Le Volume de la Pyramyde par Eudoxe De Cnide

Michel Levard
Collège D. Huet, Saint Clair
IREM Basse Normandie

Le 23 mai 1992, tous n'étaient pas des mathématiciens. J'ai essayé de rédiger cet article pour ceux-là aussi.

Au V^ème siècle avant notre ère, une méthode proposée par le Cnidien, Eudoxe, permit la preuve de ce que maintenant nous appelons la formule du volume de la pyramide. Lointaine ancêtre des techniques de l'infinitésimal, appliquée plusieurs fois dans le livre XII des **Eléments** d'Euclide, elle évite nécessairement les processus démonstratifs infinis. Je propose de la faire ressortir par la comparaison de deux propositions, la deuxième et la cinquième. L'important énoncé de cette dernière proposition amena l'auteur à la preuve du résultat sur la pyramide à la septième proposition dont je donnerai un bref aperçu de sa démonstration bien qu'elle soit sans rapport avec toute discussion sur l'infini.

Aujourd'hui, un lycéen voit dans la formule $V = \frac{Bh}{3}$ l'occasion d'exercer ses connaissances sur les suites numériques [1] et le calcul

---

[1] $V = \frac{Bh}{3}$; B est l'aire de la base, h la hauteur de la pyramide. Le lycéen doit encadrer la pyramide par deux piles de prismes composées de n tranches extérieures, (n-1) intérieures. La somme des volumes S_n et s_n s'exprime alors par

$$S_n = \frac{Bh}{3} + \frac{Bh}{2n} + \frac{Bh}{6n^2} \; ; \; S_n = \sum_0^n \text{tranches extérieures}$$

$$s_n = \frac{Bh}{3} - \frac{Bh}{2n} + \frac{Bh}{6n^2} \; ; \; S_n = \sum_0^{n-1} \text{tranches intérieures} \; ; \; \text{donc, } \lim S_n = \lim s_n = \frac{Bh}{3}$$

L'argument de l'intégral s'obtient beaucoup plus facilement que les sommes ci-dessus.

$$\int_0^h \frac{Bt^2}{h^2}\,dt = \frac{Bh}{3}$$

intégral révèle au jeune étudiant un outil plus efficace encore; mais à chaque fois et au premier abord, l'infini présent dans ces deux techniques risque de leur faire l'effet d'un artifice dont ils devront peut être méditer un certain temps sur son utilisation avant de se débarrasser de leurs réticences et d'en admettre sa valeur démonstrative. A l'époque euclidienne les paradoxes de Xénon étaient déjà célèbres et leurs argumentations reposaient sur un emploi de l'infini qui bâtissait des conclusions absurdes. En conséquence, quiconque alors proposait un raisonnement crédible a dû s'astreindre à décrire des processus démonstratifs finis. Rejeté des démonstrations, l'infini n'était pas banni pour autant de toute activité mathématique. Environ un siècle après Euclide, en effet, Archimède nous a laissé ses théorèmes mécaniques où il a proposé d'appliquer un certain infini à la découverte de résultats purement mathématiques ; par exemple la quadrature de la parabole requiert une décomposition d'un triangle en l'infinité de ses droites. Mais si l'infini découvre, il ne prouve pas. La Syracusain connaissait les réticences de ses contemporains sur ce sujet. Il ne partageait pas complètement leurs doutes mais pour s'épargner une dispute sur la validité de ses résultats, il proposait comme preuve un raisonnement inspiré de celui d'Eudoxe, l'auteur du livre XII, où tous les processus démonstratifs sont finis. Cette technique mise au point par Eudoxe de Cnide nous a été transmise par Euclide dans **les Eléments** où elle apparaît pour la première fois dans la proposition (XII-2) [2]

Une tradition l'appelle parfois et à tort la méthode d'exhaustion. Ces deux méthodes ne sont pourtant pas semblables ; la deuxième due à Grégoire de St Vincent s'inspire de la première et la simplifie. Au XVIème siècle, les résultats du savant jésuite sur les progressions lui permirent cette révolution : substituer une sommation infinie, au rassurant mais prolixe double raisonnement par l'absurde d'Eudoxe. La technique du Cnidien, (je l'appellerai souvent la méthode d'Eudoxe), engage un processus d'exhaustion que la proposition (X-1) contrôle. G. de St Vincent le laisse filer à l'infini.

Deux méthodes, deux époques. Vingt deux siècles séparent les deux hommes et cette révolution marque autant la fin d'un monde que l'aurore d'une science nouvelle.

La méthode d'Eudoxe de Cnide, cependant, comporte deux imperfections. Leurs présences ne manquent pas de surprendre un

---

[2] Pour simplifier la rédaction je noterai l'expression "la proposition (XII-2)" par la simple parenthèse "(XII-2)". Je ferai de même pour d'autres propositions.

lecteur du cinquième livre des Eléments car si la seconde semble ignorer les résultats contenus dans cet autre ouvrage du Cnidien, la première y est apparue en (V-18).

