcal{A}$ = Aire (GHI'E) + Aire (HON'I) + Aire (OMP'N) + Aire (MRS'P) + ..., tandis que x_1 est l'aire du premier parallélogramme GHI'E (on pose $x_1 = a$ = GH x GE). Le rapport de gauche dans la relation (9) prend la valeur $q^{(\alpha-\beta)/\beta} - 1$. Mais ceci est une expression en termes modernes que n'utilise nullement Fermat. Notre calcul algébrique masque donc la démarche précise de l'auteur, car tout comme Grégoire de Saint-Vincent, Fermat interprète géométriquement, c'est-à-dire qu'il choisit des segments de la figure pour représenter les rapports en cause, et ceci doit le contraindre à spécifier α et β entiers ou inverses d'entiers. Nous devons donc entrer dans les détails de la preuve, et suivre les différents cas d'hyperboles.

[121] Ce rôle est discuté dans J. Dhombres, L'innovation comme produit captif de la tradition : une théorie des courbes entre Apollonius et Descartes, Actes du colloque Transmission des mathématiques, Paris, septembre 1991, à paraître, Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences.

[122] Torricelli l'avait fait explicitement avant lui. L'investigation de toutes les puissances rationnelles pouvait fournir au final une riche moisson pour le calcul des aires liées aux courbes algébriques. Voir : E. Bortolloti, "La memorie, De infinitis hyperbolis di Torricelli", *Archeion*, VI, 1925, pp. 45-58, 139-152.

Lorsque $\alpha = 2$, $\beta = 1$, le rapport de gauche dans (9), que nous écrivons q - 1, se lit sur la figure 15 comme le rapport $\frac{GH}{AG}$, quotient de la différence du plus grand terme au plus petit terme par ce dernier. C'est que Fermat a "représenté" les aires des parallélogrammes successifs par une progression géométrique de segments, à savoir la progression AO, AH, AG, ..., progression inverse de celle fixée au départ. (*"Sed tres rectæ quae constituunt rationes parallelogrammorum, rectæ nempe AO, HA, GA sunt proportionales ex constructione"*[123]). Pour le calcul de la somme de cette nouvelle progression, il utilise astucieusement la forme (F) qui, pour le terme à gauche, utilise deux termes successifs sans faire intervenir le premier terme. De sorte que pour le calcul de $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}}$ le remplacement de la progression des aires des parallélogrammes par celle des segments, deux progressions dont les premiers termes diffèrent pourtant, est indifférent. Ici, en gardant a = GHxGE au dénominateur,

$$\frac{GH}{AG} = \frac{GH \times GE}{\mathcal{A} - a}\ .$$

Une réduction au même numérateur fournit :

$$\frac{GH \times GE}{AG \times GE} = \frac{GH \times GE}{\mathcal{A} - a}\ .$$

Posant $\mathcal{B}$ égale à l'aire du parallélogramme AGEB fixé sur la figure, il vient la relation :

$$\mathcal{A} - a = \mathcal{B}. \tag{10}$$

Lorsque $\alpha = 3$, $\beta = 1$, l'expression $q^2 - 1$ qui fournit la raison de la progression des aires des parallélogrammes se lit tout autant linéairement sur la figure. En effet, une série géométrique de raison $\frac{1}{q^2}$ est visible avec des segments ; c'est la série AR, AO, AG, etc, série inverse des termes impairs de la première suite géométrique en abscisse. Quoique soient différents les premiers termes de la série des aires des parallélogrammes et de cette nouvelle série de segments,

123 P. de Fermat, opus cité, p. 258 : *"Mais les droites AO, HA, GA qui constituent les raisons des parallélogrammes, forment, par construction, une proportion géométrique".*

l'expression $\frac{x_n - x_{n+1}}{x_{n+1}}$ reste la même pour les deux séries, et en l'occurrence peut s'écrire :

$$\frac{AO - AG}{AG} = \frac{GO}{AG}\ .$$

(*"in hoc vero casu, parallelogrammum primum erit ad secundum, secundum ad tertium, etc, ut recta AO ad GA ; quod statim compositio proportionum manifestabit"*[124]). Cette représentation géométrique adoptée, la forme (F) donne avec la même convention d'écriture :

