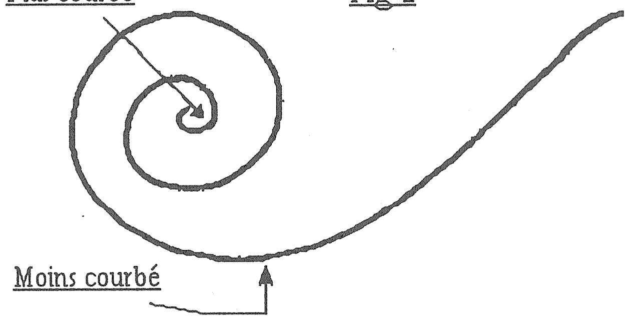
DE L'ANGLE DE CONTINGENCE AU RAYON DE COURBURE : COMMENT PENSER, COMPARER, MESURER LE COURBE. (*)

J.P. FRIEDELMEYER
IREM de Strasbourg

"La mesure est ce qui purifie
l'imagination des qualités secondes" [1]

Les exemples sont nombreux en histoire des sciences de la lente abstraction d'un donné sensible vers sa conceptualisation qui en permette non seulement la compréhension théorique, mais aussi, éventuellement, l'application pratique améliorant les conditions ordinaires de la vie humaine. Parmi ces exemples, on pense surtout à ceux de la mécanique, ou plus généralement à ceux de la physique ; mais il en existe aussi en mathématique tel celui du *courbe*. Le *courbe* nous fournit un donné sensible immédiat, la perception d'une qualité susceptible de plus et de moins, donc susceptible *a priori* d'être comparée, d'être mesurée, mais sans paraître susceptible d'addition et donc ne serait pas une grandeur au sens euclidien du terme. (Fig1)

Fig 1



La courbe *"la moins courbée"* étant la DROITE, est ce la raison pour laquelle on a cru d'abord et longtemps pouvoir penser le *courbe* par comparaison au *droit*, au moyen de *l'angle de contingence*? C'est à dire

(*) Ce texte est publié avec l'accord de "Sciences et Techniques en perspective. Université de Nantes.

"l'angle" que fait une courbe avec sa tangente en un point? Peut être qu'une première raison en est que l'espace limité par cette figure suggère mieux l'idée d'addition que ne le fait la simple qualité *courbe.* A tout le moins la définition de la droite donnée par EUCLIDE ne contredit pas cette interprétation : *"Une ligne droite est celle qui est placée de manière égale par rapport aux points qui sont sur elle."* (Fig2)

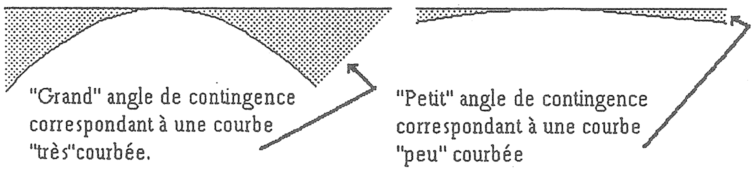


Fig. 2

Le terme *"Contingence"* est ici à relier, de part son origine latine *"contingere"="toucher à"*, qui a donné *"tangente"*, *"contigus" = "contigü"*. De fait, les mathématiciens grecs désignaient cette réalité par un autre terme, celui *d'angle corniculaire.*(*) C'est J.NEMORARIUS, vers 1260 environ, qui a introduit l'expression *"angulus contingencie"* dans le livre 3 de son *De Triangulis.*^2

Mais, peu à peu, à la pensée du *courbe* en comparaison du *droit*, une autre approche se fait jour, presqu'en même temps que celle de l'*angle de contingence*, qui aura cependant beaucoup plus de difficulté à s'imposer dans le temps : au lieu de comparer le *courbe* au *droit*, on peut comparer le *courbe* à ce qui est courbé le plus régulièrement, le plus uniformément, c'est à dire au *cercle*. D'où l'idée d'étudier le courbe au moyen du *cercle osculateur*, du latin *"osculator"* qui signifie *"baiser"*. Ainsi LEIBNIZ parlera du *" cercle qui est non seulement tangent à la courbe, mais qui plus est l'embrasse, celui qui s'y attache le plus longuement"* [3]. Le terme *"baiser"* sera d'abord utilisé tel quel dans les textes français du 18ème siècle, dans des expressions fort savoureuses comme *"cercle baissant"* [4] pour subir rapidement une transcription latine moins suggestive, en *cercle osculateur*.
Deux traditions vont donc se développer parallèlement, que l'on peut suivre chronologiquement selon les trois colonnes suivantes. Elles montrent la richesse du thème par la variété des questions épistémologiques soulevées concernant les notions de grandeur et de mesure des grandeurs, d'angle et de