L'attribution inconditionnelle à des surfaces dans (XII-2), ou à des volumes dans (XII-5), d'un quatrième terme pour compléter une proportion, autrement dit l'existence à tout coup d'une quatrième proportionnelle, ne repose ni sur un axiome, ni sur une proposition. C'est un principe implicite que semble avoir éludé l'esprit, pourtant inquisiteur, des grecs. La démonstration (VI-12), la seule solution au problème posé par la quatrième proportionnelle dans les **Eléments**, n'exprime surement pas une existence mais doit être lue pour ce qu'elle paraît : une construction d'un segment satisfaisant à la proportion souhaitée. La deuxième imperfection, plus subtile, se présente deux fois. La première fois au milieu de la démonstration pour établir l'inégalité:

$$\sum > \text{polygone E...N}$$

(je ne recopie pas toutes les lettres comprises entre E et N).

Euclide va déduire ce résultat des deux relations obtenues auparavant :

$$\frac{\text{Cercle A..}\Delta}{\Sigma} = \frac{\text{polygône A...P}}{\text{polygône E...N}} \text{ et cercle A..}\Delta > \text{polygône A..P}$$

Un lecteur du livre V s'attend à un appel de la proposition (V-14) :

$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ et si } a < c \text{ (ou si } a = c\text{) alors } b < d \text{ (ou } b = d\text{)}$$

(La notation actuelle souligne mieux l'adaptation de cette proposition au résultat cherché). Pourtant l'auteur choisit de permuter les moyens :

$$\frac{\text{Cercle A...}\Delta}{\text{polygone A..P}} = \frac{\Sigma}{\text{Polygone E..N}},$$

et appelle implicitement la proposition

$$\text{si } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \text{ et si } a > c \text{ alors } b > d$$

La deuxième fois quelques lignes avant la fin : "mais la surface est au cercle ABΓΔ comme le cercle EZHΘ est à une surface (T) plus petite que le cercle ABΓΔ". Phrase traduite en termes modernes par la proportion :

$$\frac{\Sigma}{\text{Cercle A..}\Delta} = \frac{\text{cercle E..}\Theta}{\text{T}}$$

A la lecture de cette phrase, une question se pose. Pourquoi la surface T est-elle plus petite ? La proposition (V-14) porte une réponse possible : sous l'hypothèse Σ > cercle E..Θ, elle implique T < cercle A..Δ . Apparamment Euclide ne choisit pas cette solution mais à la place, nous lisons une démonstration de l'inégalité T < cercle A..Δ dans le lemme placé après la proposition (XII-2). Ni Eudoxe, ni Euclide n'ont rédigé une telle réponse. Dans la proposition (XII-5) le lemme prétend résoudre une comparaison entre les termes d'une proportion analogue à celle citée au-dessus. Or il outrepasse ainsi ses capacités car la différence de nature entre les termes des deux proportions, des aires ici des volumes dans la proposition (XII-5), rend son emploi incongru et justifie son rejet des Eléments comme interpolé. Peut-on alors lui substituer la proposition (V-14) ? A la lecture des **Eléments** tels qu'ils nous sont parvenus, la réponse est affirmative ; à celle du livre I des **Coniques** d'Apollonius nous devenons prudents.

On trouve chez ce disciple d'Euclide, à la deuxième génération, une situation analogue à celles du livre XII des Eléments :

des hypothèses $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et a = c prouver que b = d.

La proposition (v-14) permet immédiatement de conclure. Pourtant Apollonius raisonne comme dans le livre d'Euclide, par permutation des moyens b et c ; puis

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ et a = c impliquent b = d.

L'usage était-il alors de permuter les termes d'une proportion afin de mettre en rapport ceux dont on avait apprécié la comparaison ? A la réflexion, la proportion permutée représente la voie la plus naturelle pour réaliser la comparaison des deux termes b et d. La validité du résultat ne dépend pas de la proposition (V-14), encore moins du lemme, mais simplement de la définition (V-5) d'une égalité de rapports. Je la rappelle en termes modernes :

$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ équivaut à : pour tout $(n,m) \in N^2$ na < mc => nb < md

ou na = mc => nb = md

ou na > mc => nb > md

En particulier avec n = m = 1
a < c => b < d ou a = c => b = d, etc, a pour signification évidente : si dans une proportion, on sait comparer les deux premiers termes, on compare immédiatement les suivants. Le lemme écarté, Eudoxe disposait donc de deux éléments pour justifier ses affirmations. Auxquels pensait-il quand il donnait la surface (T) plus petite que le cercle A..Δ ? A chacun sa réponse.

