De la difficulté d'être omniscient

Henri Lombardi
Université de Franche-Comté
(URA CNRS 741)

Le moyen fait partie de la recherche de la vérité, aussi bien que le résultat. Il faut que la recherche de la vérité soit elle-même vraie; la recherche vraie, c'est la vérité déployée, dont les membres épars se réunissent dans le résultat.

Karl Marx, cité par Georges Perec dans *Les Choses*

Résumé

Depuis les résultats de consistance relative de l'axiome de choix et de sa négation, de l'hypothèse du continu et de sa négation, il est difficile d'accorder foi au réalisme platonicien selon lequel un Univers Mathématique Cantorien (ou plutôt Zermelo-Frankelien) existe de manière idéale quelque part, garant du sens des énoncés mathématiques cantoriens usuels . Pour Gödel, par exemple, qui défend ce point de vue, on doit un jour trouver des axiomes raisonnables qui permettront de décider l'hypothèse du continu. Mais est-ce vraiment un programme raisonnable ?

La contradiction entre l'axiome du choix et l'axiome de détermination pose un problème plus délicat encore, celui de l'impossibilité d'être omniscient en ce qui concerne l'infini actuel, s'il existe. On peut interpréter ce paradoxe en disant qu'il est impossible de vouloir extrapoler du fini à l'infini tout ce qui semble raisonnable dans le domaine fini.

Dans l'article, après avoir situé les problèmes soulevés, on essaiera de montrer comment une problématique d'infini potentiel relativise ces problèmes et change l'interprétation même du vocabulaire ensembliste.

Introduction

Les affirmations du langage courant se prêtent très mal à la logique du Vrai et du Faux. Lorsqu'on dit par exemple : «Ceci est une grosse pomme» la limite entre Vrai et Faux est entourée d'une zone de flou importante. Tout d'abord concernant la partie "ceci est une pomme" (s'il manque la queue ? si elle est coupée en deux, si on a enlevé les pépins, etc...) et aussi concernant l'affirmation que la pomme est "grosse".

En un certain sens on peut dire que l'homme a inventé des êtres mathématiques abstraits tels que "les nombres" ou "le plan euclidien" de manière à pouvoir raisonner "sans ambiguïté de sens", c'est-à-dire de manière à pouvoir raisonner avec une logique du Vrai et du Faux. Une fois définies les opérations élémentaires sur les nombres entiers une affirmation telle que :

> si p est un nombre premier et si r est un entier $< p$, alors le nombre $r^{p-1} - 1$ est divisible par p

est vraie, et on peut en donner une démonstration parfaitement convaincante.

Cependant l'introduction par Cantor des ensembles infinis dans les mathématiques a jeté une certaine confusion au sujet de la notion de Vrai et Faux. La question du Vrai et du Faux se pose en effet de manière différente selon qu'un énoncé mathématique est testable par un processus fini ou par un processus infini, ou encore par une infinité en cascade de processus infinis, ou même par des processus encore plus "mystérieux".

On pourrait croire que l'infini en mathématiques existait bien avant Cantor, dès que la notion de nombre entier fut mise au point. La collection des entiers naturels, en effet, a la particularité de n'être "jamais finie".

En fait, avant Cantor, personne n'avait eu l'audace de considérer "l'ensemble de tous les entiers naturels" comme une totalité donnée, actuelle. L'esprit humain, en effet, ne peut appréhender qu'un nombre fini d'objets, les uns après les autres.

Avant Cantor donc, la collection des entiers naturels était seulement un infini en puissance, un infini "potentiel" et non "actuel". Lorsqu'on parle d'infini potentiel, ce que l'on a clairement en tête, c'est ***le processus*** qui permet de passer de l'entier n à l'entier $n + 1$, processus qui fait que la collection des entiers n'est jamais finie.

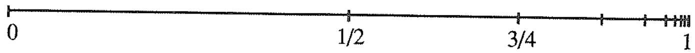
La croyance en un infini actuel équivaut en fait de manière quasiment logique à la croyance en un "Dieu mathématicien"

capable, lui, d'appréhender "d'un seul coup" l'ensemble de tous les entiers naturels. C'est ce que nous essayerons d'illustrer dans cet article.

Les philosophes grecs ne croyaient pas en l'infini actuel, ou tout au moins s'en interdisaient l'usage en mathématiques.

Zénon d'Elée, à sa manière et à juste titre, avait soulevé la contradiction existant entre l'homme et "Dieu" puisque "Dieu" est capable de diviser en un temps fini (en une seconde !) l'intervalle de temps constitué par 1 seconde en une infinité de subdivisions, alors que l'homme n'arrive *jamais* au bout de la description complète de cette "subdivision à l'infini", ni en une seconde, ni en un siècle.

Un paradoxe de Zénon



*Y a-t-il **VRAIMENT** une infinité d'instants "en acte" entre l'instant 0 et l'instant 1 ?*

La solution proposée par les Grecs et acceptée jusqu'à Cantor : *Seul l'infini potentiel est autorisé en mathématiques.*

De même Euclide, dans ses Eléments, ne considère pas "un espace infini à 3 dimensions" mais seulement "un espace à 3 dimensions qui n'est jamais fini". Il ne considère pas "l'ensemble de tous les entiers naturels" mais seulement "des entiers naturels" (collection ouverte, jamais finie). Il ne considère pas "l'ensemble des nombres réels" mais se contente de comparer entre eux des rapports de grandeurs homogènes qui viennent se présenter à lui dans sa quête géométrique. Interprétation en langage moderne : deux rapports sont égaux selon Eudoxe[1] si et seulement si ils définissent des coupures égales selon Dedekind. Mais Euclide se refuse à considérer la coupure en tant que telle, elle représenterait un infini actuel. A fortiori refuse-t-il de considérer l'infini actuel de telles coupures.

