[9] B. Bolzano, *Paradoxes of the infinite*, Yale University Press, New Haven, 1950.

[10] R. Dedekind, *Essays on the theory of numbers*, Dover Publications, New York, 1963.

[11] J. Dhombres, etc., *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, Paris, 1987.

[12] P. Dugac, *Sur les fondements de l'analyse au XIXe siècle*, U.C.L., Louvain-la-Neuve, 1980.

[13] G. Cantor, *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, Acta Mathematica 2 (1883), pp. 381-408.

Statut du nombre et détermination de l'infini

Gilles Ferréol
Université de LILLE I
(METIS / C.L.E.R.S.E.)

L'absence d'une définition réellement satisfaisante du nombre entier a condamné non seulement la mathématique grecque mais aussi celle de l'époque classique à faire l'économie de l'infini. Il faudra attendre la seconde moitié du XIXème siècle pour qu'un renversement de perspective puisse s'opérer (cf. l'Annexe, p. 127). Les travaux de G. Cantor (1878), G. Frege (1884) et R. Dedekind (1888) méritent, à cet égard, une analyse attentive et requièrent une compréhension préalable de la cardinalité (C. Imbert, 1969 ; H. Wang, 1974).

Le problème de la nature du nombre

Ce problème, rappelle J.-L. Gardies, "hante avec d'autant plus de constance la philosophie occidentale que celle-ci ne commencera à en apercevoir la solution que très tardivement, dans les années 1880-1890" (J.-L. Gardies, 1989, p. 549).

T. Dantzig ajoute, pour sa part, qu' "il n'y a pas deux branches des mathématiques qui présentent un plus grand contraste que l'arithmétique et la théorie des nombres" ; la première est accessible à l' "esprit le moins ouvert" ; la seconde nécessite une "adresse insoupçonnée" et une "habileté consommée" (T. Dantzig, 1974, p. 41).

Examinons tout d'abord le point de vue défendu par les Grecs (A. Darbon, 1951). Thalès, du moins si l'on en croit certains témoignages, aurait emprunté aux Egyptiens l'idée que le nombre était une "collection d'unités". Aristote appartient à cette tradition, de même qu'Euclide (cf. le livre VII des **Eléments**). La théorie des proportions et la mise en évidence de rapports irrationnels (tel celui de la diagonale du carré à son côté) conduisent à souligner la spécificité des grandeurs. Celles-ci peuvent être caractérisées par les propriétés de continuité, de consécutivité et de contiguïté :

- Est **consécutif** ce qui, dans un ordre donné, "n'est séparé de la chose avec laquelle il y a consécution par aucun intermédiaire du même genre" ;

- Est **contigu** "le consécutif qui est en outre en contact" ;

- Le contigu, enfin, est dit **continu** "lorsque les limites par lesquelles les deux choses sont en contact ne sont qu'une seule et même chose".

La rencontre avec les "imaginaires" allait ébranler le prétendu privilège intuitif de la notion de grandeur. Le moment décisif se produit avec Cantor et Dedekind, lesquels raisonnent non plus en termes d' "agglomération d'unités" mais sous l'angle d'un "ensemble d'ensembles ayant même puissance" (**Mächtigkeit**). La possibilité d'une relation bijective ouvre dès lors la voie à une considération positive de l'infini, ainsi que l'avait déjà envisagé Bolzano dans ses **Paradoxes** (traité posthume de 1820). A condition toutefois de bien maîtriser l'essence de la cardinalité. A défaut de cette compréhension, la conception aristotélicienne réapparaît sous une forme ou sous une autre (J.-M. Salanskis, 1991). Songeons, en particulier, au vocable d'**infini**, cher à Descartes et aux métaphysiciens du XVIIème siècle. Pour l'auteur des **Principes de la philosophie** (paragraphe 26), "nous ne nous embarrasserons jamais dans les disputes de l'infini ; d'autant qu'il serait ridicule que nous, qui sommes finis, entreprissions d'en déterminer quelque chose, et par ce moyen le supposer fini en tâchant de le comprendre. C'est pourquoi nous ne nous soucierons pas de répondre à ceux qui demandent si la moitié d'une ligne infinie est infinie, et si le nombre infini est pair ou non pair, et autres choses semblables, à cause qu'il n'y a que ceux qui s'imaginent que leur esprit est infini qui semblent devoir examiner de telles difficultés. Et pour nous, en voyant des choses dans lesquelles, selon certains sens, nous ne remarquons point de limites, nous n'assurerons pas pour cela qu'elles soient infinies, mais nous les estimerons seulement indéfinies".

