

22 - D.K. (24) Alcméon A III, 218 ; et (58) Ecole pythagoricienne B V, 566 (302).

23 - Si l'analyse de Zénon devait s'arrêter là, le Grand de Zénon aurait pour strict équivalent le continu d'Aristote, qui est divisible à l'infini, en puissance.

24 - Voir la suite du fragment B II, 291 (379) et le commentaire d'Aristote cité en première page du présent article, n. 4.

25 - Aristote use de l'image de la sciure de bois, **De la génération et de la corruption**, I, 2. 316a 34.

26 - D.K. (44) Philolaos A IX, 492 (252).

27 - D.K. (44) Philolaos B II, 503 (263).

28 - *Ibid.* B I et B II, 502 (262).

29 - Aristote, *περὶ τῶν φυσικῶν*, éd. W.D. Ross, *op. cit.* fgm. 2, p. 113.

30 - *Ibid.* p. 117; notre citation de Simplicius, *In Phys*, va de 453, 31 à 454, 10.

31 - Nous avons eu l'occasion d'étudier le parti que les stoïciens ont tiré de cette géométrie paradoxale; voir "Mos geometricus, mos physicus" in J. Brunschwig éd., **Les Stoïciens et leur logique**, Chantilly 1976, Paris, Vrin 1978.

Comment les *Eléments* d'Euclide traitent du continu sans recourir à l'infini.

Marie-José Durand-Richard

Collège Paul Gauguin, Paris
Chercheur associé REHSEIS. CNRS

Les *Eléments* d'Euclide (-323, -285) constituent le premier ouvrage connu qui traite exclusivement des mathématiques. Sa structure axiomatique-déductive, tout comme la rigueur de ses démonstrations, lui confèrent encore valeur canonique au 17^{ème} siècle; et en dépit d'un fondement axiomatique-déductif, sa représentation géométrique des opérations les fait apparaître, au moins jusqu'à l'émergence des géométries non-euclidiennes au 19^{ème} siècle, comme une théorisation adéquate du réel. De fait, l'organisation des 13 livres de l'ouvrage est au service d'une maîtrise opératoire du continu qui puisse ne pas faire référence à l'infini. Leur rédaction, outre qu'elle livre aux mathématiciens d'Alexandrie la somme des connaissances acquises par leurs prédécesseurs, en restructure le contenu autour du livre V, connu comme théorie des proportions ou théorie de la mesure. De fait, elle intervient comme mode de résolution de la crise du rationnel, crise à laquelle s'étaient heurtés les Pythagoriciens en établissant l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré. Une telle résolution a ceci d'exemplaire qu'elle permet d'observer le processus d'invention et de structuration des concepts en mathématiques. Elle montre quelles sont les contradictions soulevées entre la logique de l'arithmétique géométrique pythagoricienne, qui constitue l'ancien système de représentation, et cette nouveauté, philosophiquement étrangère au mode de théorisation antérieurement accepté. Elle éclaire les médiations nécessaires à la recomposition théorique du champ des mathématiques : celles-ci passent par la nécessité de retravailler les anciennes significations, les anciens concepts, afin de fournir à de nouvelles pratiques une interprétation qui permette de les intégrer. C'est au cours de cette étape particulière qu'a lieu l'échange le plus étroit entre le langage scientifique - mathématique - et le langage courant, et que se repose le problème qui intervient de manière récurrente dans l'histoire des mathématiques, et qui est celui de leur nature, celui de savoir de quoi elles parlent, et de la difficulté sans

cesse éprouvée de reconnaître ce que représentent les objets mathématiques dans un réel toujours difficile à cerner.

L'ambition de cet article est donc :

- de présenter la proposition 1 du livre X, qui sert de principe à toutes les démonstrations d'Euclide, d'Archimède, et de leurs successeurs, exprimant une aire curviligne à partir d'une aire rectiligne selon une méthode unique que Grégoire de Saint-Vincent (1584-1667) qualifiera d'exhaustion, parce qu'elle exhausse cette aire, au sens où elle l'épuise par une succession d'aires de polygones inscrits (la proposition 2 du livre XII, donnée en annexe, en est le premier exemple de mise en pratique)

- de resituer le travail d'Euclide dans le contexte de la science grecque, relativement au traitement opératoire que donne Aristote de l'infini, et à la fonction spécifique du *logos* dans la philosophie grecque, notamment dans les différentes symbolisations du cosmos, de la cité, de l'espace et du mouvement.

I. La crise de la rationalité

La crise de la rationalité¹ intervient à propos des implications du théorème aujourd'hui bien connu, dit de Pythagore, puisqu'en général, si je construis un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit sont mesurés par des entiers, l'hypoténuse n'est pas mesurée par un entier. Des exceptions existent cependant, et sont investis, du fait même de leur rareté, d'un caractère sacré, comme le triangle (3,4,5) que connaissaient les Egyptiens et la plupart des civilisations de l'Orient. La question se pose donc de préciser la mesure de cette hypoténuse. De fait, il est très difficile de dire qui, de Pythagore ou de ses disciples, a produit ce théorème, ni s'il a vraiment été démontré par eux. Sa démonstration se trouve en tous cas au livre I, proposition 47, des *Eléments* d'Euclide. La crise de la rationalité va naître de la confrontation entre l'existence constructible de cette hypoténuse du triangle rectangle d'une part, et d'autre part, l'état des modes de représentation du champ numérique, associée à la conception pythagoricienne du nombre.

¹ Je préfère parler de crise de la rationalité plutôt que de crise des irrationnels :

1°) pour une raison de nature mathématique : si les irrationnels existaient, il n'y aurait pas de crise,

2°) pour une raison d'ordre philosophique, puisque la démonstration des Pythagoriciens menace directement la possibilité d'une maîtrise rationnelle du monde par le biais du discours.

1. La notion de nombre et la discontinuité du champ numérique

Les nombres ne sont ni aussi "naturels", ni aussi "réels" que ces appellations le laissent supposer. Ils ne sont perçus comme tels que dans la mesure où ils correspondent à l'usage le plus traditionnel que nous en avons. Nous avons aujourd'hui une représentation intuitive de l'ensemble des nombres réels grâce à l'ensemble des points d'une droite, que nous appelons d'ailleurs la droite réelle. Cette représentation intuitive a ceci de spécifique qu'il s'agit d'une représentation continue, mais elle ne va pas de soi. De fait, elle nous a été enseignée à l'école, où on utilise cette bijection entre l'ensemble des nombres réels et l'ensemble des points d'une droite. Cette identification était explicitement admise dans les programmes dits de mathématiques modernes, et elle est aujourd'hui pratiquée couramment sans que rien d'explicite ne soit formulé à ce sujet. Qui plus est, la numération décimale à virgule nous rend immédiatement perceptible la continuité de $\mathbb{R}$, qui fait qu'entre deux nombres quelconques, on peut toujours en trouver un troisième, en poussant assez loin les subdivisions décimales de l'unité. Mais cette numération à virgule, que nous devons à Simon Stevin de Bruges (1548-1620), est extrêmement récente, comparée aux cinq millénaires d'écriture mathématique qui l'ont précédée. Hors l'école, nous sommes également confrontés à des représentations graphiques ("courbe" du chômage, "courbe" des impôts) qui tendent à nous faire considérer cette identification entre les points d'une droite et l'ensemble des nombres réels comme naturelle. Mais la démonstration mathématique de la continuité de l'ensemble des nombres réels, et de la possibilité de l'identifier par bijection avec une droite, date de la fin du 19^{ème} siècle². On la doit aux recherches parallèles de J. W. Richard Dedekind (1831-1916), Georg Cantor (1845-1918) et Karl T. W. Weierstrass (1825-1897).

C'est dire que notre intuition dépend des instruments de pensée qui sont devenus d'usage courant. Compte tenu de cette observation, il n'y a aucune raison de supposer *a priori* que l'intuition du champ numérique dans le monde grec est identique à la nôtre. Elle est en effet tributaire de leur conception même du nombre, qui est d'abord, comme celle de leurs prédécesseurs, essentiellement discontinue.

La richesse conceptuelle des systèmes de numération de l'Antiquité n'est que trop évidente. L'écriture mathématique, dont

² M. Caveing, "Quelques remarques sur le traitement du continu dans les *Eléments* d'Euclide et la *Physique* d'Aristote", in Coll., *Penser les Mathématiques*, Paris, Points Seuil, 1982. Cf. ch. 1, note 3, p. 3.

l'origine coïncide avec la naissance de l'écriture, décuple les capacités collectives de mémoire et la complexité des opérations qu'il est possible d'enregistrer. Elle participe d'une objectivation de l'inscription du sujet dans le temps, dans la mesure où elle augmente ses possibilités de différenciation, et lui permet un repérage qui se dégage de la seule généalogie. Au même titre que l'alphabet, la mise en place d'une base de numération, et d'un système de position, réalisent une considérable économie de signes, puisqu'elle autorise l'écriture d'un nombre aussi grand que l'on veut, par simple réitération ou déplacement d'un ou de plusieurs signes.

Mais cette richesse ne saurait faire oublier la discontinuité fondamentale du champ numérique que les systèmes de numération permettent de symboliser. Le système de numération des Babyloniens, dont témoignent par exemple les tablettes du règne d'Hammurabi, combine les bases 10 et 60, avec un principe de position. Les fractions s'y écrivent comme les entiers, et seul le contexte permet de lever les ambiguïtés d'une telle écriture. Ainsi, 92 s'écrit I<<<II, où I désigne l'unité à gauche, mais la soixantaine à droite, alors que < désigne 10. De même, <IIII peut désigner 15, ou bien la fraction $1/4$, qui correspond aux $15/60$ èmes de l'unité. Le système hiéroglyphique de numération des Egyptiens, dont témoigne par exemple le papyrus Rhind, est un système décimal non positionnel. 231 s'écrit Ihhh99. Seules les fractions de numérateur 1 sont envisagées, et s'écrivent en faisant surmonter le dénominateur du signe $\circ$. Certaines fractions échappent à cette situation, comme la fraction $2/3$, mais elles jouissent d'un statut particulier, quelque peu mythique, et sont associées à un symbole spécifique³.

En Grèce, les signes du système décimal adopté pour compter ne sont autres que les lettres de l'alphabet⁴. Pour les Pythagoriciens

³ Cf. A. Dahan-Dalmédico, *Routes et Dédalles*, Paris-Montréal, Etudes Vivantes, 1982, ch. 1 ; J. Ritter, "Babylone, -1800", & "Chacun sa vérité : les mathématiques en Egypte et en Mésopotamie", *Eléments d'histoire des Sciences*, ss. dir. M. Serres, Paris, Bordas, 1989, ch. 1 et 2 ; G. Guittel, *Histoire comparée des numérations écrites*, Paris, Flammarion, 1975.

⁴ Dans le domaine de la logistique grecque, les nombres sont écrits avec les mêmes caractères que les mots, à ceci près qu'une barre au-dessus les en distingue. Cette écriture alphabétique des nombres, pour surprenante qu'elle puisse être, est plus facile à comprendre si on se souvient de la fascinante innovation que représente l'alphabet grec. Cette identification entre numération et écriture ne fera pourtant qu'accentuer le fait que le nombre soit envisagé comme une multitude d'unités, dont il est toujours aussi difficile d'envisager la partition, et celui que le champ numérique persiste à être perçu comme discontinu, atomistique en quelque sorte. Kristeva, J., *Le langage, cet inconnu*, Paris, Seuil, Coll. Points Sciences Humaines, p. 105-18.

cependant, la question de la représentation de la diagonale du carré ne se pose pas à propos de l'écriture des nombres, qui ressort de l'art de compter, c'est-à-dire d'un artifice de l'ordre de la pratique, appelé logistique. Elle est au contraire la question cruciale pour l'arithmétique pythagoricienne proprement dite, entendue comme théorie des nombres, et qui relève de la philosophie. C'est une arithmétique géométrique où la généralité des propriétés numériques est établie grâce à différentes configurations d'assemblages de points, dont chacun symbolise une unité substantielle⁵.

2. De la nature du questionnement philosophique chez les Présocratiques ...

Il faut le rappeler : la science grecque ignore tout de cette expérimentation qui sera le fait de la "Révolution Scientifique" du 17ème siècle. Elle n'est pas non plus le produit d'une réflexion naïve et spontanée de la raison sur la nature. J.P. Vernant a bien montré comment elle transpose, sous une forme laïcisée et dans un vocabulaire plus abstrait, la conception du monde des mythes cosmogoniques⁶. Elle marque la prise de conscience d'une séparation entre l'être et le monde, une prise de conscience qui intervient dans les nouvelles cités de la côte ionienne. Le philosophe grec scrute les fondements d'un monde que ne garantit plus aucune souveraineté royale, et qui se doit donc de la dépasser, de l'englober, tant d'un point de vue logique que chronologique. Si sa pensée se distingue de celle du mythe, c'est dans un contexte où la confusion du sociologique et du psychologique, confusion entre la personne, le groupe et l'univers tout entier, autorise les transpositions sémantiques d'un domaine à l'autre⁷. C'est dans la mesure même où l'ordonnancement de l'espace, la création du temps, la régulation du cycle saisonnier ne sont plus garantis par le sacré que ces thèmes vont constituer l'objet privilégié du questionnement philosophique⁸. Ainsi s'opère une identification minutieuse de processus qui sont attribués à des puissances "matérielles" dont les propriétés

⁵ A. Dahan-Dalmédico & J. Peiffer, op. cit., p. 44.