---

[1] On attribue à Eudoxe la théorie des proportions mise au point par les Grecs pour faire face aux problèmes des grandeurs "sans commune mesure" comme le côté et la diagonale d'un carré.

La notion d'infini mathématique actuel s'est avérée extrêmement "pratique" et a été adoptée par la majorité des mathématiciens.

Cependant, le prix à payer est en fin de compte assez cher. En effet, les notions logiques de base, qui ne posent pas problème lorsqu'elles sont utilisées pour des propriétés bien définies portant sur des collections finies d'objets mathématiques, ne peuvent s'appliquer aux propriétés concernant des ensembles infinis qu'au prix d'une extrapolation douteuse.

La question du tiers exclu pour des énoncés du type de la conjecture de Goldbach

La conjecture de Goldbach est la suivante :

Tout entier pair supérieur à 4 est somme de 2 nombres premiers.

Nous sommes tellement habitués à raisonner avec l'infini actuel comme avec le fini, que si vous lisez :

La conjecture de Goldbach est forcément vraie ou fausse

vous avez l'impression de lire une trivialité.

Or ce n'est pas du tout une trivialité.

Dire que la conjecture est fausse c'est dire qu'on peut trouver un entier pair supérieur à 4 qui n'est pas somme de 2 nombres premiers. Donc il suffit d'une vérification pour montrer que la conjecture est fausse.

Par contre dire que la conjecture est vraie c'est signifier, ou bien qu'on en possède une démonstration convaincante, ou bien qu'il faut faire une infinité de vérifications. Or non seulement l'homme ne sait pas faire une infinité de vérifications, mais on peut penser qu'une infinité de vérifications est a priori hors des "capacités de calcul de l'univers". Autrement dit, une "machine à calculer infinie" semble inconcevable. Même si l'univers avait une durée de vie infinie et si une machine à calculer pouvait être construite qui dispose de l'éternité du temps à venir, la conjecture de Goldbach ne serait pourtant "jamais vérifiée en entier".

Maintenant supposez que la situation concrète soit la suivante

– l'homme ne trouvera jamais de démonstration convaincante de la conjecture,
– l'homme ne trouvera jamais de contre-exemple prouvant que la conjecture est fausse.
– il ne peut exister de machine à calculer infinie

Alors dans ce cas, seul un "Dieu mathématicien" (s'il existe) peut dire que la conjecture est forcément vraie ou fausse.

Vous direz sans doute que je coupe des cheveux en quatre. En fait je souligne seulement qu'il n'est pas du tout trivial de considérer que la loi du tiers exclu s'applique aux ensembles infinis, même dans le cas d'un énoncé dont la structure est extrêmement simple.

Le coup de génie de Cantor a été de transformer la fameuse démonstration d'impossibilité «l'infini actuel ne peut exister en mathématiques puisque le tout doit toujours être supérieur à la partie» en une définition d'existence «j'appelle infini un tout qui est en bijection avec l'une de ses parties». Cet acte fondateur est le refus d'admettre comme définitive une évidence qui a lieu dans le domaine du fini. Mais d'autres évidences qui ont lieu dans le domaine du fini, comme le tiers exclu, sont alors ipso facto elles-mêmes sujettes à caution et à discussion. Si j'appelle distribution la dérivée d'une fonction continue non dérivable, je dois bien évidemment m'attendre à ne pas pouvoir faire avec les distributions tout ce que j'avais le droit de faire avec les fonctions continues. Et celui qui ne prendrait pas de précautions de peur de se faire accuser de couper les cheveux en quatre serait sûrement accusé de laxisme.

Reprenons en le détaillant, ce genre d'extrapolation, du fini à l'infini, qui se cache derrière la phrase : «La conjecture de Goldbach est forcément vraie ou fausse»

Notons «$A(n)$» pour « $2n + 4$ est somme de 2 nombres premiers »

L'affirmation $A(n)$ peut être testée pour tout entier n . En effet l'affirmation $A(n)$ est parfaitement décidable puisqu'on dispose d'un processus effectif qui permet de calculer tous les nombres premiers inférieurs à $2n + 4$. On est donc assuré que $A(n)$ est "Vrai ou Faux" en un sens fort[2] , pour chaque entier n . Cela s'écrit en langage formalisé constructif :

(1) $\forall n \in \mathbb{N}$ (A(n) ou non A(n))

Dire que la conjecture de Goldbach est forcément vraie ou fausse consiste à affirmer :

(2) $\forall n \in \mathbb{N}$ A(n) ou $\exists n \in \mathbb{N}$ non A(n)

Le fait qu'un énoncé du type (1) implique l'énoncé correspondant du type (2) est, du point de vue de l'interprétation constructive de la vérité, un *principe d'omniscience*. Dans la littérature constructive, on l'appelle «le petit principe d'omniscience».[3]

Ce principe est couramment admis par les mathématiciens actuels, en général au nom du réalisme platonicien : il y aurait, quelque part, au moins de manière idéale, un ensemble infini actuel des entiers naturels, pour lequel la logique du tiers exclu s'applique tout comme dans les ensembles finis.

C'était en tout cas le point de vue de Gödel, qui étendait d'ailleurs le réalisme platonicien à toute la hiérarchie cumulative des ensembles.