$$\frac{GO}{AG} = \frac{GH \times GE}{\mathcal{A} - a}\ .$$

Mais $\frac{GO}{AG} = \frac{GO \times GE}{AG \times GE}$, soit après un échange des moyens, la relation :

$$\frac{GO \times GE}{GH \times GE} = \frac{AG \times GE}{\mathcal{A} - a}\ .$$

Donc

$$\mathcal{A} - a = \left(\frac{GH}{GO}\right) \mathcal{B} \tag{11}$$

En termes modernes, la raison $\frac{GH}{GO}$ vaut $\frac{1}{1+q}$ (à partir de $\frac{q-1}{q^2-1}$) puisque q (q > 1) est la raison de la suite géométrique inscrite en abscisse au départ.

Lorsque $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 1$ (c'est-à-dire $\alpha = 1$ et $\beta = 2$ si l'on adopte une écriture quotient comme Fermat), cas de la *"première parabole, celle d'Apollonius"*[125], le calcul formel pour les aires des parallélogrammes fournit une série géométrique dont la raison est q élevé à la puissance $\frac{3}{2}$. Cette fois il faut prendre une raison $0 < q < 1$ au départ si l'on veut pouvoir sommer la progression des aires. De sorte que le terme de gauche dans (9) vaut $\frac{1-q^{3/2}}{q^{3/2}}$. Ce n'est pas ce qu'écrit Fermat puisque le même souci d'interprétation géométrique, c'est-à-

124 P. de Fermat, *De æquationum..*, op. cité, p. 259 :*"Mais, dans ce cas, la raison du premier parallélogramme au second, du second au troisième, etc, sera comme AO à GA, comme le montrera immédiatement la composition des raisons".*

125 C'est le cas où $y^2 = ax$ (équation cartésienne).

dire de représentation de la série des aires par une série de segments, l'oblige à faire intervenir des moyennes géométriques. Si l'on pose AY comme moyenne géométrique entre AO et AH, (c'est-à-dire $AY = \sqrt{AO.\,AH}$), on aura bien $AY = q^{3/2}$ AG. La série des aires est ainsi représentée par la série géométrique linéaire : AG, AY, AM, etc. Pour cette série de segments, compte tenu du fait que $q < 1$ et donc que AY donne le plus petit terme, le terme de gauche de (F) vaut :

$$\frac{GY}{AY}.$$

Finalement

$$\frac{GH \times GH}{\mathcal{A} - a} = \frac{GY}{AY}.$$

Puisque a = GH x GE, une astuce de calcul sur les proportions, usuelle au XVIIe siècle, fournit aussi bien

$$\frac{GH \times GE}{\mathcal{A}} = \frac{GY}{AY+GY} = \frac{GY}{AG}.$$

De sorte que[126]

$$\mathcal{A} = \left(\frac{GH}{GY}\right) \mathcal{B}. \qquad (12)$$

Remarquons qu'avec la parabole ordinaire, Fermat est passé d'une suite géométrique croissante en abscisse à une suite décroissante des aires ($q < 1$). La suite AG, AY, AO, AM, etc, tend vers O et l'on somme les aires d'une famille de parallélogrammes inscrits dans un carré d'aire finie. Si les calculs **formels** sont les mêmes, la visualisation géométrique ne l'est pas. De fait, voilà la figure correspondante[127] (figure 16) que nous ne donnons qu'à présent [128] :

[126] Rappelons que $\mathcal{B}$ est l'aire du parallélogrammme AGxGE.
[127] Fermat dresse effectivement cette figure, mais il change tout à fait les lettres par rapport à la figure *"hyperbolique"* précédente. Nous avons préféré garder les mêmes lettres afin de mieux manifester le parallélisme des calculs.
[128] Si l'on reprend le calcul précédent, on s'aperçoit que le recours à la figure est seulement utile lorsqu'on additionne AY + GY afin d'avoir effectivement GY, et encore peut-on penser cette addtition par le seul fait que la raison q est strictement inférieure à 1.