⁶ Cf. annexe 4. Mythe et philosophie tentent ici de répondre au même type de questions, communes à toutes les cultures, même si elles y reçoivent des réponses de nature diverse : magique, religieuse, esthétique, philosophique, scientifique.

⁷ M. de Corto, "La vision philosophique d'Héraclite", *Laval théologique et philosophique*, 1960, n° 16, pp. 169-236, p. 190.

⁸ Il porte sur des interrogations du type : comment expliquer le jour, la nuit, l'été, l'hiver, et le perpétuel recommencement de certains phénomènes naturels ? en vertu de quel principe les êtres naissent-ils et se développent-ils avant de décliner et de mourir ? comment ce monde en apparence si confus et si désordonné peut-il être décrypté grâce à des principes simples que notre raison puisse comprendre ?

correspondent à une transposition des qualités divines⁹.

Dans ce contexte, la recherche philosophique consiste à envisager ce qui permet au monde de perdurer, dans son dynamisme même, au-delà des apparences, de se perpétuer tout en se modifiant, nous dirions : de vivre, les philosophes grecs auraient dits : d'être. Elle cherche à identifier un principe d'existence qui soit différenciateur sans être aléatoire. La question des origines du monde y est donc primordiale. Sa création est affirmée comme un processus de différenciation qui en autorise tout à la fois la permanence et le changement. A partir d'un état initial considéré comme confusionnel, posé comme un chaos au sein duquel rien ne saurait être connu ou reconnu, ces différenciations installent des distinctions dont la permanence assure l'ordre du monde. Le changement, conçu comme processus vital, est essentiellement continu, et sa continuité est inscrite dans la nature, dans la substance même des éléments fondateurs ainsi différenciés, et ce aussi bien dans les mythes de Thalès ou Anaximandre que dans la philosophie d'Aristote.¹⁰

Cette quête de permanence, que le philosophe appelle vérité, réalise la conversion symbolique de cette disparition du sacré, dont elle conserve le caractère d'évidence, d'universalité et d'absolue nécessité. Elle passe par l'énonciation d'un discours structuré, susceptible de juguler les incertitudes psycho-sociologiques d'une société dont la stabilité, la légitimité, n'étant plus garanties par un pouvoir de nature divine, passent par une appropriation collective et une diversification des fonctions du pouvoir, et des possibilités d'intervention de la pensée.

3. ... à la conception pythagoricienne du nombre.

Pythagore (≈-580, ≈-497) est présenté, selon les différents types de biographies consultées, tantôt comme le noyau d'une communauté mystico-religieuse, tantôt comme le fondateur d'une école qui installe la réflexion mathématique au cœur de la recherche philosophique, tant il est difficile pour un lecteur du 20ème siècle, d'intégrer le fait

⁹ Elle aboutira à la distinction fondamentale entre matière et esprit, ou plutôt entre animé et inanimé, à partir d'une réflexion portant sur l'être comme schème de ce qui est animé.

¹⁰ C'est le *Chaos*, chez Hésiode; *Nux*, *Erèbos*, *Tartaros*, dans certaines Théogonies attribuées à Orphée, à Musée et à Epiménide; et, plus important encore pour le propos de cet article, c'est l'*Apeiron*, le non-délimité, chez Anaximandre. J.P. Vernant, *Les origines de la pensée grecque*, Paris, PUF Quadrige, 1981, et J.P. Vernant, *Mythe et Pensée chez les Grecs*, Paris, Petite Collection Maspéro, 2 vol. 1965.

que Pythagore fût les deux à la fois, et que l'une de ces spécificités ne saurait être dissociée de l'autre.

La pensée pythagoricienne est effectivement mystique. C'est par le mysticisme qu'elle tente de dépasser cette séparation si difficile à assumer entre l'homme et le monde. Le salut individuel y est conçu comme la réintégration de l'homme au tout par une assimilation progressive au divin¹¹, qui ne peut être atteint que grâce une ascèse communautaire, spirituelle et morale¹². Les pratiques philosophico-religieuses, tant celles de Pythagore à Samos (jusqu'en ≈-480) que des Pythagoriciens à Crotone, et plus tard dans toute la Grèce, sont fondées sur l'idée première d'un ordre cosmique organisé par une harmonie, qui signifie à la fois beauté, perfection structurelle¹³ et affinité universelle¹⁴, autrement dit, par un ordre tout entier investi de puissance moralisante et unificatrice. Seule la connaissance d'une telle harmonie est censée permettre de réaliser cette union du même en soi et du même hors de soi, parce qu'elle participe tout autant de l'âme humaine que de cet univers vivant et divin auquel elle est intimement liée¹⁵ et que les Pythagoriciens sont les premiers à dénommer *cosmos*. En tant que tel, le monde naturel n'est pas conçu comme un objet inerte, mais comme vivant, animé par des forces puissantes et mystérieuses que seule cette harmonie permet d'équilibrer¹⁶.

C'est le nombre qui, dans la philosophie pythagoricienne, est considéré comme l'essence même de cette harmonie. Pourquoi le nombre, et comment est-il conçu? Plusieurs interprétations de ce caractère fondateur du nombre sont fournies par les historiens. Une origine monétaire, parce que sur l'île marchande de Samos,

¹¹ W.K. Guthrie, *A History of Greek Philosophy*, Cambridge Un. Press, 1965, vol 1., p. 181-182.

¹² La recherche d'une sublimation du temps fait intimement partie de cette ascèse. Les Pythagoriciens tentent de l'atteindre notamment par la maîtrise des exercices de mémoire, que pratiquaient avant eux les poètes ou aèdes de cette civilisation à tradition orale. C'est là un exercice de purification destiné à libérer l'âme du corps qui l'enchaîne à la vie présente. Dans le cadre de la conception cyclique du temps qui est la leur, et celle du monde grec en général, il permet de maîtriser le temps dans sa totalité, d'en rejoindre le commencement, donc d'échapper à la mort, au devenir. J.P. Vernant, *Mythe et Pensée*, I, op. cit., p. 80-107.

¹³ Guthrie, op. cit., p. 206, ainsi que Platon, "Gorgias", 507e et "Ménon", 81a-c, *Oeuvres Complètes*, Paris, Gallimard, 1950.

¹⁴ Guthrie, op. cit., p. 203.

¹⁵ Ibid., p. 206.

¹⁶ La conception d'une telle harmonie fait obstacle à l'idée d'une expérimentation, puisqu'elle bouleverserait l'équilibre que fonde cette harmonie, et qui fait du *cosmos* ce qu'il est.

l'économie monétaire est un phénomène récent, perçu comme un facteur quantitatif susceptible de réaliser une certaine forme d'unification des phénomènes¹⁷. Les constellations du Zodiaque constituent un autre modèle possible, celui d'objets cosmiques qui s'évanouissent et réapparaissent régulièrement, dont la forme est régie par le nombre d'unités que représentent leurs étoiles et par la forme géométrique qu'elles constituent¹⁸. Une telle représentation peut servir de base à une conception générale de l'univers, et semble ici d'autant plus prégnante que le nombre pythagoricien n'est pas clairement distingué des objets qu'il dénombre, et qu'il est associé à un ensemble de points qui n'ont pas perdu toute dimension¹⁹. Mais l'interprétation la plus fréquente, et la plus argumentée, de ce recours à une harmonie organisant le *cosmos* est celle de l'harmonie musicale, des rapports entre les sons de la lyre, ou plus vraisemblablement de cet instrument monocorde qu'était alors le canon²⁰. Ainsi faut-il entendre le "Toutes choses sont nombres" des Pythagoriciens : des nombres qui sont à la fois notion abstraite et réalité intuitive, qui participent de la substance, c'est-à-dire d'une entité où matière et forme ne sont pas perçues séparément²¹. Il n'empêche que leur étude systématique des proportions d'entiers fait évoluer la description du *cosmos* vers une recherche de plus en plus formelle²².

C'est bien parce que le nombre pythagoricien est ainsi investi d'une nature substantielle que la génération des objets physiques peut être envisagée à partir de celle des figures géométriques, elles-mêmes engendrées par les nombres. C'est le nombre qui, par sa nature, est la cause de tous les phénomènes naturels. Cette génération se confond avec l'idée d'un processus temporel. Dans ce processus

¹⁷ Guthrie, op. cit., p. 221.

¹⁸ L. Brunschwig, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, Blanchard, 1981, p. 33.

¹⁹ M. Krasner, *La pluralité et l'infini dans la philosophie et la mathématique grecques*, Paris, Publications de l'Université Paris-Nord, Coll. Philosophie et Mathématiques, 1981, p. 15.

²⁰ La longueur de vibration de la corde y est fixée par un pont amovible. Une corde deux fois plus longue vibre à une vitesse moitié, et l'intervalle correspondant est d'un octave en fréquence (rapport inverse). Le rapport de quinte correspond à 3/2, le rapport de quarte à 4/3. À l'addition des intervalles musicaux correspond la multiplication des rapports de fréquence. Ainsi le *cosmos*, manifestation de l'ordre et de la beauté, semble organisé par les nombres 1, 2, 3 et 4, dont la somme 10 est un nombre considéré comme parfait et contenant la nature même du nombre.

²¹ Comme elles le seront par Aristote. Cf. II. Guthrie, op. cit., p. 240.

²² Ibid., p. 4.

d'engendrement, c'est cette unité qui constitue le principe²³.

La philosophie pythagoricienne est en même temps fondée sur une dualité des formes numériques, qui s'articule sur une table de dix oppositions, qu'Aristote nous rappelle en ces termes :

"D'autres (pythagoriciens), parmi ces même philosophes, reconnaissent dix principes, qu'ils rangent en deux colonnes parallèles : Limite et Illimité, Impair et Pair, Un et Multiple, Droite et Gauche, Mâle et Femelle, en Repos et Mû, Rectiligne et Courbe, Lumière et Obscurité, Bon et Mauvais, Carré et Oblong."²⁴

Dans ce système dualiste de valeurs, où l'éthique et l'ontologique ont le même poids, ce sont les nombres - entiers, finis, représentés par des points - et les rapports numériques, qui confèrent aux choses l'ordre et la perfection : un composé est bon s'il est fait de rapports déterminés. Le *cosmos*, parce qu'il est vivant et divin, est bon. Et parce qu'une telle harmonie, à la fois divine et numérique, régit l'ordre dans les relations entre ses parties, il est limité. Ainsi l'harmonie musicale elle-même impose-t-elle une limite (rapport d'entiers) à l'illimité (le continu de la variation du son musical) pour

²³ C'est la raison pour laquelle les nombres pythagoriciens ont une signification mystique : ils ont une réalité indépendante des phénomènes puisque première, ils sont un principe divin qui gouverne la structure du monde tout entier. Dans la philosophie pythagoricienne, leur signification mystique symbolise également des qualités morales et d'autres abstractions. Ce qui aboutit parfois à une attitude non scientifique qui consiste à forcer les phénomènes pour qu'ils obéissent à des aspects théoriques fixés *a priori*, comme c'est le cas de l'existence supposée d'une dixième planète ou Antiterre, parce qu'il semblait inconcevable que le nombre de planètes ne fut pas un nombre parfait. Certains nombres, ou certaines figures géométriques qui les représentent sont sacrés, comme par exemple le triangle, ou *tetratys* qui représente le nombre 10, et le pentagramme ou *pentalpha*, qui deviendra plus tard un symbole magique très connu (Paracelse, Faust de Goethe)



cf. Guthrie, p. 213, ainsi que les commentaires d'Aristote dans *Métaphysique*, 986a3, et *Du ciel*, 293a25.

²⁴ Aristote, *Métaphysique*, Vrin, A5, I. 10-27, p. 24. Le dualisme de ce système de valeurs, tant éthiques que conceptuelles, ne manquera pas de marquer très profondément, non seulement l'idéologie qui s'attachera à la science dans les siècles ultérieurs, mais le dualisme chrétien, par le biais d'un platonisme héritier du pythagorisme.

faire du limité, de l'ordre, de l'harmonie²⁵. Le fini, le limité est donc ce qui rend intelligible, rationnel en ce sens qu'il permet de tenir un discours, un *logos* défini, c'est-à-dire fini. Chez les Pythagoriciens, est irrationnel ce qui ne peut être dit, c'est-à-dire ce que le *logos* est impuissant à exprimer en termes finis. L'intelligible se confond avec ce qui reste dans la mesure, ou avec ce qui est mesurable, fixant les rapports, les proportions des choses entre elles et au tout. Et les devises pythagoriciennes : "Toutes choses sont nombres", "Rien de trop", "Observe la limite", rendent compte des articulations principales de cette philosophie, dans laquelle l'infini occupe, en tant qu'instrument de connaissance, un rang inférieur au fini.