La proposition (XII-2) a suscité assez de commentaires récents pour m'épargner d'en ajouter un autre et me permettre de me restreindre au principe seul de cette démonstration. Pour compléter ce simple rappel, j'invite le lecteur à le comparer avec le canevas de la proposition (XII-5) dès qu'il l'aura connu. Cette mise en parallèle devrait lui fournir alors une meilleure compréhension de la méthode d'Eudoxe ; mais avant de poursuivre il me faut préciser quelques points d'écriture car j'ai choisi d'adopter des notations différentes pour rendre plus facile l'exposition du texte euclidien. Ainsi cercle (1) désignera, sans plus de distinction qu'Euclide, un disque de diamètre d_1 ou la mesure de son aire. Aucune confusion n'est à craindre, le contexte suffit à lever chaque fois l'ambiguité de la notation. Ceci dit la proposition, (XII-2) s'énonce alors en termes actuels :

$$\frac{\text{Cercle (1)}}{\text{Cercle (2)}} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

Avec la même ambiguité, polygone (1) dénote en plus un polygone inscrit dans le cercle (1). Dans les mêmes termes, la proposition (XII-1) s'énonce :

$$\frac{\text{polygône (1)}}{\text{polygône (2)}} = \frac{d_1^2}{d_2^2}$$

où le polygone (2) inscrit dans le cercle (2) est semblable au polygone (1).
Dans ces notations, la démonstration de la proposition (XII-2) se déroule ainsi : supposons les rapports $\frac{d_1^2}{d_2^2}$, $\frac{\text{cercle (1)}}{\text{cercle (2)}}$, inégaux et substituons à cercle (2) une surface (X) qui réalise la proportion :

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{\text{cercle (1)}}{\text{(X)}}$$

L'existence de (X), je le rappelle, ne se discute pas dans les **Eléments**. C'est un postulat implicite : (X) est une quatrième proportionnelle aux trois surfaces d_1^2; d_2^2 et cercle (1).

1ère hypothèse :(X) < cercle (2)

l'hypothèse fournit l'inégalité : cercle (2) - (X) < cercle (2)
Cercle (2) est le plus grand des deux termes ; le processus d'exhaustion [3] lui ôte des polygônes inscrits et aboutit à l'inégalité :

cercle (2) - polygone (2) < cercle (2) - (X)

C'est à dire :

(X) < polygone (2)

La suite va montrer l'inégalité stricte et contraire à celle-ci.
Le processus d'exhaustion aboutit à l'inégalité en un nombre fini d'étapes. De ce fait, polygone (2) a un nombre fini de côtés. Donc il existe un polygône (1) qui lui est semblable dans cercle (1). A la proportion posée en hypothèse, se joint alors celle de la proposition (XII-1) vue plus haut :

$$\frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{\text{cercle (1)}}{\text{(X)}} ; \frac{d_1^2}{d_2^2} = \frac{\text{polygone (1)}}{\text{polygone (2)}}$$

qui permettent l'égalité

$$\frac{\text{cercle (1)}}{\text{(X)}} = \frac{\text{polygone (1)}}{\text{polygone (2)}}$$

mais l'inégalité cercle (1) > polygône (1) (l'un est inscrit dans l'autre) implique l'inégalité contradictoire annoncée :

(X) > polygône (2) [4]

La première hypothèse est donc impossible.

INTERMEDE :
Revenons à l'inégalité supposée des rapports de l'énoncé. Un échange entre les deux cercles conduit à substituer à cercle (1) une surface (Y) qui satisfait la proportion :

$$\frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{\text{cercle (2)}}{\text{(Y)}}$$

[3] Je n'explique pas davantage le processus d'exhaustion ici pour ne pas charger le texte mais j'y reviendrai lors de la discussion de la proposition (XII-5).

[4] Bien que l'auteur ne l'ait pas utilisée, c'est une conséquence de (V-14) si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ et $a > c$ alors $b > d$.

Mutatis mutandis, l'impossibilité de l'hypothèse (Y) < cercle (1) se démontre d'une manière analogue.

2ème hypothèse : (X) > cercle (2)

Adjoignons aux grandeurs (X), cercle (1) et cercle (2) une surface (Y) pour réaliser la proportion :[5]

$$\frac{\text{(X)}}{\text{cercle (1)}} = \frac{\text{cercle (2)}}{\text{(Y)}}$$

La remarque suivante est importante :
l'inégalité posée en hypothèse, (X) > cercle (2), implique cette autre inégalité : cercle (1) > (Y)[6]
Rassemblons toutes les relations connues sous la 2ème hypothèse :

$$\frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{\text{(X)}}{\text{cercle (1)}} ; \frac{\text{(X)}}{\text{cercle (1)}} = \frac{\text{cercle (2)}}{\text{(Y)}} \text{ et cercle (1)} > \text{(Y)}$$

Celles-ci autorisent la conjonction :

$$\frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{\text{cercle (2)}}{\text{(Y)}} \text{ et cercle (1)} > \text{(Y)}$$

L'intermède a montré au lecteur l'absurdité.de cette conjonction, l'impossibilité de la 2ème hypothèse s'ensuit.

En conclusion, puisqu'une inégalité stricte entre (X) et cercle (2) ne tient pas, ces deux surfaces ont des aires égales. Le canevas de la démonstration de la proposition (XII-2) se clot ici.

Ce qui suit concerne la pyramide. L'égalité $V = \frac{1}{3}$ Bh qui suppose une mesure des grandeurs n'a pas de réalité dans l'antiquité. Le résultat prouvé par Eudoxe, découvert par Démocrite au témoignage d'Archimède, exprime un rapport équivalent à cette formule:

[5] L'auteur postule pour la seconde fois l'existence d'une 4ème proportionnelle (Y). La notation choisie exprès représente à priori une grandeur indépendante de celle de l'intermède.