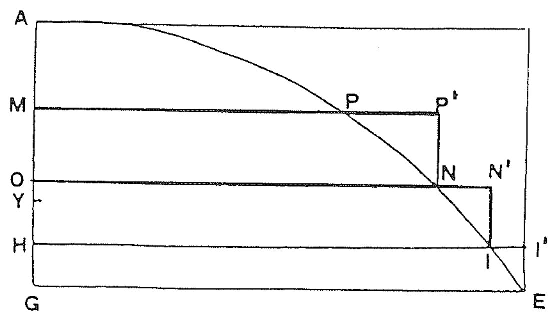
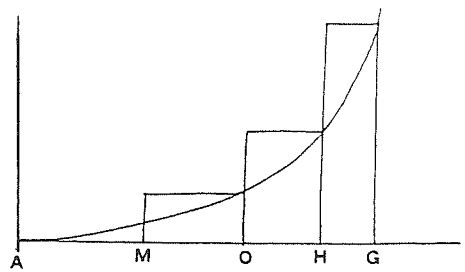


Figure 16

La stabilité des calculs pour des situations géométriques bien différentes (branche infinie ou arc fini de la courbe) établit à l'envi que Fermat adopte une démarche analytique, quoiqu'elle soit ici réduite à la seule algèbre des proportions. Toutefois, on aura noté combien cette algèbre est déjà "numérisée" : les proportions sont manipulées comme de banales fractions numériques.

Relativement au calcul de l'aire de la parabole, Fermat aurait tout aussi bien pu considérer en abscisse la décomposition indiquée à la figure 17, avec une raison $q < 1$, et une parabole dont l'équation cartésienne est $y = ax^2$. Sa méthode géométrique de calcul est tout à fait adaptée.

Figure 17



Il lui aurait suffi de prendre $\alpha = -2$ et $\beta = 1$ pour aboutir à une série de raison q^3 pour les aires ($q < 1$), et interpréter cette série par une série de segments AG, AM, etc, obtenant le rapport $\frac{GM}{AM}$ pour $\frac{1-q^3}{q^3}$ et dès lors, par un calcul semblable de proportions à partir de

$\frac{a}{\mathcal{A}-a} = \frac{\mathrm{GM}}{\mathrm{AM}}$, disposer de la relation :

$$(13) \qquad \mathcal{A} = \left(\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{GM}}\right) \mathcal{B}.$$

En choisissant plutôt la disposition parabolique de la figure 16, et en faisant intervenir les moyennes géométriques, Fermat préparait mieux le cas algébrique d'une autre "parabole" (dite semi-cubique) qu'il avait déjà évoqué dans sa *Dissertation géométrique : de la comparaison des lignes courbes avec les lignes droites*[129], parabole déterminée par la relation $\frac{\mathrm{GE}^3}{\mathrm{HI}^3} = \frac{\mathrm{AG}^2}{\mathrm{AH}^2}$. Avec les notations adoptées, ce dernier cas correspond à $\alpha = 2$, $\beta = 3$. Soit pour la série des aires des parallélogrammes la raison $q^{5/3}$. Par analogie avec le cas de la parabole ordinaire (figure 16), Fermat pose cette fois AT = $q^{5/3}$ AG, c'est-à-dire qu'il insère deux moyennes proportionnelles entre les points G et H et prolonge la progression jusqu'au cinquième point. Le même type de calcul que précédemment fournit :

$$(14) \qquad \mathcal{A} = \left(\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{GT}}\right) \mathcal{B}.$$

Bien sûr, Fermat ne s'arrête pas aux seules formules (10), (11), (12), (13) ou (14) qui ne fournissent pas d'aires hyperboliques. Il entend bien obtenir non pas seulement l'aire d'une série de parallélogrammes circonscrits à la courbe, mais l'aire délimitée par la courbe elle-même. Pour ce faire, il raisonne par *"adégalisation"* (*"ut loquitur Diophantus"*), c'est-à-dire qu'**il fait tendre vers 1 la raison q de la suite géométrique de départ**. Et il interprète de façon triple ce passage à la limite, lequel - c'est là une analogie importante - fonctionne tout comme le calcul de la somme d'une série géométrique à partir de l'expression euclidienne pour une série finie (passage de (5) à (8) avec les trois propriétés (H_1), (H_2), et (H_3) déjà évoquées).

