
L'idée d'infini, quelle histoire ...

Tony Lévy
CNRS, Paris

Il semble bien que nous ayons de l'idée d'infini un sentiment (le terme est délibérément vague) qui précède toute mise en forme discursive, ou même simplement réfléchie: si la série des nombres entiers est bien inépuisable, "où" donc les puisons-nous ? En répétant la division en deux d'un segment de droite, épuiserons-nous ce segment jusqu'à rencontrer des "atomes", ou bien cette division se poursuit-elle sans terme? Si l'univers est clos, qu'y a-t-il "au-delà"? S'il n'a pas de limite, que puis-je en dire ? On pourrait multiplier les registres: notre langue offre, depuis de nombreux siècles, un mot qui traverse l'ensemble de ces questionnements, l'infini.

Mais ce mot, et les commentaires qu'il appelle, s'inscrit dans la finitude du locuteur aussi bien que de la locution; il paraît donc impossible d'enserrer l'objet visé par ce mot dans les mailles d'une définition. Si l'on peut accepter d'appeler "l'idée d'infini", les formes, finies, que revêt notre interrogation, on ne peut esquiver la question: de quoi donc l'idée-d'-infini est-elle idée, quel est son *ideatum* ? Peut-être faut-il s'y résigner: de l'infini, je ne peux avoir **que** une idée¹.

¹ Mon point de vue philosophique doit beaucoup à la lecture d'E. Lévinas. Par exemple: "... Mais l'idée d'infini a ceci d'exceptionnel que son *ideatum* dépasse son idée, alors que pour les choses, la coïncidence totale de leurs réalités "objective" et "formelle" n'est pas exclue; de toutes les idées, autres que l'Infini, nous aurions pu, à la rigueur, rendre compte par nous-mêmes. Sans rien décider pour le moment de la véritable signification de la présence en nous des idées des choses, sans adhérer à l'argumentation cartésienne qui *prouve* l'existence séparée de l'Infini par la finitude de l'être ayant une idée de l'infini (...), il importe de souligner que la transcendance de l'Infini par rapport au moi qui en est séparé et qui le pense, mesure si l'on peut dire, son infinitude même. La distance qui sépare *ideatum* et idée, constitue ici le contenu de l'*ideatum* même. L'infini est le propre d'un être transcendant en tant que transcendant, l'infini est l'absolument autre. Le transcendant est le seul *ideatum* dont il ne peut y avoir qu'une idée en nous; il est infiniment éloigné de son idée - c'est-à-dire extérieur - parce qu'il est infini. (in *Totalité et infini*, The Hague (1984), pp. 19 - 20).

On peut évidemment refuser de souscrire à l'évidence du constat, et l'on sait combien la formulation d'un point de départ oriente l'ensemble d'une analyse. Mais mon propos, ici, n'est pas essentiellement philosophique, et j'entends souligner aussitôt la diversité des horizons spéculatifs qui ont tenté d'organiser le "sentiment" décrit plus haut en intuition fondatrice; citons en vrac les noms d'Anaximandre, Aristote, Proclus, Descartes, Leibniz, Spinoza ou Pascal. Il est clair que le déploiement de cette intuition conduit à des développements souvent très différents et à des conclusions parfois antagoniques.

Mais, tenons-nous un moment en suspens, dans ce lieu incertain et troublant, qui se dissout dès qu'on tente d'en préciser les contours, dans l'espace de cette question: comment **dire** ce qui nous déborde absolument? quel sens y-a-t-il à tenter de désigner ce qui défie la désignation, ou du moins ne peut jamais se réduire à celle-ci? Une deuxième évidence, non moins troublante, s'impose alors: quelque vaine qu'apparaisse notre tentative, nous ne pouvons nous y soustraire; la question nous taraude, nous sollicite, nous pousse à forcer le silence de l'indicible. Toutes les formes d'expression élaborées, discursives ou non (poésie), langagières ou non (peinture ou musique), se sourcent à ce silence étourdissant, au désir d'y frayer un chemin.