[6] Implication démontrée par le lemme (XII-2) bien qu'une fois de plus la proposition (V-14) s'applique immédiatement ici.

La pyramide est la troisième partie (le tiers) d'un prisme qui a même base et même hauteur qu'elle[7] .
Les propositions (XII-1) et (XII-2) interviennent dans la preuve d'un rapport analogue entre le cône et le cylindre mais les résultats sur la pyramide rassemblés dans les propositions (XII-3) à (XII-7) ne les utilisent pas. Parmi celles-ci, seule la proposition (XII-5), prouvée aussi par la méthode d'Eudoxe, mérite une étude particulière. Elle énonce : "Les pyramides triangulaires de mêmes hauteurs sont dans le rapport de leurs bases".

Cet énoncé appliqué à des pyramides à bases égales (en aire) implique alors l'égalité des pyramides (en volume). Admettons-le, dépassons la proposition (XII-6) qui généralise l'énoncé (XII-5) aux pyramides à bases polygonales pour atteindre la proposition (XII-7) dont je résume la démonstration.

Soit une pyramide de base ABΔ et de sommet Γ dénotée (Γ-ABΔ) (fig.1). Qu'elle soit complétée par un prisme de même base et même hauteur (fig.2) Il vient

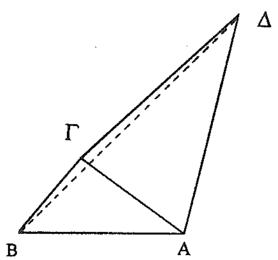


fig 1

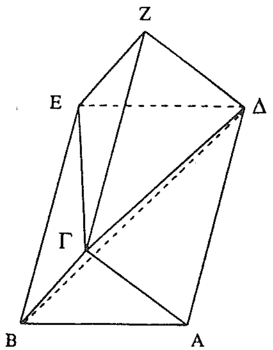


fig 2

(Γ-ABΔ) = (Γ-ΔEB) car les bases sont les moitiés d'un même parallélogramme
(Γ-ΔEB) = (Δ-EBΓ) la même pyramide vue d'un autre sommet
(Δ-EBΓ) = (Δ-ΓZE) car les bases sont les moitiés d'un même parallélogramme
(Δ-ΓZE) = (Γ-ΔZE) la même pyramide vue d'un autre sommet.
(XII-5) a donc permis d'établir les égalités :

[7] Traduction KAYAS : un énoncé actuel comprendrait les mots volumes et aires mais une fois encore le contexte est suffisamment clair pour lever l'ambiguité.

(Γ-ABΔ) = (Γ-ΔEB) = (Γ-ΔZE) ; le prisme ainsi décomposé en trois volumes, tous égaux à la pyramide initiale, prouve le résultat de Démocrite.

Le calcul intégral ou le découpage en tranches vus au début n'ont aucun point commun avec cette preuve. Ce même raisonnement élémentaire, ce même découpage fini en ses parties donnent aussi la formule $v = \frac{1}{3}$ Bh mais la simplicité s'arrête là. Toute l'argumentation repose sur la proposition (XII-5) dont l'énoncé apparemment facile ne foit pas leurrer. Sa preuve chemine sur une réelle difficulté et pour l'écrire aujourd'hui la voie la plus simple rencontre l'infini. Eudoxe s'arrête avant, il veut convaincre. Dans ce but le processus d'exhaustion évite la sommation de termes en nombre infini et fait de sa méthode un outil intellectuel adapté à son époque pour répondre à ce type de problème. Dans la démonstration de la proposition (XII-5), Eudoxe l'applique sous la forme d'une itération qui ôte des prismes d'une pyramide jusqu'à obtenir un reste plus petit qu'une quantité donnée. Je commencerai toutefois par décrire l'itération (XII-2) puisqu'elle n'a pas encore été expliquée; la description de celle utilisée dans la proposition (XII-5) suivra et leur comparaison révèlera mieux la voie suivie par le Cnidien.

L'étape initiale de la première itération est un segment de disque (fig 1). L'arc de cercle de longueur non nulle détermine en son milieu deux nouveaux segments (fig 2). L'ensemble des deux segments représente alors l'étape suivante. La longueur non nulle des arcs de chacun des éléments permet ensuite quatre segments, etc.

La similitude des éléments de chaque étape au segment initial, le passage d'une étape à l'autre par dichotomie rendent le procédé itératif.Mais Eudoxe connaît Zénon ; pour devenir un principe de démonstration, la dichotomie doit s'arrêter. Or, ici, le nombre des étapes nécessaires à l'argumentation échappe à l'entendement ;; l'originalité d'Eudoxe est d'avoir su trouver dans la proposition (X-1) le moyen de contourner la difficulté par un contrôle de l'itération : le nombre d'étapes n'est jamais infini.