4. Les exigences de la raison démonstrative : il n'existe aucun rapport de nombre exprimant la relation ontologico-opérateur entre diagonale et côté du carré.

C'est donc confrontés à un système discontinu de signes en même temps qu'à leur conception métaphysique de l'entité numérique, et à une quête philosophique envisagée comme l'élaboration d'un discours rigoureux que les Pythagoriciens font face à cette question majeure, qui dépasse de loin le seul cadre mathématique : comment un système discontinu de signes peut-il permettre de rendre compte des phénomènes continus, de saisir le monde dans sa globalité ?

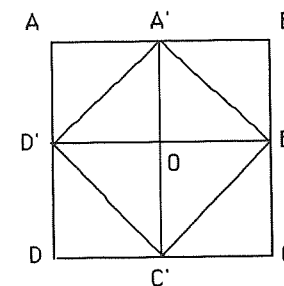
La contradiction éclate lorsque Nicomaque démontre l'inexistence d'un rapport de nombres²⁶ entre la diagonale et le côté du carré. La démarche est simple. Elle s'appuie sur un raisonnement par l'absurde, qui consiste à supposer que la diagonale du carré est commensurable à son côté, et à réfuter une telle hypothèse. Voici une présentation rapide et quelque peu modernisée, des différentes étapes de la démonstration.

* Sur une figure aussi élémentaire que la figure ci-dessus, il est clair que le carré $A'B'C'D'$ est au carré $AA'OD'$ comme 2 est à 1. Si

²⁵ Guthrie, *op. cit.*, p. 248. On la retrouve dans la cosmologie pythagoricienne où chacune des révolutions des planètes et des étoiles fixes est supposée émettre un son musical propre, que nous ne percevons pas parce que nous l'entendons depuis notre naissance. Et les dimensions comparées des orbites planétaires sont censées obéir à l'entremêlement des deux progressions géométriques fondamentales de raison 2 et 3 : 1, 2, 3, 4, 8 9 16 27, 32, 81.

²⁶ donc l'impossibilité d'une unité commune, et de la commensurabilité.

le rapport de leurs côtés A'D' et A'O s'écrit sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, où p et q sont des entiers premiers entre eux, alors $(\frac{p}{q})^2 = 2$, ce qui équivaut à $p^2 = 2q^2$.



* p^2 est donc un nombre pair. Et les Pythagoriciens savent que le carré d'un nombre impair est un nombre impair. Ce qui implique la parité de p , qui peut alors s'écrire $2r$. Dans ces conditions, q est un nombre impair.

* $p = 2r$ et $p^2 = 2q^2$ conduisent à $2r^2 = q^2$; et le même raisonnement permet d'affirmer que q est aussi un nombre pair.

* q est donc affirmé à la fois comme nombre pair et comme nombre impair, ce qui est impensable²⁷.

Ce faisant, les Pythagoriciens établissent, grâce au principe de non-contradiction, qu'il n'existe aucun rapport de nombre qui soit susceptible d'exprimer le rapport de la diagonale au côté du carré. La difficulté dépasse le simple problème de logique : elle a des répercussions métaphysiques essentielles, que la traduction moderniste de la démonstration ne permet pas de percevoir. L'existence constructible d'un rapport de grandeurs continues qui ne peut être exprimé comme un rapport d'entiers oblige à renoncer à la maîtrise du continu par le numérique, sous quelque forme qu'il s'exprime alors. Pire, elle menace l'existence même de toute pensée, puisque le *logos* lui-même est conçu comme la mise en rapport des choses par le biais du discours, dans un contexte qui est celui de la langue grecque, où le même mot²⁸, *logos* désigne aussi bien le rapport d'entiers, que la possibilité d'une expression langagière rigoureuse, qui se donne en termes finis. C'est pourquoi ce rapport de

²⁷ On dirait plus volontiers aujourd'hui : p et q étant alors tous deux affirmés comme nombres pairs, la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible, ce qui est contraire à l'hypothèse.

28 La traduction française *raison*, dérivée de la traduction latine *ratio*, maintient cette double signification, dont l'une appartient aux mathématiques et l'autre à la langue commune.

la diagonale au côté du carré est qualifié d'irrationnel en même temps que d'*alogon*, c'est-à-dire de non-calculable tout autant que d'impensable.

C'est bien parce que le nombre pythagoricien veut traduire l'essence de l'être que l'unité est porteuse d'ontologie et que sa divisibilité pose problème. Ce nombre étant un agrégat d'unités ne saurait être autre qu'un entier. Et de ce fait, l'unité elle-même n'est pas un nombre, puisqu'elle sert à le définir²⁹. Celle-ci est donc une et première par principe, mais, étant essentielle, autrement dit substantielle, elle ne saurait être arbitrairement choisie comme elle l'est aujourd'hui, et elle se doit d'être finie. C'est cette caractérisation ontologique qui entre en contradiction avec ses spécificités opératoires dès qu'il s'agit de mesurer le continu.

Cette crise de la rationalité, outre qu'elle menace la maîtrise du continu par la finitude, que ce soit celle du nombre ou celle du discours, semble donc ouvrir la voie à "l'univers redoutable de la démesure"³⁰ que le *logos* tentait justement de contenir. C'est d'ailleurs sous forme de légende que la doxographie rend compte de la crise épistémologique ouverte par un tel résultat. Celle-ci rapporte que son auteur présumé, Hippias de Métaponte, périt noyé dans un naufrage³¹.

5. La place du *logos* dans la cité et dans la science grecque.

Civilisation de la parole, dotée d'une écriture qui décuple ses possibilités d'échanger et de transmettre, communauté d'hommes libres assumant les nécessités de sa propre cohésion par le biais d'institutions qu'elle a elle-même produites, toutes ces spécificités de la cité grecque s'articulent autour de la maîtrise du discours, puisque c'est par elle que passe la maîtrise d'un ordre qui garantit l'équilibre socio-politique. Ce faisant, elles produisent, relativement au *logos*,

²⁹ C'est là une distinction qu'Euclide reconduira. D'après la définition 1 du livre 7, "L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une".

³⁰ J.T. Desanti, "Une crise exemplaire : la "découverte" des nombres irrationnels", *Logique et Connaissance scientifique*, ss. dir. J. Piaget, op. cit., 439-464, p. 441.

³¹ Jamblique, *Vie pythagorique*, 88; *De la science mathématique commune*, 25; in J.P. Dumont, D. Delattre, J.L. Poirier éd., *Les Présocratiques*, Paris, Gallimard, 1988, p. 76. Le scoliaste anonyme qui commente le livre X des *Eléments* d'Euclide l'interprète ainsi : "Les auteurs de la légende ont voulu parler par allégorie. Ils ont voulu dire que tout ce qui est irrationnel et privé de formes doit demeurer caché. Que si quelque âme veut pénétrer dans cette région secrète et la laisser ouverte, alors, elle est entraînée dans la mer du devenir et noyée dans l'incessant mouvement de ses courants." J.T. Desanti, op. cit., p. 441.

une confiance qui l'autorise à étendre les exigences du débat contradictoire pratiqué dans la cité à bien d'autres domaines que celui de la seule organisation politique. C'est dans ce cadre de référence qu'à partir du 7^{ème} siècle, et d'abord en Ionie, ces écoles philosophiques proposent des systèmes d'explication du monde soumis à des argumentations rhétoriques, où la création ne relève plus de l'accouplement des dieux, ni les catastrophes de leur colère, ou les guerres de leur conflit. La naissance de la pensée philosophique correspond à la recherche de principes premiers dont la nature même suffise à déterminer l'organisation logique du monde qu'ils engendrent, selon des relations qui ne sont plus conçues comme biologiques, mais comme causales. Elle explicite un type rationnel de discours, qui accompagne la différenciation progressive du savoir en disciplines distinctes, structurant les catégories mentales et passant par les différents types de maniement des signes³².

Dans ce contexte, cette raison grecque transpose sur la nature, son origine et sa composition, les termes d'une réflexion sur l'ordre dans la *polis*, où la maîtrise du dynamisme de la cité passe davantage par la maîtrise de la rhétorique que par celle de la nature³³. La démarche des philosophes grecs ne saurait donc être assimilée à celle des épistémologues du 20^{ème} siècle cherchant à spécifier les caractères distinctifs du sujet connaissant, de l'objet de connaissance et de la relation qui les lie³⁴. Leur fonction sociale prolonge bien davantage celle des scribes et des prêtres des anciens royaumes orientaux, tout en déplaçant leur mode de pensée et leur domaine d'intervention.

II. L'ontologie du mouvement et du continu chez Aristote.

La résolution de cette crise de la pensée aboutit à une différenciation radicale entre le champ de l'être et le champ de l'opérateur, que vont réaliser Aristote sur le plan philosophique et Euclide en mathématiques. Lorsqu'il exclut tout recours à un quelconque infini en acte, et affirme haut et fort que l'infini ne saurait

³² J.P. Vernant, *Mythe et pensée*, op. cit., Petite Collection Maspéro, 1965, t. 1, p. 6-7.

³³ Ibid., p. 131-133. Etant donné l'état du développement des techniques, et les difficultés de leurs relations avec le discours de la science, issu de la philosophie, la maîtrise de la nature, telle qu'elle sera envisagée par Descartes, est inconcevable pour l'aristocratie démocratique des citoyens à laquelle appartiennent les philosophes, même s'il arrive à ces derniers d'y puiser certains modèles de représentations du monde (comme les sphères armillaires de Platon).

³⁴ Cf. annexe 5. J. Piaget, "L'épistémologie et ses variétés", *Logique et connaissance scientifique*, ss. dir. J. Piaget, Paris, Gallimard, 1967, p. 3-14.

être qu'en puissance, et que comme tel, il suffit aux mathématiciens, Aristote explicite en effet l'autonomie du champ opératoire en dégageant les propriétés du continu divisible, et en respectant l'exigence de finitude de toute rhétorique³⁵. Il tente d'échapper aux difficultés de ses prédécesseurs à propos de la définition de l'unité comme être.

Les conceptions aristotéliennes de l'être et du mouvement sont indissociables, et s'articulent toutes deux dans sa philosophie du devenir. En dépit de la vigueur des critiques qui s'élèveront à la fin de la période médiévale contre la pensée péripatéticienne, ou plutôt contre la pensée scolastique, qui en est la forme remaniée datant du 13^{ème} siècle, il est essentiel de souligner qu'Aristote élabore, essentiellement dans sa *Physis* mais aussi dans d'autres ouvrages, comme le *Traité du Ciel*, la première théorisation raisonnée et systématique qui fasse du changement autre chose qu'une affection superficielle ou un écoulement irrationnel. De fait, la théorie aristotélienne du mouvement en est un modèle métaphysique, qui coordonne en un seul et même système une cosmologie, une mécanique, une théorie des éléments, et une ontologie, toutes fondées sur un seul et même ensemble de principes.

Il n'est pas question de préciser ici toutes les spécificités et implications de la théorie aristotélienne de l'être et du mouvement, mais seulement de préciser ses fondements et d'indiquer comment elle intervient dans sa conception du continu. L'être dans sa totalité ne saurait être qu'en puissance, défini comme virtualité. Porteur de toutes ses potentialités, il est ce qu'il adviendrait si elles se réalisaient, et ne peut donc être saisi, embrassé, que par la pensée. L'être tel qu'il est réalisé ici et maintenant est défini comme être en acte. Introduisant le mouvement à partir de l'idée de manque, de privation³⁶ relativement à un état potentiel de l'être, Aristote signifie que c'est dans l'être lui-même que le changement trouve finalement sa cause. Il pose l'existence pour tous les êtres d'une nature comme principe même de mouvement, un mouvement-changement défini comme processus de réalisation d'un devenir qui leur soit propre, c'est-à-dire comme médiation entre l'être en acte et l'être en puissance. Par cette distinction, Aristote réalise une synthèse entre la recherche des fondements de la permanence et l'intégration des possibilités du devenir. Une fois individué, l'être est substance. Et toute substance est à la fois matière et forme. La forme, immuable et parfaite, est à la fois principe d'organisation et d'évolution, elle fournit à l'être toutes les

³⁵ Cf. annexe 3. J.T. Desanti, op. cit., p. 451.