---

2 Il est vrai que pour un entier dépassant 10^{100} chiffres, la possibilité de vérifier A(n) semble excéder à jamais en pratique nos capacités de calcul. Néanmoins, on peut considérer que cette possibilité n'est pas exclue en principe mais seulement en pratique. Admettre qu'un énoncé du type A(n) peut, au moins en principe, être testé vrai ou faux pour tout entier n relève de l'“extrapolation du potentiellement réalisable”. Dans ce genre d'extrapolation, on extrapole un résultat vrai depuis le fini raisonnable jusqu'au fini même déraisonnable, mais on reste dans un cadre fini.

3 Ce principe d'omniscience peut être compris et discuté sans recours à aucun système formel. Dans les systèmes formels classiques, on admet le principe du tiers exclu, qui est une sorte de méga principe d'omniscience. Dans de tels systèmes formels, aussi bien les énoncés du type (1) que les énoncés du type (2) sont des théorèmes, et donc a fortiori les énoncés du type (1)$\Rightarrow$(2). Dans un système formel constructif, il n'y a pas de preuve générale des énoncés (1)$\Rightarrow$(2). Néanmoins, si on rajoute le schéma d'axiome (1)$\Rightarrow$(2). on obtient un système formel où le tiers exclu n'est pas pour autant valable. D'autres principes d'omniscience, plus faibles ou plus forts que le «le petit principe d'omniscience» peuvent être discutés. Le degré de non-effectivité des théorèmes usuels de mathématiques classiques peut être analysé en référence à un nombre relativement restreints de tels principes d'omniscience.

Le réalisme platonicien

Un ensemble infini “en acte” $\mathbb{N}$ *existe, au moins de manière idéale, et, dans cet ensemble, la logique du “Vrai ou Faux”, valable pour les ensembles finis, s'applique tout aussi bien.*

Ce réalisme platonicien semble difficile à distinguer de la croyance en un “Dieu mathématicien connaissant la vérité de tous les énoncés sensés concernant les entiers naturels”.

Une autre approche était celle de Hilbert, qui pensait pouvoir réduire le recours aux ensembles infinis à une simple “manière de parler”, un peu comme lorsqu'on dit «$\sqrt{-3}$ est un nombre» ou encore «toute fonction continue est dérivable (au sens des distributions)». En ce sens l'énoncé (2) peut évidemment être décrété «Vrai de manière purement conventionnelle», mais alors le mot «Vrai» est privé de sa signification habituelle.

Le problème est alors de démontrer, (au sens de : emporter la conviction intime), que les preuves purement formelles qu'on déroule n'aboutissent jamais à affirmer vraies des propositions douées d'une signification concrète précise et cependant fausses dans la réalité.

La solution formaliste (Hilbert)

On introduit $\mathbb{N}$ *comme “manière de parler”, (exactement comme* $\sqrt{-3}$*), on raisonne avec la logique du “Vrai ou Faux” valable pour les ensembles finis.*

On prouve, par une argumentation séparée, qu'un théorème démontré “idéalement vrai” n'est jamais “concrètement faux”.

Le programme de Hilbert sous sa forme la plus stricte (Hilbert demandait que la preuve de consistance du système formel considéré soit d'un type particulièrement élémentaire) a été ruiné par le théorème d'incomplétude de Gödel. Néanmoins, on peut considérer qu'il a été réalisé pour l'essentiel, sous une forme légèrement affaiblie, pour la théorie formelle «arithmétique de Peano», notée PA, qui se limite à décrire les entiers naturels à un niveau assez élémentaire.

Par contre, le programme de Hilbert n'a jamais été réalisé pour la théorie des ensembles infinis actuels de Cantor, formalisée aujourd'hui dans le système axiomatique noté ZF [4], ni même pour ce qui concerne des théories, beaucoup moins puissantes que ZF, qui cherchent à décrire ne serait-ce que l'ensemble des parties de $\mathbf{N}$.

La solution constructive

On introduit $\mathbf{N}$ *comme "infini potentiel".*
On raisonne avec une logique absolument sûre.
Tout théorème démontré a une signification algorithmique.

Outre que le programme de Hilbert semble totalement hors de notre portée en ce qui concerne ZF, il est extrêmement désagréable de démontrer des théorèmes avec l'arrière pensée qu'ils n'ont pas de signification réelle, c'est pourquoi la philosophie spontanée des mathématiciens est le réalisme platonicien à la Gödel plutôt que le formalisme à la Hilbert.

L'hypothèse du continu a-t-elle une signification ?

Nous abordons dans cette section un domaine véritablement au delà de l'arithmétique, faisant partie du noyau dur de la théorie des ensembles infinis actuels.

L'hypothèse du continu est l'affirmation suivante (notée HC) :
il n'existe dans l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$ *aucune partie* A *qui contienne les entiers naturels, et qui ne puisse être mise en bijection ni avec* $\mathbf{N}$ *ni avec* $\mathbf{R}$

Si les "infinis actuels" $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$ existent réellement "quelque part, au moins de manière idéale" (du point de vue du réalisme platonicien) alors l'hypothèse du continu semble bien avoir une

[4] Le système proposé par Zermelo, noté Z, permet la construction de tous les $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\ldots\mathcal{P}(\mathbf{N}))\ldots)$. Le système ZF, qui est le précédent "amélioré" par Frankel, permet d'itérer de manière infinie la construction précédente. Dans ZFC, on rajoute l'axiome du choix. Les mathématiques usuelles ne dépassent pas $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$.

signification. Cantor s'est acharné toute la fin de sa vie à trouver une preuve de cette conjecture.

Voyons la chose de manière un tout petit peu plus formalisée et technique en théorie des ensembles classique.