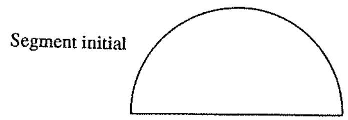


fig 1

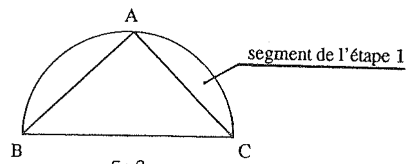


fig 2

Le contrôle mis en oeuvre à l'intérieur de la démonstration (XII-2) s'appuie sur une comparaison d'aires entre le segment de disque et le triangle résultant ABC (fig 2) à savoir : l'aire triangulaire est supérieure à la moitié de celle du segment entier. L'itération ne modifie jamais cette relation car les éléments de chaque étape sont des segments de disque semblables au segment initial. Le but de l'auteur, je le rappelle, est de déterminer une aire plus petite qu'une autre donnée par hypothèse. La suite fait appel à la proposition (X-1) dont l'énoncé est à peu près : si d'une grandeur nous ôtons au moins sa moitié (comme d'un segment de disque le triangle résultant) ; puis du reste obtenu au moins sa moitié, (comme des deux nouveaux segments de disque les deux triangles résultants), et que l'on poursuive toujours ainsi, alors un nombre fini d'ablations suffit pour obtenir un reste plus petit que toute grandeur donnée par avance. En termes modernes :

si b et $a > b$ sont donnés, alors la suite

$$a \;;\; a-\frac{1}{2}.a=\frac{a}{2} \;;\; \frac{a}{2}-\frac{1}{2}.\frac{a}{2}=\frac{a}{4} \;;\; \frac{a}{4}-\frac{1}{2}.\frac{a}{4}=\frac{a}{8} \;;\ldots;\; \frac{a}{2}\,n \;;\text{etc}$$

aboutit nécessairement à $\frac{a}{2}n < b$ pour un nombre n fini.

Le processus d'exhaustion de la proposition (XII-2) connu, la description de celui de la proposition (XII-5) s'exprime dans la lignes qui suivent.

L'étape initiale est une pyramide (fig 3). Les arêtes de longueur non nulle déterminent par leurs milieux deux nouvelles pyramides (fig 4). L'ensemble de ces deux pyramides représente alors l'étape suivante. La longueur non nulle des arêtes de chacun des éléments permet ensuite quatre pyramides, etc.

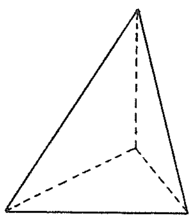


fig 3

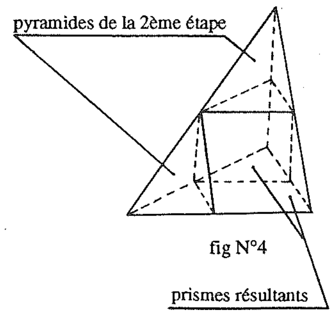


fig N°4

La ressemblance avec l'itération vue plus haut est claire ; au segment de disque correspond une pyramide, au triangle résultant un couple de prismes. Je le nomme couple résultant. Correspondance géométrique mais aussi métrique : l'auteur démontre dans la proposition (XII-3) l'égalité, en volume, des deux prismes entre eux et la supériorité de leurs volumes pris ensemble à la moitié de celui de la pyramide dont ils sont issus.

Le parallélisme se poursuit dans l'application des processus d'exhaustion : le nombre des segments de disque apparus tout au long de l'itération suit la progression 1 ; 2 ; 4 ; 8 ; ..; 2^n ; etc, que vérifient aussi les triangles résultants. Enfin les restes successifs du segment initial après ablation des triangles se laissent décrire sous la forme :

Segment initial - (1 triangle) ;
Segment initial - (1 + 2) triangles résultants ;
Segment initial - (1 + 2 + 4) triangles résultants ; etc.
Donc le reste s'écrit en général :
Segment initial - (somme des triangles résultants apparus)
Une même situation se présente avec les pyramides :

Le nombre de pyramides apparues tout au long de l'itération suit la progression 1 ; 2 ; 4 ; ..; 2^n ; etc, que vérifient aussi les couples résultants de prismes. Les restes successifs de la pyramide initiale après ablation des couples acceptent une description identique :

pyramide initiale - 1 couple de prismes ;
pyramide initiale - (1 + 2) couples ;
pyramide initiale - (1 + 2 + 4) couples ; etc
d'où l'écriture plus générale :
pyramide initiale - (somme des prismes résultants apparus).

Les parties techniques sont maintenant expliquées et il me reste encore à énoncer la proposition (XII-4) mais avant j'ai besoin de préciser mes notations : pyramide (1) dénote une pyramide de base, base (1), ou son volume. L'expression "somme des prismes résultants (1) apparus" traduit le volume représenté par les prismes apparus lors de l'application du processus d'exhaustion dans la pyramide (1).

La proposition (XII-4) énonce :

Soient deux pyramides de même hauteur, pyramide (1) et pyramide (2).