³⁶ Conversion de l'idée anthropomorphe de désir.

qualités destinées à se réaliser dans un individu particulier. La matière, support de la forme, est principe d'individuation. Elle est éternelle, car elle est définie comme sujet de tout ce qui s'engendre, et ne saurait donc être née avant d'être engendrée. Elle est inconnaissable, puisqu'elle ne peut être observée qu'informée.³⁷

Pour Aristote, le mouvement, comme la grandeur et le temps, sont ensemble, et pour les mêmes raisons à la fois logiques et ontologiques, des continus, terme qu'il définit comme là encore comme potentialité, puisqu'un continu "est divisible en parties qui sont toujours divisibles"³⁸. Quant à l'infini, il est, pour les mêmes raisons que l'être, distingué entre infini en acte et infini en puissance, Aristote affirmant que les mathématiciens n'ont recours qu'à l'infini en puissance et que l'infini en acte n'existe pas. Ainsi Euclide pourra-t-il, sur les pas d'Aristote, traiter de problèmes relatifs à l'infini en ne manipulant que des quantités finies, et en explicitant cette possibilité toujours renouvelée de perpétuer l'opération engagée.

III. Les *Eléments* d'Euclide³⁹ et le traitement opératoire du continu

C'est donc la question de la maîtrise opératoire du continu qui impose la structure des *Eléments* d'Euclide, dont les opérations portent désormais sur les rapports de grandeurs, et s'articulent sur des constructions qui relèvent de la maîtrise de l'espace. Les *Eléments* constituent en ce sens l'aboutissement d'une nouvelle situation d'équilibre entre les besoins de la cohérence du discours, et l'opérativité des mathématiques de cette époque, une solution à la crise de la rationalité qui, en omettant de définir les grandeurs, laisse en suspens la question de l'ontologie du continu, désormais soutenue par la conception aristotélienne du mouvement.

Si on en juge d'après ce qu'en dit Proclus (410, 485), bien tardivement il est vrai, dans son *Commentaire* d'Euclide, les *Eléments* nous livre un travail de tradition hellénique⁴⁰, fournissant un ensemble logiquement structuré de démonstrations irréfutables, pour des

³⁷ M. Clavelin, *La philosophie naturelle de Galilée*, Paris, A. Colin, 1968, p. 21.

³⁸ Aristote, *Physique*, op. cit., 231b17, t. 2, p. 43, ainsi que 231b18-232b4.

³⁹ Bien que les *Eléments* soient reconnus comme un ouvrage collectif, celui de l'école d'Euclide, je n'en poursuivrai pas moins cette présentation en parlant spécifiquement d'Euclide et des *Eléments* d'Euclide, afin d'en faciliter l'énonciation.

⁴⁰ C'est également le cas des travaux d'Apollonius (-262, -190). Par contre, ceux de Héron et d'Archimède, tout en restant fortement ancrés dans cette tradition hellénique devenue euclidienne, introduiront quelques éléments nouveaux.

théorèmes énoncés par ses prédécesseurs⁴¹, depuis Thalès jusqu'à Théétète⁴² et Eudoxe⁴³. Ils ne font par contre aucune référence aux démarches heuristiques qui ont permis d'en établir les résultats. Tel n'est manifestement pas leur propos, tout entier consacré à établir l'enchaînement rigoureux des propositions, d'autant qu'ils visent des résultats issus d'une si longue tradition qu'ils sont vraisemblablement considérés, au moment où intervient Euclide, comme des acquis dont on n'interroge même plus l'origine. Mais la lecture de Platon et d'Aristote fournit des indications précieuses sur l'existence d'une forme de pensée dont l'exigence de rigueur, entreprise dans l'école de Pythagore, mise en place dans les écoles d'Eudoxe et de Platon, et enrichie de la logique aristotélicienne, est bien antérieure à la rédaction des *Eléments*, même si c'est avec Euclide qu'elle arrive à maturité.

L'expression grecque équivalente à ce titre s'écrit $\sigma\tau\ \omicron\iota\chi\epsilon\iota\alpha$, dont le sens est très proche de celui du mot "alignement". Le verbe correspondant se réfère à l'acte d'avancer comme les hoplites en ligne de bataille⁴⁴, de sorte que le nom se réfère à la ligne, la colonne, la rangée, et peut désigner l'alignement des atomes du langage dans l'ordre de la phrase, ce que J. Dhombres envisage comme la volonté consciente et assumée de présenter ce corpus mathématique selon un enchaînement linéaire de définitions, axiomes et propositions, qui renvoie à une recherche systématique d'ordre et de classification, et

⁴¹ M. Kline, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, O.U.P., 1972, p. 57. C'est ainsi que le pythagoricien Archytas de Tarente (-428, -347) avance plusieurs propositions d'Euclide des livres 7 et 8. L'historien des mathématiques van der Waerden a d'ailleurs montré que de nombreuses propositions et preuves du livre 8 ont été produites par Archytas et ses collaborateurs. Par contre, toutes les démonstrations antérieurement produites n'étaient pas nécessairement conformes à l'esprit des *Eléments* d'Euclide, notamment celles que Démocrite est censé avoir proposé pour le calcul d'aires curvilignes, et qui auraient fait appel à des considérations infinitésimales.

⁴² Théétète (≈ 410, -369) est un des principaux membres de l'école platonicienne. S'il établit l'incommensurabilité à l'unité, des grandeurs que nous notons aujourd'hui, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, ..., $\sqrt{17}$, c'est par des méthodes faisant intervenir des faits sensibles du monde matériel, qui ne pouvaient convenir à l'orthodoxie de cette école. Platon lui a consacré l'un de ses *Dialogues*.

⁴³ Eudoxe (-408, -355), élève d'Archytas, né et mort à Cnide en Asie Mineure, travaille avec Platon à l'Académie. On lui attribue la direction à Cyzique (Asie Mineure) d'une école qui rivalisait avec celle de Platon. Astronome, médecin, géomètre, législateur, géographe, il est l'auteur de la première théorie astronomique du mouvement des cieux. Sa réputation était telle qu'elle éblouissait encore Eratosthène (-284, -192), contemporain d'Archimède. Les livres 5 et 10 des *Eléments* lui sont attribués.

⁴⁴ J.P. Vernant, *Origines*, op. cit., p. 58-59.

où la dette aux *Analytiques* d'Aristote est évidente⁴⁵.

L'oeuvre euclidienne met ainsi l'irréfutabilité du discours et la représentation géométrique des grandeurs au service d'un traitement opératoire du continu qui puisse se passer d'une représentation numérique spécifique des irrationnels. Or, dans la cité grecque, faut-il le rappeler, la maîtrise de ce dynamisme auquel le continu ne saurait manquer d'être encore métaphoriquement attaché, de par l'origine même de la démarche philosophique, passe par la maîtrise du *logos*, un *logos* qui ne saurait perdre de vue son objet pour devenir pur formalisme. Lire les *Eléments* d'Euclide en ignorant ce contexte peut facilement conduire à une interprétation trop moderniste de son contenu, en ne s'appuyant que sur la rigueur abstraite de sa présentation.

1. L'organisation générale de l'ouvrage

Sa composition reflète la réorganisation dont a fait l'objet l'ensemble des connaissances antérieures pour pouvoir offrir les *Eléments* comme solution à la crise du rationnel. Ils sont entièrement articulés autour de la théorie de la mesure⁴⁶ que constitue le livre 5, qu'on peut à juste titre qualifier de traitement qualitatif de la quantité puisque n'y figure aucune notation, aucun symbolisme, ni aucune référence directe au champ numérique⁴⁷. Les quatre premiers livres servent en effet à mettre en place les bases géométriques - constructions de figures, définition géométrique des opérations et comparaison d'aires de surfaces rectilignes - sur lesquelles va fonctionner cette théorie. Les livres 3 et 4 présentent les propriétés géométriques indispensables aux constructions du livre 10 et à l'étude des aires curvilignes du livre 12. Les livres 6 à 9 sont rejetés après le livre 5, alors qu'ils contiennent des résultats qui lui sont bien antérieurs :

- le livre 6 théorise les acquis des architectes de Milet, depuis Thalès⁴⁸, sur la similitude⁴⁹, dont les proportions du livre 6 servent à préciser l'étude quantitative, tout en lui donnant un maximum de généralité, puisque les rapports envisagés sont désormais quelconques;

⁴⁵ Cf. annexe 1. J. Dhombres, *Nombre, mesure et continu, épistémologie et histoire*, Paris, Cedic/Nathan, 1978, p. 30.

⁴⁶ Proclus attribue à Eudoxe le contenu de ce livre 5.

⁴⁷ L. Brunschwig, *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, p. 97.

⁴⁸ Dans la proposition 12, le théorème de Thalès est utilisé pour établir l'existence d'une quatrième proportionnelle à 3 longueurs données.

⁴⁹ Les quatre premiers livres ne contiennent aucun mode de démonstration faisant appel à la similitude.

- la théorie des nombres des livres 7 à 9 n'est autre que la théorie pythagoricienne des proportions d'entiers, qui apparaît ici comme un cas particulier de la théorie des grandeurs, alors qu'elle a servi de base à l'étude des propriétés opératoires et que la théorie des grandeurs est née de son dépassement.

Le manque d'équilibre entre les différents livres, ainsi que certaines répétitions, témoigne de son rôle compilatoire⁵⁰.

2. La structure axiomatique-déductive des Éléments

L'approche axiomatique ou postulationnelle de l'ouvrage n'est pas sans rapport avec la notion de limite dans la mesure où elle sert justement à traiter des problèmes du continu en évitant tout recours à l'infini.

Le livre 1 s'ouvre sur 18 définitions qui manifestent le fondement géométrique, en même temps qu'intuitif, des mathématiques euclidiennes. Celle de la droite est particulièrement remarquable, qui traduit l'expérience de visée de l'architecte ou du géomètre de terrain⁵¹ : la ligne droite est celle qui est également placée entre ses points. Cette intuition pratique⁵², qui n'intervient plus du tout dans l'édifice théorique, fournit des définitions globales et statiques, qui sont précisément de nature à éviter tout recours à une conception générative de la ligne, de la surface ou du volume, dont Archimède suggère pourtant qu'elle n'est pas absente des travaux de Démocrite, aujourd'hui perdus⁵³. Comme le précise M.E. Baron :

"Dès le départ, il est clair que l'entreprise concerne le monde réel et non un système abstrait quelconque. Tous les concepts qui ne sont pas immédiatement compréhensibles en termes concrets simples tels que les infinitésimaux, la vitesse instantanée, la divisibilité à l'infini, sont complètement éliminés. ... Tout le contenu des 13 livres est exprimé dans une terminologie géométrique et a constamment recours à une imagerie spatiale. ... Avec Euclide, les Grecs rejettent,

⁵⁰ Les livres 7, 8 et 9 reprennent pour les proportions d'entiers bon nombre des résultats obtenus au livre 5 pour les rapports de grandeurs, sans que soit précisé qu'il s'agit là de cas particuliers. La 1^{ère} partie du livre 13 reprend certains résultats des livres 2 et 4. Les livres 5 et 10, dont l'unité est évidente, sont traditionnellement attribués à Eudoxe, ou parfois à Théétète, avec le livre 13.

⁵¹ Remarque de Mr. Ch. Houzel.

⁵² Cet appui direct sur les données élémentaires de l'expérience témoigne également de l'influence aristotélicienne.

⁵³ Archimède, "Lettre à Eratosthène", "La méthode relative aux théorèmes mécaniques", *Les œuvres complètes, suivies des commentaires d'Eutocius d'Ascalon*, trad. P. Ver Eecke, Paris, Blanchard, rééd. 1966. M.E. Baron considère cette suggestion comme vraisemblable.

au moins formellement, le concept fructueux de lignes comme collections de points et de surfaces comme collections de lignes : la surface est seulement la frontière d'une solide, une ligne la frontière d'une surface, un point l'extrémité d'une ligne"⁵⁴

Si ces hypothèses s'appuient sur une intuition du monde physique, il est essentiel d'insister sur le fait qu'il s'agit pourtant de définitions nominales, qui ne donnent de signification aux objets géométriques que du point de vue du discours. Mais ces définitions nominales ne suffisent pas à spécifier ces objets. Ce sont les six demandes ou postulats qui accompagnent ces définitions qui permettent de le faire, en les donnant à voir grâce aux constructions qu'ils autorisent et qui, réalisées uniquement à la règle et au compas, équivalent à des théorèmes d'existence⁵⁵. La construction assure donc la vérification du discours vis-à-vis de la réalité idéale. C'est pourquoi L. Brunschwig préfère parler de système axiomatique-déductif, ou catégorico-déductif, plutôt qu'hypothético-déductif⁵⁶.

Quant aux axiomes ou notions communes, qu'il s'agit également d'admettre, ils définissent l'équivalence de la mesure, qui peut être appréciée :

- de notre point de vue, comme une notion fondamentale dans la construction d'un système déductif formel⁵⁷,

- et historiquement, comme une affirmation des conditions d'invariance de l'égalité - cette isonomie si fondamentale à la pensée grecque - par rapport les opérations élémentaires : addition, soustraction, multiplication et division par deux⁵⁸. Pas d'équivalence des formes géométriques sans cette invariance, sans cette valeur fondamentale de l'isonomie dans la production même du discours

⁵⁴ M.E. Baron, *The Origins of the Infinitesimal Calculus*, Oxford, Pergamon Press, 1969, p 26 (traduction personnelle).

