Jean Paul DUMONT est décédé le 1er décembre 1993. Les premières manifestations de la maladie qui l'a emporté l'avaient empêché de venir jusqu'à Brest proposer sa conférence sur Zénon d'Elée. Lors d'un bref temps de répit, en février 1993, il avait toutefois accepté de nous présenter cette conférence à Paris.

La commission Inter-IREM d'Epistémologie et d'Histoire des Mathématiques, profondément affectée par sa disparition, se réjouit néanmoins d'avoir pu accueillir le grand historien de la philosophie antique pour l'une de ses dernières interventions, et de contribuer à la publication d'un de ses derniers écrits.

L'infini paradoxal de Zénon d'Elée : la dialectique de l'espace et du nombre

Jean-Paul Dumont†
Professeur d'histoire de la philosophie
Université Charles de Gaulle-Lille III

Et si l'histoire du concept d'infini, telle que la racontent les fragments des pré-socratiques, pouvait nous amener à en mieux comprendre la richesse philosophique ? Voilà la question qui constitue notre motivation initiale. Qu'y a-t-il de commun entre l' ἄπειρον, traduit par **illimité** ou **infini**, dont le Milésien Anaximandre fait la souche primitive, la source et l'origine, voire le principe[1] de toutes choses, et cet infini qui va prendre chez Aristote[2] tantôt la valeur d'infini en puissance, et tantôt la valeur d'infini par addition[3]? Toute grandeur étant par lui tenue pour continue, elle est divisible, c'est-à-dire **peut** être divisée à l'infini: tel est l'infini en puissance; mais cette division, qui n'épuise jamais le continu, peut se répéter un nombre indéfini de fois, ce qui a pour conséquence la mise en évidence d'un infini par addition, ou encore d'un infini en nombre [4] :

> *" L'infini par addition est en un sens le même que l'infini par division. En effet, dans la grandeur finie, l'infini par addition se produit à l'inverse de l'infini par division; car dans la mesure où nous constatons que la division se poursuit à l'infini, dans cette même mesure nous constatons que l'addition tend vers la limite du défini. En effet si nous prenons une partie définie d'une grandeur finie et si nous y ajoutons une autre partie en suivant la même proportion, ce qui a pour effet d'opérer sur le tout un prélèvement non identique au premier, nous ne parviendrons pas à épuiser la grandeur limitée, tandis que en revanche si nous augmentons la proportion de telle sorte que chaque fois nous prélevions la même grandeur, nous viendrons à bout de la grandeur limitée, étant donné que toute grandeur limitée peut se trouver épuisée par la soustraction d'une quelconque grandeur finie".*

Entre l'illimité naturel des Ioniens et la construction achevée du concept d'infini, conçu d'une part en puissance, d'autre part en nombre, comme nous le propose Aristote, l'intervention la plus marquante et la plus riche de conséquences pour l'histoire de la notion est celle de Zénon d'Elée. Zénon est d'abord celui qui passe aux yeux d'Aristote[5] pour l'inventeur de la dialectique. Certains, nous le savons bien, voudraient réduire la dialectique à sa dimension littéraire et rapprocher l'art du dialecticien, du fragment de ce qui paraît être le premier dialogue philosophique conservé[6] , où Zénon d'Elée s'entretient avec Protagoras du bruit que peut faire en tombant la dix-millième partie d'un grain de mil, s'il est vrai qu'un sac contenant un boisseau du même mil fait du bruit quand il tombe. D'autres, voulant donner à la dialectique un sens déjà plus technique, voudraient attribuer à Zénon la première codification de l'art d'interroger et de répondre, qui permet aussi bien la réfutation que la recherche de la vérité concernant les principes du savoir. Mais sans doute est-il plus raisonnable, et plus philosophique en même temps, de s'attacher au lien très vraisemblable qui unit la dialectique à la constitution des paradoxes.

Nous savons, par le témoignage tardif du néoplatonicien Proclus[7], que l'ouvrage de Zénon, sans doute celui dont il a donné lecture à Athènes devant Socrate[8], contenait quarante paradoxes. Parmi ces paradoxes, les quatre relatifs au mouvement (la **dichotomie,** l'**Achille**, la **flèche immobile** et le **stade**) ont fait la célébrité de Zénon au point de masquer l'existence des trente-six autres. Cela est dû à la notoriété même de la **Physique** d'Aristote qui s'est fait le témoin des quatre plus connus. La conséquence directe est que l'infini est devenu essentiellement cet **à l'infini** vers lequel tend , en se répétant, la division en deux ou **dichotomie**. Le commentaire des quatre paradoxes sur le mouvement a suscité les discussions que l'on sait, au point que les logiciens ont voulu ramener les paradoxes à des constructions logiques. Les paradoxes ont pu même aussi conduire les mathématiciens à s'interroger sur les totalités que sont les ensembles. D'autres ont insisté sur le jeu de langage auquel recourt la mise en oeuvre du paradoxe, et qui relève de la sémantique. On connaît les nombreuses variantes littéraires du texte de Lewis Carroll : **Ce que se dirent Achille et la tortue**[9], et le jeu logique auquel il nous engage en usant de la régression à l'infini dans la constitution d'une axiomatique.