(*) κερατοεδησ γωυια, (cf HEATH Vol 2 p39) mesure d'un angle, concernant le passage de l'intuition au concept, le passage du qualitatif au quantitatif. Elles mettent en évidence un mouvement d'oscillation entre les diverses approches selon qu'on met l'accent sur le caractère *global*, ou *local* avec comme thème de liaison, le concept de *courbure*. De fait, la *courbure* et le *cercle_osculateur* rendent compte de la même qualité, l'une mettant l'accent sur l'aspect numérique, l'autre sur l'aspect topologique de cette réalité. Ce tableau forcément schématique est là pour rendre sensible le glissement progressif d'une appréhension essentiellement qualitative du *courbe* sous la forme de l'angle de contingence vers un traitement peu à peu plus numérique puis topologique de la courbure et du cercle osculateur. Il ne doit pas occulter le fait que les démarcations ne sont pas toujours aussi tranchées dans la réalité. Par ailleurs ne sont pris en compte dans ce tableau que les auteurs qui se sont illustrés par une certaine pensée significative du *courbe* (pas forcément retenue comme pertinente). Il laisse donc de côté maints travaux - en particulier du 19ème siècle - et également tout ce qui touche aux courbes *"à double courbure"* (courbes gauches).

	ANGLE DE CONTINGENCE	COURBURE	CERCLE OSCULATEUR
-300	EUCLIDE		
-225		APOLLONIUS	
450	PROCLUS		
1260	CAMPANUS		
1260	NEMOMARIUS		
1360		ORESME	
1570	CARDAN		
1557	PELETIER		
1574	CLAVIUS		
1609		KEPLER	
1637		DESCARTES	
1656	WALLIS	WALLIS	
1661		BORELLI	BORELLI
1665		HUYGENS	
1665/1671			NEWTON
1686			LEIBNIZ
1694			BERNOULLI
1748			EULER
1789			ARBOGAST
1797			LAGRANGE
~1960	ANALYSE NON STANDARD *"Les germes de courbe"*		

D'où quatre moments autour desquels vont se regrouper les divers acteurs de cette longue histoire :

1. Les difficultés et les impasses rencontrées à vouloir penser l'angle de contingence en termes d'angle et de grandeur géométrique

2. Le passage des descriptions qualitatives aux descriptions quantitatives, et la prise de conscience du rôle que peut jouer le cercle comme moyen de ce passage.

3. Corrélativement, l'émergence du concept d'*osculation* mettant en relief des aspects topologiques, lequel va élargir le problème à la relation de deux courbes quelconques et mettre en place une théorie plus générale du contact. De ce fait, cette théorie redonne sa place à certains aspects qualitatifs.

4. Ce retour des aspects qualitatifs permettra finalement de donner un concept clair à l'intuition de l'angle de contingence, et de préciser le lien entre courbure et angle de contingence, au moyen du concept de *germe de courbe.*

L'angle de contingence comme grandeur géométrique

EUCLIDE

Les définitions 8 et 9 du Livre I des *Elements* décrivent, plus qu'elles ne définissent la notion d'angle, et ne donnent aucune idée de mesure.

> 8 : *"Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction."*
>
> 9 : *"Lorsque les lignes qui comprennent ledit angle sont des droites, l'angle se nomme rectiligne 5."*

Et de fait, seule la dernière sera véritablement utile à EUCLIDE qui n'utilisera pas d'autres lignes que la droite et le cercle dans les *Eléments*. Comme le signale Paul TANNERY(*) . *"Tandis qu'il serait difficile de rencontrer antérieurement à EUDOXE, le mot χαμπύλον dans le sens précis*

(*) Mémoires scientifiques II *"Pour l'histoire des lignes et surfaces courbes dans l'antiquité"* Paris Gauthiers Villars 1912 *de courbe opposé à droit (ε™ ὐθ ὐ), immédiatement après lui, et peut-être à cause même de son adoption de ce terme, quoiqu'il l'eût pris dans un sens particulier, la signification générale précise semble s'imposer. Elle est courante chez ARISTOTE, qui donne d'ailleurs l'opposition droit-courbe (ε ὐθ ὐ–χαμπ ὐλον) comme une des dix que certains Pythagoriciens de son temps regardaient comme fondamentales"* EUCLIDE reste dans l'optique platonicienne, qui oppose d'ordinaire la circonférence à la droite. Il ne s'intéressera donc qu'à l'angle curviligne formé par un cercle et une droite tangente, dans la proposition 16 du livre III

