TRIANGLE CIRCONSCRIT A UN CERCLE EN CLASSE DE 4ème

Jacqueline BORREANI
Brigitte POULAIN
IREM de Rouen - Groupe didactique

Les origines de la géométrie sont bien souvent liées aux exigences de vie pratique, ce n'est que peu à peu qu'une pensée logique se fait jour et que le raisonnement devient prépondérant. C'est en ce sens que l'on a pu dire que le raisonnement est un acte social : "il faut convaincre l'autre". Pour Aristote, connaître, c'est connaître par le moyen de la démonstration. Toute la difficulté réside dans la dichotomie entre savoir et savoir faire. Le monde du réel s'oppose au monde des Idées de Platon, et cela pose le problème de l'existence des objets que l'on définit. le cercle que l'on trace n'est que le support imparfait de la figure géométrique que l'on peut définir.

Cette opposition entre concret et abstrait se prolonge dans l'opposition entre démonstrations et procédés d'obtention des figures. Les grecs appliquent aux figures le raisonnement, ils intègrent les connaissances antérieures mais rompent avec le pragmatisme. La géométrie tend vers une science abstraite et déductive.

C'est dans les Eléments d'Euclide que l'on trouve la perfection de cet édificie de raisonnement où la rigueur de la construction se mêle à l'élégance de la démonstration. Les postulats sont là pour assurer l'existence des figures fondamentales et déterminent toutes les propriétés de l'espace euclidien.

Dans les Eléments l'ordre des démonstrations prend la forme d'un véritable rituel :

- la proposition : c'est l'énoncé, en général, de ce qu'il faut démontrer.
- l'exposition (ou ecthèse) : c'est la construction de la figure
- la détermination : c'est l'explication de l'énoncé sur la figure avec éventuellement des constructions auxiliaires.

- la démonstration proprement dite
- la conclusion : c'est la reformulation de la proposition comme résultat général.

Dans les programmes de 4ème, l'accent est mis sur "l'entraînement au raisonnement déductif, tout en évitant les exigences prématurées de formulation. La description et la représentation d'objets géométriques du plan demeurent des objectifs fondamentaux".

Nous avons mis en place des activités qui permettent une observation et une analyse des démarches heuristiques des élèves. Ces activités permettent de mettre en place des raisonnements plus ou moins élaborés et se veulent être des étapes vers la démonstration.

Un des premiers problèmes rencontré se situe au niveau du dessin qui se différencie d'une figure géométrique.

La réalisation de la figure nous semble être une occasion de raisonner.

Cependant dans certaines occcasions la figure risque d'être un obstacle au raisonnement lui-même en ce sens qu'elle est elle-même un outil de preuve.

Les problèmes de plus courte distance et de droites particulières dans un triangle ont une part importante dans les programmes de 4ème.

La notion de bissectrice est en particulier assez peu usitée. Pour les élèves sa définition comme droite divisant un angle en deux angles de même mesure est une vision prégnante qui masque la propriété d'axe de symétrie ou d'ensemble de points équidistants. Si la construction de la bissectrice au compas est réussie, son sens est perdu lors des applications.

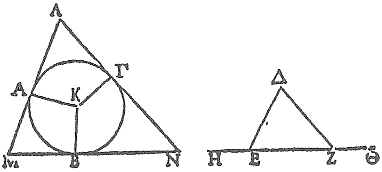
Dans le livre IV des *Eléments* d'Euclide on trouve des propositions de construction alliées aux exigences du raisonnement.

En particulier, dans la proposition 3 du livre IV, la construction n'est pas immédiate et l'activité est fondée sur la perception de la figure : voir un morceau de la figure puis le réintroduire dans l'ensemble. Progressivement l'ensemble des énoncés et des propriétés nécessaires à la démonstration va se dégager.

PROPOSITION III.

A un cercle donné, circonscrire un triangle équiangle avec un triangle donné.

Soit ΑΒΓ le cercle donné, et ΔΕΖ le triangle donné; il faut au cercle ΑΒΓ circonscrire un triangle équiangle avec le triangle ΔΕΖ.



Prolongeons la droite ΕΖ de part et d'autre vers les points Η, Θ (dem. 2), prenons le centre Κ du cercle ΑΒΓ (1. 3), menons d'une manière quelconque la droite ΚΒ, faisons sur la droite ΚΒ, et au point Κ de cette droite, un angle ΒΚΑ égal à l'angle ΔΕΗ, et l'angle ΒΚΓ égal à l'angle ΔΖΘ (23. 1), par les points Α, Β, Γ menons les droites ΛΑΜ, ΜΒΝ, ΝΓΛ tangentes au cercle ΑΒΓ (17. 3).