L'itération décrite plus haut, appliquée un même nombre de fois dans chacune des deux pyramides autorise la proportion :

$$\frac{\text{base (1)}}{\text{base (2)}} = \frac{\text{somme des prismes résultants (1) apparus}}{\text{somme des prismes résultants (2) apparus}}$$

Ce résultat joue dans la démonstration (XII-5) le rôle tenu par la proposition (XII-1) dans la démonstration (XII-2).
Je rappelle l'énoncé de la proposition (XII-5): Les pyramides triangulaires de mêmes hauteurs sont dans le rapport de leurs bases.
En termes modernes et pour deux pyramides :

$$\frac{\text{pyramide (1)}}{\text{pyramide (2)}} = \frac{\text{base (1)}}{\text{base (2)}}$$

Comme dans la démonstration décrite auparavant, supposons pour la preuve de la proposition (XII-5) les rapports inégaux et substituons à pyramide (2) un volume (X) qui réalise la proportion :

$$\frac{\text{base (1)}}{\text{base (2)}} = \frac{\text{pyramide (1)}}{\text{(X)}}$$

1ère hypothèse : (X) < pyramide (2)
L'hypothèse fournit l'inégalité : pyramide (2) - (X) < pyramide (2)
Pyramide (2) est le plus grand des deux termes ; le processus d'exhaustion lui ôte des couples de prismes et aboutit à l'inégalité :

pyramide (2) - (somme des prismes résultants (2) apparus)
< pyramide (2) - (X)

c'est à dire :
(X) < somme des prismes résultants (2) apparus.

La suite va montrer l'inégalité stricte et contraire à celle-ci.

Le processus d'exhaustion aboutit à l'inégalité après un nombre fini d'itérations. Le même nombre d'itérations appliquées à la pyramide (1) nous met en présence de la proportion démontrée dans la proposition (XII-4) :

$$\frac{\text{base (1)}}{\text{base (2)}} = \frac{\text{somme des prismes résultants (1) apparus}}{\text{somme des prismes résultants (2) apparus}}$$

qui jointe à la proportion :

$$\frac{\text{base (1)}}{\text{base (2)}} = \frac{\text{pyramide (1)}}{\text{(X)}}$$

donne :

$$\frac{\text{pyramide (1)}}{\text{(X)}} = \frac{\text{somme des prismes résultants (1) apparus}}{\text{somme des prismes résultants (2) apparus}}$$

mais l'inégalité pyramide (1) < somme des prismes résultants (1) apparus (les prismes sont ôtés de la pyramide) implique l'inégalité contradictoire annoncée :
(X) > somme des prismes résultants (2) apparus.

INTERMEDE

Un retour à l'inégalité supposée des rapports de l'énoncé et un échange entre les deux pyramides conduit à substituer à pyramide (1) un volume (Y) qui satisfait la proportion :

$$\frac{\text{base (2)}}{\text{base (1)}} = \frac{\text{pyramide (2)}}{\text{(Y)}}$$

Mutatis mutandis, l'impossibilité de l'hypothèse (Y) < pyramide (1) se démontre d'une manière analogue.

2ème hypothèse : (X) > pyramide (2)

Adjoignons aux grandeurs (X), pyramide (1) et pyramide (2) un volume (Y) pour réaliser la proportion :

$$\frac{\text{(X)}}{\text{pyramide (1)}} = \frac{\text{pyramide (2)}}{\text{(Y)}}.$$

La remarque suivante est importante :
l'inégalité posée en hypothèse, (X) > pyramide (2), implique cette autre inégalité : pyramide (1) >(Y)[8].

Rassemblons toutes les relations connues sous la 2ème hypothèse :

$$\frac{\text{base (2)}}{\text{base (1)}} = \frac{\text{(X)}}{\text{pyramide (1)}} \; ; \; \frac{\text{(X)}}{\text{pyramide (1)}} = \frac{\text{pyramide (2)}}{\text{(Y)}}$$

[8] Le lemme (XII-2) invoqué à cet endroit outrepasse ses possibilités : ici les termes de la proportion sont des volumes.

et pyramide (1) > (Y).

Celles-ci autorisent la conjonction :

$$\frac{\text{base (2)}}{\text{base (1)}} = \frac{\text{pyramide (2)}}{\text{(Y)}} \text{ et pyramide (1)} > \text{(Y)}$$

L'intermède a montré au lecteur l'absurdité de cette conjonction. L'impossibilité de la 2ème hypothèse s'ensuit.

De la comparaison des deux propositions, la cinquième et la deuxième, deux principes ressortent autour desquels Eudoxe bâtit ses démonstrations.. L'un, apporté par la proposition (X-1), apparaît comme la clé de voute de la méthode permettant l'arrêt du processus d'exhaustion. La validité de cette proposition entraînant celle de la méthode d'Eudoxe, repose sur l'axiome dit d'Archimède qui attribue à certaines grandeurs de même nature, des longueurs, des aires ou des volumes, la propriété de se surpasser mutuellement : une plus petite longueur a toujours un certain multiple supérieur à une plus grande ; une plus petite aire a toujours, etc. La quatrième proportionnelle, le second principe, correspond plutôt a une pierre de fondation. Discutée, l'édifice eudoxien s'ébranle, niée il s'effrondre.

A ce que nous savons, ce ne fut jamais le cas pour les grandeurs. Pour les nombres, entiers et positifs, son existence est discutée dans le livre VII où les conditions de son attribution à trois nombres sont données. Qualité générale des grandeurs, particulière avec les nombres ; toute la différence tient en ces deux mots : discret ou continu.