(H'_1) D'une part, les aires des parallélogrammes rectilignes tendent vers les aires des parallélogrammes curvilignes, ou plutôt la somme toute entière

aire (GHI'E) + aire (OMP'N) + aire (MPS'P) + ...,

[129] Dissertatio : de linearum curvarum cum lineis rectis comparatione ; *Œuvres de Fermat*, op. cité, tome I, p. 217-254.

devient égale à l'aire délimitée par la droite EG, l'axe des abscisses et la courbe elle-même, et ceci que la courbe s'étende à l'infini (cas des "hyperboles", aire GED avec la figure (15)) ou soit inscrite à distance finie (cas des "paraboles", aire AGE avec la figure 16). Ceci correspond à (H_1).

(H'_2) D'autre part, une aire telle que celle du parallélogramme GHI'E devient négligeable. Ceci correspond à (H_2).

(H'_3) Enfin, un rapport de deux termes pris dans la suite géométrique est automatiquement remplacé par le rapport des numéros qui repèrent ces termes dans l'ordonnancement de la série géométrique éventuellement complétée par les constructions intermédiaires : ainsi par exemple dans la relation (11), $\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{GO}}$ devient $\frac{1}{2}$ et dans la relation (14), $\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{GT}}$ devient $\frac{3}{5}$. Ceci est l'analogue de (H_3), mais nécessite une explication que nous donnerons un peu plus loin.

A partir de ces trois faits, (H'_1), (H'_2) et (H'_3), et si l'on appelle dans chaque cas $\mathcal{S}$ l'aire totale de la surface curviligne, les formules (10) à (14) donnent respectivement

$$(15) \qquad \mathcal{S} = \mathcal{B},$$

$$(16) \qquad \mathcal{S} = \frac{1}{2}\,\mathcal{B},$$

$$(17) \qquad \mathcal{S} = \frac{2}{3}\,\mathcal{B},$$

$$(18) \qquad \mathcal{S} = \frac{1}{3}\,\mathcal{B},$$

et

$$(19) \qquad \mathcal{S} = \frac{3}{5}\,\mathcal{B}.$$

Non seulement Fermat retrouve la quadrature de la parabole[130] (formule (17)), mais il peut faire le lien quantitatif entre la quadrature et la définition analytique de la courbe considérée, c'est-à-dire inscrire dans le résultat même les coefficients α et β qui entrent dans la définition de la courbe (coefficients nécessairement positifs pour lui). Par l'addition ou la soustraction de ces coefficients, il distingue le cas

[130] Archimède ayant prouvé que l'aire curviligne AGE vaut les $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle rectiligne AGE.

des *"paraboles"* et celui des *"hyperboles"*. Ainsi, pour les *"paraboles"*:

Canon vero ***universalis*** *inde nullo negotio elicietur :* ***patet nempe fore semper parallelogrammum BD ad figuram AICB ut aggregatum exponentium potestatum applicatæ et diametri ad exponentem potestatis applicatæ***[131].

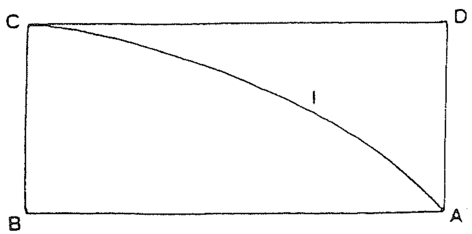


Figure 18

Malgré l'efficacité quantitative du résultat, remarquons qu'il n'est pas besoin de préciser une abscisse et une ordonnée, car elles jouent le même rôle (ce sont tout simplement les appliquées[132]). Seul le choix d'une première détermine bien sûr la seconde, mais en outre il exprime la portion de surface qui est examinée, qu'il s'agisse de BAIC ou de DAIC (figure 18).

Pour les hyperboles, le résultat est tout aussi général :

In ***hyperbolis*** *autem canon non minori facilitate invenietur universalis : erit enim semper in quacumque hyperbole, si recurras ad primam figuram, parallelogrammum BG ad figuram in infinitum protensam RGED ut differentia exponentium potestatum applicatæ et diametri ad exponentem potestatis applicatæ*[133].

[131] Opus cité, p. 265. "*On peut de là tirer facilement une règle universelle. Il est clair en effet que la raison du parallélogramme BD à la figure AICB est toujours égale à celle de la somme des exposants des puissances de l'ordonnée et de l'abscisse à l'exposant de la puissance de l'ordonnée*".