⁵⁵ Il faut noter tout particulièrement le 5^{ème} postulat, ou postulat des parallèles (ou axiome d'Euclide), comme articulation fondamentale de cette géométrie euclidienne, et dont le dépassement, essentiel au début du 19^{ème} siècle, conduira à l'élaboration des géométries non-euclidiennes. Son énoncé est d'autant plus remarquable qu'il diffère grandement de celui qu'on apprend à l'école, et permet d'apprécier l'évolution du discours, pour une même théorie, à plusieurs siècles d'intervalle : "Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits".

⁵⁶ L. Brunschwig, op. cit., p 91.

⁵⁷ M. Baron, op. cit., p. 26.

⁵⁸ Il faut savoir que la multiplication et la division par deux (duplication et dédoublement) ont longtemps constitué des opérations à part entière. On en trouve trace dans les traités d'arithmétique commerciale au 15^{ème} et au 16^{ème} siècles.

cohérent, et qui relève ici d'un traitement géométrique de l'espace⁵⁹.

3. La théorie des grandeurs.

Parce que la crise de la rationalité a mis en évidence l'impossibilité de donner des résultats numériques directs à propos des longueurs, des aires et des volumes quelconques, le livre 5 met en place, à propos des rapports de grandeurs, toutes les propriétés opératoires qui permettront de comparer des grandeurs irrationnelles (livre 10) ou d'obtenir des aires curvilignes (livre 12), en respectant l'exclusion de l'infini (en acte) spécifiée par Aristote. C'est par le biais de ces rapports, dont le statut demeure ambigu, que le champ opératoire va pouvoir intégrer la mesure des grandeurs continues⁶⁰. Cette nécessité de recourir aux rapports dans tout problème de mesure interviendra jusqu'à ce que Descartes affirme explicitement la liberté de choisir une unité arbitraire. Jusqu'au 17^{ème} siècle, tous les résultats sont donc exprimés sous forme de rapports, ce qui est, pour le lecteur du 20^{ème} siècle, tantôt une facilité, puisque la simplification de certains d'entre eux peut donner des énoncés simples, tantôt un inconvénient, parce que cette présentation dissimule des résultats aujourd'hui connus sous d'autres formes⁶¹. De nombreuses dénominations spécifiques aux mathématiques grecques s'enracinent dans ce passage obligé par la comparaison des rapports, comme celles de "rectification d'une courbe", de "quadrature d'une surface", et de "cubature d'un volume"⁶².

Euclide ne définit donc pas ce qu'il entend par grandeur⁶³ (déf. 1 et 2), pas plus qu'il ne précise, au-delà d'une simple analogie, ce qu'il entend par leur raison (déf. 3), dont il ne définit que l'égalité, c'est-à-dire la proportion (déf. 4). Ces définitions n'ont de sens que relativement

⁵⁹ M. Serres, "Gnomon : les débuts de la géométrie en Grèce", *Eléments d'histoire des Sciences* (ss dir.), Bordas, 1989, p. 94. L'auteur souligne d'ailleurs à ce propos qu'il n'y a pas de connaissance sans cette invariance.

⁶⁰ Il s'agit là d'une potentialité, puisque toute mesure suppose, dans cet ouvrage, un procédé de construction qui permette d'obtenir la grandeur et de la comparer à une autre.

⁶¹ L'énoncé du théorème où Archimède compare l'aire et le périmètre du cercle comporte ces deux aspects. Son expression sous forme de rapport provient de l'impossibilité d'une conception numérique de ce qu'on nommera π au 18^{ème} siècle : "Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base", autrement dit, le rapport entre l'aire et le périmètre du cercle est égal au demi-rayon.

⁶² Il s'agit de comparer la longueur d'une courbe à celle d'une ligne, l'aire d'une surface à celle d'un carré, le volume d'un solide à celui d'un cube.

⁶³ Cf. annexe 2. Cette absence se réfère au fait qu'Euclide abandonne l'ontologie des grandeurs pour ne se consacrer qu'à l'étude de leurs possibilités opératoires.

au problème de la mesure, mesure qui ne signifie elle-même que relativement au nombre entier, entendu comme nombre de fois.

La définition 5 fixe fondamentalement les limites de toute comparaison des grandeurs - donc de l'ouvrage lui-même - selon la raison, c'est-à-dire, techniquement, selon le rapport, et idéologiquement, d'un point de vue rationnel. Elle exclut tout recours au concept d'infinitésimal, c'est-à-dire de grandeur infiniment petite mais différente de 0, ainsi que de grandeur infiniment grande. Les seules grandeurs comparables pour les mathématiques euclidiennes, et qu'on dit aujourd'hui archimédiennes, sont celles qui répondent à ce critère, aujourd'hui connu sous le nom d'axiome d'Archimède, parce que celui-ci l'utilisera abondamment.⁶⁴

La définition 6 doit retenir toute notre attention, non seulement du fait de sa complexité, mais parce qu'elle fixe le critère d'égalité des raisons, et intervient donc directement dans la démonstration des propositions, notamment celle des propositions 11, 15 et 22 de ce livre⁶⁵.

⁶⁴ Euclide bute cependant sur la difficulté des grandeurs non-archimédiennes à propos de l'angle corniculaire ou angle contingent, formé par un arc de cercle et la tangente à ce cercle en l'une de ces extrémités (livre 2, prop. 16) : le type de définitions des *Eléments*, à la fois finitiste et géométrique, rend inconcevable d'attribuer la valeur 0 à un tel angle, et plus généralement à l'angle de deux courbes, alors qu'il détermine une portion d'espace. Historiquement, cette référence constante à l'axiome d'Archimède comme seul outil de comparaison des grandeurs empêchera les mathématiciens du 18^{ème} siècle de travailler en toute liberté sur les infiniment petits. De ce point de vue en effet, des "grandeurs" telles que x^2 et x^3 ne sont pas comparables au voisinage de 0. Cf. J. Dhombres, op. cit., p. 30.

⁶⁵ Cette définition a aussi un rôle crucial du point de vue historique puisque, à supposer que l'ensemble des raisons puisse être identifié à celui des rationnels, elle équivaudrait au concept de coupure défini par R. Dedekind au 19^{ème} siècle, grâce auquel il donne une construction des réels à partir des rationnels. M.E. Baron (op. cit.) établit en effet assez clairement cette équivalence de la manière suivante : Soient α et β deux nombres (rationnels ou irrationnels) qui chacun divise l'ensemble des rationnels, A et B pour α , A' et B' pour β , tels que :

si $\frac{n}{m} \leq \alpha$ alors $\frac{n}{m} \in A$ et si $\frac{n}{m} > \alpha$ alors $\frac{n}{m} \in B$; et de même :

si $\frac{n}{m} \leq \beta$ alors $\frac{n}{m} \in A'$ et si $\frac{n}{m} > \beta$ alors $\frac{n}{m} \in B'$

En effet, la définition 6 s'écrit, si $\alpha = \frac{a}{b}$ et $\beta = \frac{c}{d}$

$a = b$ pourvu que, pour tous les entiers m et n, on ait :

$na = mb$ si et seulement si $nc = md$,

$na < mb$ si et seulement si $nc < md$,

$na > mb$ si et seulement si $nc > md$,

c'est-à-dire : $A=A'$ et si $B=B'$, d'où $\alpha = \beta$.

Les définitions suivantes concernent l'ordre des raisons (déf. 6 à 8), ainsi que le vocabulaire des proportions qu'on peut former à partir d'une proportion donnée⁶⁶. Quant aux propositions, elles établissent les propriétés classiques de ces proportions, en liaison avec la possibilité d'opérer selon les définitions précédentes et avec la transitivité de l'égalité. Il est temps de remarquer que l'écriture : A est à B comme C est à D confère à la rhétorique démonstrative, en même temps qu'un rythme très caractéristique, sans doute fort important lors de sa transmission orale, enracinée dans un certain rituel, une lourdeur dont le lecteur moderne se passerait volontiers, mais qu'il convient de respecter afin que soit préservé le climat dans lequel les mathématiques vont évoluer jusqu'au 17^{ème} siècle.

Fondamentale est également l'absence dans ce cinquième livre de toute référence, non seulement au quantitatif, mais surtout à la géométrie, à tel point que si les axiomes y sont nécessaires, les postulats n'y sont aucunement utilisés. C'est une des raisons, sans doute la plus importante, pour lesquelles ce livre 5 est historiquement considéré comme un chef d'oeuvre de la pensée formelle, à tel point qu'une question récurrente à son propos est celle de savoir s'il correspond à une construction de fait de l'ensemble des réels positifs⁶⁷, alors qu'une telle construction n'a été explicitée qu'à la fin du 19^{ème} siècle. S'il est justifié de se poser la question d'une équivalence possible entre cette théorie de la mesure et notre construction de $\mathbb{R}^+$, c'est afin de pouvoir distinguer avec précision l'écart qui sépare notre conception du champ numérique, du champ opératoire élaboré par Euclide⁶⁸. Reste à se méfier, peut-être ici plus qu'ailleurs, d'une interprétation anachronique ou rétrohistorique : il convient d'évaluer cette avancée théorique, non pas en fonction de ce qui lui manque pour ressembler aux nôtres, mais relativement au problème qu'elle vise à résoudre, et aux potentialités qui sont les siennes, au-delà de ses propres intentions.

⁶⁶ A partir d'une proportion où A est à B comme C est à D, Euclide envisage les proportions obtenues :

- par raison alterne, où A est à C comme B est à D (à supposer que les quatre grandeurs soient ici homogènes (cf. déf. 3) , précision dont l'importance sera discutée au § II. 5),

- par raison inverse, où B est à A comme D est à C,
- par raison composée, où A+B est à B comme C+D est à D,
- par division de raison, où A-B est à B comme C-D est à D,
- par conversion de raison, où A est à A-B comme C est à C-D,
transformations qui interviendront dans les démonstrations.

⁶⁷ Puisque les nombres négatifs sont absents des mathématiques grecques.

⁶⁸ J. Dhombres, op. cit., p. 56-58.

4. Au coeur de la méthode d'exhaustion : la proposition 1 du livre 10.

Ce livre, le plus technique et le plus long des parmi les livres des *Eléments*, est consacré à une classification des quantités irrationnelles quadratiques et biquadratiques, géométriquement construites et représentées par des droites et des rectangles. Classification rendue nécessaire, selon l'historien Zeuthen, du fait que les segments obtenus à partir des constructions géométriques sont parfois difficiles à distinguer.⁶⁹

La proposition 1 est au coeur de tout traitement des problèmes du continu dans la mesure où elle permet d'obtenir une grandeur plus petite que n'importe quelle grandeur donnée *a priori*. Elle est présente dans toutes les démonstrations fondées sur la méthode d'exhaustion⁷⁰ qui, pour établir qu'une surface S est équivalente à une surface Σ , procède d'un double raisonnement par l'absurde⁷¹, construit selon le plan suivant :

1. Si S n'est pas équivalente à Σ , elle est plus grande ou plus petite.

2. Qu'elle soit d'abord plus grande.

On peut donc former la différence S- Σ , et construire, d'après la proposition 1 du livre 10, une grandeur plus petite que S- Σ , pour aboutir à une première contradiction.

3. Qu'elle soit ensuite plus petite.

On peut donc former la différence Σ -S, et construire de même une grandeur plus petite que Σ -S, pour aboutir à une seconde contradiction.

4. S n'étant ni plus grande ni plus petite que Σ lui est donc équivalente⁷².

Le plan de toutes les démonstrations utilisant la méthode d'exhaustion est constant. On y repère là encore ce rythme quasi rituel, essentiel à la communication orale, tout comme dans le plan général de toute démonstration euclidienne, où le rythme des étapes est très spécifiquement marqué.

⁶⁹ A. Dahan-Dalmédico & J. Peiffer, op. cit., p. 58.

⁷⁰ Ainsi nommée parce qu'elle "exhausse" (au sens d'épuiser) la figure proposée par une suite de polygones inscrits.

⁷¹ Ce type de raisonnement est qualifié d'apagogique, c'est-à-dire de dévié ou de séduit, conduisant hors du droit chemin. M. Serres, op. cit., p. 87.

⁷² La démonstration de la proposition 2 du livre 12, présentée dans l'annexe 2, est conforme à ce plan.

Proposition I.