Mais notre intention n'est pas de suivre Achille et la tortue sur ce terrain, d'autant que ce serait courir le risque d'entreprendre une course infinie ! Il est sans doute plus philosophiquement instructif de revenir sur ce que **paradoxe** veut dire dans l'esprit de Zénon d'Elée. Il ne faut pas parler de tel ou tel paradoxe comme d'**une** proposition ou d'**un**

énoncé qui heurterait l'attente de la raison, en s'opposant à une opinion généralement partagée. Ce qui en réalité produit le heurt ou le choc, c'est la rencontre d'**opinions** également probables, mais qui pourtant paraissent s'exclure. La conception aristotélicienne[10] de la dialectique propose d'examiner les tableaux comparatifs de conceptions ou d'opinions philosophiques également probables, et dont il convient d'éprouver la validité en examinant leurs conséquences par recours à un syllogisme. Déjà chez Platon, dans le **Parménide**[11], la dialectique zénonienne permet de mettre en évidence les situations paradoxales qui résultent de ce que l'Un, cessant d'être pensé comme purement un, se trouve engagé dans l'existence. En termes techniques, Platon dit alors que "l'Un participe à l' οὐσία". Enoncer des paradoxes ne consiste pas à juxtaposer telle ou telle opinion surprenante, comme on dirait de l'Un qu'il est immobile ou qu'il est en mouvement, qu'il est même ou autre, qu'il est semblable ou dissemblable, etc. Enoncer un paradoxe, je le répète, est au contraire construire un système, et cela précisément parce que seul un **système** peut être paradoxal. Si la participation de l'Un à l'existence fait paradoxe, c'est justement parce que cet Un devient par là-même un Un-multiple qui est en même temps en lui-même et en un autre, immobile et en mouvement, même et autre, semblable et dissemblable, en contact et séparé, égal et inégal, engagé dans le temps et dans les parties du temps. Bien sûr, il faudrait interpréter philosophiquement, sans doute avec l'aide de Proclus, la succession de paires conceptuelles qui constituent les paradoxes, et observer comment, d'une manière dialectique, mais cette fois au sens moderne selon un processus de mise de côté qui est conservation et dépassement[12], les termes précédents se trouvent tout entiers immanents dans le terme suivant. Ainsi, en rebroussant chemin, on trouve que le temps est nombre et qu'il est structuré par le paradoxe de l'égal et de l'inégal propre à tout nombre; qu'étant nombre, il est paradoxalement en contact et séparé, ce qui est l'effet de la présence en lui de l'opposition du semblable et du dissemblable qui nourrit toute image; et que ce statut de l'image est lui-même travaillé par le paradoxe du même et de l'autre. Arrêtons là une énumération suffisamment éloquente ! La lecture du **Parménide** de Platon devrait faire apparaître que Platon, en exposant ce que la tradition néoplatonicienne tiendra pour l'essentiel de sa théologie[13], a pris le risque divertissant et instructif d'appliquer à l'Un, en la reprenant à son compte, la dialectique paradoxale à laquelle Zénon soumettait les grandeurs multiples.

Car l'objet principal et initial de Zénon est l'analyse des multiples, c'est-à-dire du paradoxe inhérent à l'**existence** de toute grandeur. Ces paradoxes sur l'Un et le multiple sont eux aussi connus d'Aristote. Le paradoxe concernant l'Un est cité à la fois dans la **Métaphysique** et dans la **Physique**[14]; le paradoxe de la dichotomie est allégué dans la

Physique[15], et lié par Aristote à l'invention de la théorie des grandeurs insécables ou atomes. Cette connexion, très tôt établie par Aristote, entre l'atomisme et la procédure dichotomique qui consiste, nous l'avons vu, à diviser une grandeur en deux selon une proportion quelconque et à répéter ensuite l'opération autant de fois que l'on voudra, fait justement l'objet d'un commentaire d'Aristote qui, au lieu de prendre place, comme on s'y attendrait, dans la **Physique**, se situe au début du ler livre **De la génération et de la corruption**[16]. Ce témoignage est philosophiquement de la plus grande importance, au point qu'il paraît être, au moins au même titre que le texte de Zénon d'Elée, la source du commentaire de Zénon par Simplicius.