La mathématique n'y déroge pas: elle aussi, elle tisse sa toile en rôdant autour de l'idée d'infini; dans des formes d'expression qui lui sont propres, et qui ont évolué historiquement. Quiconque a un peu "fait des mathématiques" en conviendra: un des traits les plus forts de ce mode d'expression singulier, c'est qu'il y a de la preuve et il y a de l'infini. C'est peut-être même dans cette conjonction que la mathématique manifeste son rapport spécifique à l'idée d'infini, au point qu'on a pu dire que "les mathématiques sont la science de l'infini"². Voire! La preuve mettant en jeu l'infini est-elle autre chose qu'une métaphore? L'infini a-t-il quoi que ce soit de compatible avec les contraintes qui régissent l'exercice de la preuve?

Longtemps habité par ces questions, j'ai tenté, pour ma part, à travers l'enquête historique, de mieux en saisir l'unité. Partant d'une réflexion sur certains aspects de l'oeuvre de G. Cantor (les rapports entre sa mathématique du transfini et ses interrogations philosophique et religieuse), j'ai été conduit à étudier des textes anciens (antiques et

² H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, Munich (1976), p. 89.

médiévaux), relevant de diverses cultures (grecque, hellénistique, latine, arabo-musulmane, juive). J'y ai retrouvé des échos d'interrogations toujours actuelles. Mais ces textes, de plus, offraient un intérêt particulier pour le type d'investigation adopté: ils marient plusieurs registres de discours, lesquels se croisent, se répondent ou s'opposent selon les cas: mathématiques, physique (ou système du monde), philosophie, cosmologie, métaphysique ou théologie. On y discute de l'ordre du monde, de son mouvement, de ses origines, de l'existence de Dieu et de la hiérarchie des anges, **en même temps** que de la nature du nombre et de la grandeur, des rapports entre le discret et le continu, entre le tout et ses parties. Il arrive ainsi parfois que mathématique et théologie, traitant de l'infini, soient tellement imbriquées qu'on ne puisse plus repérer les frontières respectives de ces disciplines, et qu'on se dise: au fond, sur la question de l'infini, mathématique et théologie, malgré les apparences, ne sont pas vraiment étrangères l'une à l'autre.

Il m'est apparu que l'idée d'infini gagnait en intelligibilité quand on la saisissait aux croisements de ces divers discours, ou plutôt dans les tensions spéculatives suscitées par leur affrontement, ou simplement leur confrontation. Quant au discours mathématique, son horizon **historique** devient complètement opaque, si on ne le rapporte à cet entrelacs. Toutefois, il est indiscutable que c'est en s'affranchissant progressivement de toute contrainte extérieure à son champ propre que la mathématique a acquis cette assurance et cette fécondité qui en fascinent plus d'un: les développements du calcul infinitésimal aux XVII^e et XVIII^e siècles en témoignent. Comment dépasser cette apparente contradiction? En poursuivant l'enquête historique d'une part, et en précisant l'analyse philosophique d'autre part³.

Je me propose d'évoquer ici trois séquences historiques relatives aux débats sur l'infini, lesquelles impliquent, à des degrés divers, le traitement mathématique de l'infini. Malgré la brièveté de l'exposé, je

³ Au cours de ce colloque, on a souvent évoqué la difficulté, pour le professeur, de "traiter de l'infini" en classe: l'analyse d'une procédure mathématique (par exemple, la somme d'une série) dissout l'aspect philosophique; et le commentaire philosophique apparaît comme étranger à la technicité calculatoire. La difficulté est réelle, mais il me semble qu'on peut l'affronter: si on mène de pair l'analyse de la procédure et le commentaire philosophique (en se demandant, par exemple, à chaque étape, si on parle de la même "chose"), il arrive un moment où on peut effectivement dire "les mots nous manquent", ou bien "la technique ne nous offre qu'une métaphore"; nous avons alors là l'indice le plus sûr qu'il est bien "question" d'infini. L'expérience peut être fructueuse, si on compare la "convergence" de la série géométrique des puissances de $1/2$ et la "divergence" de la série harmonique.

souhaite valider cette conclusion quelque peu provocante: le discours mathématique ne peut revendiquer aucun savoir positif qui aurait pour objet l'idée d'infini; mieux, le fonctionnement de ce discours, aujourd'hui, exclut, en droit, toute explicitation de l'idée d'infini. Pour autant, l'idée d'infini n'en est pas moins un ressort essentiel de la fécondité du travail mathématique: dans les formes qui lui sont propres, le mathématicien nous fait entendre son désir obsédant de ... finitiser l'infini.