[132] Alors que le traducteur des *Œuvres de Fermat* les distingue malencontreusement.

[133] Opus cité, p. 266. "*Pour les hyperboles, on trouve aussi facilement une règle universelle. Dans une hyperbole quelconque la raison du parallélogramme BG à la figure indéfiniment étendue RGED sera égale à la raison de la différence de l'exposant de la puissance de l'ordonnée et de celui de la puissance de l'abscisse à l'exposant de la puissance de l'ordonnée*".

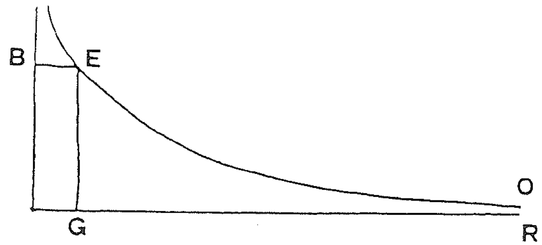


Figure 19

Pourtant, si les hyperboles s'étendent à l'infini, aussi bien en abscisse qu'en ordonnée, les aires ne sont pas finies des deux côtés simultanément, et d'ailleurs pour l'hyperbole ordinaire, celle d'Apollonius, les aires sont infinies des deux côtés, comme Fermat le remarque bien à la suite de Grégoire de Saint-Vincent[134]. De sorte que la règle universelle doit cette fois être précisée ; par exemple par la détermination d'une abscisse où les points de l'hyperbole vont à l'infini et d'une ordonnée : la différence des *"puissances"* ne peut se prendre alors que d'un plus grand à un plus petit. Ainsi avec yx^2 = constante, du côté de l'infini des x, l'aire est finie (différence 2 - 1) ; mais du côté de l'infini des y, on doit écrire xy^2 = constante de sorte que la différence est 1 - 2, qui n'est pas possible[135].

Remarquons que si, dans la démonstration, les coefficients α, β (les puissances des abscisses ou des ordonnées) sont manipulés comme des nombres entiers, ou des quantièmes d'entiers, voire même des rationnels, l'énoncé gomme de telles restrictions et α comme β apparaissent comme des coefficients quelconques (des puissances). Les mathématiciens du XVIIIe siècle, Euler en particulier, maintiendront cette attitude d'un énoncé nettement plus général qu'une démonstration restreinte au cas rationnel, voire entier[136]. Bref

[134] Ce qui lui donne l'occasion de cerner la raison du succès des quadratures en dehors du cas de l'hyperbole ordinaire : les aires des parallélogrammes circonscrits forment une série géométrique, non une série arithmétique.

[135] Dans une lettre à Digby, Fermat explicite ces différences en faisant ressortir une notion géométrique, à savoir le centre de gravité de la portion de surface considérée.

[136] Voir J. Dhombres, "Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle", *Revue d'Histoire des Sciences*, X/2, 1987, pp. 179-202 ou J. Dhombres, Euler et la rigueur mathématique, Actes de l'Université d'été en histoire des mathématiques, Toulouse, 1987, pp. 243-333.

la série géométrique, convenablement manipulée, a conduit à des quadratures fort riches. La méthode repose sur l'adégalisation, manifestée ici par les trois propriétés (H'_1), (H'_2) et (H'_3).

Avec (H'_1) et (H'_2), l'adégalisation, lorsqu'elle porte sur des séries géométriques, se réduit à une continuité que Fermat ne cherche pas à mieux justifier. Une somme discrète d'aires tend vers une aire continue lorsque la raison de la série géométrique, cette sorte d'échafaudage destinée à atteindre le continu, tend vers l'unité. Que la somme discrète soit finie ou infinie ne change rien à la perception de ce qui est posé comme une réalité[137]. **Une réalité géométrique facile à justifier** puisque la somme des morceaux curvilignes, la somme des aires des triangles curvilignes EI'I, IN'N, NP'P, PS'S, etc (figure 15), ne dépasse pas l'aire du parallélogramme GHI'E dont il est facile de prouver la petitesse, c'est-à-dire de la rendre inférieure à une quantité donnée[138] pour reprendre l'expression de Grégoire de Saint-Vincent. L'essentiel est dans cette petitesse. Fermat se débarrasse en tout cas de la justification et fait une référence à la fois lointaine et définitive tant à la tradition de l'exhaustion qu'à un consensus des géomètres. **Il donne ainsi au discret une nette autonomie de calcul.**