C'est à Simplicius en effet, dans le **Commentaire de la "Physique" d'Aristote**[17], que l'on doit d'avoir conservé, dans un ordre que la critique moderne conteste[18], les seules citations textuelles de Zénon que nous connaissions. Après avoir lu la citation que H. Diels tient pour le premier fragment, nous allons nous efforcer d'en pénétrer le sens, et d'y mesurer l'usage que Zénon fait du concept d'infini. En tentant d'en apprécier les conséquences, une double surprise nous attend. L'application de la dichotomie à la grandeur va connaître une double fortune historique: d'un point de vue géométrique, elle engendre l'atomisme des Abdéritains; d'un point de vue arithmétique, elle produit le pythagorisme de Philolaos qui va inspirer l'enseignement oral de Platon.

fragment 1

προδείξας γὰρ ὅτι 'εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ' ἂν εἴη', ἐπάγει 'εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος καὶ ἀπέχειν αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου. καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος. καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἕξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. ὅμοιον δὴ τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν· οὐδὲν γὰρ αὐτοῦ τοιοῦτον ἔσχατον ἔσται οὔτε ἕτερον πρὸς ἕτερον οὐκ ἔσται. οὕτως εἰ πολλά ἐστιν, ἀνάγκη αὐτὰ μικρά τε εἶναι καὶ μεγάλα· μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι'.

fragment 2

'εἰ γὰρ ἄλλωι ὄντι, φησί, προσγένοιτο, οὐδὲν ἂν μεῖζον ποιήσειεν· μεγέθους γὰρ μηδενὸς ὄντος, προσγενομένου δέ, οὐδὲν οἷόν τε εἰς μέγεθος ἐπιδοῦναι. καὶ οὕτως ἂν ἤδη τὸ προσγινόμενον οὐδὲν εἴη. εἰ δὲ ἀπογινομένου τὸ ἕτερον μηδὲν ἔλαττον ἔσται μηδὲ αὖ προσγινομένου αὐξήσεται, δῆλον ὅτι τὸ προσγενόμενον οὐδὲν ἦν οὐδὲ τὸ ἀπογενόμενον'.

1 *En effet. il a commencé par démontrer que : Si l'existant n'avait pas de grandeur, il n'existerait pas. Il poursuit: S'il existe, il est nécessaire que chaque existant ait une certaine grandeur, une certaine épaisseur, et qu'il y ait une certaine distance de l'un par rapport à l'autre. Et le même argument vaut pour celui qui est devant lui. Car celui-ci aussi aura une grandeur, et un certain existant se trouvera devant lui. Or le dire une fois revient à le dire sans cesse. Car aucun existant n'occupera le dernier rang, et il n'est aucun existant qui n'existe pas en relation avec un autre. Donc, si les existants sont multiples, il est nécessaire qu'ils soient à la fois petits et grands, petits au point de ne pas avoir de grandeur, et grands au point d'être illimités.*

2 *Car si on l'ajoutait à un autre existant, il ne le rendrait pas plus grand. Car si l'on ajoute à quelque chose quelque chose qui n'a pas de grandeur, il n'est pas possible que celle-là gagne en grandeur. Et de cette façon, il s'ensuit que ce qui a été ajouté n'était rien. Et si la soustraction de quelque chose opérée à partir d'une autre chose n'a pas pour effet de rendre celle-ci plus petite, de même que l'addition de quelque chose à autre chose n'a pas pour effet de l'augmenter, il est clair que l'ajouté ou le retranché n'était rien.*

L'unique présupposé qui constitue le point de départ de l'analyse de Zénon, c'est que l'étant possède de la grandeur. Il s'agit bien de l'existant ou de l'étant (τὸ ὄν), qui n'est pas tenu ici pour un être intelligible "abstrait", mais pour un **quelque chose** qui possède l'être, par opposition au devenir, et qui fait partie des entités "naturelles" (si l'on peut ainsi dire), pourvues de grandeur. Le terme de grandeur (μέγεθος) appartient au premier chef au vocabulaire de la géométrie plane; l'existant doit posséder d'abord deux dimensions, ce qui n'exclut pas que l'on puisse user d'une ligne pour les besoins de l'exemple en se bornant à prendre en considération une dimension unique. Dans le premier fragment qui nous concerne la grandeur s'accompagne de l'épaisseur (πάχος), ce qui confère à l'existant une réalité stéréométrique. Même si, car tel est bien le cas, l'analyse porte sur un objet intelligible saisi par l'intellect, ou sur ce que Démocrite appellera une **idée**[19], l'enjeu est constitué par une entité volumineuse susceptible d'être tenue pour immanente à toute réalité physique faisant corps, comme plus tard la forme aristotélicienne sera dite immanente à la matière du composé.