Aristote: l'infini n'est qu'inachèvement, pure virtualité enveloppée par le fini.

Les efforts théoriques d'Aristote s'enracinaient dans un questionnement sur la structure du monde. Les thèses fondatrices de sa physique - on le sait - ont dominé, des siècles durant, le discours à vocation scientifique: c'est parce que "la nature est principe de mouvement", que le mouvement relève du continu, que le continu est divisible "à l'infini", que se pose la question de l'infini. Sans être la seule, la conception aristotélicienne de l'infini a constitué l'horizon de tous les débats jusqu'à la Renaissance. Ses principales conclusions sont les suivantes:

- l'infini ne peut être une totalité, corporelle ou incorporelle: il n'y a pas d'infini "en acte", grandeur, nombre ou substance. En particulier, le monde, comme grandeur physique est fini, clos par la "dernière" des sphères célestes.

- l'infini existe toutefois selon un autre mode d'être, inférieur et subordonné à l'être en acte: il existe "en puissance", pure virtualité, s'exprimant dans cette possibilité pour une grandeur continue (ligne, surface, corps, temps) quelconque d'être toujours divisible en grandeurs continues, sans qu'aucun terme ne vienne mettre fin à cette division.

- le nombre des divisions d'une grandeur est donc seulement infini "en puissance": quel que soit ce nombre, on peut toujours l'augmenter, puisqu'on peut poursuivre la division. Il ne saurait toutefois exister un nombre maximum, un nombre infini en acte.

Dans cette conception, l'infini est irréductiblement opposé au fini, lequel est associé à la forme, la perfection, la totalité, l'un. L'infini

sera donc perçu et défini⁴ comme inachèvement, imperfection, multiplicité. Le mathématicien y trouvera son compte, pour une bonne part au moins.

Considérons par exemple un segment d'une longueur-unité, divisons-le en deux, divisons à nouveau en deux la moitié située à droite et poursuivons ainsi l'opération. On remarquera tout de suite que la somme des longueurs de ces sous-segments reste inférieure à l'unité, la différence étant ici facilement mesurable: elle est égale à la longueur du dernier sous-segment produit; cette différence diminue à mesure qu'on augmente le nombre des divisions. Jusque là, rien que de très élémentaire. Et si l'on continuait? Dans la mesure où le segment, fini, apparaît divisé à l'infini, on peut dire, avec Aristote, que les additions successives des sous-segments produits par la dichotomie tendent à recomposer le segment initial, sans toutefois jamais y arriver complètement, puisqu'il y aura toujours un reste. Le mathématicien d'aujourd'hui, grâce à la notion de limite mathématique acquise au XIX^e siècle, utilise de manière réglée l'écriture suivante: $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots \text{etc} \dots = 1$. L'égalité en tant que telle n'aurait évidemment aucun sens pour Aristote, puisqu'un reste sépare toujours le segment initial de la somme des sous-segments, aussi loin que l'on poursuive la division; ses efforts théoriques ont toutefois balisé la voie.

Soulignons la force de cette conception d'Aristote, quels qu'en soient ses points fragiles: tout en étant déchu de la dignité ontologique qui s'attache à l'être fini ou l'être en acte, l'infini est **pensé**; il est rapporté au fini qui l'enveloppe et le fonde selon le modèle même de la division du segment. On pourrait résumer ce point de vue par une formule: l'infini est une image dégradée, fragmentée, du fini, dont il autorise une approximation toujours déficiente.