Une application étant caractérisée par son graphe, les bijections dont il est question dans HC peuvent être considérées comme des parties de $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$. l'énoncé HC se réécrit donc sous la forme suivante :

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbf{R})$ $\exists K \in \mathcal{P}(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ tels que : si A contient $\mathbf{N}$ alors K est le graphe d'une bijection de $\mathbf{N}$ sur A ou d'une bijection de $\mathbf{R}$ sur A

Faisons en outre les remarques suivantes :
– l'ensemble $\mathbf{R}$ peut être mis en bijection avec l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ des parties de $\mathbf{N}$.

– via la bijection précédente, une partie A de $\mathbf{R}$ s'identifie à un élément de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$

– les graphes d'applications $g : \mathbf{N} \to A$ ou $h : \mathbf{R} \to A$ s'identifient alors à des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}) \times \mathcal{P}\mathbf{N}))$

– l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}) \times \mathcal{P}(\mathbf{N}))$ peut lui-même être mis en bijection avec $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$.

L'énoncé HC a donc une structure logique du type suivant :

$\forall A \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$ $\exists K \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$ tels que

si A représente un ensemble compris entre $\mathbf{N}$ et $\mathbf{R}$ alors K représente une bijection de $\mathbf{N}$ sur A ou une bijection de $\mathbf{R}$ sur A

Ainsi, une formalisation possible de l'énoncé HC utilise en fait uniquement les ensembles $\mathbf{N}$, $\mathcal{P}(\mathbf{N})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbf{N}))$.

Du point de vue de la théorie des ensembles infinis de Cantor, c'est très peu.

Les variables de cet énoncé ont "seulement" pour domaine $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, ou $\mathbb{N}$, ou $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ [5].

Pour un réaliste platonicien à la Gödel qui pense que $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ existe quelque part, au moins de manière idéale, et que les énoncés qui ne font référence qu'à ce "petit" infini sont forcément Vrais ou Faux "en réalité", l'hypothèse du continu admet certainement une réponse positive ou négative.

Pourtant Gödel et Cohen ont démontré les deux résultats selon lesquels l'hypothèse du continu ne peut ni être prouvée fausse, ni être prouvée vraie dans le système formel ZFC, qui semble pourtant intégrer tous les ingrédients raisonnables de la théorie cantorienne.

Beaucoup de logiciens et de mathématiciens s'accordent à interpréter ces résultats de la manière suivante : l'homme ne saura jamais démontrer si l'hypothèse du continu est vraie ou fausse.

Certains autres, à la suite de Gödel, pensent qu'on finira par découvrir un axiome raisonnable qui prouvera que l'hypothèse du continu est fausse (ou, plus improbablement, vraie).

On voit donc que l'introduction des trois infinis actuels $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$ suffit à produire des problèmes sans doute à jamais insolubles pour l'homme, même en utilisant des preuves hautement abstraites et absolument pas constructives. Voici qui jette un flou considérable sur la notion de "Vérité" appliquée dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$!

En fait, l'attitude qui semble la plus naturelle, au vu des résultats de consistance relative de Gödel et Cohen, serait de déclarer que l'hypothèse du continu est insoluble pour la bonne raison qu'elle n'a pas de signification réelle précise, mais seulement une signification purement conventionnelle. A savoir la signification d'une «règle du jeu» qu'on décide d'introduire ou non dans la théorie des ensembles infinis actuels. C'était par exemple le point de vue d'A. Robinson, le créateur de l'Analyse non standard (cf. son texte "Formalisme 64"). Cette attitude trouve un autre argument en sa faveur dans le théorème de Lowenheim-Skolem :

[5] Des variables quantifiées sont cachées dans les morceaux phrases en français : «représente une bijection».

la théorie des ensembles infinis, une fois formalisée, par exemple dans le système axiomatique ZFC, admet des modèles dénombrables

Dans un tel modèle, la vraie cardinalité de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est le dénombrable, mais aucune des bijections existant entre $\mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est dans le modèle.

La majorité des réalistes platoniciens adopte sur ces questions une position de repli confortable : tout ceci n'est pas bien grave puisque l'hypothèse du continu n'a aucune conséquence importante pour les mathématiques couramment pratiquées.

Peut-on imaginer un jeu sans partie nulle mais sans stratégie gagnante pour aucun des deux joueurs ?

Un des axiomes de la théorie des ensembles qui a fait couler beaucoup d'encre est *l'axiome du choix*, qui est en fait un axiome de choix infini uniforme. Combiné avec le principe du tiers exclu, cet axiome permet de démontrer l'existence d'objets idéaux (par exemple : une clôture algébrique d'un corps arbitraire, ou une fonction réelle non Lebesgue-mesurable) pour lesquels aucune construction explicite n'est possible. Donnons un énoncé parmi d'autres pour cet axiome du choix.

$$\forall\, g : X \longrightarrow Y \text{ surjective, } \exists\, h : Y \longrightarrow X \text{ telle que } \forall\, y \in Y \quad g(h(y)) = y$$

Si l'ensemble X est fini ou si c'est l'ensemble des entiers naturels, l'axiome est évidemment "vrai dans la réalité": on prend pour $h(y)$ le premier x de X qui vérifie $g(x) = y$. Le problème avec l'axiome du choix est donc un problème d'extrapoler un énoncé depuis l'infini dénombrable jusqu'à des infinis de structure arbitraire.

Je vais maintenant montrer une autre extrapolation à l'infini qui semble a priori tout aussi légitime et qui, en réalité, ne l'est pas du tout (pour les adeptes de Cantor eux-mêmes).