Mais, cependant que l'existant possède grandeur et épaisseur, il doit être séparé des autres existants par une certaine distance. La pensée de la séparation et de la distance (notre traduction n'a pas pu faire l'économie du substantif **distance)** ne s'exprime pas en grec par un substantif (comme **grandeur** ou **épaisseur**), mais au moyen d'un simple verbe: ἀπέχειν, qui décrit le fait ou l'action d'être séparé ou à distance. Cela veut dire que la distance n'a pas de réalité substantielle, qu'elle est un acte et non une chose, bref quelque chose qu'il faut penser non pas comme un être, mais comme un fait. Et ce fait, qui accompagne la présence de l'existant, est la présence du non-être séparant les êtres, ou du vide isolant les atomes. De l'ordre du fait est ce que Démocrite appellera le μηδέν par opposition à la substance désignée par le néologisme δέν[20]. Aussi faut-il souligner en arrière-fond du premier paradoxe, la présence d'un autre paradoxe, encore plus fondamental, qui concerne le **il est** réduit au **il y a,** et qui énonce qu'à côté de l'être il y a du non-être produisant l'effet de distance entre les êtres ou les existants.

C'est alors que s'introduit sous une forme un tant soit peu masquée le concept d'**infini en nombre,** ou que, si l'on préfère, l'infini fonctionne comme un opérateur. Car, si l'argument vaut pour un existant donné, il doit valoir de la même façon pour celui qui le précède. La séparation, non désignée ici par le terme technique de **dichotomie,** bien que ce soit de dichotomie qu'il s'agisse, s'opère comme dans le sorite, ce qui correspond à poser en principe que "le dire une fois revient à le dire sans cesse". Comme on le voit, le caractère illimité de la séparation s'impose à l'intellect comme un **réquisit,** dès lors que l'intellect est amené à concevoir les conditions rationnelles qui président à l'apparition d'existants multiples. La raison n'a pas le choix: il faut, s'**il y a** des existants, qu'une séparation les distingue, et que, si séparation **il y a,** cette séparation corresponde à une opération réalisée par l'*"être"* du non-être, c'est-à-dire la présence d'un vide infini. L'infini du vide fonde et supporte l'indéfinité de l'opération de mise à distance, et c'est bien pourquoi la séparation une fois produite doit s'opérer ensuite à l'infini.

Quelle est alors la conséquence de la présence du vide ajoutée à celle des existants ? Faudrait-il que, si le vide est infini, les existants qui doivent, par le fait même, être en nombre infini, soient eux-mêmes des grandeurs ou des volumes proprement infinis ? On voit bien que la réponse est négative, car la raison ne peut pas revenir sur le principe posé initialement que tout existant doit avoir une grandeur et une épaisseur. Et c'est bien là le paradoxe de l'infini, qui repose sur la constatation que si l'infini, entendu comme opérateur de distanciation et de séparation, est la conséquence de la grandeur propre aux existants, symétriquement l'illimitation de l'infini doit se heurter quelque part au

caractère non séparable des existants, c'est-à-dire à l'insécabilité fondamentale de toute grandeur[21].

Nous touchons là à un très grand moment de l'histoire de la philosophie et de la science. Zénon va être le premier à donner une valeur spécifique au couple de concepts constitué par la paire du Grand et du Petit, qu'il emprunte au pythagoricien Alcméon.[22]

Relisons la conclusion du premier fragment qui introduit en même temps le deuxième :

> *" Si les existants sont multiples, ils doivent être Grands et Petits, Grands au point qu'ils soient illimités en grandeur, et Petits au point d'être sans grandeur".*

Par là, Zénon entend que la grandeur (μέγεθος) propre à un existant doit être une **mégagrandeur** ; cela est la condition nécessaire de la divisibilité de cette grandeur. Comme la première division ou séparation doit en effet pouvoir se répéter sans cesse, un nombre infini de fois, il faut que la grandeur soit infiniment grande. On voit que le Grand est requis par la divisibilité.

Dans ce texte de Zénon, nous pensons donc qu'il convient de conserver à Grand son sens naturel et géométrique, et ne pas donner à Grand le sens arithmétique de grandeur en nombre. Car si le grand nombre de divisions possibles doit être contenu dans le Grand, c'est le caractère grand de l'existant, ou la grandeur de sa dimension qui fondent la divisibilité. Ainsi, Grand est le caractère de tout existant possédant une grandeur [23] : Grand est synonyme d'illimité ou infini.

La référence au Petit, qui est l'opposé relatif au Grand, est appelée par la conséquence absurde qu'entraînerait l'existence d'un pur illimité. Car une grandeur illimitée[24] se trouverait émiettée[25] en fragments non fragmentaires qui se réduiraient à des points sans grandeur. Est-il possible de concevoir une grandeur qui soit la somme de non-grandeurs, même en nombre infini ? Si la suite numérique de divisions, dont il était d'abord postulé qu'elles pouvaient se poursuivre à l'infini, allait jusqu'à l'infini, on se heurterait à une contradiction : cela exigerait en effet que la division ne puisse pas se poursuivre à l'infini, puisqu'elle aurait rencontré l'infini comme son terme : l'ensemble arithmétique ne serait pas infini, contrairement à ce qui avait été posé.

