

mathématiques, avec Platon, et sur la logique, avec Aristote, tandis qu'il a fallu attendre Descartes, Leibniz et surtout Kant pour voir se développer des épistémologies nées de la collaboration des mathématiques avec l'expérience physique.

Mais un autre ensemble de considérations psychologiques explique que l'on puisse utiliser longtemps les opérations logico-mathématiques sans prendre conscience de leur existence en tant qu'opérations. L'introspection ne constitue, en effet, qu'un très pauvre instrument de connaissance, même sur le terrain de la pensée, et nous prenons conscience du résultat des opérations de notre esprit bien avant de découvrir les structures de celles-ci, de même que, de façon générale, nous prenons conscience du résultat de nos actions bien avant d'apercevoir leurs mécanismes. Il résulte de ces lois psychologiques que les mathématiques grecques ont été essentiellement "réalistes" (ou, comme l'a dit Boutroux, "contemplatives"), c'est-à-dire qu'elles ont projeté dans le réel les résultats des opérations au lieu de réfléchir sur celles-ci et de les manipuler en tant qu'instruments mobiles et libres de transformation et de combinaison. C'est pourquoi les Grecs n'ont point constitué une science de l'algèbre, tout en connaissant plusieurs transformations algébriques, et se sont adonnés de préférence à la géométrie. C'est aussi pourquoi la première sans doute de leurs théories épistémologiques, qui a consisté en réflexions de Pythagore sur la nature des nombres, s'est avérée totalement "réaliste" : selon ce grand mathématicien les nombres entiers constituaient les éléments des objets et des figures, comme s'il s'agissait en quelque sorte d'atomes spatiaux, et cela sans aucun soupçon du fait que ces nombres pourraient résulter d'activités, d'opérations ou d'actions proprement dites du sujet lui-même. Pour le réalisme, en effet, le sujet connaissant n'intervient pas dans la connaissance : il n'existe pas encore en tant que sujet actif, et se borne à "contempler".⁹⁷

⁹⁷ J. Piaget, "L'épistémologie et ses variétés", *Logique et connaissance scientifique*, Paris, Gallimard, La Pléiade, 1967, p. 16-18.

Faire la droite avec des points

Th. Gilbert, B. Jadin, Ph. Tilleuil
GEM, Institut de Mathématiques
Louvain-la-Neuve

"... Je connais un labyrinthe grec qui est une ligne unique, droite. Sur cette ligne, tant de philosophes se sont égarés, qu'un pur détective peut bien s'y perdre..."

"... je vous promets ce labyrinthe, qui se compose d'une seule ligne droite et qui est invisible, incessant."

J.-L. Borges, in "La mort et la boussole."
(Fictions, 1957)

La droite fait partie des objets conceptuels familiers que tout un chacun, mathématicien ou non, connaît et manipule. Pourtant l'appréhension qu'en a le mathématicien diffère de celle de monsieur tout-le-monde comme c'est le cas pour la plupart des concepts mathématiques.

Comment le mathématicien voit-il la droite, les points et comment imagine-t-il l'alignement de points les uns derrière les autres pour faire la droite ? Et vous, comment le voyez-vous ?

Pour faire un peu de lumière sur la question, interrogeons des mathématiciens qui ont fait leurs preuves. Dans l'ordre, nous regarderons principalement des textes d'Aristote, Galilée, Pascal, Bolzano, Dedekind et Cantor.

Aristote.

Aristote évoque plusieurs fois l'infini et le continu dans les livres Physique 1 et 3[1]. Pour lui, le continu est divisible à l'infini. Mais cet infini n'existe pas en acte, il est en puissance.

Dans le livre Physique 5 [2], Aristote donne une définition du continu. Celui-ci est fait de parties consécutives, en contact et dont les extrémités sont confondues.

Mais le continu, la ligne par exemple, ne peut être formé d'indivisibles, de points. La ligne est une collection bien enchaînée de parties virtuellement séparées par des points-limites mais la ligne n'est pas l'ensemble de ces points.

"Si la continuité, le contact, la consécutive obéissent aux définitions précédentes (le continu est ce dont les extrémités sont une seule chose : le contact est entre ce dont les extrémités sont ensemble ; le consécutif est ce entre quoi il n'y a aucun intermédiaire du même genre), il est impossible qu'un continu soit formé d'indivisibles, par exemple qu'une ligne soit formée de points, s'il est vrai que la ligne soit un continu et le point un indivisible. En effet, on ne peut dire que les extrémités des points font un, puisque pour l'indivisible il n'existe pas une extrémité qui serait distincte d'une autre partie ; ni que les extrémités sont ensemble, car il n'y a rien dans une chose sans parties qui soit une extrémité, puisque l'extrémité est distincte de ce dont c'est l'extrémité.

En outre, il faudrait alors que les points dont serait fait le continu fussent, ou en continuité, ou en contact réciproque ; même raisonnement pour tous les indivisibles. Or ils ne peuvent être continus, d'après ce qu'on vient de dire, et, quant au contact, il faut qu'il ait lieu, soit du tout au tout, soit de la partie à la partie, soit de la partie au tout ; mais, l'indivisible étant sans partie, ce sera forcément du tout au tout ; or le contact du tout au tout ne fera point une continuité, car le continu a des parties étrangères les unes aux autres et il se divise en parties qui se distinguent de cette façon, c'est-à-dire qui sont séparées quant au lieu.