"*Imaginons les termes d'une progression géométrique étendue à l'infini : soient AG le premier (terme), AH le second, AO le troisième, etc. Supposons que ces termes soient assez rapprochés les uns des autres pour que, suivant la méthode d'Archimède, on puisse adégaler, comme dit Diophante, ou égaler par approximation le parallélogramme rectiligne GE par GH au quadrilatère mixtiligne GHIE ; nous supposerons de plus que les premiers intervalles rectilignes GH, HO, OM, etc, des termes de la progression soient suffisamment égaux entre eux, pour que l'on puisse facilement employer la méthode d'Archimède de réduction à l'impossible, par circonscriptions et inscriptions. Il suffit de faire cette remarque une fois pour ne pas s'obliger à revenir et à insister constamment sur un article bien connu de tous les géomètres*"[139].

[137] La somme des aires des parallélogrammes, dans le cas d'une "hyperbole", si $x^\alpha y^\beta = a$ en est l'équation "cartésienne" avec $\alpha > \beta > 0$, tend vers

$I = a^{1/\beta} \int_x^\infty \frac{dx}{x^{\alpha/\beta}} = \frac{a^{1/\beta}}{\frac{\alpha}{\beta} - 1} \frac{x}{x^{\alpha/\beta}}$. Cette intégrale vaut encore $I = \frac{xy}{\frac{\alpha-\beta}{\beta}}$, en interprétant xy comme l'aire d'un rectangle. On a précisément l'énoncé de la proposition **universelle** de Fermat.

[138](H'_1) est réduite à (H'_2), laquelle paraît évidente puisque la longueur GH tend vers 0 lorsque q tend vers 1.

Plus subtil sans aucun doute est (H'_3), avec le calcul à la limite (lorsque q tend vers 1) des rapports de termes de la progression qui interviennent dans les égalités (11), (12), (13) ou (14). La justification de Fermat est brutale parce qu'elle se réfère aux logarithmes, ces objets que Grégoire de Saint-Vincent ne mentionne pas du tout dans son *Opus geometricum*:[140] "*propter nostram methodum logarithmicam*" [141] : "*parallelogrammum BD est ad totam figuram in hoc casu ut 5 ad 3*". Dans chaque cas, le calcul moderne consisterait à lever une indétermination 0/0 du genre $\frac{q-1}{q^2-1}$ ($q > 1$), ou $\frac{1-q}{1-q^{3/2}}$ ($q < 1$), ou encore $\frac{1-q}{1-q^3}$ ($q < 1$), ou $\frac{1-q}{1-q^{5/3}}$ ($q < 1$). Voire $\frac{1-q}{1-q^\gamma}$ avec $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{\beta}$. La limite est évidemment $\frac{1}{\gamma}$ si l'on fait fond sur la technique des développements limités de l'exponentielle et du logarithme. Celle-ci n'est pas présente chez Fermat qui ne s'en réfère pas moins aux logarithmes pour justifier (H'_3). De fait, il considère dans le cas parabolique qu'un segment comme AG est approchable lorsque $q < 1$ par $\frac{1}{q^n}$ GX, où GX est suffisamment petit et n suffisamment grand, c'est-à-dire qu'il considère GX comme l'unité de base et il gradue AG par une progression géométrique. Mais les segments successifs, différence de deux termes de la progression, peuvent être considérés comme égaux : tel est le principe de base pour la constitution d'une table où les logarithmes sont des entiers, table qui ne donne que des valeurs approchées. Dès lors, le rapport de deux termes quelconques de la progression elle-même sont précisément les rapports de leur rang respectif. Dans le cas hyperbolique, le principe est le même à partir de GH, sauf que le segment AD représenté par q^n AG, avec

[139]"*Fingantur termini progressionis geometricæ in infinitum extendendi, quorum primus sit AG, secundus AH, tertius AO, etc, in infinitum, et ad sese per approximationem tantum accedant quantum satis sit ut, juxta methodum Archimedeam, parallelogrammum rectilineum sub GE in GH quadrilineo mixto GHIE adæquetur, ut loquitur Diphantus, aut fere æquetur ; item, ut priora ex intervallis rectis proportionalium, GH, HO, OM et similia, sint fere inter se æqualia, ut commode per ἀπαγωγὴν εἰς ἀδύνατον, per circumscriptiones et inscriptiones, Archimedea demonstrandi ratio institui possit : quod semel monuisse sufficiat, ne artificium quibuslibet geometris jam satis notum inculcare sæpius et iterare cogamur*". Opus cité, p. 257.