En outre, cette fois d'un point de vue géométrique, l'unité composant la grandeur finirait par être privée de dimension. Ajouter ou retrancher une telle grandeur ne produirait aucun effet, le plein serait vide et l'être se dissoudrait en non-être.

Pour ne pas aller jusqu'à sombrer dans un tel néant, il faut donc reconnaître que l'infini numérique a une fin, ou si l'on préfère, que l'ensemble constitutif de la grandeur est formé d'unités ou de monades qui échappent à la division, et par là doivent être dites insécables, c'est-à-dire porter le nom d'**atomes**. Le Petit existant de Zénon, c'est l'atome.

Qu'on me permette ici d'insister sur le fait que le Petit n'est pas une réalité physique ou naturelle, comme le serait un corps, mais que le Petit est bien une réalité intelligible, appréhendée par l'entendement, et qui a le statut d'une **idée**. La grandeur n'est pas une qualité d'un corps, mais une propriété enveloppée dans le concept d'existant. Le concept de Petit est la condition qu'il faut nécessairement poser comme étant ce qui rend possible le fait, pour le concept d'existant, d'envelopper la grandeur.

Tel est bien l'essentiel du paradoxe. L'enchaînement des raisons exige que, partant d'une grandeur tenue pour indéfiniment divisible, Zénon doive aboutir à poser l'indivisibilité de **minima** élémentaires. Le Grand ne va pas sans le Petit, mais cela ne résulte pas d'un effet de relativité, comme lorsque l'on dit que le Grand est grand par rapport au Petit et que le Petit est petit par rapport au Grand. Il s'agit au contraire d'un paradoxe ontologique, et bien autrement fondateur: la pensée de l'existant en général doit dialectiquement faire référence au paradoxe du Grand et du Petit.

Nous voudrions, parvenus à ce point de notre propos, indiquer brièvement les conséquence d'une telle dialectique de l'infini, et marquer son retentissement à la fois dans la philosophie des nombres propre aux pythagoriciens et à Platon, et dans la philosophie concurrente représentée par l'atomisme géométrique des Abdéritains.

On a coutume, lorsqu'on évoque la figure de Philolaos, d'en faire une sorte de Platon avant la lettre. La raison en est peut-être l'**opinion** rapportée par Aétius[26] : "*Les principes sont la limite et l'illimité*". Ce jugement est renforcé par une notation tardive du néoplatonicien Damascios[27] : "*...comme Platon l'écrit dans le **Philèbe** et Philolaos dans ses livres **De la nature**, ce qui est constitué de **limite*** et ***d'illimité...***".Mais de telles formules n'ont qu'une valeur très approximative et peuvent induire une interprétation qui fait contresens. Comme nous le verrons ensuite, le platonisme tient sur l'infini un discours original et différent, puisque l'illimité sera pour Platon une grandeur continue, Platon refusant, sous quelque forme que ce soit, l'existence du vide.

En réalité, l'expression de Philolaos est différente et exprime une conception opposée de l'infini, qui présuppose la discontinuité.

Les deux principes, qui ne sauraient exister séparément, et que l'on trouve à l'origine de tout existant, portent les noms de **Limitants** et **d'Illimités** (au pluriel)[28] . Nous lisons par exemple :

*"Il est bien clair que c'est de l'accord à la fois de **limitants** et **d'illimités** que le monde, ainsi que tout ce qu'il contient, ont été constitués".*

Que sont ces **illimités** ? La réponse la plus vraisemblable est que ce sont les **minima** distincts et en nombre infini qui constituent le matériau de la grandeur. Demeurant fidèle à la leçon de Zénon d'Elée, Philolaos renonce à parler de l'illimité et de l'infini au singulier, dont la division aboutirait contradictoirement à un néant. Il faut donc bien qu'il existe des entités infiniment petites et en nombre infini, pour que l'existant qu'elles composent par addition ait lui-même une grandeur.

Qu'est-ce alors que les **limitants** ? Le terme de **limitant** désigne ce que les anciens physiologues appellent depuis longtemps l'*enveloppant* ou le περιέχον. Car il faut bien, pour qu'une grandeur existe, plus exactement pour qu'existe un être ayant de la grandeur, que les grandeurs infiniment petites qui la composent, soient enveloppées, retenues et maintenues ensemble par un principe assurant la cohésion du tout résultant des parties. Le limitant ne saurait pas davantage exister seul que les illimités. L'analyse dialectique de l'existant possédant grandeur, débouche sur l'exigence paradoxale du concours des **illimités** et du **limitant** pour rendre compte de la présence de l'existant quel qu'il soit. (Les limitants ne sont au pluriel dans le texte de Philolaos que du fait même que les existants quelconques sont eux-mêmes multiples.)