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Sa démonstration n'est autre que l'explicitation mathématique de la définition du continu telle que la soutient l'argumentation aristotélicienne de la *Physique*. Affirmant au livre I que "le continu est divisible à l'infini", Aristote précise au livre VI, après avoir établi que l'infini en acte n'existe pas, et que par conséquent, l'infini ne saurait être qu'en puissance :

"... il est impossible qu'un continu soit formé d'indivisibles, ..., nul continu n'est divisible en choses sans parties, ..., **tout continu est divisible en parties toujours divisibles.**"⁷³

Cette lecture d'Euclide à la lumière d'Aristote confirme l'interprétation que donne J. Dhombres⁷⁴ de la définition 1 du livre 5, lorsqu'il affirme, à partir de considérations opératoires portant sur la finalité même de l'ouvrage, qu'une grandeur y est considérée comme divisible à volonté (par un entier bien sûr!). Dans ces conditions, le livre V traite bien des différentes possibilités d'opérer sur les grandeurs continues.

5. Conclusion.

Plus encore que par la rigueur, toute activité mathématique est radicalement marquée par la présence du signe. C'est pourquoi le principe de la démonstration mathématique qui se structure en Grèce ne saurait être analysée indépendamment des spécificités de la parole et de son inscription par l'écriture dans le vécu du philosophe grec. Conçues comme symbolisation d'une permanence dont le champ numérique est alors incapable de supporter l'ensemble des représentations, les mathématiques grecques maîtrisent l'opérativité du continu grâce à une théorie des grandeurs d'essence nominale, fondée sur une énonciation logico-discursive, mais dont l'existence idéale persiste à s'appuyer sur des représentations géométriquement constructibles. Or, l'espace euclidien dans lequel les théorèmes se donnent à voir est sémantiquement bien différent de l'espace de notre

⁷³ Aristote, *Physique*, op. cit., § 231a21-25, 231b11, 231b16.

⁷⁴ J. Dhombres, op. cit., p. 33.

physique, puisqu'il reste attaché aux autres modes de représentation de cette permanence qui ont cours dans la civilisation grecque de cette époque.

Il n'empêche qu'on assiste, de Pythagore à Euclide, à un formidable travail d'abstraction, puisque ce recours au *logos* et aux représentations spatiales débouche, au prix d'une séparation de l'ontologique et de l'opératoire, sur une certaine maîtrise du continu. C'est grâce au traitement opératoire du continu qu'Euclide démontre, au livre 12, que "les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres"⁷⁵, ainsi que les principaux théorèmes relatifs aux volumes construits à partir de la droite et du cercle⁷⁶ : pyramides à base triangulaire ou polygonale, cônes et cylindres de révolution. A en juger par l'importance des commentaires, et par la perennité de méthodes qui ont encore valeur canonique au 17^{ème} siècle, l'impact de ce travail d'élucidation conceptuelle fut considérable. Pour ce qui concerne les méthodes relatives aux calculs d'aires et de volumes, l'apport d'Archimède est plus considérable encore, lui qui exerce une influence constante sur tout le Moyen-Age byzantin et sur les savants arabes, jusqu'à forcer l'admiration de Galilée.

Devenues pensables, les grandeurs irrationnelles ne seront intégrées qu'avec difficulté au champ numérique, dont la continuité devra être construite d'un point de vue logique. Les mathématiciens arabes les nommeront *gidr* ou *assam*, c'est-à-dire racines muettes ou aveugles, que Gérard de Crémone traduira par le latin *surdus*. Leur représentation numérique interviendra en même temps que la symbolisation de l'algèbre au 16^{ème} siècle, et leur conceptualisation, établie en même temps que la continuité de l'ensemble $\mathbb{R}$, sera démontrée à la fin du 19^{ème} siècle.

La mathématisation du mouvement au 17^{ème} siècle, c'est-à-dire l'élaboration du calcul infinitésimal, en déstabilisant la *Physique* d'Aristote, reposera le problème de l'existence des indivisibles, et fera ressurgir la question ontologique de l'être, auquel la philosophie mécaniste tentera de renoncer définitivement.

Paris, novembre 1992.

⁷⁵ Les cercles, c'est-à-dire, leurs aires. J'ai volontairement modernisé l'écriture de ces énoncés, sauf pour les termes qui ne sont plus usités aujourd'hui, et sans toucher à la syntaxe.

⁷⁶ Il faut insister sur le fait que la géométrie euclidienne est une géométrie de la règle et du compas.

Annexe 1 : Les 13 opuscules ou livres des *Eléments* d'Euclide

Livre 1 : Constructions et propriétés élémentaires des figures rectilignes planes, notamment celles du triangle - dont le théorème de Pythagore - et du parallélogramme, avec une attention toute particulière portée au calcul d'aires (48 propositions).

Livre 2 : Fondement de l'algèbre géométrique : Présentation des opérations où toutes les grandeurs sont représentées géométriquement, les nombres par des segments de droite, le produit de deux nombres égaux par un carré, le produit de deux nombres quelconques par un rectangle, etc. S'y trouvent formulées les expressions de carrés de sommes ou de différences (14 propositions).

Livre 3 : Propriétés du cercle (37 propositions).

Livre 4 : Propriétés des polygones réguliers inscrits et circonscrits dans le cercle (16 propositions).

Livre 5 : La théorie de la mesure : théorie des rapports de grandeurs (25 propositions).

Livre 6 : Propriétés des figures semblables, notamment le théorème de Thalès. Constructions de longueurs utilisant la méthode pythagoricienne d'application des aires (33 propositions).

Livres 7, 8, 9 : Théorie des nombres, obtenue par application de la théorie des proportions aux nombres entiers, avec notamment, l'étude des multiples et diviseurs, des nombres premiers, du P.G.C.D. de deux nombres, des progressions géométriques et des proportions continuées (41, 27 et 36 propositions).

Livre 10 : Classification des quantités irrationnelles, notamment en irrationnelles quadratiques et biquadratiques, à partir des constructions qui permettent de les obtenir, qui sont fondées sur les conséquences du théorème de Pythagore et les opérations dont elles sont susceptibles (115 propositions, et deux apocryphes).

Livre 11 : Propriétés élémentaires des figures dans l'espace (40 propositions).

Livre 12 : Etude de certaines aires curvilignes, notamment par la méthode plus tardivement nommée méthode "d'exhaustion" (18 propositions).

Livre 13 : Construction des polyèdres réguliers dans l'espace : le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, le dodécaèdre et l'icosaèdre⁷⁷ (18 propositions).

467 propositions en tout.

⁷⁷ Cet achèvement des *Eléments* sur la construction des polyèdres est significative de l'influence exercée sur Euclide par la pensée platonicienne.

Annexe 2 : Extraits des *Eléments* d'Euclide⁷⁸

Cinquième Livre

Définitions.

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.
2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.
3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.
4. Une proportion est une identité de raisons.
5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.
6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équi-multiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équi-multiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équi-multiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.
7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.
8. Lorsque, parmi ces équi-multiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.
9. Une proportion a au moins trois termes.
10. Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle qu'elle a avec la seconde.

Dixième Livre

Définitions.

1. On appelle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.
2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.
3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs carrés sont mesurés par une même surface.
4. Et incommensurables, lorsque leurs carrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

⁷⁸ Euclide : Les *Eléments*, *Oeuvres*, traduction française de Peyrard, Paris, Blanchard, rééd. 1966. Une nouvelle traduction des *Eléments* par Bernard Vitrac, est en cours de publication, aux PUF. Seul le volume I (livres 1 à 4) est paru. Il m'a donc semblé plus cohérent de donner toutes mes citations dans la traduction de Peyrard.

5. Ces choses étant supposées, on a démontré qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appellera rationnelle la droite proposée.

6. On appellera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur, soit en puissance, soit en puissance seulement.

7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

8. On appellera rationnel le carré de la proposée.

9. On appellera aussi rationnelles les surfaces qui lui sont commensurables.

10. Et irrationnelles celles qui lui sont incommensurables.

11. On appellera encore irrationnelles les droites dont les carrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des carrés, lorsque ces surfaces sont des carrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des carrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des carrés.

Proposition I.

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

Soient deux grandeurs inégales AB, C; que AB soit la plus grande; je dis que, si l'on retranche de AB une partie plus grande que sa moitié, et que si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la grandeur C.

A ____ K ____ T ____ B

C ____.

Δ ____ Σ ____ H ____ E

Car C étant multiplié deviendra enfin plus grand que AB. Qu'il soit multiplié; que ΔE soit un multiple de C, et que ce multiple soit plus grand que AB. Partageons ΔE en parties ΔΣ, ΣH, HE égales chacune à C; retranchons de AB une partie BT plus grande que sa moitié, et faisons toujours la même chose jusqu'à ce que le nombre de divisions de AB soit égale au nombre de divisions de ΔE; que le

nombre de divisions AK, KT, TB soit donc égal au nombre des divisions ΔΣ, ΣH, HE.

Puisque ΔE est plus grand que AB, et qu'on a retranché de ΔE une partie EH plus petite que sa moitié, le reste HΔ est plus grand que le reste TA. Et puisque HΔ est plus grand que TA, qu'on a retranché de HΔ sa moitié HZ, et que de TA on a retranché TK plus grand que sa moitié, le reste ΔΣ sera plus grand que le reste AK. Mais ΔΣ est égal à C; donc C est plus grand que AK; donc AK plus petite que la grandeur C, qui est la plus petite des grandeurs proposées. Ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration serait la même, si les parties retranchées étaient des moitiés.

Douzième Livre

Proposition I.

Les polygones semblables inscrits dans des cercles sont entr'eux comme les carrés des diamètres.

Proposition II.

Les cercles sont entr'eux comme les carrés de leurs diamètres.

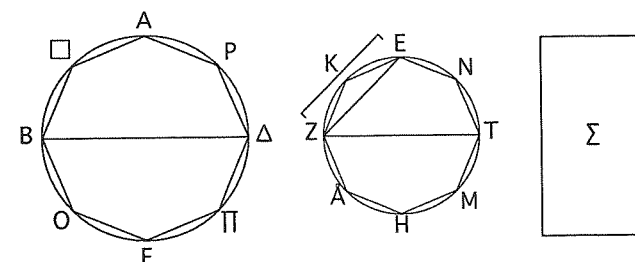
Soient les cercles ABFA, EZHT, et que leurs diamètres soient BA, ZT: je dis que le carré de BA est au carré de ZT comme le cercle ABFA est au cercle EZHT. (cf. fig. p. 93)

Car si le carré de BA n'est pas au carré de ZT comme le cercle ABFA est au cercle EZHT, le carré BA sera au carré de ZT comme le cercle ABFA est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle EZHT. Que ce soit d'abord à une surface Σ plus petite. Dans le cercle EZHT décrivons le carré EZHT; le carré décrit sera plus grand que la moitié du cercle EZHT, parce que, si par les points E, Z, H, T nous menons des tangentes à ce cercle, le carré EZHT sera la moitié du carré circonscrit au cercle. Mais le cercle est plus petit que le carré circonscrit; le carré inscrit EZHT est donc plus grand que la moitié du cercle EZHT. Partageons les arcs EZ, ZH, HT, TE en deux parties égales aux points K, A, M, N, et joignons EK, KZ, ZA, AH, HM, MT, TN, NE. Chacun des triangles EKZ, ZAH, MHT, TNE est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé; parce que si par les points K, A, M, N nous menons des tangentes au cercle, et si sur les droites EZ, ZH, HT, TE nous

construisons des parallélogrammes, chacun des triangles EKZ , $Z\Lambda H$, HMT , TNE sera la moitié du parallélogramme dans lequel il est placé. Mais un segment est plus petit que le parallélogramme où il est placé; chacun des triangles EKZ , $Z\Lambda H$, HMT , TNE est donc plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé. Si nous partageons les arcs restants en deux parties égales; si nous joignons leurs extrémités par des droites, et si nous continuons toujours de faire la même chose, il nous restera certains segments de cercles dont la somme sera moindre que l'excès du cercle $EZHT$ sur la surface Σ ; car nous avons démontré dans le premier théorème du dixième livre que, deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on continue toujours de faire la même chose, il reste enfin une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs exposées. Qu'on ait ce reste, et que ce soient les segments du cercle $EZHT$ placés sur les droites EK , KZ , $Z\Lambda$, ΛH , HM , MT , TN , NE , et qu'ils soient plus petits que l'excès du cercle $EZHT$ sur la surface Σ . Le polygone restant $EKZ\Lambda HMTN$ sera plus grand que la surface Σ . Décrivons dans le cercle $ABCA$ un polygone $A\Box BOF\Pi\Delta P$ semblable au polygone $EKZ\Lambda HMTN$; le carré de $B\Delta$

sera au carré de ΣT comme le polygone $A\Box BOF\Pi\Delta P$ est au polygone $EKZ\Lambda HMTN$; donc par permutation, le cercle $ABCA$ est au polygone qui lui est inscrit comme la surface Σ est au polygone $EKZ\Lambda HMTN$. Mais le cercle $ABFA$ est plus grand que le polygone qui lui est inscrit; la surface Σ est donc plus grande que le polygone $EKZ\Lambda HMTN$. Mais il est aussi plus petit, ce qui est impossible; le carré de $B\Delta$ n'est donc point au carré de ZT comme le cercle $ABFA$ est à une surface plus petite que le cercle $EZHT$. Nous démontrerons semblablement que le carré de ZT n'est point au carré de $B\Delta$ comme le cercle $EZHT$ est à une surface plus petite que le cercle $ABFA$. Je dis ensuite que le carré de $B\Delta$ n'est point au carré de ZT comme le cercle $ABCA$ est à une surface plus grande que le cercle $EZHT$. Car si cela est possible, que le carré de $B\Delta$ soit au carré de ZT comme le cercle $ABFA$ est à une surface Σ plus grande. Par inversion, le carré de ZT sera au carré de $B\Delta$ comme la surface Σ est au cercle $ABFA$. Mais la surface Σ est au cercle $ABFA$ comme le cercle $EZHT$ est à une surface plus petite que le cercle $ABFA$; le carré de ZT est donc au carré de $B\Delta$ comme le cercle $EZHT$ est à une surface plus petite que le cercle $ABFA$, ce qui a été démontré impossible; le carré de $B\Delta$ n'est donc pas au carré de ZT comme le cercle $ABFA$ est à une surface plus grande que le cercle $EZHT$. Mais on a démontré que le carré de $B\Delta$ n'est point au carré de ZT comme le cercle $ABFA$ est à une surface plus petite que le cercle $EZHT$; le carré de $B\Delta$ est donc au carré de ZT comme le

cercle $ABCA$ est au cercle $EZHT$. Donc, etc.