Les critiques les plus vives que rencontrera le point de vue aristotélicien concernent l'éternité du monde, ou pour être plus précis, la thèse selon laquelle le mouvement des sphères célestes n'a ni commencement, ni fin. Les partisans de la création du monde par un acte divin s'ingénieront, non sans succès, à mettre en évidence les paradoxes, donc les impasses, auxquels conduirait la thèse de l'éternité du monde.

⁴ C'est ce en dehors de quoi on peut toujours prendre quelque chose de nouveau, du point de vue de la quantité.

Le chrétien d'Alexandrie, Jean Philopon, dit le Grammairien (VI^e siècle), est à l'origine de plusieurs arguments dont la fortune fut considérable dans les traditions grecque, arabe, hébraïque et latine. Si le monde était sans commencement, écrira-t-il, le nombre des hommes engendrés jusqu'à Socrate serait infini; en y ajoutant le nombre des hommes engendrés depuis Socrate jusqu'à aujourd'hui, on obtiendrait "quelque chose plus grand que l'infini", ce qui est proprement absurde. Autre argument, autre paradoxe énoncé par Philopon: quand le soleil accomplit une révolution, la lune en accomplit douze; en supposant le monde sans commencement, il faudrait conclure qu'un infini peut être douze fois plus grand qu'un autre infini!

Certains théologiens musulmans opposeront aux philosophes partisans de l'éternité un argument qui fera aussi fortune dans les débats médiévaux: supposons le monde sans commencement, alors le nombre des âmes séparées des corps après la mort, qui sont, elles, éternelles, constituerait un nombre infini en acte, contrairement à ce que postule Aristote. Il n'y a donc aucune espèce d'infini, concluront ces théologiens, et le monde n'existe que par un acte souverain de Dieu.

C'est pourtant un partisan de l'épistémologie aristotélicienne, Proclus de Lycie (Ve siècle), qui va développer une pénétrante analyse des relations entre mathématiques (géométrie euclidienne) et infini en acte!

Proclus : l'infini, même inconnaissable, est, pour le géomètre, un instrument de connaissance du fini.

C'est en commentant le Livre I des *Eléments* d'Euclide que Proclus rencontre l'unique occurrence d'une "droite infinie", et non pas simplement "prolongée à l'infini". Le contexte en est la proposition 12: "Mener une ligne droite perpendiculaire à une droite infinie donnée à partir d'un point donné qui n'est pas sur celle-ci".

Si la droite n'est pas infinie en acte, mais simplement prolongeable autant que nécessaire (propriété légitimée par le postulat 2 du Livre I), alors le cas de figure suivant pourrait se présenter: un point "hors" de la droite (en fait, du segment) mais situé dans le prolongement droit de celle-ci. Dès lors, le problème n'aurait plus de solution universelle. Voilà pourquoi, selon Proclus, Euclide a posé la ligne droite "comme infinie". Mais alors que penser de l'interdit aristotélicien de tout infini en acte? Proclus répond en ces termes:

Que dans les choses sensibles, il n'y a aucune grandeur infiniment étendue dans quelque direction que ce soit, cela a été suffisamment établi par le divin Aristote et par ceux qui ont bâti leur philosophie à partir de lui (...). Il n'est pas plus possible qu'un infini de cette sorte existe dans les idées séparées et indivisibles; car il n'y a en elles ni étendue ni grandeur: il peut difficilement y avoir grandeur infinie.

Il demeure donc que l'infini n'existe que dans l'imagination, et seulement sans que l'imagination connaisse l'infini. Car lorsqu'elle connaît, elle assigne en même temps à l'objet de sa connaissance forme et limite; et sa connaissance met fin au mouvement à travers l'objet imaginé; elle le parcourt et le circonscrit. L'infini n'est donc pas l'objet d'une imagination cognitive mais d'une imagination qui est incertaine au regard de cet objet, qui suspend toute pensée ultérieure, et appelle infini tout ce qu'elle abandonne, comme non mesurable et non saisissable par la pensée (...).