Si l'on voulait se livrer à un exercice de rétroversion, en retraduisant le vocabulaire de Philolaos dans la langue de Zénon, il faudrait dire que le **limitant** est le Grand, tandis que les **illimités** sont le Petit. Tout composé est pour Philolaos rendu Grand par la puissance enveloppante et en même temps Petit par sa divisibilité en une infinité de matériaux renfermant encore une grandeur résiduelle.

L' enseignement oral de Platon, dont Aristote est le témoin[29], va tout au contraire se montrer soucieux de préserver la réalité du continu. Cela entraîne deux ordres de conséquences. D'une part, la limite de la grandeur est sans grandeur: elle a le statut du nombre, ou encore du point par rapport à la ligne. Cela a pour effet de faire de la limite (et non plus du limitant) un principe unificateur des multiples qui, en opérant, manifeste la manière dont l'Un participe à la réalité substantielle qu'elle concourt à produire. L'enveloppant cesse alors d'être le Grand, comme chez Zénon et chez Philolaos: il n'est ni le **limitant** relatif au **limité,** ni le Grand du Petit; il est l' Un du Multiple responsable de la finitude du continu. Pour tenir le langage d'Aristote, on peut dire que la limite fait exister en acte une grandeur par ailleurs infiniment divisible en puissance, parce que continue.

Mais, d'autre part, Platon ne renonce pas au Grand et au Petit. Puisque tout existant est un par sa forme et multiple par sa matière, ou encore est fini par sa limite et illimité quant à l'étendue (même si l'on doit aussi parler d'une "matière intelligible"), c'est dans la réalité seule du multiple et de l'illimité que l'infini retrouve son lieu propre. Par opposition à l'Un de la limite, l'illimité porte alors le nom de **Deux** ou **Dyade,** Platon posant en second principe, à côté de l'Un, la **Dyade indéterminée** (ou **aoriste**) **du Grand et du Petit**.

Voici en quels termes Simplicius, dans son **Commentaire à la "Physique" d'Aristote**, transcrit les notes prises par Aristote, Héraclide, Hestiée et d'autres lors de la célèbre leçon de Platon **Sur le bien**[30] :

> "*Il* (Platon) *pose le plus et le moins, le plus intense et le moins intense, comme étant de la nature de l'illimité; car, où ils sont présents et se manifestent sous l'aspect de l'excès et du défaut, ce qui participe d'eux ne connaît ni immobilité ni limitation, mais se meut vers l'indéterminé de l'illimitation. Il en est de même pour le maximum et le minimum, et pour le Grand et le Petit, par lesquels Platon désigne ceux-là. Prenons en effet une quelconque grandeur limitée, par exemple une coudée: si, des deux demi-coudées qui résultent de sa division en deux, nous laissons l'une indivisée et, divisant l'autre demi-coudée, nous l'ajoutons petit à petit à celle qui est indivisée, alors la coudée aura deux parties, l'une devenant plus petite, l'autre plus grande, sans que ce processus connaisse une fin. Car, en procédant à ces divisions, nous n'arriverons jamais à une partie indivisible; en effet, la coudée est continue, et le continu se divise en divisibles toujours. Une telle division ininterrompue montre une certaine nature de l'illimité enclose dans la coudée, et même plutôt plusieurs, une allant vers le Grand et l'autre vers le Petit. Dans ces conditions, on voit que la Dyade indéfinie est formée de la réunion de l'unité qui va vers le Grand et de l'unité qui va vers le Petit. Et ces caractères appartiennent aux corps continus et aux nombres*".

On mesure ce qu'est devenue la dichotomie zénonienne. Le paradoxe ne concerne plus que la Dyade, c'est-à-dire la matière. Si j'ajoute à la moitié le quart et le huitième constituant le Grand qui ne demande qu'à grandir, le huitième restant forme le Petit qui n'aspire lui-même qu'à diminuer. Mais cette transformation en un couple des deux termes de l'infini a aussi pour résultat de faire s'évanouir tout paradoxe. Alors que l'existant de Zénon peut être à la fois Grand et Petit, et que Philolaos était obligé de maintenir la présence d'une multitude d'illimités, Platon construit un modèle non paradoxal de l'illimité ou infini, pour en faire une réalité dynamique. Car si celle-ci reste duelle ou double, parce que faite du Grand et du Petit, le Grand et le Petit n'apparaissent pas comme des entités en acte, mais simplement comme des possibles. Le Grand n'est plus que ce qui a puissance de grandir sous l'effet de la division, cependant que le Petit n'est plus que le sujet d'une diminution possible. Ainsi se trouvent jetées les bases de la solution aristotélicienne aux paradoxes de Zénon: toute existence réalisée est une existence en acte, et par conséquent finie, comme est fini l'intervalle qui sépare la flèche de sa cible; en revanche, la divisibilité à l'infini n'a d'être qu'en puissance : l'infini n'est plus que la conséquence éventuelle du continu qui est le lieu du possible.