Maintenant, il n'y aura pas plus de consécution entre un point et un point, un instant et un instant, de façon à en faire la longueur ou le temps. En effet, sont consécutives les choses entre lesquelles il n'y a aucun intermédiaire du même genre, tandis que, pour des points, l'intermédiaire est toujours une ligne, pour des instants, un temps. Ajoutons que le continu serait divisible en indivisibles, s'il est vrai que chacun des deux doive se diviser en ce dont il est composé. Mais nul continu n'est divisible en choses sans parties.

D'autre part, il n'est pas possible qu'entre les points et les instants il y ait aucun intermédiaire d'un genre différent ; un tel intermédiaire en effet sera évidemment, s'il existe, ou bien indivisible, ou bien divisible, et, s'il est divisible, ce sera, ou bien en indivisibles, ou bien en parties toujours divisibles ; or c'est là le continu. Mais il est clair que tout continu est divisible en parties qui sont toujours divisibles ; si en effet c'était en indivisibles, il y aurait contact d'indivisibles à indivisibles ; en effet dans les continus, si l'extrémité est une, il y a aussi contact." [2](Phys. 6, 1, 231 a et b)

Après avoir rappelé ses définitions de continu, contact, consécutif, Aristote réfute successivement la possibilité pour des points de former le continu, d'être en contact, d'être consécutifs. Décomposons son raisonnement.

1. On ne peut parler d'extrémité pour un point. Car l'extrémité est distincte de ce qui ne l'est pas, il y aurait donc des parties à un indivisible. Impossible.

2. On ne peut dire que les extrémités des points font un puisqu'on ne peut parler d'extrémité pour des points. Des points ne peuvent être continus.

3. Les points ne peuvent être en contact. Car celui-ci devrait avoir lieu soit du tout au tout, ce qui est impossible car le continu a des parties étrangères les unes aux autres ; soit de la partie à la partie ou de la partie au tout, ce qui est impossible car l'indivisible est sans partie.

4. Les points ne peuvent être consécutifs, car il y aurait un intermédiaire d'un genre différent. Soit un divisible en indivisibles, ce qui est impossible car il y aurait contact entre indivisibles. Soit un divisible en divisibles, ce qui est le continu.

Aristote développe en quelque sorte un point de vue topologique sur la droite. Le physicien et philosophe qu'il est, s'intéresse à la nature du concept alors que d'autres, comme Pascal s'intéresseront aux attributs, aux propriétés de ce concept.

Galilée.

S'intéressant à des problèmes de résistance des matériaux, Galilée se laisse aller, de paradoxe en paradoxe, à des considérations

sur l'infini. Voici sa conclusion finale au sujet de la ligne et des points.

"Quand donc le seigneur Simplicio me présente des lignes de longueur inégale, et me demande comment il peut se faire que les plus grandes ne contiennent pas davantage de points que les plus petites, je lui réponds qu'il n'y en a ni plus ni moins ni même autant, mais en toutes un nombre infini ;

[...]

J'en arrive maintenant à une autre considération. Si l'on admet que la ligne et tous les continus sont divisibles en parties toujours divisibles, je ne vois pas comment échapper à la conclusion qu'ils sont constitués par une infinité d'indivisibles : une division et une subdivision susceptibles de se poursuivre sans fin supposent, en effet, que les parties soient en nombre infini, on en tire immédiatement qu'elles n'ont pas de grandeur, car un nombre infini de parties ayant une grandeur donne une grandeur infinie ; ainsi le continu nous apparaît-il composé par un nombre infini d'indivisibles." [3]

Pascal.

"De même quelque grand que soit un espace, on peut en concevoir un plus grand, et encore un qui le soit davantage ; et ainsi à l'infini, sans jamais arriver à un qui ne puisse plus être augmenté ? Et au contraire quelque petit que soit un espace, on peut encore en considérer un moindre, et toujours à l'infini, sans jamais arriver à un indivisible qui n'ait plus aucune étendue.

[...]

Enfin, s'ils trouvent étrange qu'un petit espace ait autant de parties qu'un grand, qu'ils entendent aussi qu'elles sont plus petites à mesure, et qu'ils regardent le firmament au travers d'un petit verre, pour se familiariser avec cette connaissance, en voyant chaque partie du ciel en chaque partie du verre.

Mais s'ils ne peuvent comprendre que des parties si petites, qu'elles nous sont imperceptibles, puissent être autant divisées que le firmament, il n'y a pas de meilleur remède que de les leur faire regarder avec des lunettes qui grossissent cette pointe délicate jusqu'à une prodigieuse masse ; d'où ils concevront aisément que, par le secours d'un autre verre plus artistiquement taillé, on pourrait les grossir jusqu'à égaler ce firmament dont ils admirent l'étendue." [4]

"Je vous apprend que, dès qu'il entre tant soit peu d'infini dans une question, elle devient inexplicable, parce que l'esprit se trouble et se confond." [4]

"[...] puisqu'un indivisible multiplié autant de fois que l'on voudra est si éloigné de pouvoir dépasser une étendue, qu'il ne peut jamais former qu'un seul et unique indivisible ;

[...]