C'est contre cette approche que s'inscrit Cantor à travers le célèbre adage : **Omnia seu finita seu infinita definita sunt et excepto Deo ab intellectu determinari possunt** (Dieu est le seul absolu qui échappe en tant que tel aux déterminations). Pour apprécier le courage qu'il fallait pour rompre aussi ouvertement avec les traditions du passé, considérons par exemple le passage suivant, extrait d'une lettre de Gauss à Schumacher : "Quant à votre preuve, je dois protester très énergiquement contre l'usage que vous faites de l'infini

comme de quelque chose d'achevé, car cela n'est jamais permis en mathématiques. L'infini n'est qu'une façon de parler, une expression abrégée pour signifier qu'il existe des limites dont certaines valeurs peuvent croître au-delà de toutes limites. Il ne s'élèvera aucune contradiction tant que l'homme fini ne commettra pas l'erreur de prendre l'infini pour quelque chose de déterminé, tant qu'il ne sera pas conduit par une habitude acquise de son esprit à considérer l'infini comme quelque chose de limité". Les idées de Gauss sur cette question, note T. Dantzig, étaient universellement partagées, et "l'on peut, par conséquent, imaginer quelle tempête souleva dans le camp des orthodoxes le défi de Cantor : non pas qu'à cette époque on n'usât point de l'**infini en soi** d'une manière ou d'une autre ; mais, en pareille matière, l'attitude des mathématiciens rappelait un peu celle de ce puritain à l'égard de l'adultère : il aurait préféré s'en rendre coupable plutôt que de prononcer le mot en présence d'une femme !". Heureusement pour Cantor, "une longue et mûre méditation l'avait solidement armé car, pendant plusieurs années, il dut soutenir la lutte tout seul, et quelle lutte !". Ainsi donc, "les débuts agités de la théorie des agrégats prouvent que, même dans un domaine aussi abstrait que celui des mathématiques, les passions humaines ne disparaissent jamais complètement" (T. Dantzig, 1974, pp. 212-213).

La détermination de l'infini

Dans **Was sind und was sollen die Zahlen** ?, R. Dedekind, tirant profit d'une suggestion jadis formulée par certains scolastiques comme Duns Scot, énonce la propriété suivante : "Un système S est dénommé **infini** quand il est semblable (**ähnlich**) à une de ses parties propres", c'est-à-dire quand on peut lui faire correspondre une bijection. Dans le cas contraire, S est dit **fini** (P. Dugac, 1976).

On peut alors reprendre, sous un angle nouveau, la célèbre distinction entre **infini catégoramatique** et **infini syncatégoramatique**. Si l'on se réfère au vocabulaire d'Eustache de Saint-Paul ou des jésuites du Collège de Coïmbre, on dira que :

- l'infini catégoramatique, seul infini actuel à proprement parler (**proprie dictum**), est celui qui contient des parties infinies toutes égales à l'une déterminée d'entre elles, qui existent en même temps de manière distincte, tel l'ensemble infini des entiers ;

- l'infini syncatégoramatique, infini actuel à parler improprement (**improprie dictum**), est celui en revanche "qui contient des parties infinies en acte, qui n'ont cependant pas d'ordre entre elles, comme la première, la seconde, la troisième et ainsi de suite, et qui tendent à la constitution d'une chose finie, comme la multitude des points de la ligne" (J.-L. Gardies, 1989, p. 553).

Cantor tiendra des propos analogues mais sur la base de véritables démonstrations mathématiques (cf. celle relative à la diagonale). De sorte que les nombres infinis, pour être concevables en quelque manière, doivent constituer une "espèce totalement nouvelle, dont les dispositions dépendent entièrement de la nature des choses et sont l'objet de notre recherche, non de notre arbitraire ou de nos préjugés". Les propriétés habituelles de parité ou d'imparité, lit-on dans **Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre** (1878), ne s'appliquent plus aux transfinis. Résultat que pressentait à sa façon Pascal dans son **Pari** : "Quant à l'infini en nombre, nous ne savons pas ce qu'il est : il est faux qu'il soit pair, il est faux qu'il soit impair car, en ajoutant l'unité, il ne change pas de nature ; cependant, c'est un nombre et tout nombre est pair ou impair (...). **Il est vrai que cela s'entend de tout nombre fini**".