Mais la compréhension dont procèdent nos idées et démonstrations ne fait pas usage de l'infini en vue d'une connaissance scientifique, car l'infini est entièrement insaisissable par la connaissance scientifique; elle (la compréhension) le considère à titre d'hypothèse et, pour la démonstration, elle fait usage du fini seulement. Elle n'admet donc pas l'infini pour l'infini mais en vue du fini...⁵

Pour évaluer correctement le point de vue de Proclus, il convient de rappeler que sa métaphysique, contrairement à celle d'Aristote, postule l'existence d'un certain infini positif: l'infini "de" puissance, ou l'infini "primordial". Pour Proclus, le *logos* mathématique (et les objets qu'il vise) est gouverné, sur un plan d'être plus profond, par un *logos* universel, vers lequel il faut se tourner pour comprendre le rapport entre l'imagination (mathématique) et l'infini. Le géomètre

⁵ Texte grec : *Procli Diadochi in Primum Euclidis Elementorum Librum Commentarii*, éd. Friedlein, Leipzig (1873), p. 158. Sur les rapports entre mathématique et métaphysique chez Proclus, on consultera avec grand profit: S. Breton, *Philosophie et mathématiques*, Paris (Beauchesne), 1969; ainsi que A. Charles-Saget, *L'architecture du divin. Mathématique et philosophie chez Plotin et Proclus*, Paris (Belles Lettres), 1982.

puise dans son imagination, "à titre d'hypothèse", et en vue du fini, un infini dont la nature échappe à la connaissance scientifique. Mais si l'imagination est "incertaine" au regard de l'infini, qu'elle manifeste pourtant "par sa puissance impartageable de procéder sans fin", c'est qu'elle ne peut se hisser à la dignité ontologique de l'intellection, de l'acte contemplatif pur qui, lui, saisit l'infini comme indivision et simplicité extrême⁶. La tension existant ici entre mathématique et métaphysique n'est pas sans rappeler, dans un tout autre contexte, certains développements de Cantor.

Georg Cantor (1845-1918): une hiérarchie infinie de nombres infinis.

A la suite d'Aristote, nombreux sont ceux qui opposeront totalité et infini. A l'appui de cette opposition tenue pour irréductible, on multipliera les paradoxes destinés à disqualifier l'expression même de totalité infinie, grandeur ou nombre. Le type d'argument suivant fut développé à l'envi: si la totalité des nombres entiers pouvait être déclarée infinie, alors il faudrait aussi déclarer infinie la totalité des entiers pairs; mais ces derniers constituent une partie du tout que forment les entiers, et le tout est toujours plus grand que sa partie, on aurait donc un infini plus grand qu'un autre infini; c'est absurde!

Pour les partisans de ce point de vue, longtemps majoritaires dans le monde savant, l'infini n'est qu'un horizon de pensée, une indétermination tenue à distance par le calcul, qui ne saurait, en aucun cas, être elle-même objet d'une démarche opératoire: distinguer des infinis, les comparer, voire les multiplier numériquement, n'aurait strictement aucun sens. Le discours mathématique en serait disqualifié, pour lequel "le tout est toujours plus grand que sa partie".

On connaît toutefois quelques savants antiques ou médiévaux, arabes ou latins, dont l'audace spéculative a tenté de contourner ces obstacles. C'est ainsi qu'à partir du XIII^e siècle, les discussions sur ce thème se développent au sein des scolastiques latins. Paradoxalement, certains dogmes théologiques, destinés à faire barrage à la philosophie, relancent le débat et élargissent le champ de la spéculation: l'infinité divine est devenue un concept positif, la puissance divine est réputée avoir pour seules bornes les exigences de la logique et non celles du système d'Aristote. Quelques savants-théologiens, tels que Thomas Bradwardine ou Nicole Oresme,

⁶ J'ai développé plus longuement l'analyse de ce beau texte dans mon ouvrage, *Figures de l'infini*, Paris (Seuil), 1987, pp. 73-78.

affirment la possibilité d'un espace infini, habité par l'immensité divine. D'autres, tels que Guillaume d'Ockam ou Grégoire de Rimini, tentent de transformer l'usage des notions du tout et de ses parties, afin de rendre possible la comparaison d'un tout infini et d'une partie infinie. Même si elles contribuent à éclairer certains problèmes mathématiques, ces tentatives restent surtout marquées par leur caractère philosophique et théologique.