Un indivisible est ce qui n'a aucune partie, et l'étendue est ce qui a diverses parties séparées.

Sur ces définitions, je dis que deux indivisibles étant unis ne font pas une étendue.

Car, quand ils sont unis, ils se touchent chacun en une partie ; et ainsi les parties par où ils se touchent ne sont pas séparées, puisque autrement elles ne se toucheraient pas. Or, par leur définition, ils n'ont point d'autres parties : donc ils n'ont pas de parties séparées ; donc ils ne sont pas une étendue, par la définition de l'étendue qui porte la séparation des parties.

[...]

Mais si l'on veut prendre dans les nombres une comparaison qui représente avec justesse ce que nous considérons dans l'étendue, il faut que ce soit le rapport du zéro aux nombres ; car le zéro n'est pas du même genre que les nombres, parce qu'étant multiplié, il ne peut les surpasser ; de sorte que c'est un véritable indivisible de nombre, comme l'indivisible est un véritable zéro d'étendue." Et on trouvera un pareil entre le repos et le mouvement, et entre un instant et le temps ; car toutes ces choses sont hétérogènes à leurs grandeurs, parce qu'étant infiniment multipliées, elles ne peuvent jamais faire que des indivisibles non plus que les indivisibles d'étendue et par la même raison. Et alors on trouvera une correspondance parfaite entre ces choses ; car toutes ces grandeurs sont divisibles à l'infini, sans tomber dans leurs indivisibles, de sorte qu'elles tiennent toutes le milieu entre l'infini et le néant." [4]

Méré, Berkeley et vous.

"Je vous demande encore si vous comprenez distinctement qu'en la cent-millième partie d'un grain de pavot il y pût avoir un monde, non seulement comme celui-ci, mais encore tous ceux qu'Epicure a songés !" [5] (Lettre de Méré à Pascal, pp 348-359)

"Les mathématiciens parlent de ce qu'ils nomment un point. Ce point, disent-ils, n'est pas complètement rien et il n'est pas complètement quelque chose. Or, nous, Irlandais, nous inclinons à penser que ce quelque chose et ce rien sont bien près l'un de l'autre." [6](Cahier de notes de Berkeley, 1707-1708)

Que pensez-vous des affirmations suivantes ?

1. Le point est comparable à une boule de boulier. En serrant les boules l'une contre l'autre, on fait la ligne.

2. Le point est un nuage infiniment compressible, c'est-à-dire qu'on peut le rendre infiniment petit. Si on prend des points en nombre infini, on peut faire un morceau de ligne.

3. Le point est un zéro d'étendue. Multiplié une infinité de fois, cela ne fait toujours qu'un point.

4. Le point est quelque chose de "limite". Pour tracer une ligne, on part d'un point et on s'arrête un peu plus loin à un autre point. Quand on parcourt une ligne, si on s'arrête, c'est toujours sur un point. La ligne est une collection bien enchaînée de parties virtuellement séparées par des points-limites mais n'est pas l'ensemble de ces points.

Bolzano.

Dans son mémoire de 1817 [7], B. Bolzano tente de démontrer le théorème des valeurs intermédiaires. Il réfute les démonstrations antérieures se basant sur des considérations géométriques ou sur les concepts de temps ou de mouvement; il veut une démonstration purement analytique du théorème. Pour cela, il a besoin du critère dit de Cauchy qu'il pense démontrer. En fait, il arrive seulement à prouver l'unicité du nombre vers lequel converge une suite de Cauchy. Il lui manque, pour la preuve de son existence, une définition des réels qui n'est pas encore établie à cette époque.

Peu avant sa mort, en 1847, il donne une caractérisation du continu dans un de ses *Paradoxes de l'infini* [8], [9] (§38) : nous en donnons une traduction de quelques extraits.

[...] il faut reconnaître, en effet, que deux instants ou points ou (dans le domaine de la réalité) deux substances sont séparées par une infinité d'autres : mais quelle contradiction s'en suit-il précisément? Seulement celle-ci : aucune étendue ne peut être

engendrée par 2, 3, 4 ou un nombre seulement fini de telles entités. Nous sommes bien d'accord avec cela et même avec plus, à savoir, qu'une infinité de points ne suffit pas toujours pour engendrer un continu, mais que les points doivent aussi être bien arrangés. Si nous essayons de former une idée claire de ce que nous appelons "extension continue" ou "continu", nous sommes forcés de déclarer qu'un continu est présent si et seulement si nous avons un agrégat d'entités simples (instants, points, substances) arrangées de telle façon que chaque membre individuel de l'agrégat a au moins un voisin de l'agrégat pour chaque distance aussi petite que l'on veut. [...]

Que pourrait-on exiger de plus?