Pour de nombreux observateurs, "Cantor commence là où Galilée a renoncé. Oui, il est possible d'établir une correspondance entre deux ensembles infinis, même si l'un n'est qu'une partie de l'autre ! Pour préciser, nous dirons que deux ensembles, **finis** ou **infinis**, sont équivalents ou ont la même puissance si on peut les appareiller élément par élément. Si deux ensembles sont de puissance inégale, l'appareillement épuisera l'un, mais il restera des éléments de l'autre non encore appareillés ; en d'autres termes, le premier peut s'appareiller à une partie du second, mais le second ne peut pas s'appareiller à une partie quelconque du premier" (T. Dantzig, 1974, p. 213). Et si le problème de la réduction des réels aux rationnels fait l'objet, à partir du XIXème siècle, de nombreuses discussions (cf. les contributions de Cantor et Dedekind, celles de Weierstrass, Charles Méray ou Edouard Heine), c'est en grande partie parce que le développement de la théorie des groupes (en tant que théorie de la symétrie, de l'indiscernabilité et de l'homogénéité) attire notre attention sur la nécessité de construire le continu sans le moindre appel à l'intuition de l'espace, mais par des moyens rigoureusement arithmétiques, hors des "évidences géométriques" (G. Frege, 1969). Dedekind ira encore plus loin et dira des entiers naturels eux-mêmes qu'"on peut à juste titre les nommer une libre création de l'esprit humain". Cantor, à l'opposé, réaffirmera après Newton que "le mathématicien n'est que le scribe fidèle se contentant de recueillir ce que profère la voix de la Nature".

Cependant, des interrogations subsistent : "Si nul ne peut contester qu'il soit devenu possible de disposer d'un **analogon** de la ligne continue par des procédures logico-mathématiques, il n'en demeure pas moins que l'ensemble des réels surgit au terme d'une cascade de constructions comme une entité hautement abstraite, alors que le continu, dans une optique aristotélicienne que le simple bon sens aurait du mal à désavouer, se rencontre déjà presque au niveau des substances premières que nous livre la perception" (J.-L. Gardies, 1989, p. 556). Dès lors, après Gauss, Dirichlet ou Frege, "est-on en état de comprendre de l'intérieur les tentatives des Grecs et de rejeter un intuitionnisme relayé d'Eudoxe à Descartes et dont l'esthétique kantienne pourrait être le dernier avatar ?" (**Ibid**.).

Concluons provisoirement avec L. Couturat : "Nous espérons avoir suffisamment justifié l'infini de grandeur et de nombre des contradictions qu'on lui a imputées, et avoir dissipé la plupart des objections que l'on a accumulées contre cette idée. Sans doute, le nombre infini se présente, en apparence, comme le résultat d'un dénombrement ou d'une mesure interminable, et peut donc paraître impossible et contradictoire. Mais cette conception négative implique une donnée positive, à savoir une collection ou une grandeur réellement infinies ; ce fait suffit à légitimer l'invention du nombre du même nom, et à lui conférer un sens et une valeur objective : ce nombre représente, suivant le cas, une pluralité innombrable ou une grandeur incommensurable. On peut se demander, à ce sujet, si ces deux aspects sont différents. Pour résoudre cette question, il faut rechercher l'origine rationnelle de ces deux emplois et en déterminer les conditions d'application. Cette application étant le fondement mathématique de la Physique, nous remonterons ainsi à la source de la connaissance scientifique, et nous en apercevrons peut-être mieux le caractère et la portée. Nous serons en même temps amenés à définir et à distinguer les diverses facultés de connaître, et la part qui revient à chacune d'elles dans l'élaboration de la science" (L. Couturat, 1973, p. 505). Quant au sage, "il jette un dernier regard sur les cimes lointaines derrière lesquelles s'est perdue l'origine de la pensée et répète avec le maître Henri Poincaré : **L'obscurité de la source n'empêche pas le fleuve de couler**" (T. Dantzig, 1974, p. 246).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

COUTURAT L. (1973), **De l'infini mathématique**, Paris, A. Blanchard (1ère édition : 1896).