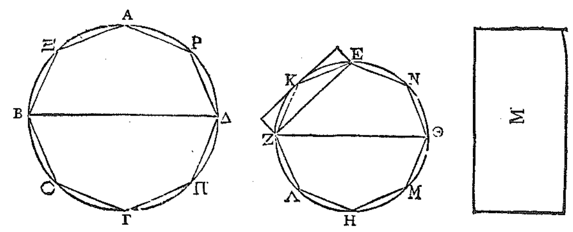
Mais il semble raisonnable de voir dans la discution de l'existence d'une quatrième proportionnelle un débat sur la continuité des grandeurs s'ouvrir sur des questions trop au delà des connaissances grecques pour être sérieusement posées. Aussi, d'une validité impeccable pour ses contemporains, la méthode du Cnidnien sera reconnue, jusqu'au XVI siècle, comme exemplaire pour argumenter les preuves de résultats devinés ou trouvés par des voies impropres à la démonstration rigoureuse.

LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION II.

Les cercles sont entr'eux comme les quarrés de leurs diamètres.

Soient les cercles ABΓΔ, EZHΘ, et que leurs diamètres soient BΔ, ZΘ; je dis que le quarré de BΔ est au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est au cercle EZHΘ.

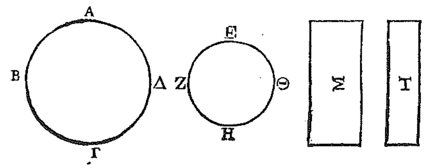


Car si le quarré de BΔ n'est pas au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est au cercle EZHΘ, le quarré BΔ sera au quarré de ZΘ comme le cercle ABΓΔ est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle EZHΘ. Que ce soit d'abord à une surface Σ plus petite. Dans le cercle EZHΘ décrivons le quarré EZHΘ; le quarré décrit sera plus grand que la moitié du cercle EZHΘ, parce que, si par les points E, Z, H, Θ nous menons des tangentes à ce cercle, le quarré EZHΘ sera la moitié du quarré circonscrit au cercle (47. 11 et 31. 3). Mais le cercle est plus petit que le quarré circonscrit; le quarré inscrit EZHΘ est donc plus grand que la moitié du cercle EZHΘ. Partageons les arcs EZ, ZH, HΘ, ΘE en deux parties égales aux points K, Λ, M, N, et joignons EK, KZ, ZΛ, ΛH, HM, MΘ, ΘN, NE. Chacun des triangles EKZ, ZΛH, MHΘ, ΘNE est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé; parce que si par les points K, Λ, M, N nous menons des tangentes au cercle, et si sur les droites EZ, ZH, HΘ, ΘE nous construisons des parallélogrammes, chacun des triangles EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘNE sera la moitié du parallélogramme dans lequel il est placé (37. 1). Mais un segment est plus petit que le parallélogramme où il est placé; chacun des triangles EKZ, ZΛH, HMΘ, ΘNE est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé. Si nous partageons les arcs restants en deux parties égales; si nous joignons leurs extrémités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercles dont la somme sera moindre que l'excès du cercle ΕΖΗΘ sur la surface Σ; car nous avons démontré dans le premier théorème du dixième livre que, deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs exposées. Qu'on ait ce reste, et que ce soient les segments du cercle ΕΖΗΘ placés sur les droites ΕΚ, ΚΖ, ΖΛ, ΛΗ, ΗΜ, ΜΘ, ΘΝ, ΝΕ, et qu'ils soient plus petits que l'excès du cercle ΕΖΗΘ sur la surface Σ; le polygone restant ΕΚΖΛΗΜΘΝ sera plus grand que la surface Σ. Décrivons dans le cercle ΑΒΓΔ un polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ semblable au polygone ΕΚΖΗΝΜΘΝ; le quarré de ΒΔ sera au quarré de ΖΘ comme le polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ (1. 12). Mais le quarré de ΒΔ est au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à la surface Σ; le cercle ΑΒΓΔ est donc à la surface Σ comme le polygone ΑΞΒΟΓΠΔΡ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ; donc, par permutation, le cercle ΑΒΓΔ est au polygone qui lui est inscrit comme la surface Σ est au polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Mais le cercle ΑΒΓΔ est plus grand que le polygone qui lui est inscrit; la surface Σ est donc plus grande que le polygone ΕΚΖΛΗΜΘΝ. Mais il est aussi plus petit, ce qui est impossible; le quarré de ΒΔ n'est donc point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ. Nous démontrerons semblablement que le quarré de ΖΘ n'est point au quarré de ΒΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Je dis ensuite que le quarré de ΒΔ n'est point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande que le cercle ΕΖΗΘ. Car si cela est possible, que le quarré de ΒΔ soit au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface Σ plus grande. Par inversion, le quarré de ΖΘ sera au quarré de ΒΔ comme la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ. Mais la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ; le quarré de ΖΘ est donc au quarré de ΒΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ, ce qui a été démontré impossible; le quarré de ΒΔ n'est donc pas au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus grande que le cercle ΕΖΗΘ. Mais on a démontré que le quarré de ΒΔ n'est point au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à une surface plus petite que le cercle ΕΖΗΘ; le quarré de ΒΔ est donc au quarré de ΖΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est au cercle ΕΖΗΘ. Donc, etc.