Puisque les droites ΛΜ, ΜΝ, ΝΛ touchent le cercle ΑΒΓ aux points Α, Β, Γ, et que l'on a joint ΚΑ, ΚΒ, ΚΓ, les angles aux points Α, Β, Γ seront droits (18. 3). Et puisque les quatre angles du quadrilatère ΑΜΒΚ sont égaux à quatre angles droits (32. 1), car le quadrilatère ΑΜΒΚ peut se diviser en deux triangles; mais parmi les angles de ce quadrilatère, les angles ΜΑΚ, ΚΒΜ sont droits; donc les angles restants ΑΚΒ, ΑΜΒ sont égaux à deux droits. Mais les angles ΔΕΗ, ΔΕΖ sont égaux à deux droits (13. 1); donc les angles ΑΚΒ, ΑΜΒ sont égaux aux angles ΔΕΗ, ΔΕΖ; mais l'angle ΑΚΒ est égal à l'angle ΔΕΗ; donc l'angle restant ΑΜΒ est égal à l'angle restant ΔΕΖ. Nous démontrerons semblablement que l'angle ΛΝΜ est égal à l'angle ΔΖΕ; donc l'angle restant ΜΛΝ est égal à l'angle restant ΕΔΖ (32. 1). Donc le triangle ΛΜΝ est équiangle avec le triangle ΔΕΖ, et il est circonscrit au cercle ΑΒΓ (déf. 4. 4).

Donc un triangle équiangle avec un triangle donné a été circonscrit à un cercle donné. Ce qu'il fallait faire.

Cette proposition a été donnée à étudier aux élèves sous la formulation suivante :

Voici un cercle de centre O, on veut l'inscrire dans un triangle ABC dont les angles mesurent :

A = 40°, B = 60°, C = 80°.

* Comment construire un triangle ABC

* Ecrire les étapes de la construction en justifiant au fur et à mesure par des propriétés.

Cette situation est complexe, les outils à utiliser sont nombreux (cercle inscrit dans un triangle, bissectrrice, tangente, angles correspondants, somme).

la plupart des groupes procèdent au départ par tâtonnement, puis apparaît la construction de tangente à un cercle (sa propriété d'être perpendiculaire au rayon au point de tangence étant connue de tous les élèves).

Le travail heuristique nécessite la construction de figures fausses mais complètes pour analyser "ses propriétés". Lorsque cette phase n'a pas eu lieu, les élèves ont construit la figure par tâtonnement. Certaines groupes ne trouvent pas d'autres stratégies, redessinent leur construction plusieurs fois pour se persuader.

Dans l'analyse a priori, nous pensions que les élèves réinvestiraient facilement la figure obtenue en fin de l'activité "Droites-Cercles" (construire 3 droites et des cercles tangents à ces 3 droites). Or les groupes ont rarement utilisé le fait que le centre du cercle inscrit est le point de concours des bissectrices. Ils ont préféré utiliser les angles des 3 quadrilatères (dans ce cas la justification de la construction étant souvent très correcte), ou la construction de parallèles et la propriété des angles correspondants.

La conception que les élèves ont de la tangente a favorisé ou non leur démarche heuristique :

a) droite perpendiculaire au rayon

Cela va permettre (plus ou moins facilement) une justification corrrecte du calcul des angles du quadrilatère, puis de la mesure de l'angle au centre.

Cela permet aussi une construction justifiée de la tangente parallèle à une droite donnée pour ceux qui utilisent les angles correspondants.

b) droite ayant un point commun avec le cercle.

Cela entraîne une construction par tâtonnement et non justifiée.

Le réinvestissement de méthodes de recherche, travail par essais - erreurs, analyse de la figure en supposant le problème résolu, semble se faire plus facilement que celui de l'utilisation des propriétés.

Les démarches adoptées par les élèves font référence à un ensemble de définitions et théorèmes souvent compris mais ils éprouvent des difficultés à mettre ces outils en adéquation aussi bien avec la solution qu'ils ont pressentie qu'avec la justification du problème. Ceux qui ont produit un raisonnement en restent souvent à la compilation des énoncés. Quand ils dépassent ce stade, l'écriture d'une démarche déductive vient alors comme réorganisation des démarches heuristiques.

Il faut souligner que les activités choisies favorisaient particulièrement les étapes de construction et de recherche de solutions plus que de formalisation d'un raisonnement. Dans ces situations, la figure permet d'appréhender le problème et suggère le raisonnement. Par contre la prégnance de la figure a marqué l'intérêt, la nécessité de la rédaction.

L'activité est à la fois support et aide à aller vers la démonstration. La mise en forme est déjà action de démonstration dans sa dissociation de la phase heuristique et rédactionnelle.

L'activité est elle-même une méthodologie de travail, un support : prendre des éléments d'une figure puis généraliser. Tout en justifiant progressivement par les énoncés qui vont être nécessaires à la démonstration les élèves reconstituent implicitement le cheminement d'Euclide.

Les activités proposées et notre problématique sont développées dans "De la figure vers la démonstration" tome 1 et 2, IREM de Rouen.