Mais si Platon, grâce en partie à Philolaos, a pu ainsi creuser la tombe de Zénon, l'atomisme a continué d'exister en dehors de lui, chez ses contemporains d'Abdère. La spéculation atomiste a été d'abord géométrique. C'est à elle que se rattache la définition de la ligne tenue pour un ensemble de points matériels, ou plutôt de lignes insécables (ἄτομοι γραμμαί), la définition de la surface comme un empilement de lignes, et la définition du volume comme un empilement de surfaces. Ainsi le cône ou la pyramide de Démocrite sont constitués de surfaces égales-inégales; toute surface étant égale à celle qui la précède (et qui est plus grande) et à celle qui la suit (et qui est plus petite), mais pour cette raison inégale par rapport à elle-même puisque celle qui la précède est plus grande et celle qui la suit est plus petite[31].

Sans doute convient-il de mettre un terme à cette histoire ancienne des paradoxes de l'infini. Nous avons pu constater que le legs de Zénon est loin de se borner aux quatre paradoxes sur le mouvement. Ce qui est en cause, c'est l'invention de la dialectique et les premiers effets dialectiques d'une raison qui s'efforce de rendre compte des phénomènes en mettant en évidence les exigences logiques et ontologiques que leur salut requiert. Que le paradoxe soit au fond de la dialectique, nous pouvions nous en douter. Que l'infini soit un objet éminemment paradoxal, nous avons pu en prendre la mesure. Que dès l'origine, la dialectique ancienne ait été déjà moderne, c'est ce que nous voudrions avoir en même temps établi.

NOTES

1 - Le mot grec d'ἀρχή, auquel Aristote donnera la valeur technique de **principe**, a-t-il déjà ce sens chez Anaximandre? La difficulté est impossible à trancher.

2 - Aristote, **Physique** III, 6.

3 - **Ibid**. 206b 3-12.

4 - Nous citons le texte (206b 3-12) dans notre propre traduction.

5 - Dans deux oeuvres perdues (des dialogues ?) : le **Sophiste**, in W.D. Ross, **Aristotelis fragmenta selecta**, Oxford, 1955, fgm. 1, p.15; et dans le **Sur les poètes**, fgm. 3, p.68.

6 - **D.K** (29) Zénon A XXIX, **290** (379). Les références aux **Présocratiques** sont données successivement de trois manières: l'abréviation **D.K.** renvoie à H.Diels-W.Kranz, **Die Fragmente der Vorsokratiker**, 6e. éd., Berlin 1951, avec le numéro de l'auteur antique entre parenthèses suivi de son nom, et le numéro du *témoignage* précédé de la lettre A, ou du *fragment* précédé par la lettre B; l'indication suivante en gras signale le numéro de page de la traduction donnée dans notre édition des **Présocratiques**, Paris 1988 et 1989, éd. Gallimard, Bibl. de La Pléiade; enfin on indique entre parenthèses le numéro de la page de l'édition de poche, **Les écoles présocratiques**, Paris 1991, éd. Gallimard, Folio-Essais.

7 - **D.K.** (29) Zénon A XV, **281** (369).

8 - **Ibid.** A XI, **280** (368).

9 - Lewis Carroll, **Oeuvres**, Paris, Gallimard,1990, La Pléiade, p. 1622-1625.

10 - Aristote, **Topiques** I, 13 à 15.

11 - Platon, **Parménide**, 142b 5 - 155d 1 (2ème hypothèse).

12 - Au sens hégélien de l'**Aufhebung**.

13 - L'interprétation néoplatonicienne du **Parménide**, qui commence avec Plotin et, après Proclus, s'achève par la théologie négative de

Damascios et du Pseudo-Denys, a été battue en brèche par la critique moderne et en particulier par V.Brochard ("La théorie platonicienne de la participation", **Etudes de philosophie ancienne et de philosophie moderne**, Paris, Vrin, éd. 1966, p. 113-150) qui voyait dans la seconde partie du **Parménide** une machine de guerre sceptique, destinée à montrer qu'en dehors de toute participation de l'Un à l'existence, on ne peut rien dire ni de l'Un ni des multiples, et que dans le cas de la participation de l'Un à l'existence, on peut dire tout et n'importe quoi, le même et son contraire, aussi bien de l'Un que des multiples. Ce tout et n'importe quoi, ce Même et cet Autre caractérisent non seulement le scepticisme antique, mais tout paradoxe logique. Il est fort instructif de noter que la plus profonde dialectique paradoxale peut se trouver subvertie en paradoxologie sceptique: un tel phénomène s'est produit dans l'Antiquité quand Zénon, dialecticien, s'est trouvé, après la lecture d'Aristote, changé en sophiste auteur de paradoxes.

14 - **D.K.** (29) Zénon A XXI et XXII, **283** (371) et **285** (373).