LE DOUZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

LEMME.

Je dis que si la surface Σ est plus grande que le cercle ΕΖΗΘ, la surface Σ sera au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ.

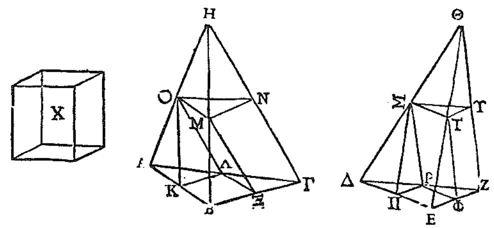


Car que la surface Σ soit au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface Τ; je dis que la surface Τ est plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Car puisque la surface Σ est au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à la surface Τ, par permutation, la surface Σ sera au cercle ΕΖΗΘ comme le cercle ΑΒΓΔ est à la surface Τ (16. 5). Mais la surface Σ est plus grande que le cercle ΕΖΗΘ; le cercle ΑΒΓΔ est donc plus grand que la surface Τ; la surface Σ est donc au cercle ΑΒΓΔ comme le cercle ΕΖΗΘ est à une surface plus petite que le cercle ΑΒΓΔ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION V.

Les pyramides triangulaires qui ont la même hauteur sont entr'elles comme leurs bases.

Que les pyramides dont les bases sont les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, et dont les sommets sont les points Η, Θ, ayent la même hauteur; je dis que la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΖΘ.



Car si la base ΑΒΓ n'est pas à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΖΘ; la base ΑΒΓ sera à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide plus petit que la pyramide ΔΕΖΘ ou à un solide plus grand. Que ce soit d'abord à un solide Χ plus grand; divisons la pyramide ΔΕΖΘ en deux pyramides égales entr'elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux; les deux prismes seront plus grands que la moitié de la pyramide entière (3. 12). Que les pyramides engendrées par cette division soient divisées de la même manière, et faisons toujours cela jusqu'à ce qu'il nous reste de la pyramide ΔΕΖΘ certaines pyramides qui soient plus petites que l'excès de la pyramide ΔΕΖΘ sur le solide X. Cherchons ces pyramides, et qu'elles soient par exemple ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ; les prismes restants de la pyramide ΔΕΖΘ seront plus grands que le solide X. Divisons semblablement la pyramide ΑΒΓΗ en autant de parties que la pyramide ΔΕΖΘ; la base ΑΒΓ sera à la base ΔΕΖ comme les prismes de la pyramide ΑΒΓΗ sont aux prismes de la pyramide ΔΕΖΘ (4. 12). Mais la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est au solide X; la pyramide ΑΒΓΗ est donc au solide X comme les prismes de la pyramide ΑΒΓΗ sont aux prismes de la pyramide ΔΕΖΘ; donc, par permutation, la pyramide ΑΒΓΗ est aux prismes qu'elle renferme comme le solide X est aux prismes de la pyramide ΔΕΖΘ. Mais la pyramide ΑΒΓΗ est plus grande que les prismes qu'elle renferme; le solide X est donc plus grand que les prismes que renferme la pyramide ΔΕΖΘ. Mais, au contraire, il est plus petit; ce qui est impossible; la base ΑΒΓ n'est donc point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide quelconque plus petit que la pyramide ΔΕΖΘ. Nous démontrerons semblablement que la base ΔΕΖ n'est point à la base ΑΒΓ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ. Je dis enfin que la base ΑΒΓ n'est point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ. Car, si cela est possible, que ce soit à un solide X plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ; donc, par inversion, la base ΔΕΖ sera à la base ΑΒΓ comme le solide X est à la pyramide ΑΒΓΗ. Mais le solide X est à la pyramide ΑΒΓΗ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ, ainsi que cela est démontré; la base ΔΕΖ est donc à la base ΑΒΓ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide quelconque plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ, ce qui a été démontré absurde; la base ΑΒΓ n'est donc point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide quelconque plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ. Mais on a démontré que ce n'est point non plus à un solide X plus petit; la base ΑΒΓ est donc à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΖΘ. Donc, etc.

BIBLIOGRAPHIE

EUCLIDE : Les Eléments, texte grec et traduction française libre par G.J Kayas, CNRS, Paris : 1978. Traduction française par F.Peyrard : 1819.

BARBIN E: Heuristique et démonstration en mathématique : La méthode des Indivisibles au XVII siècle. Article paru dans les Fragments d'Histoire des Mathématiques II. Brochure APMEP N° 65.

GREGOIRE M. Le mystère de la pyramide. Article paru dans la démonstration mathématique dans l'histoire : ed IREM de Besançon et IREM de Lyon.

LE GOFF J.P : De la méthode dite d'exhaustion : Grégoire de Saint-Vincent. Article paru dans la démonstration mathématique dans l'histoire. Ed. IREM de Besançon et IREM de Lyon.