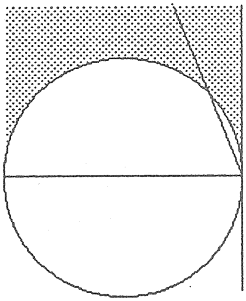


Fig3

"Une perpendiculaire au diamètre d'un cercle, et menée de l'une de ses extrémités tombe hors du cercle ; dans l'espace compris entre cette perpendiculaire et la circonférence, on ne peut pas mener une autre droite ; et l'angle du demi-cercle est plus grand, et l'angle restant est plus petit qu'aucun angle rectiligne aigu" [5]. (Fig3)

Cette proposition va alimenter des discussions sans fin, plus qu'aucune autre, si l'on met à part le fameux cinquième postulat.

Comme le dit DHOMBRES[6] *"à tout le moins, il y avait quelque objection à attribuer la valeur zéro à la mesure de l'angle corniculaire puisqu'il inscrit une portion non vide d'espace."* Mais, dira PROCLUS dans ses commentaires au livre I : *"Si l'angle était une grandeur, puisque toute les grandeurs finies du même genre ont un rapport entre elles, tous les angles du même genre, c'est à dire ceux qui sont dans les surfaces, auraient un rapport avec l'angle rectiligne. Or les choses qui ont un rapport entre elles peuvent se dépasser l'une l'autre si elles sont multipliées ; donc l'angle corniculaire pourrait finalement dépasser l'angle rectiligne ; ce qui est impossible car il est démontré que l'angle corniculaire est plus petit que tout angle rectiligne."*

On voit ici comment fonctionne l'axiomatique du livre V pour écarter de tels objets du champ des grandeurs mesurables, particulièrement l'axiome d'EUDOXE-ARCHIMEDE, tout en laissant place à la discussion sur la nature véritable de cette grandeur. Cette discussion, commencée dans le monde arabe, se poursuivra chez les scolastiques du Moyen-âge et jusqu'au éditeurs d'EUCLIDE du 16$^{\text{ème}}$ et 17$^{\text{ème}}$ siècle.

CAMPANUS 2.p104

Le 13ème siècle marque le début d'un essor des sciences propre à l'occident, avec des noms comme NEMORARIUS, FIBONACCI, ALBERT LE GRAND, Roger BACON, pour ne citer que les plus illustres. Parmi eux CAMPANUS qui traduisit de l'arabe au latin les treize livres des *Eléments* d'EUCLIDE (ainsi que les deux livres attribués à HYPSICLES), en les accompagnant de commentaires très appréciés des contemporains. En particulier CAMPANUS met en opposition la proposition III 16 sur l'angle de contingence, avec la proposition 1 du Livre X, par l'argumentation suivante, qu'il faut situer dans le cadre des discussions des scolastiques autour du problème du continu.

Ce qui légitime les méthodes de quadrature pour des surfaces entourées de lignes courbes (et que l'on appelle aujourd'hui méthodes d'exhaustion) c'est que les grandeurs considérées sont *continues*, c'est à dire que, étant donné trois grandeurs A, B, C telles que A soit plus petite que B, et B elle même plus petite que C, et si A croît continûment jusqu'à C, il y aura nécessairement un moment où A coïncidera avec B. Par exemple, il existe un carré A inscrit dans le cercle B, lui même inscrit dans le carré C. On peut donc faire croître le carré A continûment jusqu'au carré C, mais alors il y aura un moment où le carré A coïncidera avec le cercle B. Et c'est cela qui légitime le problème de la quadrature du cercle B. Il existe un carré égal à A et un carré égal à C, donc il existe un carré égal à B si A<B<C. (Fig4)