Il s'agit de considérer un jeu ou deux adversaires s'affrontent sans intervention du hasard. Ce jeu, par exemple le jeu d'échec, est d'abord supposé de nature finie, c'est-à-dire que le nombre de coups dans une partie est limité a priori (par exemple à 1000) et que dans chaque situation le joueur ne peut choisir qu'entre un nombre fini de possibilités (mettons par exemple 200).

La partie peut alors grosso modo être décrite de manière formalisée comme suit : le premier joueur choisit un nombre entre 1 et 200 : x_1 , le deuxième joueur choisit à son tour un nombre entre 1 et 200 : x_2 etc...

Au bout de 1000 coups la partie s'arrête (si elle est terminée avant, on peut convenir, pour simplifier notre description formalisée, que tous les coups de la fin sont d'un type donné, réservé à cet effet).

La partie ainsi complètement décrite est une suite $(x_n)_{n\in\{1,\dots,1000\}}$ de 1000 nombres entiers compris entre 1 et 200 . Si j'appelle $\mathcal{A}$ l'ensemble de toutes les suites de 1000 nombres entiers $\in C := \{1,\dots,200\}$ (l'ensemble $\mathcal{A}$ possède 200^{1000} éléments), la "règle du jeu" peut être considérée comme donnée par un sous-ensemble B de $\mathcal{A}$ pour lequel on a :

– si $(x_n)_{n\in\{1,\dots,1000\}} \in B$, c'est le joueur 1 qui a gagné

– si $(x_n)_{n\in\{1,\dots,1000\}} \notin B$, c'est le joueur 2 qui a gagné

Comme 200^{1000} est un nombre hors d'atteinte des ordinateurs les plus puissants, il est possible que le jeu en question (si le sous-ensemble B est suffisamment compliqué) reste à jamais un mystère pour l'homme. C'est peut être le cas du jeu d'échec par exemple. Néanmoins, on peut affirmer[6]

– ou bien le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante

– ou bien le deuxième joueur dispose d'une stratégie gagnante.

En effet, la première affirmation peut s'écrire :

(*) $\exists\, x_1\in C\ \forall\, x_2\in C\ \exists\, x_3\in C \dots \exists\, x_{999}\in C\ \ \forall\, x_{1000}\in C$
la liste $[x_1,\dots,x_{1000}] \in B$

et la deuxième affirmation est simplement la négation de la première :

(**) $\forall\, x_1\in C\ \ \exists\, x_2\in C\ \forall\, x_3\in C \dots \forall\, x_{999}\in C\ \ \exists\, x_{1000}\in C$
la liste $[x_1,\dots,x_{1000}] \notin B$

En admettant l'extrapolation du potentiellement réalisable, une et une seule de ces 2 affirmations est forcément vraie, car ceci est

6 Si on admet l'extrapolation du potentiellement réalisable : c'est à dire l'extrapolation du fini "raisonnable" au fini "déraisonnable"

vérifiable en *un nombre fini* d'opérations purement mécaniques (cela pourrait faire l'objet d'un programme d'ordinateur) .

Passons maintenant au problème de "l'extrapolation à l'infini" de cette affirmation («ou bien le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante, ou bien c'est le deuxième») . On se trouve face à la question d'interpréter la signification d'une écriture

$\exists\, x_1\in C\ \ \forall\, x_2\in C\ \ \exists\, x_3\in C\ \dots$
où on trouverait une infinité de quantificateurs en cascade.

Il faut pour cela donner une formulation équivalante à cette écriture dans le cas "fini" et pour laquelle "l'extrapolation à l'infini" soit plus facile à écrire.

Pour cela, notons L l'ensemble des listes finies d'éléments de C , limitées à 1000 éléments, y compris la liste vide.

Voici alors une formulation équivalente à (*)

(#) $\exists\, f : L \longrightarrow C\ \ \forall\, x_2, x_4, \dots, x_{1000}\in C$,
la liste $[\, f([\ ]), x_2, f([x_2]), x_4, f([x_2,x_4]), x_6,\dots,f([x_2,x_4,\dots,x_{998}]), x_{1000}\,] \in B$

Un examen un peu attentif convaincra le lecteur que la formulation (#) est équivalente à (*) : en effet le « $\exists\, f$ » dans (#) signifie que le premier joueur a le moyen de riposter à tous les choix faits par le deuxième joueur.

De même on obtient une formulation équivalente à (**)

(##) $\exists\, f : L \longrightarrow C\ \ \forall\, x_1, x_3, \dots, x_{999}\in C$,
la liste $[x_1, f([x_1]), x_3, f([x_1,x_3]), x_5,\dots, x_{999}, f([x_1,x_3,\dots,x_{999}])] \notin B$

Nous sommes maintenant en mesure de donner une signification à la phrase "le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante" lorsqu'on "extrapole à l'infini" c.-à-d. lorsqu'on remplace les ensembles finis $C = \{1,2,\dots,200\}$ et $\{1,2,\dots,1000\}$ par $\mathbf{N}$.

Prenons en effet pour $\mathcal{A}$ l'ensemble $\mathbf{N}^{\mathbf{N}}$ de toutes les suites infinies de nombres entiers. Si nous notons $\mathbf{x}$ un élément de $\mathcal{A}$ nous noterons x_n le $n^{\text{ème}}$ terme de la suite $\mathbf{x}$. Prenons pour B un sous-ensemble arbitraire de $\mathcal{A}$. Notons L l'ensemble des listes finies d'éléments de $\mathbf{N}$, sans limitation du nombre d'éléments. L'énoncé ($\approx$)

qui signifie “le premier joueur a une stratégie gagnante pour le jeu B ” est le suivant :

$(\approx)$ $\exists f : L \longrightarrow C \ \forall x \in N^N$,
la suite infinie $(f([\,]), x_1, f([x_1]), x_2, f([x_1,x_2]), x_3, \ldots) \in B$

De la même manière, on a l'énoncé $(\approx\approx)$ qui signifie “le deuxième joueur a une stratégie gagnante pour le jeu B ”.