Annexe 3 : La Physique d'Aristote :

Des concepts nouveaux pour une philosophie du devenir

L'être en acte et l'être en puissance

"Les derniers des Anciens, eux aussi, se donnaient bien du mal pour éviter de faire coïncider en une même chose l'un et le multiple." ... "Sur ce point, on les voyait, plein d'embarras, avouer que l'un est multiple, comme s'il n'était pas possible que la même chose fût un et multiple, sans revêtir par là deux caractères contradictoires : en effet, il y a l'un en puissance et l'un en acte."⁷⁹

"Il faut distinguer ce qui est seulement en acte et ce qui est d'une part en acte d'autre part en puissance, et cela soit dans l'individu déterminé, soit dans la quantité, soit dans la qualité, et semblablement pour les autres catégories de l'être."⁸⁰

L'ontologie du mouvement

"Puisque la nature est principe de mouvement et de changement et que notre recherche porte sur la nature, il importe de ne pas laisser dans l'ombre ce qu'est le mouvement; nécessairement, en effet, si on l'ignore, on ignore aussi la nature. Après avoir déterminé la notion de mouvement, il faudra entreprendre, de la même façon, les questions

⁷⁹ Aristote, *La Physique*, Paris, Les Belles-Lettres, 1966, § 185b25, § 186a1-4.

⁸⁰ Aristote, *Physique*, op. cit., livre III, 200b26-27, p. 89-90.

qui suivent celles-là. Or, semble-t-il, le mouvement appartient aux continus, et dans les continus, l'infini apparaît en premier lieu; c'est pourquoi les définitions qu'on donne du continu se trouvent utiliser souvent la notion de l'infini, le continu étant divisible à l'infini. En outre, sans lieu, ni vide⁸¹, ni temps, le mouvement est impossible. On voit donc par là et parce que ce sont des choses communes à tout, et valant universellement, que notre effort doit commencer par l'examen de chacun de ces points; car la considération des choses particulières vient après celle des choses communes⁸².⁸³

Les différentes espèces du mouvement

"Il n'y a pas de mouvement hors des choses; en effet, ce qui change, change toujours ou substantiellement, ou quantitativement, ou qualitativement, ou localement; or on ne peut trouver, nous l'avons dit, de genre commun à ces sujets du changement, qui ne soit ni l'individu particulier, ni quantité, ni qualité, ni aucun des chefs d'affirmation; par suite il n'y aura ni mouvement ni changement en dehors des choses qu'on vient de dire, puisqu'il n'y a rien hors des choses."

"Ensuite chacun de ces modes de l'être se réalise en toute chose d'une double façon; par exemple, pour l'individu déterminé, il y a sa forme, et la privation; et aussi dans la qualité (blanc et noir); et aussi dans la quantité (l'achevé et l'inachevé); de même dans le mouvement local (le centrifuge et le centripète, ou le léger et le grave). Ainsi il y a autant d'espèces du mouvement que de l'être."⁸⁴

La définition du mouvement.

"Etant donnée la distinction, en chaque genre, de ce qui est entéléchie, et de ce qui est en puissance, l'entéléchie de ce qui est en

⁸¹ Ce terme a ici le sens de privation.

⁸² Ce terme a ici le sens de général.

⁸³ Aristote, *Physique*, op. cit., livre III, 200b12-25, p. 89.

⁸⁴ Ibid., livre III, 200b32-201a8, p. 90. Il faut rappeler ici qu'Aristote définit comme catégories de l'être les dix façons possibles pour un attribut d'être le prédicat d'une proposition : substance, quantité, qualité, relation, lieu, temps, position, possession, action, passion. Le débat reste ouvert concernant la question de savoir s'il s'agit là de catégories de langue ou de catégories de pensée. Cf. R. Blanché, *La logique et son histoire d'Aristote à Russell*, Paris, A. Colin, 1970, p. 30-31; E. Benveniste, *Problèmes de linguistique générale*, Paris, Gallimard, 1966, p. 63-74.

puissance, en tant que tel, voilà le mouvement⁸⁵; par exemple, de l'altéré, en tant qu'altérable, l'entéléchie est altération; de ce qui est susceptible d'accroissement et de son contraire ce qui est susceptible de décroissement (il n'y a pas de nom commun pour tous les deux), accroissement et diminution; du généable et du corruptible, génération et corruption; de ce qui est mobile quant au lieu, mouvement local."

"Que le mouvement soit bien tel, c'est clair d'après ce qui suit. En effet quand le construisible, en tant que nous le disons tel, est en entéléchie, il se construit; et c'est là la construction; de même l'apprentissage, la guérison, la rotation, le saut, la croissance, le vieillissement."⁸⁶

Le moteur comme cause active; le mobile comme support passif.

"Le mouvement est l'entéléchie du mobile comme mobile. Mais cela arrive par le contact du moteur... . Quoi qu'il en soit, le moteur toujours apportera une forme, soit substance particulière, soit qualité, soit quantité, laquelle sera principe et cause du mouvement, quand le moteur produira le mouvement ... Et l'on voit la difficulté; le mouvement est dans le mobile; en effet, c'est l'entéléchie de celui-ci sous l'action du moteur; mais l'acte du moteur n'est pas une autre chose; en effet il faut une entéléchie à l'un et à l'autre; or celui-ci, considéré en puissance est moteur, en acte est mouvant; maintenant, il a la faculté de faire passer à l'acte le mobile; par conséquent il n'y a qu'un seul acte pour l'un et l'autre également; ... ; ces choses, en effet, sont unes, mais leur définition n'est pas une. ... Ici une difficulté logique; il est peut-être nécessaire que de l'actif et du passif les actes soient différents : l'un action, l'autre passion, l'un ayant pour oeuvre et fin de produire un effet, l'autre de le subir."⁸⁷

L'impossibilité physique de l'infini

"D'une façon générale, on voit qu'il est impossible d'admettre un corps infini et en même temps un lieu pour les corps, s'il est vrai que

⁸⁵ D'ordinaire, l'acte est ce qui conduit à l'essence parfaite, l'entéléchie est l'essence parfaite elle-même. C'est cette définition du mouvement à laquelle Descartes affirmera ne rien comprendre : le terme même de mouvement aura changé de signification, n'empruntera plus son sens à la conception du devenir et de l'accomplissement de soi, mais concernera exclusivement la possibilité de décrire le déplacement des objets, donc une relation entre un espace et un temps devenus premiers par rapport au mouvement.

⁸⁶ Ibid., 201a9-18, p. 90.

⁸⁷ Ibid., 202a7-24, p. 93.

tout corps sensible a ou pesanteur ou légèreté et que, s'il est lourd, sa nature lui donne un transport vers le centre, s'il est léger vers le haut; car il devrait en être de même pour l'infini; mais il est impossible ou qu'il soit tout entier ici ou là, ou qu'il soit par moitié ici et là; comment en effet le diviser, ou comment une partie de l'infini sera-t-elle l'une haut, l'autre bas, extrémité, centre?" En outre, tout corps sensible est dans un lieu, et les espèces et différences du lieu sont haut bas avant arrière droite gauche, et ces distinctions valent non pas relativement à nous et par position, mais dans le tout lui-même. Or il est impossible qu'elles soient dans l'infini."⁸⁸

L'infini aristotélicien est opératoire :

"L'être se dit et de l'être en puissance et de l'être en acte, et l'infini est par composition et par retranchement. Que la grandeur n'est pas infinie en acte, on l'a dit; mais elle l'est par division, car il n'est pas difficile de ruiner les lignes insécables; reste donc que l'infini est en puissance. Mais il ne faut pas prendre l'expression "en puissance", comme dans le cas où l'on dit : ceci est en puissance une statue, c'est-à-dire sera une statue, comme s'il y avait une chose infinie qui dût dans l'avenir être en acte; mais puisque l'être se prend en plusieurs acceptions, de même que l'existence de la journée et de la lutte est un renouvellement continu, de même aussi l'infini. ... D'une manière générale, ... , l'infini consiste dans le fait que ce qu'on prend est toujours nouveau, ce qu'on prend étant certes toujours limité, mais différent." ... (206a14-27)

"L'infini par composition est en quelque sorte le même que l'infini par division; dans la chose limitée, l'infini par composition se produit à l'inverse de l'autre; dans la mesure où le corps apparaît divisé à l'infini, dans cette mesure les additions successives apparaissent converger vers le corps fini. En effet, si sur une partie prise dans une certaine proportion sur une grandeur limitée, on en prend une autre dans la même proportion, n'enlevant pas ainsi au tout la même grandeur, on n'arrivera pas au bout du corps limité; mais si l'on augmente la proportion, au point d'enlever successivement une quantité toujours la même, on y arrivera, parce que tout corps limité est épuisé par une soustraction finie quelconque." (206b3-11)

"L'infini par accroissement est aussi lui-même infini en puissance, et nous l'identifions en quelque sorte à l'infini par division, car on peut toujours prendre quelque chose en dehors de lui; mais cependant on ne dépassera pas toutes limites dans la grandeur,

⁸⁸ Ibid., 205b24-32, p. 103.

comme on dépasse en division tout corps fini, et on restera en deça." (206b16-20)

"L'infini se trouve donc être le contraire de ce qu'on dit; en effet, non pas ce en dehors de quoi il n'y a rien, mais ce hors de quoi il y a toujours quelque chose, voilà l'infini⁸⁹." (206b33-34)⁹⁰

L'infini des mathématiciens est lui aussi en puissance.

"La théorie ne supprime pas les considérations des mathématiciens, en supprimant l'infini qui existerait en acte dans le sens de l'accroissement, considéré comme ne pouvant être parcouru; car, en réalité, ils n'ont point besoin et ne font pas usage de l'infini, mais seulement de grandeurs aussi grandes qu'ils voudront, mais limitées; ... "⁹¹

La définition du continu

"Si la continuité, le contact, la consécuitivité obéissent aux définitions précédentes (le continu est ce dont les extrémités sont une seule chose; le contact est entre ce dont les extrémités sont ensemble; le consécutif est ce entre quoi il n'y a aucun intermédiaire du même genre), **il est impossible qu'un continu soit formé d'indivisibles**, par exemple qu'une ligne soit formée de points, s'il est vrai que la ligne soit un continu et le point, un indivisible. En effet, on ne peut dire que les extrémités des points font un, puisque pour l'indivisible il n'existe pas une extrémité qui serait distincte d'une autre partie; ni que les extrémités sont ensemble, car il n'y a rien dans une chose sans parties qui soit une extrémité, puisque l'extrémité est distincte de ce dont c'est l'extrémité." (231a21-28)

"En outre, il faudrait alors que les points dont serait fait le continu fussent, ou en continuité, ou en contact réciproque; même raisonnement pour tous les indivisibles (231a29-31). Or, ils ne peuvent être continus, d'après ce qu'on vient de dire, et, quant au contact, il faut qu'il ait lieu, soit du tout au tout, soit de la partie à la partie, soit de la partie au tout; mais, l'indivisible étant sans parties, ce sera forcément du tout au tout; or le contact du tout au tout ne fera point une continuité, car le continu a des parties étrangères les unes

⁸⁹ C'est en ce sens qu'Aristote oppose le terme "infini" à celui d'"entier" ou d'"achevé", termes de même nature, dit-il, en ajoutant que "rien n'est achevé s'il n'est terminé; or le terme est limité." *ibid.*, 207a11-13, p. 106.