Certains répondront : "que chaque point ait un voisin en contact immédiat avec lui-même". Cette demande cependant est une impossibilité claire et recèle une contradiction. Car quand dirons-nous que deux points se touchent? Peut-être quand le bord de l'un, disons le droit, coïncide avec le bord de l'autre, disons le gauche? Mais les points sont les constituants simples de l'espace et donc n'ont pas de bord, ni de côté droit ou gauche. Soit un point a une partie en commun avec l'autre et alors ils coïncident. Soit c'est quelque chose de différent et les deux doivent se trouver séparés, laissant la place pour un point intermédiaire et donc pour une infinité d'autres puisque l'argument peut être appliqué à nouveau au premier point intermédiaire.

[...] A proprement parler, on devrait d'un côté certainement enseigner qu'une étendue n'est jamais produite par un ensemble fini de points, et est produite par un ensemble infini si et seulement si la condition maintes fois mentionnée est satisfaite - à savoir que chaque point dans l'ensemble possède, pour chaque distance suffisamment petite, un voisin appartenant aussi à l'ensemble; et d'un autre côté, on devrait admettre que toute subdivision d'un objet spatial ne le réduit pas en ses composants simples : en aucun cas pour les subdivisions en nombre fini et même pas pour toutes les subdivisions en nombre infini, par exemple celles qui consistent en des bisections successives. Néanmoins, il nous faut à nouveau insister sur le fait que n'importe quel continu peut être en dernière analyse composé de points et de points seulement.

Comment interpréter : "... chaque membre individuel de l'agrégat a au moins un voisin de l'agrégat pour chaque distance

aussi petite que l'on veut." ? Cela signifie-t-il : à *chaque distance donnée* ou à *une distance moindre que celle donnée* ? On peut se demander de toute façon à quoi se rattache le mot *distance*. Si les distances sont des réels, on tourne en rond puisque ceux-ci ne sont pas définis. Remarquons que, même en acceptant de considérer les distances comme des réels et si on prend l'interprétation à *une distance moindre que celle donnée*, la caractérisation donnée est vérifiée par l'ensemble des rationnels.

On voit aussi que Bolzano se préoccupe non seulement de cette caractérisation mathématique du continu comme le feront plus tard Dedekind et Cantor et d'autres, mais aussi de la nature des points, problème qui ne sera pas abordé par Dedekind et Cantor.

Dedekind.

Avec R. Dedekind, on laisse donc de côté le problème métaphysique du continu pour ne s'intéresser qu'au problème mathématique. Dedekind veut trouver une caractérisation du continu des réels qui soit applicable dans des démonstrations. En 1872, il écrit *Continuité et nombres irrationnels* [10], ouvrage dans lequel il crée les réels à partir des rationnels. Nous reproduisons les traductions de quelques extraits. Dans l'introduction, il explique sa motivation à créer les nombres réels.

"Les considérations qui font l'objet de ce court essai datent de l'automne 1858. Je me trouvai alors, en tant que professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, obligé pour la première fois d'exposer les éléments du calcul différentiel et je ressentis à cette occasion, plus vivement encore qu'auparavant, combien l'arithmétique manque d'un fondement véritablement scientifique. A propos du concept d'une grandeur variable qui tend vers une valeur limite fixe et notamment pour prouver le théorème que toute grandeur qui croît constamment, mais non au-delà de toute limite, doit nécessairement tendre vers une valeur limite, je cherchai refuge dans les évidences géométriques. Maintenant encore, admettre ainsi l'intuition géométrique dans le premier enseignement du calcul différentiel me semble, du point de vue didactique, extraordinairement utile, indispensable même, si l'on ne veut pas perdre trop de temps. Mais, personne ne le niera, cette façon d'introduire au calcul différentiel, ne peut aucunement prétendre avoir un caractère scientifique. Mon sentiment d'insatisfaction était alors si puissant que je pris la ferme décision de réfléchir jusqu'à ce que j'aie trouvé un fondement purement

arithmétique et parfaitement rigoureux des principes de l'analyse infinitésimale." [11]

Dedekind se rend compte que les mathématiciens parlent de "quantités continues" sans avoir élucidé cette notion de continuité. Il veut trouver une réelle définition de l'essence de la continuité dans les éléments de l'arithmétique. Il y parvient en novembre 1858 mais il ne publie ses résultats qu'en 1872.

Il suppose connu le développement de l'arithmétique des nombres rationnels mais en rappelle quelques points principaux dont celui-ci :

Le système $\mathbb{Q}$ constitue un domaine ordonné unidimensionnel, infini dans deux directions opposées.

Il veut remplacer la représentation géométrique de cette propriété par une considération purement arithmétique. Après avoir défini la relation d'ordre $<$ et celle d'égalité $=$, il expose les trois lois suivantes relativement à la relation d'ordre dans $\mathbb{Q}$.

I. Si $a > b$, et $b > c$, alors $a > c$. Nous dirons brièvement en accord avec les idées géométriques que b se trouve entre a et c .