15 - **D.K.** (29) Zénon A XXII, **loc. cit**.

16 - Aristote, **De la génération et de la corruption** I,2. 316a 14-317a 12.

17 - Simplicius, **In Phys** 138, 29 - 142,15 (éd. H.Diels, Berlin 1882). En réalité, Simplicius ne commente pas les passages des livres III, IV et surtout VI de la **Physique** où Aristote reprend les paradoxes sur le mouvement, mais le livre I,3. Il s'inspire successivement d'Alexandre d'Aphrodise citant Eudème, et de Porphyre.

18 - **D.K.** (29) Zénon, B I, II et III, **291** (379). H.Diels cite les trois fragments dans l'ordre III, I, II, considérant que le troisième fragment cité par Simplicius précède en réalité les deux premiers.

19 - **D.K.** (68) Démocrite A CII, **798** (452) ; B CXLI, **879** (533) ; B CLXVII, 889 (543) ; B Vi et B VI, **844** (498).

20 - **D.K.** (68) Démocrite A XXXVII, **767** (421); A XLIX, **774** (428) ; B CLVI, **885** (539).

21 - Renvoyons ici au commentaire d'Aristote, **De la génération et de la corruption** I, 2. 316a 24, trad. J. Tricot, pp. 15-16. Il porte sur l'ensemble des problèmes soulevés par la séquence des deux premiers fragments de Zénon.

22 - **D.K.** (24) Alcméon A III, **218** ; et (58) Ecole pythagoricienne B V, **566** (302).

23 - Si l'analyse de Zénon devait s'arrêter là, le Grand de Zénon aurait pour strict équivalent le continu d'Aristote, qui est divisible à l'infini, en puissance.

24 - Voir la suite du fragment B II, **291** (379) et le commentaire d'Aristote cité en première page du présent article, n. 4.

25 - Aristote use de l'image de la sciure de bois, **De la génération et de la corruption**, I, 2. 316a 34.

26 - **D.K.** (44) Philolaos A IX, **492** (252).

27 - **D.K.** (44) Philolaos B II, **503** (263).

28 - **Ibid.** B I et B II, **502** (262).

29 - Aristote, περὶ τἀγαθοῦ , éd. W.D. Ross, **op. cit.** fgm. 2, p. 113.

30 - **Ibid.** p. 117; notre citation de Simplicius, **In Phys**, va de 453, 31 à 454, 10.

31 - Nous avons eu l'occasion d'étudier le parti que les stoïciens ont tiré de cette géométrie paradoxale; voir "Mos geometricus, mos physicus" in J. Brunschwig éd., **Les Stoïciens et leur logique**, Chantilly 1976, Paris, Vrin 1978.

Comment les Eléments d'Euclide traitent du continu sans recourir à l'infini.

Marie-José Durand-Richard
Collège Paul Gauguin, Paris
Chercheur associé REHSEIS. CNRS

Les *Eléments* d'Euclide (-323, -285) constituent le premier ouvrage connu qui traite exclusivement des mathématiques. Sa structure axiomatico-déductive, tout comme la rigueur de ses démonstrations, lui confèrent encore valeur canonique au 17ème siècle; et en dépit d'un fondement axiomatico-déductif, sa représentation géométrique des opérations les fait apparaître, au moins jusqu'à l'émergence des géométries non-euclidiennes au 19ème siècle, comme une théorisation adéquate du réel. De fait, l'organisation des 13 livres de l'ouvrage est au service d'une maîtrise opératoire du continu qui puisse ne pas faire référence à l'infini. Leur rédaction, outre qu'elle livre aux mathématiciens d'Alexandrie la somme des connaissances acquises par leurs prédécesseurs, en restructure le contenu autour du livre V, connu comme théorie des proportions ou théorie de la mesure. De fait, elle intervient comme mode de résolution de la crise du rationnel, crise à laquelle s'étaient heurtés les Pythagoriciens en établissant l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré. Une telle résolution a ceci d'exemplaire qu'elle permet d'observer le processus d'invention et de structuration des concepts en mathématiques. Elle montre quelles sont les contradictions soulevées entre la logique de l'arithmétique géométrique pythagoricienne, qui constitue l'ancien système de représentation, et cette nouveauté, philosophiquement étrangère au mode de théorisation antérieurement accepté. Elle éclaire les médiations nécessaires à la recomposition théorique du champ des mathématiques : celles-ci passent par la nécessité de retravailler les anciennes significations, les anciens concepts, afin de fournir à de nouvelles pratiques une interprétation qui permette de les intégrer. C'est au cours de cette étape particulière qu'a lieu l'échange le plus étroit entre le langage scientifique - mathématique - et le langage courant, et que se repose le problème qui intervient de manière récurrente dans l'histoire des mathématiques, et qui est celui de leur nature, celui de savoir de quoi elles parlent, et de la difficulté sans