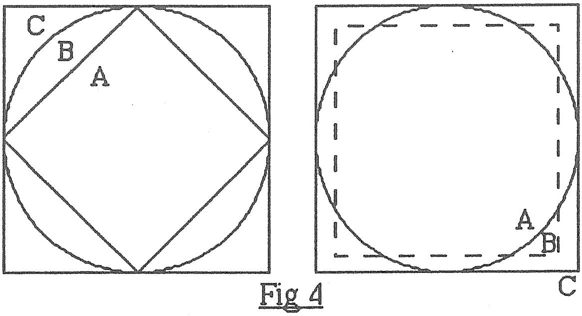


Fig 4

Chez EUCLIDE, ceci est justifié par la proposition 1 du livre X : *"Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées."*

Or dit CAMPANUS, l'angle de contingence échappe complètement à cette règle. Considérons en effet : (Fig 5)

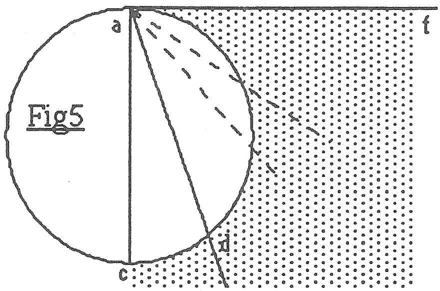
1) l'angle rectiligne $\widehat{dac}$: soit A ;

2) l'angle défini par le demi cercle ac : soit B ;

3) l'angle rectiligne droit $\widehat{fac}$, soit C.

On a d'après EUCLIDE III.16 : A<B<C.

Mais on aura beau faire croître A vers C, en déplaçant le point d sur le demi-cercle, depuis c jusqu'à a : la grandeur A coïncidera alors avec C sans que jamais elle n'ait été confondue avec la grandeur intermédiaire B. La raison en est que les grandeurs A et B ne sont pas de même nature, elles sont hétérogènes, alors que la proposition X1 ne s'applique qu'à des grandeurs homogènes, et repose sur l'axiome d'EUDOXE-ARCHIMEDE.

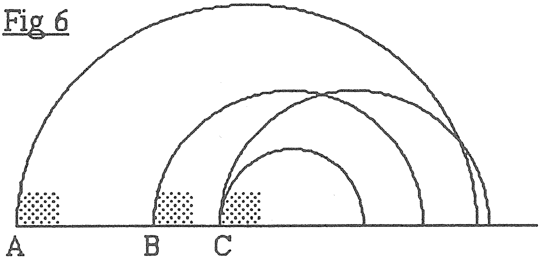


Aussi bien les angles rectilignes que les angles de contingence sont des grandeurs ; mais ce sont des grandeurs de nature différentes, *incommensurables*. CARDAN reprendre une argumentation semblable basée sur le fait que l'angle de contingence (qu'il appelle angulus conctatus) ne peut être partagé en deux partie égales [2.p533].

PELETIER-CLAVIUS [2.p559]

Les éditions nombreuses des *Eléments* d'EUCLIDE suscitées par l'invention de l'imprimerie vont relancer les réflexions sur les points litigieux, en particulier sur l'angle de contingence. Ainsi Jacques PELETIER réalisa une édition des *Eléments* en 1557, dans laquelle il conteste en particulier cette idée de grandeurs hétérogènes, incommensurables. Son argumentation peut se résumer ainsi : (Fig 6)

Fig 6



Considérons les angles (curvilignes) formés par des demis-cercles concentriques de rayon croissant, avec leur diamètre commun. Ces angles sont tous égaux. En effet, l'angle en B ne peut être plus petit que l'angle en C, car sinon en amenant B en C par une translation selon le diamètre commun, le petit cercle ne pourrait être contenu entièrement dans le plus grand, comme c'est le cas.

Par ailleurs, ces angles ne peuvent pas non plus devenir plus grands que celui de C, car allant toujours toujours croissant, il dépasseraient un angle rectiligne droit, ce qui est impossible. Ces angles sont donc tous égaux, et par conséquent l'angle corniculaire défini par deux cercles tangents (tels ceux en C) est très exactement nul.

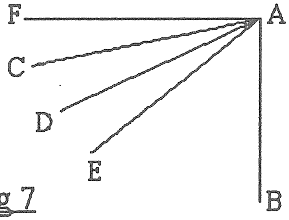


Fig 7

CLAVIUS[7] comprenait bien la force du premier argument, mais aussi la faiblesse de la seconde partie de la démonstration, contestant le vérité de la conclusion qui voudrait qu'un angle qui va constamment en croissant, atteigne et même dépasse la valeur d'un angle droit.