II. Si a et c sont deux nombres différents, alors il existe une infinité de nombres différents compris entre a et c .

III. Si a est un élément de $\mathbb{Q}$, alors tous les nombres de $\mathbb{Q}$ se répartissent en deux classes, A_1 et A_2 , chacune comprenant une infinité de nombres ; A_1 comprend tous ceux $< a$ et A_2 tous ceux $> a$; le nombre a lui-même peut à volonté appartenir à la première ou à la seconde classe ; étant respectivement le plus grand ou le plus petit de la première ou de la seconde classe. Dans tous les cas, la séparation de $\mathbb{Q}$ en deux classes A_1 , A_2 est telle que chaque nombre de A_1 est plus petit que chaque nombre de A_2 .

Il compare ensuite les nombres rationnels avec les points d'une droite en remarquant, d'une part que, une fois choisi un repère sur la droite, on peut associer à chaque nombre rationnel un point de la droite, d'autre part, qu'aux lois I, II, III sur les rationnels correspondent les mêmes lois où l'on remplace la relation "est plus grand que" par la relation "est à droite de" en différenciant les deux directions opposées de la droite en "droite" et "gauche".

Par contre, il existe sur la droite une infinité de points ne correspondant à aucun rationnel.

"Si maintenant l'on veut, et c'est bien ce que l'on souhaite, suivre ainsi arithmétiquement tous les phénomènes de la droite, les nombres rationnels n'y suffisent pas et il devient alors absolument indispensable de raffiner de façon essentielle l'instrument $\mathbf{Q}$ construit par la création des nombres rationnels, en créant de nouveaux nombres tels que le domaine des nombres devienne aussi complet, ou nous dirons tout de suite aussi "continu" que la droite." [11]

Dedekind veut définir ces nouveaux nombres en se basant uniquement sur l'arithmétique tout comme on ne fait intervenir que les nombres entiers positifs pour définir les nombres entiers négatifs et les nombres rationnels.

La comparaison faite ci-dessus entre le domaine $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels et une droite a induit à reconnaître que le premier est lacunaire, incomplet ou discontinu, tandis que la droite doit être dite complète, non lacunaire ou continue. Mais en quoi consiste en fait cette continuité ?

[...] Au paragraphe précédent, on attire l'attention sur le fait que tout point p de la droite opère une division de celle-ci en deux portions telles que tout point d'une portion est à gauche de tout point de l'autre. Je trouve alors l'essence de la continuité, dans la réciproque, c'est-à-dire dans le principe suivant :

"Si tous les points de la droite sont répartis en deux classes, telles que tout point de la première classe soit situé à gauche de tout point de la seconde classe, il existe un point et un seul qui opère cette partition de tous les points en deux classes, cette découpe de la droite en deux portions.

[...]

La supposition de cette propriété de la droite n'est autre qu'un axiome par lequel nous attribuons à la droite sa continuité, par lequel nous trouvons la continuité dans la droite. Si l'espace a au moins une existence réelle, il n'est pas nécessaire pour autant qu'il soit continu ; beaucoup de ses propriétés subsisteraient s'il était discontinu. Et si nous étions sûr que l'espace était discontinu, rien ne nous empêcherait, si nous le désirions, de remplir ses trous, en pensée, et donc de le faire continu ; ce remplissage consisterait en une création de nouveaux points et aurait été effectué en suivant le principe ci-dessus.

Et voici comment il crée les nombres irrationnels.

"Les derniers mots indiquent déjà suffisamment de quelle façon le domaine $\mathbf{Q}$ des nombres rationnels, non continu, doit être complété en un domaine continu. Dans le paragraphe 1, on souligne (III) que tout nombre rationnel opère une division du système $\mathbf{Q}$ en deux classes A_1, A_2 telle que tout nombre a_1 , de la première classe A_1 , soit plus petit que tout nombre a_2 de la seconde classe A_2 ; le nombre a est soit le plus grand nombre de la classe A_1 soit le plus petit nombre de la classe A_2 . Soit donnée maintenant une certaine partition du système $\mathbf{Q}$ en deux classes A_1, A_2 ayant pour seule propriété caractéristique que tout nombre a_1 dans A_1 est plus petit que tout nombre a_2 dans A_2 . Nous nommerons par souci de brièveté une telle partition une "coupure", que nous désignerons par (A_1, A_2) . Nous pouvons dire alors que tout nombre rationnel a "opère" une ou, à vrai dire, deux sections que nous ne considérons cependant pas comme essentiellement différentes ; cette coupure a d'autre part la propriété suivante : ou bien il existe parmi les nombres de la première classe un nombre qui en est le plus grand, ou bien il existe parmi les nombres de la seconde classe un nombre qui en est le plus petit. Et réciproquement, si une coupure a aussi cette propriété, elle est opérée par ce nombre rationnel qui est le plus grand ou le plus petit.

Mais on se persuadera aisément qu'il existe une infinité de coupures qui ne sont pas opérées par des nombres rationnels." [11]

Dedekind donne un exemple de coupure qui n'est pas opérée par un nombre rationnel.

"Dans cette propriété que toutes les coupures ne sont pas opérées par des nombres rationnels, consiste le caractère incomplet et non continu du domaine $\mathbf{Q}$ de tous les nombres rationnels.