$(\approx\approx)$ $\exists f : L \longrightarrow C \ \forall x \in N^N$,
la suite infinie $(x_1, f([x_1]), x_2, f([x_1,x_2]), x_3, \ldots) \notin B$

On s'attend alors, en extrapolant la forme particulière de tiers exclu[7] examinée, à l'infini, à avoir le résultat suivant :

Pour tout jeu infini $B \subset N^N$ *ou bien le premier joueur dispose d'une stratégie gagnante, ou bien le deuxième joueur dispose d'une stratégie gagnante.*

Disons plutôt : on s'attend à ce que ce résultat soit vrai (ou au moins que son contraire ne soit pas un théorème) dans la théorie des ensembles couramment pratiquée. Eh bien, surprise! ce résultat est *démontré FAUX* dans la théorie des ensembles infinis actuels habituelle, formalisée dans le système ZFC (fonctionnant selon les règles de la logique “classique”, donc admettant la version ordinaire du tiers exclu).

Des logiciens ont proposé de modifier la théorie ZFC en supprimant l'axiome du choix et en introduisant comme nouvel axiome “de tiers exclu”, l'énoncé ci-dessus en italique, rebaptisé **axiome de détermination.**

Mais cette solution, qui sauve le tiers exclu dans le cas des “jeux infinis”, ne sauve nullement le principe général d'extrapolation à l'infini.

En effet, l'axiome du choix est “évidement vrai” dans le cas d'ensembles finis, et il n'y a aucune raison de refuser son extrapolation à l'infini pour un mathématicien classique.

Gödel a d'ailleurs démontré que l'axiome du choix était “non contradictoire avec les autres axiomes de ZF”. Plus précisément, “s'il existe” un “univers mathématique” ou les axiomes de ZF sont

[7] Il ne s'agit pas du "tiers exclu" au sens ordinaire de la logique classique, il s'agit néanmoins d'une forme "intuitive" de tiers exclu, apparemment parfaitement raisonnable, ni plus ni moins "contestable" que la forme ordinaire du tiers exclu.

vérifiés, alors on peut décrire en son sein un autre “univers mathématique” ou tous les axiomes de ZFC (ZF avec l'axiome du choix) sont vérifiés.

L'enseignement que je tirerai de cet exemple est que, d'un point de vue cantorien, toutes les extrapolations à l'infini “raisonnables” ne sont pas compatibles entre elles. C'est le témoignage d'une *fragilité interne certaine* du système de pensée cantorien. Pour les réalistes platoniciens de la hiérarchie cumulative des ensembles, ce devrait être un sacré coup dur[8] . Non seulement cette “réalité existante idéale” nous cache ses secrets (comme l'hypothèse du continu), mais elle nous tend des pièges carrément méchants, comme celui d'avoir à choisir, en toute ignorance de cause, entre deux axiomes parfaitement raisonnables mais cependant contradictoires, celui du choix infini uniforme et celui de la détermination des jeux infinis.

Au risque de se faire condamner par un Ayatollah, par l'Inquisition ou par l'Opus Dei, on peut désormais avancer la “preuve d'inexistence” suivante :

si l'infini existe il ne saurait être infiniment savant

en effet, ou bien il est savant au point de savoir choisir simultanément un élément dans chaque ensemble d'une collection infinie arbitraire, ou bien il est savant au point de savoir élaborer une stratégie gagnante pour un des deux partenaires de n'importe quel jeu infini; mais il ne peut être savant au point de savoir faire les deux choses à la fois.

Que les croyants se rassurent, ce n'est ni le premier ni le dernier sophisme au sujet de l'infini en acte[9] .

D'ailleurs, puisque nous avons commencé par une citation de Marx, en voici une autre, qui nous conseille de nous méfier de l'omniscience en politique :

La doctrine matérialiste qui veut que les hommes soient des produits des circonstances et de l'éducation, que, par conséquent, des hommes transformés soient des produits d'autres circonstances et d'une éducation modifiée, oublie que ce sont précisément les hommes qui transforment les circonstances et que l'éducateur a lui-

[8] Mais en matière de philosphie, les coups durs ne sont jamais mortels.
[9] Le plus célèbre est bien évidemment le pari de Pascal.

même besoin d'être éduqué. C'est pourquoi elle tend inévitablement à diviser la société en deux parties dont l'une est au-dessus de la société

(Thèses sur Feuerbach)

La question de la comparaison des cardinaux en mathématiques constructives

Revenons à la question de l'hypothèse du continu.

On peut remarquer que l'homme ne pourra, quant à lui, jamais définir qu'une quantité "dénombrable" de nombres réels : un nombre réel défini par un homme sera toujours en fin de compte défini par une phrase imprimée dans un livre. Donc l'homme ne dispose que d'un infini "potentiel" de parties de $\mathbb{N}$, pas plus gros que l'infini "potentiel" des nombres entiers. L'affirmation selon laquelle «l'ensemble $\mathbb{R}$ a un cardinal strictement plus grand que l'ensemble $\mathbb{N}$» est donc une vérité moins "absolue" que $2 + 2 = 4$; elle est entachée d'un certain flou ; elle nécessite certainement "les nombres réels que l'homme ne pourra jamais définir, même à l'état potentiel".