⁹⁰ *Ibid.*, 206a14-207a2, p. 105-6.

⁹¹ *Ibid.*, 207b27-33, p. 108.

aux autres et il se divise en parties qui se distinguent de cette façon, c'est-à-dire qui sont séparées quant au lieu." (231b1-5)

"Maintenant, il n'y aura pas plus de consécution entre un point et un point, un instant et un instant, de façon à en faire la longueur ou le temps. En effet, sont consécutives les choses entre lesquelles il n'y a aucun intermédiaire du même genre, tandis que, pour les points, l'intermédiaire est toujours une ligne, pour des instants, un temps. Ajoutons que le continu serait divisible en indivisibles, s'il est vrai que chacun des deux doive se diviser en ce dont il est composé. Mais nul continu n'est divisible en choses sans parties." (231b6-11)

"D'autre part, il n'est pas possible qu'entre les points et les instants il y ait aucun intermédiaire d'un genre différent; un tel intermédiaire en effet sera évidemment, s'il existe, ou bien indivisible, ou bien divisible, et s'il est divisible, ce sera, ou bien en indivisibles, ou bien en parties toujours divisibles; or c'est là le continu. Mais il est clair que le continu est divisible en parties qui sont toujours divisibles; si en effet c'était en indivisibles, il y aurait contact d'indivisibles à indivisibles; en effet dans les continus, si l'extrémité est une, il y a aussi contact." (231b12-17)

Continu, mouvement et infini : les différentes étapes du raisonnement.

"Pour la même raison, ou bien la grandeur, le temps, le mouvement sont composés d'indivisibles et se divisent en indivisibles, ou bien aucun ne le peut." (231b18-21).....

"Puisque toute grandeur est divisible en grandeurs (il a été démontré en effet qu'un continu ne peut être composé d'indivisibles et, d'autre part, que toute grandeur est continue), nécessairement le plus rapide doit se mouvoir sur une plus grande distance en un temps égal, sur une égale en un temps moindre, c'est-à-dire davantage en un temps moindre. (232a23-28) ...

"Mais puisque tout mouvement a lieu dans le temps et que dans tout temps il y a possibilité de mouvement, puisque d'autre part tout mû peut être mû plus rapidement et plus lentement, dans tout temps on pourra trouver un mouvement plus rapide et un plus lent. Cela étant, nécessairement le temps doit être continu. Or j'appelle continu ce qui est divisible en parties toujours divisibles; si cette notion du continu est notre base, forcément le temps sera continu." (232b20-25)

"En même temps, on voit que toute grandeur est continue, car ce

sont les mêmes et d'égales divisions qui divisent le temps et la grandeur." (233a10-12)...

"On voit donc, d'après ce qui a été dit, que ni la ligne, ni la surface, ni en général aucun des continus, ne sera indivisible, non seulement pour les raisons déjà données, mais parce que la conséquence serait la division de l'indivisible. ... On voit donc que nul continu n'est sans parties." (233b15-17,31)⁹²

Annexe 4 : Les travaux de J.P. Vernant. Pour une étude contextuelle du rôle de la raison dans la cité grecque.

Les transformations socio-politico-culturelles.

"En l'espace de quelques siècles, la Grèce a connu, dans sa vie sociale et dans sa vie spirituelle, des transformations décisives. Naissance de la Cité et du droit - avènement, chez les premiers philosophes, d'une pensée de type rationnel et organisation progressive du savoir en un corps de disciplines positives différenciées : ontologie, mathématiques, logique, sciences de la nature, médecine, morale, politique -, création de formes d'art nouvelles, les divers modes d'expression, ainsi inventés, répondant au besoin d'authentifier des aspects jusqu'alors méconnus de l'expérience humaine : poésie lyrique et théâtre tragique dans les arts du langage, sculpture et peinture conçus comme artifices imitatifs dans les arts plastiques.

Ces innovations dans tous les domaines marquent un changement de mentalité si profond qu'on a pu y voir comme l'acte de naissance de l'homme occidental, le surgissement véritable de l'esprit, avec les valeurs que nous reconnaissons à ce terme. De fait, les transformations n'intéressent pas seulement les démarches de l'intelligence ou les mécanismes du raisonnement. De l'*homo religiosus* des cultures archaïques à cet homme, politique et raisonnable, que visent les définitions d'un Aristote, la mutation met en cause les grands cadres de la pensée et tout le tableau des fonctions psychologiques : modes de l'expression symbolique et maniement des signes, temps, espace, causalité, mémoire, imagination, organisation des actes, volonté, personne -, toutes ces catégories se trouvent transformées dans leur structure interne et leur équilibre général."⁹³

⁹² Ibid., t. II, I. VI, p. 39-45.

⁹³ J. P. Vernant, Introduction, *Mythe et pensée*, op. cit., t. I, p. 6-7.

De la politique au *logos*.

"Toutes les questions d'intérêt général que le Souverain avait pour fonction de régler et qui définissent le champ de l'*archè* sont maintenant soumises à l'art oratoire et devront se trancher au terme d'un débat.... Entre la politique et le *logos*, il y a ainsi rapport étroit, lien réciproque. L'art politique est, pour l'essentiel, maniement du langage; et le *logos*, à l'origine, prend conscience de lui-même, de ses règles, de son efficacité, à travers sa fonction politique. Historiquement, ce sont la rhétorique et la sophistique qui, par l'analyse qu'elles entreprennent des formes du discours en tant qu'instrument de victoire dans les luttes de l'assemblée et du tribunal, ouvrent la voie aux recherches d'Aristote définissant, à côté d'une technique de la persuasion, des règles de la démonstration et posant une logique du vrai, propre au savoir théorique, en face de la logique du vraisemblable ou du probable qui préside aux débats hasardeux de la pratique."⁹⁴

Le *logos* et le droit.

"Quand, avec la cité, le juge représente le corps civique, la communauté dans son ensemble, et qu'incarnant cet être impersonnel supérieur aux parties, il peut décider lui-même, trancher suivant sa conscience et d'après la loi, ce sont les notions même de preuve, de témoignage et de jugement qui se trouvent radicalement transformées. Le juge doit en effet amener au jour une vérité en fonction de laquelle il aura désormais à se prononcer. Il demande aux témoins, non plus d'être cojureurs s'affirmant solidaires d'une des deux parties, mais de rapporter sur les faits. Par cette conception entièrement nouvelle de la preuve et du témoignage, le procès mettra en oeuvre toute une technique de démonstration, de reconstruction du plausible et du probable, de déduction à partir d'indices ou de signes - et l'activité judiciaire contribuera à élaborer la notion d'une vérité objective, qu'ignorait, dans le cadre du "prédroit", le procès ancien."⁹⁵

La nature de la raison pour les philosophes grecs

"Avènement de la Polis, naissance de la philosophie : entre les deux ordres de phénomènes les liens sont trop serrés pour que la pensée rationnelle n'apparaisse pas, à ses origines, solidaire des

⁹⁴ J.P. Vernant, *Les origines de la pensée grecque*, Paris, P.U.F. Quadrige, 1981, p. 45.

⁹⁵ Ibid., p. 78.

structures sociales et mentales propres à la cité grecque. Ainsi replacée dans l'histoire, la philosophie dépouille ce caractère de révélation absolue qu'on lui a parfois prêté en saluant, dans la jeune science des Ioniens, la raison intemporelle venue s'incarner dans le Temps. L'école de Milet n'a pas vu naître la Raison; elle a construit une Raison, une première forme de rationalité. Cette raison grecque n'est pas la raison expérimentale de la science contemporaine, orientée vers l'exploration du milieu physique et dont les méthodes, les outils intellectuels, les cadres mentaux, ont été élaborés au cours des derniers siècles dans l'effort laborieusement poursuivi pour connaître et dominer la Nature. Quand Aristote définit l'homme comme un "animal politique", il souligne ce qui sépare la Raison grecque de celle d'aujourd'hui. Si l'*homo sapiens* est à ses yeux un *homo politicus*, c'est que la Raison elle-même, dans son essence, est politique. ...

La raison grecque, c'est celle qui de façon positive, réfléchie, méthodique, permet d'agir sur les hommes, non de transformer la nature. Dans ses limites comme dans ses innovations, elle est fille de la cité."⁹⁶

Annexe 5 : Le point de vue génétique de J. Piaget La science grecque n'est pas une science expérimentale.

"Pour des raisons psychologiques faciles à dégager, les opérations logico-mathématiques se sont constituées dans l'histoire (comme elles s'élaborent chez l'enfant) bien avant l'expérience physique, chimique ou biologique. Ces raisons tiennent, d'une part, au fait que de telles opérations logiques ou mathématiques sont tirées des actions du sujet (ou de leur coordination) exercées sur les objets, et non pas des objets comme tels, ce qui comporte une antériorité génétique de ces opérations générales par rapport à la connaissance détaillée des objets. D'autre part, l'expérimentation sur les objets ne consiste nullement en un simple enregistrement de leurs propriétés, au cours duquel le sujet se bornerait à constater les faits, mais elle suppose un ensemble de démarches actives de dissociation et de mise en relation qui impliquent l'emploi constant des opérations logico-mathématiques à titre d'instruments d'analyse. Pour ces deux raisons conjointes les mathématiques et la logique se sont formées bien avant notre ère, tandis que les sciences expérimentales ne se sont développées qu'à partir des temps modernes.

L'épistémologie grecque est donc née d'une réflexion sur les

⁹⁶ Ibid., p. 131-3.

mathématiques, avec Platon, et sur la logique, avec Aristote, tandis qu'il a fallu attendre Descartes, Leibniz et surtout Kant pour voir se développer des épistémologies nées de la collaboration des mathématiques avec l'expérience physique.

Mais un autre ensemble de considérations psychologiques explique que l'on puisse utiliser longtemps les opérations logico-mathématiques sans prendre conscience de leur existence en tant qu'opérations. L'introspection ne constitue, en effet, qu'un très pauvre instrument de connaissance, même sur le terrain de la pensée, et nous prenons conscience du résultat des opérations de notre esprit bien avant de découvrir les structures de celles-ci, de même que, de façon générale, nous prenons conscience du résultat de nos actions bien avant d'apercevoir leurs mécanismes. Il résulte de ces lois psychologiques que les mathématiques grecques ont été essentiellement "réalistes" (ou, comme l'a dit Boutroux, "contemplatives"), c'est-à-dire qu'elles ont projeté dans le réel les résultats des opérations au lieu de réfléchir sur celles-ci et de les manipuler en tant qu'instruments mobiles et libres de transformation et de combinaison. C'est pourquoi les Grecs n'ont point constitué une science de l'algèbre, tout en connaissant plusieurs transformations algébriques, et se sont adonnés de préférence à la géométrie. C'est aussi pourquoi la première sans doute de leurs théories épistémologiques, qui a consisté en réflexions de Pythagore sur la nature des nombres, s'est avérée totalement "réaliste" : selon ce grand mathématicien les nombres entiers constituaient les éléments des objets et des figures, comme s'il s'agissait en quelque sorte d'atomes spatiaux, et cela sans aucun soupçon du fait que ces nombres pourraient résulter d'activités, d'opérations ou d'actions proprement dites du sujet lui-même. Pour le réalisme, en effet, le sujet connaissant n'intervient pas dans la connaissance : il n'existe pas encore en tant que sujet actif, et se borne à "contempler".⁹⁷

⁹⁷ J. Piaget, "L'épistémologie et ses variétés", *Logique et connaissance scientifique*, Paris, Gallimard, La Pléiade, 1967, p. 16-18.

Faire la droite avec des points

Th. Gilbert, B. Jadin, Ph. Tilleuil
GEM, Institut de Mathématiques
Louvain-la-Neuve

"... Je connais un labyrinthe grec qui est une ligne unique, droite. Sur cette ligne, tant de philosophes se sont égarés, qu'un pur détective peut bien s'y perdre..."

"... je vous promets ce labyrinthe, qui se compose d'une seule ligne droite et qui est invisible, incessant."

J.-L. Borges, in "La mort et la boussole."
(Fictions, 1957)

La droite fait partie des objets conceptuels familiers que tout un chacun, mathématicien ou non, connaît et manipule. Pourtant l'appréhension qu'en a le mathématicien diffère de celle de monsieur tout-le-monde comme c'est le cas pour la plupart des concepts mathématiques.

Comment le mathématicien voit-il la droite, les points et comment imagine-t-il l'alignement de points les uns derrière les autres pour faire la droite ? Et vous, comment le voyez-vous ?

Pour faire un peu de lumière sur la question, interrogeons des mathématiciens qui ont fait leurs preuves. Dans l'ordre, nous regarderons principalement des textes d'Aristote, Galilée, Pascal, Bolzano, Dedekind et Cantor.

Aristote.

Aristote évoque plusieurs fois l'infini et le continu dans les livres Physique 1 et 3[1]. Pour lui, le continu est divisible à l'infini. Mais cet infini n'existe pas en acte, il est en puissance.