C'est au mathématicien Georg Cantor, au XIX^e siècle, qu'il reviendra de proposer le pari le plus ambitieux de l'histoire mathématique. Fêré des débats philosophiques anciens, et habité par des préoccupations religieuses, Cantor pense pouvoir unifier métaphysique de l'infini et mathématique de l'infini, grâce à sa théorie des "ensembles transfinis".

Récusant l'interdit aristotélicien contre l'infini en acte, Cantor distingue l'infini absolu, divin, qui ne peut être que reconnu, et les divers degrés du transfini qui sont connaissables, parce que mathématiquement maîtrisables. Pour lui, un nombre infini, mieux un ensemble infini, peut être considéré comme un tout. Renversant l'obstacle dressé par ses devanciers, il définira l'ensemble infini comme pouvant être égal, en un sens précis, à une de ses parties. Etendant les opérations élémentaires de l'arithmétique au transfini, il construit une hiérarchie infinie de nombres transfinis.

Le succès de l'entreprise cantorienne reposait sur sa **cohérence mathématique**. La théorie du transfini suscita des polémiques passionnées au sein de la communauté mathématique: elle imposait de nouvelles idées, de nouveaux défis, et donc de nouveaux territoires théoriques.

Un siècle plus tard, quel bilan peut-on faire du pari de Cantor? Deux questions essentielles commandaient le succès de sa théorie: peut-on assigner un nombre transfini déterminé à tout ensemble? peut-on comparer l'infinité des nombres entiers et l'infinité des points de la droite? La réponse, aujourd'hui, ne laisse pas d'être déroutante: ces questions sont **mathématiquement indécidables**! Qu'on se rassure, la situation ne trouble pas outre mesure le mathématicien, lequel continue à travailler à partir d'un système d'axiomes qui lui fournit des bonnes raisons de **croire** que l'édifice mathématique est cohérent. L'existence mathématique d'un ensemble infini est désormais "assurée" par un axiome, aussi indémontrable qu'utile!

S'il a la fibre philosophique, le mathématicien s'interrogera, philosophiquement, sur la situation ainsi créée: nous savons calculer

avec de l'infini; pour autant nous ne savons pas ce qu'est un nombre ou un ensemble infinis. Mieux, nous savons désormais que nous ne pouvons pas mathématiquement savoir.

La parole reste au poète:

*"La terre, ses brouillons de fortune, l'infini,
l'indéfini, une impropre souveraineté, l'amour inséparable
de ses meurtriers, se consomment ensemble et en nous.
L'ombre du temps couvre ce secret."* (René Char).

Bibliographie suggérée.

Dauben J. W., *Georg Cantor, His Mathematics and Philosophy of the Infinite*, Cambridge (Mass.) / Londres, Harv. Univ. Press, 1979.

Davidson H. A., *Proofs of Eternity, Creation and the Existence of God in Medieval Islamic and Jewish Philosophy*, New-York / Oxford, Oxf. Univ. Press, 1987.

Kretzmann N. (ed), *Infinity and Continuity in Ancient and Medieval Thought*, Ithaca / Londres, Cornell Univ. Press, 1982.

Lévy T., *Figures de l'infini. Les mathématiques au miroir des cultures*. Paris (Ed. Seuil), 1987.

Maor, E., *To Infinity and Beyond . A Cultural History of the Infinite*, Boston (Birkhäuser), 1986.

Recueil d'articles édité par Monnoyeur, F., *Infini des mathématiciens, infini des philosophes*, Paris (Ed. Belin), 1992.

Recueil d'articles intitulé: "Fini et Infini", *Le genre humain* (Ed. Seuil), n° 24-25, 1992.

COMMISSION INTER -IREM HISTOIRE ET EPISTEMOLOGIE DES MATHEMATIQUES

COMOS ET INFINI

Actes du 9ème colloque INTER IREM
Epistémologie et Histoire des Mathématiques