[140] Nous avons déjà signalé que A. de Sarasa énonce la propriété des logarithmes à propos des aires sous l'hyperbole, mais quasiment sous la dictée de Grégoire de Saint-Vincent.

[141] Op. cité, p. 265.

q > 1, est infini. Mais cela n'est pas un handicap puisque le raisonnement part d'une approximation du logarithme. Autrement dit, Fermat gradue en logarithmes entiers AD aussi bien que AG. C'est maintenant que l'on comprend son insistance quant à la représentation linéaire (par des segments) de la somme des aires des parallélogrammmes ; cette représentation géométrique avait un but de calcul, le calcul logarithmique. Du coup, toute la démonstration prend son sens : on ne peut mieux manifester l'orientation numérique et algébrique donnée par Fermat au vieux résultat euclidien exprimé par la relation (5).

Conclusion

Dans aucun des textes étudiés, que ce soit chez Fermat ou Grégoire de Saint-Vincent, ne se présente l'algorithme du calcul intégral. Dans la préhistoire de ce calcul que nous venons d'évoquer, ce sont les liens entre le continu et le discret qui nous ont intéressé. Par l'intermédiaire de la même série géométrique et de sa sommation, nous pouvons constater que ces liens sont bien différents d'un Grégoire de Saint-Vincent à Fermat.

L'inscription du discret dans une courbe, chez Fermat, est éminemment faite pour dire le continu : la quadrature qui est visée n'est pas numérique, il y a effectivement un équivalent rectiligne, un carré égal à l'aire curviligne, hyperbolique ou parabolique. En ce sens, Grégoire de Saint-Vincent est plus réformiste qui recherche en tant que telles des relations entres des aires, sans avoir besoin de les connaître numériquement ou d'en trouver des équivalents géométriquement plus simples.

Comme Grégoire de Saint-Vincent, Fermat géométrise toutes ses constructions : les séries auxiliaires sont visualisées par des segments, les moyennes géométriques sont construites, etc. La géométrie est donc omniprésente chez les deux auteurs. C'est cependant une géométrie aplatie chez Fermat, une géométrie de la droite et de ses segments, bien proche d'une pratique des nombres réels, et du moins les raisons sont numérisées. La géométrie de Grégoire de Saint-Vincent est plus généreuse, avec deux ou trois dimensions, mais surtout la géométrie reste la visée et la théorie des proportions n'est pas réduite à une théorie des nombres.

Chez Fermat, le discret (représenté par la série géométrique) a acquis une autonomie propre ; s'il porte le calcul des proportions tout comme chez le jésuite belge, il comporte en soi sa légitimation.

Grégoire de Saint-Vincent a antérieurement agi dans ce même sens et sa nouvelle théorie de la somme d'une progression est totalement débarrassée de la géométrie, même si l'itération qui lui a donné naissance dépend d'une expérience géométrique. Par cette façon analytique, Grégoire a marqué les meilleurs esprits de son temps, alors que beaucoup d'autres, tels Barrow, sont constamment tentés par un retour à la géométrie. Cependant, Grégoire de Saint-Vincent n'a pas su ou pas voulu explorer le monde analytique qui s'ouvrait devant lui. Il est comme revenu en arrière, non sans prendre du plaisir à la contemplation de formes nouvelles.

L'adégalisation de Fermat pourrait certes bénéficier du même traitement de réduction à l'absurde dont Grégoire de Saint-Vincent fait une utilisation méticuleuse et comme privilégiée. Mais ce serait perdre son temps car l'opération de limite, confinée dans le texte étudié aux seules séries géométriques, fonctionne désormais d'elle-même. Ansi, alors que Fermat explore un infini dûment canalisé, Grégoire de Saint-Vincent aborde la profusion de l'infini généré par itération. Il s'y perd.