Chaque fois que nous sommes en présence d'une coupure (A_1, A_2) non produite par un nombre rationnel, nous créons un nombre nouveau, irrationnel, x que nous considérons comme parfaitement défini par cette coupure (A_1, A_2) " [11]

Le système de tous les nombres réels répond alors aux trois lois correspondant aux lois I, II, III vérifiées par les rationnels relativement à la relation d'ordre.

En plus de ces propriétés, cependant, le domaine $\mathbf{R}$ possède aussi la *continuité* ; c'est-à-dire que le théorème suivant est vrai :

IV. Si on partage le système $\mathbf{R}$ en deux classes U_1 et U_2 de façon que chaque nombre α_1 de U_1 soit plus petit que chaque nombre α_2 de U_2 alors il existe un et un seul nombre α qui engendre cette séparation.

Preuve. [...]

Dedekind étend à $\mathbf{R}$ les opérations existant dans $\mathbf{Q}$ et en donne quelques propriétés, puis fait le lien entre les considérations précédentes et certains théorèmes fondamentaux de l'analyse infinitésimale. Il commence par donner une définition de la limite, puis indique que le théorème que toute suite croissante majorée admet une limite est équivalent au *principe de continuité*, plus précisément au théorème IV repris ci-dessus.

Nous reproduisons également un extrait du livre *Que sont et que représentent les nombres?* [10]. Cet ouvrage fut publié en 1888 mais la première rédaction date de 1872-1878. Dedekind fonde d'abord les entiers puis $\mathbf{Q}$, puis $\mathbf{R}$ en utilisant les idées de théorie des ensembles de G. Cantor. Nous reprenons un extrait de la préface à la première édition.

Ma réponse au problème qui figure dans le titre [*Que sont et que représentent les nombres?*] est alors, dit brièvement, la suivante : les nombres sont de libres créations de l'esprit humain; [...] C'est seulement grâce au procédé logique de construction de la science des nombres et de cette façon par l'acquisition du domaine continu des nombres que nous sommes en mesure d'examiner nos notions d'espace et de temps en les mettant en relation avec le domaine des nombres créé par notre esprit.

Cantor.

Dans un article de synthèse paru dans les "Mathematische Annalen" en 1883, article qui résume les résultats essentiels de ses travaux depuis 1870, G. Cantor propose enfin une caractérisation *mathématique* de l'idée de continu.

Il n'est pas inutile de rappeler que Cantor, dès 1872, et comme Dedekind, a développé une construction complète de $\mathbf{R}$, sans laquelle la caractérisation mathématique de continu qu'il avait en vue aurait été illusoire.

La traduction ci-dessous est largement inspirée des *Fondements d'une théorie générale des ensembles* [13].

Il ne me reste donc plus qu'à chercher, au moyen de notions de nombres réels, une idée purement arithmétique, et aussi générale que possible, d'un continu de points. Je prends nécessairement pour point de départ l'espace arithmétique plan à n dimensions G_n , c.à.d. l'ensemble de tous les systèmes de valeurs :

$$(x_1 | x_2 | \dots | x_n),$$

où chaque x peut avoir indépendamment des autres toutes les valeurs numériques réelles de $-\infty$ à $+\infty$. La distance de deux points est définie par l'expression :

$$+ \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + \dots + (x'_n - x_n)^2}$$

Il s'agit donc de proposer une définition précise et aussi générale que possible de ce qu'on entend par un sous-ensemble continu P de G_n .

Ici, bien sûr, G_n désigne ce que nous notons $\mathbf{R}^n$.

La première question à aborder est celle du nombre de points dont il faut disposer pour fabriquer un ensemble continu ; ce nombre d'éléments d'un ensemble est ce que formalise la notion de *puissance* d'un ensemble.

J'ai démontré que tous les espaces G_n , si grand que soit le nombre de dimensions n , ont la même puissance entre eux et par suite la même puissance que le continu linéaire, et la même que l'ensemble de tous les nombres réels de l'intervalle $(0...1)$. De là résulte que tous les systèmes de points infinis P ont soit la puissance de la première classe de nombres (I) soit celle de la seconde (II).

Cette dernière phase signifie : << tous les systèmes P infinis de points ont soit la puissance de $\mathbf{N}^*$, soit la puissance immédiatement supérieure, qui se trouve (!) être égale à celle de $[0,1]$ ou de $\mathbf{R}$ >> ; le point d'exclamation est là pour signaler que l'affirmation de Cantor n'est rien de moins qu'une des premières apparitions de la célèbre Hypothèse du Continu. Il s'agit maintenant de disposer convenablement tous ces points, de les situer les uns par rapport aux autres, de les agglomérer convenablement, d'en faire du continu.

Pour arriver maintenant à la notion générale d'un continu donné dans G_n , j'utilise la notion d'ensemble dérivé $P^{(1)}$ d'un

ensemble de points P donné, elle conduit à la notion d'un dérivé $P(\gamma)$, où γ peut être un nombre entier quelconque d'une des classes de nombres (I), (II), (III), etc.

Si S est dans des conditions telles que l'emploi du procédé de dérivation n'y change absolument rien, en sorte que :

$$S \equiv S^{(1)}$$

et par conséquent aussi :

$$S \equiv S^{(\gamma)},$$

j'appelle ces systèmes S *ensembles parfaits de points*.