DANTZIG T. (1974), **Le nombre, langage de la science**, trad. fr., Paris, A. Blanchard (1ère édition : 1930).

DARBON A. (1951), **Une doctrine de l'infini**, Paris, P.U.F.

DUGAC P. (1976), **Richard Dedekind et les fondements des mathématiques (avec de nombreux textes inédits)**, Paris, Vrin.

FREGE G. (1969), **Les fondements de l'arithmétique. Recherche logico-mathématique sur le concept de nombre,** trad. fr., Paris, Seuil (1ère édition : 1884).

GARDIES J.-L. (1989), "Nombre, infini, continu", in **Encyclopédie philosophique universelle. I : L'univers philosophique** (volume dirigé par JACOB A.), Paris, P.U.F.

IMBERT C. (1969), **Les fondements de l'arithmétique**, Paris, Seuil.

SALANSKIS J.-M. (1991), **L'herméneutique formelle. L'infini, le continu, l'espace**, Paris, C.N.R.S.

WANG H. (1974), **From Mathematics to Philosophy**, Londres, Routledge and Kegan Paul.

ANNEXE (Source : T. Dantzig, 1974, pp. 247-248)

Points de repère dans l'évolution du concept du nombre.

L'ŒUVRE.	L'AUTEUR.	LE PAYS.	L'ÉPOQUE.
Découverte des valeurs *irrationnelles* .	Pythagore.	Grèce.	VI^e^ siècle av. J.-C.
Première crise du concept de l'*infini* ...	Zénon, Platon, Aristote.	Grèce.	IV^e^ siècle av. J.-C.
L'idée de *limite* est formulée pour la première fois......	Archimède.	Grèce.	III^e^ siècle av. J.-C.
L'invention du symbole *zéro*	Inconnu.	Inde.	Premiers siècles après J.-C.
Les nombres *négatifs*.	Inconnu.	Inde.	Id.
Premier usage d'une *suite*	Fibonacci.	Italie.	XIII^e^ siècle.
Premier emploi systématique des *fractions continues*.....	Bombelli.	Italie.	XVI^e^ siècle.
On formule pour la première fois les *nombres complexes*.	Cardano. Bombelli.	Italie.	XVI^e^ siècle.
Invention de la *notation littérale*	Viète.	France.	Fin du XVI^e^ s.
Les valeurs infinitésimales	Cavalieri.	Italie.	1635.
On formule pour la première fois l'*agrégat infini*.........	Galilée.	Italie.	1638.
Invention de la géométrie analytique	Descartes.	France.	1639.
Le principe de l'induction mathématique est formulé pour la première fois......	Pascal.	France.	1654.
L'invention du *calcul infinitésimal*.......	Newton. Leibniz.	Angleterre. Allemagne.	Vers 1677.
Premier emploi systématique des *séries infinies*	Newton. Leibniz.	Angleterre. Allemagne.	Vers 1677.
Découverte d'une interprétation géométrique des *nombres complexes*	Gauss.	Allemagne.	1797.
On formule pour la première fois la *puissance* d'un agrégat	Bolzano.	Allemagne.	1820.
Découverte des nombres *algébriques*, ne pouvant pas s'exprimer par des radicaux	Abel.	Norvège.	1825.
Découverte des nombres transcendants.	Liouville.	France.	1844.
L'invention des *quaternions*	Hamilton.	Gde-Bret.	1843.
Première théorie des *grandeurs extensibles*.	Grassmann.	Allemagne.	1844.
On formule explicitement pour la première fois le principe de *permanence* des lois formelles..	Hankel.	Allemagne.	1867.
Première théorie scientifique des valeurs *irrationnelles*	Dedekind.	Allemagne.	1872.
Deuxième théorie scientifique des valeurs *irrationnelles*.	Cantor.	Allemagne.	1883.
L'invention du *transfini*	Cantor.	Allemagne.	1883.
Découverte des *antinomies* de la théorie des agrégats......	Burali-Forti.	Italie.	1897.