On peut très bien envisager une infinité de droites AC, AD, AE, ... qui définissent avec AF des angles allant constamment en croissant, sans que pour autant l'on dépasse jamais l'angle droit $F\hat{A}B$. (Fig 7)

WALLIS[8]

Longtemps, les deux partis vont s'affronter sans que l'un arrive à convaincre l'autre. Un des derniers à s'inscrire dans cette problématique sera WALLIS qui dans un texte de 1656 *De angulo contactus et semi-circuli tractatus* expliquera que l'angle de contingence est proprement un *non-angulum*, un *non quantum*. Il introduit une distinction subtile entre les grandeurs effectives et les grandeurs en formation, en commencement. Ainsi, un point n'est pas une longueur, mais le commencement d'une longueur, une ligne, le commencement d'une surface, une vitesse, la naissance d'un mouvement. De même, un angle n'est pas l'espace entre deux droites (ou lignes) mais seulement leur aspiration à s'écarter. Deux lignes qui ne forment aucun angle au point commun (comme le cercle et sa tangente) mais qui se séparent plus loin, seront comparées par l'intermédiaire de leur *degré de courbure (gradus curvitatis). "Un cercle avec un petit rayon à un degré de courbure plus grand qu'un cercle avec un grand rayon, car la même courbure est effective sur une plus courte distance. La droite a la plus petite courbure, mais on ne peut pas dire que l'angle qu'elle fait avec une courbe qui la touche est plus petit ou plus grand que l'angle qu'une autre courbe y ferait avec la première : dans tous les cas il s'agit d'un non-angle."*

De cette façon, même s'il ne sait pas encore selon quelle unité commune comparer ces *"gradus curvitatus"*, WALLIS déplace le problème sur son vrai terrain : celui de la mesure, à l'aide de la notion de *courbure*.

Le passage du qualitatif au quantitatif au moyen du concept de COURBURE

Le mot *courbure*se rencontre déjà chez PLUTARQUE[9] qui dit : *"Une droite conserve sa rectitude, indépendamment de sa longueur, alors que la courbure du cercle croît avec sa petitesse, et inversement."* Autrement dit, plus le cercle est petit, plus la courbure est grande, ce que traduit très exactement la relation $C=1/R$ entre courbure et rayon de courbure. Mais ici, seule la courbure d'un cercle est envisagée et non celle d'une courbe quelconque en l'un de ses points.

<u>ORESME</u>[9]

Plus général sera Nicolas ORESME, en relation avec la quantification des qualités, telle qu'elle était enseignée chez les scolastiques (*"configurationibus qualitatum"*).

Toute qualité (le blanc, le chaud, le mouvement) a une étendue (*extensio*) et en chaque point, une intensité (*intensio*). Par exemple, pour la chaleur dans une barre, l'*extensio* est la dilatation de la barre, l'*intensio* est la température. Pour le mouvement, l'*intensio* est le temps, l'*extensio* la vitesse.

ORESME représente les deux aspects, *extensio*, *intensio*, selon un système de représentation graphique, mettant ainsi en évidence, une des premières fois, une relation fondamentale entre une *"latitudo"* (pour l'*intensio*) perpendiculairement à une *"longitudo"* (pour l'*extensio*), et telle que les extrémités supérieures des *"latitudo"* engendrent une ligne, la ligne de l'intensité (*linéa intensionis*). ORESME peut alors distinguer trois types de qualités, correspondant à trois types de relations entre *intensio* et *extensio*, chacune étant caractérisée par un graphique : (Fig 8)

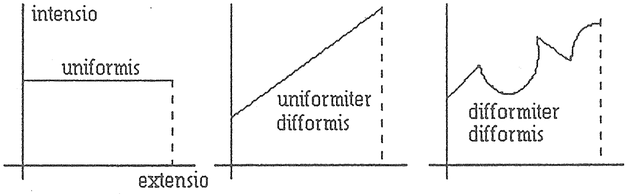


Fig 8

Particulièrement remarquable pour l'époque est la description de la seconde, la qualité uniformément difforme : *"Si l'on prend trois points de la droite considérée, la raison de la distance entre le deuxième et le troisième est comme la raison de l'excès de l'intensité du premier point sur le deuxième, à l'excès de celle du deuxième sur le troisième"*