On peut démontrer pour les systèmes parfaits ce théorème : ils n'ont jamais la puissance de (I).

Rappelons que, si P est un sous-ensemble de $\mathbf{R}$, on appelle premier (ensemble) dérivé de P , et on note $P^{(1)}$ ou P' , l'ensemble des points d'accumulation de P , c'est-à-dire l'ensemble des points a de $\mathbf{R}$ tels que, pour tout intervalle ouvert I contenant a : $P \cap (I - \{a\}) \neq \emptyset$, ce qui équivaut à ce que $P \cap I$ comporte une infinité de points distincts.

Mais la seule propriété d'être parfait ne suffit pas : Cantor propose, comme contre-exemple, l'ensemble triadique qui, depuis, porte son nom.

Les systèmes de points parfaits S ne sont pas toujours ce que nous avons appelé condensés dans toute étendue ; c'est pourquoi ils ne se prêtent pas encore à la définition complète d'un continu de points, quand même on est obligé d'accorder immédiatement que le continu doit être toujours un système parfait.

Comme exemple d'un système de points parfait, qui n'est pas condensé dans toute étendue d'un intervalle si petit qu'il soit, j'indique l'ensemble de tous les nombres réels contenus dans la formule :

$$x = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \dots + \frac{c_v}{3^v} + \dots$$

où les coefficients c peuvent prendre à volonté les deux valeurs 0 et 2 et où la série peut être composée d'un nombre fini ou infini des membres.

Cantor énonce alors une seconde condition que doit remplir un ensemble de points pour mériter d'être qualifié de continu.

Il faut donc encore une notion pour la joindre à celle qui précède et définir le continu : c'est la notion d'un système de points T bien enchaîné.

Nous disons que T est un système de points bien enchaîné, quand pour deux points quelconques t et t' de ce système, avec un nombre donné ε aussi petit qu'on voudra, il y a toujours un nombre fini de points $t_1, t_2, \dots, t_v$ de T , en sorte que

les distances $\overline{tt_1}, \overline{t_1t_2}, \overline{t_2t_3}, \dots, \overline{t_vt'}$ soient toutes plus petites que ε .

Et Cantor avance alors l'hypothèse que ces deux conditions suffisent à caractériser un sous-ensemble de points de $\mathbf{R}^n$ qu'on veut qualifier de continu.

Tous les continus de points géométriques que nous connaissons sont aussi compris, comme il est facile de la voir, sous cette notion du système de points bien enchaîné ; mais je crois maintenant reconnaître aussi dans ces deux attributs "parfait" et "bien enchaîné" les caractères nécessaires et suffisants d'un continu de points et je définis par conséquent un continu de points dans G_n comme un système parfaitement enchaîné. Ici "parfait" et "bien enchaîné" ne sont pas seulement des mots, mais des attributs du continu tout à fait généraux, caractérisés d'une manière abstraite, de la façon la plus précise, par les définitions précédentes.

Il propose enfin un procédé de construction de sous-ensemble continu de $\mathbf{R}^n$.

Le dérivé d'un système de points bien enchaîné est toujours un continu, que le système de points bien enchaîné ait la première ou la deuxième puissance.

Ce critère entraîne, en particulier, que le premier dérivé de Q , à savoir la "droite" réelle, est un continu, au sens de Cantor.

En guise de conclusion.

La question de savoir si l'on peut faire une droite avec des points est intéressante, parce qu'elle pose merveilleusement bien la question du statut de l'intuition en mathématiques.

Pour l'essentiel, l'histoire de cette question-là est celle de la caractérisation mathématique d'un objet qui soit "continu en lui-même". L'ensemble des textes présentés dans notre atelier témoigne de ce que la solution de cette question a été lente et détournée, en particulier parce que la perception intuitive, ou physique, du continu s'est révélée être autant un frein (de Méré, Berkeley,...) qu'un moteur (Aristote, Pascal,...)

A posteriori, il est facile d'aller au coeur de la question. Dès le cinquième siècle avant Jésus-Christ, les paradoxes de Zénon ont cristallisé les difficultés liées à l'intuition du continu. Ces difficultés se sont précisées au fur et à mesure des progrès du Calcul Infinitésimal ; il n'y a rien d'étonnant à cela, quand on sait que le concept de nombre réel était le préalable essentiel, autant à l'arithmétisation définitive de l'Analyse, qu'à l'entrée du continu dans le monde mathématique. C'est ce que la lecture des textes de Bolzano, Dedekind ou Cantor, permet de vérifier.

Or, et pour en revenir au statut de l'intuition, cette notion de nombre réel ne saurait pas être une notion issue d'une intuition immédiate : il n'aurait pas fallu, sinon, 2500 ans pour réaliser que la définition même de nombre réel résout les paradoxes de Zénon. Et les découvertes de fonctions "monstrueuses" (Weierstrass, Peano, Lebesgue,...), de boules équidécomposables de rayons différents (Banach, Tarsky,...), des mesures fractionnaires (Hausdorff,...), etc. n'auraient pas créé les surprises qu'on sait.