Si on examine en détail la preuve diagonale de Cantor selon laquelle l'infini $\mathbb{N}$ des entiers naturels est de cardinalité strictement plus petite que l'infini $\mathbb{R}$ des nombres réels, on est frappé par le caractère constructif de cette preuve. Par exemple, à partir d'une énumération explicite des nombres réels algébriques, la preuve de Cantor fournit un procédé explicite pour construire des nombres réels transcendants, c-à-d. non algébriques. En fait, la preuve de Cantor peut être affinée et rendue entièrement constructive et fournit alors le théorème suivant (cf. [BB] théorème 2.19 p.27) :

étant donnés une suite $(x_n)_{n\in \mathbb{N}}$ de nombres réels, et deux réels a, b avec $a < b$, on peut construire un réel c clairement distinct de tous les x_i et compris entre a et b

Il s'agit d'une version précise du théorème selon lequel $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable. C'est une affirmation de caractère positif (on peut construire ...) susceptible de fournir un programme qui "exécute" le théorème.

Quelle doit donc être l'interprétation constructive de cet énoncé en termes de cardinaux ? La notion de cardinal a été élaborée par

Cantor pour comparer entre eux des infinis actuels. L'idée était de les comparer selon leur taille.

Constructivement, la question de comparer entre eux des infinis potentiels tels que $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ est également légitime. Mais en tant qu'infinis potentiels, ils n'ont pas réellement de taille, et il serait sans doute impossible d'attribuer une signification à l'affirmation qu'un infini potentiel est **plus gros** qu'un autre, ne serait-ce qu'en raison de l'argument avancé au tout début de cette section. Ce que dit la preuve du théorème de Cantor, c'est que les nombres réels ne peuvent pas être générés de manière automatique comme les nombres entiers, selon un processus clairement défini une fois pour toutes. Chaque fois qu'on aura défini un processus de manière claire, il produira une suite de nombres réels, et il manquera tout plein de nombres réels dans cette suite. En deux mots :

L'infini $\mathbb{R}$ *est **plus compliqué** que l'infini* $\mathbb{N}$

Si on adopte le point de vue des constructivistes russes selon lequel tout nombre réel doit pouvoir être calculé de manière purement mécanique[10] , on peut produire une preuve que l'ensemble $\mathbb{R}$ peut être mis en bijection avec le quotient (par une relation d'équivalence) d'un sous-ensemble $\mathbb{R}$ de $\mathbb{N}$. Cela ne contredit pas l'interprétation constructive du théorème de Cantor, en effet :

"La partie" $\mathbb{R}$ *est nettement **plus compliquée** que "le tout"* $\mathbb{N}$.

Cela contredit par contre les mathématiques classiques.

Le point de vue constructif minimal développé par Bishop (cf. [BB] et [MRR]) ne prétend pas donner de définition du mot «effectif», qui est pris comme une notion primitive. En conséquence, tous les théorèmes obtenus avec ce point de vue sont vrais pour à peu près tous les mathématiciens[11] . En outre, ils ont toujours un contenu algorithmique et constituent en quelque sorte des schémas de programmes informatiques.

Il est intéressant d'analyser l'hypothèse du continu quand on se place du point de vue constructif minimal. La première chose que l'on constate, c'est que des tas d'énoncés équivalents à HC en

---

[10] En mots de tous les jours : tout procédé effectif doit pouvoir être mécanisé de manière automatique.

[11] Il y a des mathématiciens qui n'admettent pas l'extrapolation du potentiellement réalisable, et qui donc ne sont pas satisfaits par les mathématiques constructives à la Bishop.

mathématiques classiques, ne peuvent plus être prouvés équivalents en mathématiques constructives, ce qui fournit autant d'hypothèses du continu distinctes, n'ayant pas la même signification intuitive. Si nous comparons deux infinis selon le point de vue des applications injectives de l'un vers l'autre, alors l'hypothèse du continu s'avère plutôt fausse, et certainement indémontrable[12]. En effet l'infini $\mathbb{N}$ peut être injecté dans l'infini $2^{\mathbb{N}}$ qui peut lui-même être injecté dans l'infini $\mathbb{R}$, (cf. l'ensemble triadique de Cantor), mais l'infini $\mathbb{R}$ ne sera (sans doute) jamais injecté de manière constructive dans $2^{\mathbb{N}}$: cette impossibilité est un théorème des constructivistes russes, et ce théorème "russe" empêche qu'on puisse construire l'injection au moyen d'un procédé purement mécanique.

Conclusion

Face aux problèmes posés par la "signification réelle" des énoncés mathématiques de la théorie des ensembles infinis actuels[13] d'une part, et par la "validité réelle" des résultats obtenus dans cette théorie (problème de validité qui se pose lorsque ces résultats ont une signification concrète évidente), la tentation est grande de se rabattre sur un système formel du genre "théorie axiomatique des ensembles ZFC"

C'est pourtant une option bien contestable, car quel intérêt porter à une théorie formelle dont les "théorèmes" ne prétendent plus énoncer des Vérités ?

Le point de vue "constructif" en mathématiques est le point de vue "réaliste concret" qui, à propos de chaque énoncé mathématique, pose le problème de sa "signification algorithmique". Le point de vue "constructif" demande que toute affirmation mathématique ait *un sens*. Cela ne revient pas à jeter bas toutes les mathématiques "classiques" mais à les aborder d'un autre point de vue.

E. Bishop, auteur de "Fondements de l'analyse constructive", fait à ce sujet la remarque suivante :

[12] L'affirmation peut paraître un peu présomptueuse. Il faudrait préciser "indémontrable dans tous les systèmes formels constructifs connus". Une caractéristique des systèmes formels constructifs actuels est que toute preuve d'existence "contient en filigrane" une preuve d'existence explicitée par des procédés purement mécaniques.