Ainsi apparaît finalement, lorsqu'on fait, ou lorsqu'on apprend des mathématiques, et qu'on souhaite les accorder à une forme mathématique d'intuition, LA NECESSITE DE SE DEPRENDRE DE LA NATURE DES CHOSES (*). Peu importe ainsi l'idée que l'on se fait de la nature d'un objet mathématique, ce qui compte, c'est qu'on soit d'accord avec les propriétés qu'on attribue à cet objet, qu'on explicite la cohérence de ces propriétés, qu'on ne cherche pas à imposer à un tel objet plus de propriétés qu'il n'est à même d'en supporter.

(*)Citation empruntée au débat, pendant l'atelier...

Mais, si cette nécessité condamne l'intuition immédiate d'une notion à un statut non mathématique, elle ne fait pas pour autant de cette intuition une forme de connaissance à proscrire. Cette intuition première n'est ni inutile, ni nuisible. C'est, bien au contraire, une étape nécessaire dans la mise au point d'une notion, nécessaire parce que c'est elle qu'il s'agit de dépasser. La formalisation est cette étape de dépassement, et cette étape ne prend tout son sens qu'avec l'apparition d'une nouvelle intuition, proprement mathématique celle-là, et extraordinairement plus riche que celle de la perception ordinaire. Les exemples cités plus haut (Weierstrass, Péano, Lebesgue, Banach, Hausdorff,...) en font foi.

Cette intuition nouvelle devient tellement riche qu'elle éclaire enfin le mystère de ce labyrinthe rectiligne, dû à l'imagination de J.-L. Borges, et qui nous servait d'épigraphe.

Mais est-ce une coïncidence ?

Bibliographie

- [1] Aristote, *Physique (I-IV)*, Tome I, Les Belles Lettres, Paris, 1983.
- [2] Aristote, *Physique (V-VIII)*, Tome II, Les Belles Lettres, Paris, 1969.
- [3] Galilée, *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles*, Armand Colin, Paris, 1970.
- [4] B. Pascal, De l'esprit géométrique et de l'art de persuader, dans *Oeuvres complètes*, Seuil, Paris, 1963.
- [5] B. Pascal, *Oeuvres complètes*, Tome III, Desclée de Brouwer, Paris, 1991.
- [6] G. Berkeley, *Oeuvres choisies*, Tome I, Aubier, Montaigne, 1944.
- [7] B. Bolzano et son mémoire sur le théorème fondamental de l'analyse, *Revue d'histoire des sciences* 17 (1964), pp. 129-164.
- [8] B. Bolzano, *Paradoxien des Unendlichen*, Beic. H. Reclam Sen., Leipzig, 1851.

[9] B. Bolzano, *Paradoxes of the infinite*, Yale University Press, New Haven, 1950.

[10] R. Dedekind, *Essays on the theory of numbers*, Dover Publications, New York, 1963.

[11] J. Dhombres, etc., *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars, Paris, 1987.

[12] P. Dugac, *Sur les fondements de l'analyse au XIXe siècle*, U.C.L., Louvain-la-Neuve, 1980.

[13] G. Cantor, *Fondements d'une théorie générale des ensembles*, Acta Mathematica 2 (1883), pp. 381-408.

Statut du nombre et détermination de l'infini

Gilles Ferréol
Université de LILLE I
(METIS / C.L.E.R.S.E.)

L'absence d'une définition réellement satisfaisante du nombre entier a condamné non seulement la mathématique grecque mais aussi celle de l'époque classique à faire l'économie de l'infini. Il faudra attendre la seconde moitié du XIXème siècle pour qu'un renversement de perspective puisse s'opérer (cf. l'Annexe, p. 127). Les travaux de G. Cantor (1878), G. Frege (1884) et R. Dedekind (1888) méritent, à cet égard, une analyse attentive et requièrent une compréhension préalable de la cardinalité (C. Imbert, 1969 ; H. Wang, 1974).

Le problème de la nature du nombre

Ce problème, rappelle J.-L. Gardies, "hante avec d'autant plus de constance la philosophie occidentale que celle-ci ne commencera à en apercevoir la solution que très tardivement, dans les années 1880-1890" (J.-L. Gardies, 1989, p. 549).

T. Dantzig ajoute, pour sa part, qu' "il n'y a pas deux branches des mathématiques qui présentent un plus grand contraste que l'arithmétique et la théorie des nombres" ; la première est accessible à l' "esprit le moins ouvert" ; la seconde nécessite une "adresse des soupçonnées" et une "habileté consommée" (T. Dantzig, 1974, p. 41).

Examinons tout d'abord le point de vue défendu par les Grecs (A. Darbon, 1951). Thalès, du moins si l'on en croit certains témoignages, aurait emprunté aux Egyptiens l'idée que le nombre était une "collection d'unités". Aristote appartient à cette tradition, de même qu'Euclide (cf. le livre VII des **Eléments**). La théorie des proportions et la mise en évidence de rapports irrationnels (tel celui de la diagonale du carré à son côté) conduisent à souligner la spécificité des grandeurs. Celles-ci peuvent être caractérisées par les propriétés de continuité, de consécuité et de contiguïté :