[13] Ce qu'on appelle ordinairement la "théorie des ensembles" est en fait une "théorie des ensembles infinis actuels".

« Le point de vue constructif ne signifie pas que les mathématiques classiques sont "sans valeur". Ce serait aussi stupide que de dire que, d'un point de vue "classique" les mathématiques "non rigoureuses" seraient "sans valeur".

Tout théorème de mathématiques classiques pose un défi au mathématicien constructif

– soit en trouver une démonstration constructive

– soit en donner une version constructive. »

Je terminerai en remarquant que dans les applications "concrètes" des mathématiques (en physique théorique, en astronomie...) il s'agit toujours en fin de compte de décrire des processus de calcul qui, à partir de certaines données numériques, permettent d'obtenir des résultats sous forme numérique, à vérifier ou infirmer par l'expérience.

Ainsi seule la partie "constructive" des mathématiques s'avérera en définitive un jour ou l'autre "utile" et "vérifiable"[14]. La partie non constructive, elle, consiste essentiellement en un **discours** concernant des êtres mathématiques dont l'existence réelle est tout sauf évidente. Et personne (sauf à croire en un Dieu mathématicien) ne peut être sûr que ce discours n'est pas en grande partie "vide de sens".

BIBLIOGRAPHIE

Il n'existe pas actuellement de livre de référence en français concernant les mathématiques constructives. On pourra consulter les livres et articles suivants.

"Penser les mathématiques" - Collection Seuil Points.

On comparera avec intérêt les articles de Dieudonné et de Apéry. Une bibliographie assez complète se trouve à la fin de l'article d'Apéry.

[14] Il ne faut pas prendre cette affirmation pour la défense d'un point de vue "utilitaire". Même la partie constructive d'une théorie mathématique donnée n'est pas forcément directement ou immédiatement "utilisable" en physique théorique par exemple (son utilité peut n'apparaître que bien longtemps après sa construction comme théorie mathématique : cf la théorie des groupes). Cependant, toute mathématique constructive est toujours "immédiatement utile" en tant que partie de la "théorie générale des processus" : ce qui revient à dire : tout énoncé de mathématiques constructives démontré constructivement a bien un sens.

"Les fondements des mathématiques" - Morris Kline. La Recherche n° 54.

"Mathématiques constructives" - Allan Calder. Pour la Science n° 26.

Concernant la théorie des ensembles classiques, il faut recommander le remarquable :

"Théorie des Ensembles" , Krivine. Collection SUP des PUF.

Concernant "la Vérité" des théorèmes mathématiques, il faut relire :

"Preuves et Réfutations" , I. Lakatos, chez Hermann.

Des problèmes voisins de ceux abordés ici sont discutés dans :

"Formalism 64" A. Robinson. in Logic, *Philosophy and Methodology of Sciences* proceedings, 1964, North Holland 228-246

"Intuitionnisme 84". Harthong J., Reeb G. in : *La Mathématique non standard* (Fondements des Sciences) Editions du CNRS, Paris, 1989, p.213-252.

"Les mathématiques : fin en soi ou instrument ?" Pierre Thuillier. La Recherche n° 37.

Pour les mathématiques constructives, il y a quelques livres de référence en anglais

[Ab] Aberth O. : *Computable analysis* (McGraw-Hill; 1980)7

[BB] Bishop E., Bridges D. : *Constructive Analysis.* (Springer-Verlag; 1985)

[Bee] Beeson M. : *Foundations of Constructive Mathematics.* Springer-Verlag (1985)

[Bi] Bishop E. : *Foundations of Constructive Analysis.* (McGraw-Hill; 1967, épuisé)

[BR] Bridges D., Richman F. : *Varieties of Constructive Mathematics.* London Math. Soc. LNS 97. Cambridge University Press (1987)

[Bri] Bridges D. : *Constructive Functional Analysis.* (Pitman, London; 1979)

[Hey] Heyting A. : *Intuitionism.* 1966. Amsterdam. North Holland

[Ku] Kushner. *Constructive real numbers and constructive function spaces* Translation of Mathematical Monographs (traduit du russe) American Mathematical Society Vol. 21. 1968.

[MRR] Mines R., Richman F., Ruitenburg W. : *A Course in Constructive Algebra* (Springer-Verlag; Universitext; 1988) .

Remarques

Le point de vue intuitionniste de Brouwer et Heyting est critiqué dans certains de ses aspects "idéalistes" par Bishop et Sanin.

L'école russe (Markov, Sanin, Kushner) admet la coïncidence de la notion intuitive d'effectivité avec la notion mathématique de récursivité (effectivité mécanique), ce que n'admet pas Bishop (ni Brouwer et Heyting). Le livre de Aberth, plus facile à lire que celui de Kushner, est un exposé du constructivisme russe.

Les livres [Be] et [BR] font une étude comparée des différents points de vue constructifs existants.

Les divergences de point de vue existant entre différents mathématiciens "constructivistes" (ou intuitionnistes) ne doivent pas cacher l'existence d'un socle fondamental commun, basé sur la critique de la notion de "vérité absolue" en mathématiques. Le livre de Bishop, repris dans [BB], qui reste le plus prudent, contient ce socle fondamental commun.

Enfin, il faut signaler que, même si la position philosophique constructive n'est pas largement représentée chez les mathématiciens, le courant dans la recherche mathématique qui s'intéresse particulièrement aux résultats de nature effective et algorithmique a toujours été vivant et connaît actuellement un fort développement.