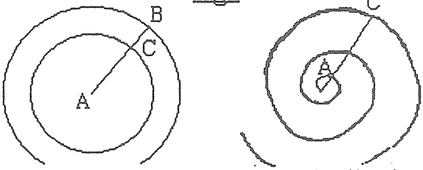
ORESME va tenter d'appliquer cette représentation à la compréhension de ce qu'est le courbe. L'*extensio* serait la longueur de la courbe, l'*intensio*, l'*"intensité"* du courbe (la courbure?). Mais comment *"mesurer"* celle-ci? ORESME dira : *"On ne voit pas clairement si une courbure est, par exemple le double d'une autre, ou dans un rapport donné quelconque avec une autre, ou encore si elles sont totalement incommensurables. Car on ne voit pas clairement d'après quoi on pourrait mesurer l'intensité du Courbe"*. Il voit deux possibilités :

L'une serait de la mesurer par l'écartement par rapport à la rectitude, autrement dit, par une mesure de l'angle de contingence. Mais il y a des difficultés que nous avons largement mises en évidence dans le paragraphe précédent.

L'autre serait de la comparer à celle d'un cercle. Dans un cercle, *"l'intensité du courbe"* est *uniformis*, égale, constante, et inversement proportionnelle au diamètre. Comme par ailleurs, l'*extensio*, c'est à dire la longueur de la circonférence, est directement proportionnelle au diamètre, la *"courbure totale"*, c'est à dire la *"quantité de courbe"* est pour tous les cercles la même.

ORESME ira jusqu'à essayer de comprendre la *"courbure"* des autres courbes, en les pensant générées par le mouvement d'un point sur un rayon qui tourne. Si le point reste fixe sur le rayon, il engendre un cercle. Alors la *"courbure"* est constante. Si le point se déplace d'un mouvement uniforme sur le rayon, il engendre une spirale d'ARCHIMEDE. ORESME attribue donc une *"courbure" "uniformiter difformis"* à la spirale. (Fig 9)

Fig9



Une perception immédiate donne en effet une impression de proportionnalité de la courbure par rapport à la distance parcourue depuis le point de départ A, mais cette proportionnalité n'est en réalité qu'asymptotique pour θ tendant vers l'infini, si θ et p désignent les coordonnées polaires du point C. En effet, $p=a\theta$, et la longueur depuis A est donnée par :

$$L = a\int_0^\theta \sqrt{\alpha^2+1}dx = \frac{a}{2}\left[\theta\sqrt{\theta^2+1} + \ln\left(\theta+\sqrt{\theta^2+1}\right)\right]$$

$$= \frac{a}{2}\left[\theta^2+\ln 2\theta + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\theta^2} + o\left(\frac{1}{\theta^2}\right)\right] \text{ pour } \theta \text{ grand}$$

et le rayon de courbure $R = a\dfrac{\left(\theta^2+1\right)^{3/2}}{\theta^2+2} = a\theta\left[1 - \dfrac{1}{2\theta^2} + o\left(\dfrac{1}{\theta^2}\right)\right]$

ce qui donne le rapport suivant :

$$\frac{L}{R} = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{\theta} + \frac{\ln 2\theta}{\theta} + o\left(\frac{1}{\theta}\right)\right] \text{ soit } \frac{L}{R} \approx \frac{1}{2}\theta \text{ pour } \theta \text{ grand.}$$

Il est difficile de dire qui a pour la première fois franchi le pas de définir la courbure d'une courbe en un point par la courbure d'un cercle qui s'en approche le mieux. Dans l'*Astronomiæ pars optica*, KEPLER fait une remarque intéressante, à propos de la détermination de l'image donné par un miroir parabolique : *"Une meilleure approche de la question nécessiterait de trouver le cercle qui mesure la courbure en un point β d'une conique; car ses lignes ont en des points différents, des courbures différentes."*[9]

Depuis ORESME, le contexte mathématique a beaucoup changé et la *Géométrie* de DESCARTES[10] a permis de traiter les courbes par l'algèbre et donc le calcul numérique. DESCARTES lui-même y développe une méthode de détermination de la tangente en un point d'une courbe, à l'aide d'un cercle coupant en ce point la courbe selon une intersection multiple. Le fait que cette intersection soit en général double seulement, et non triple, permet d'affirmer cependant que DESCARTES n'avait pas présent à l'esprit le cercle osculateur, ni donc qu'il se préoccupait de questions de courbure. Il faudra en quelque sorte que le rayon de courbure soit visualisé et rendu perceptible à l'intuition, pour que celle-ci, à son tour donne la "clef" du calcul. Ce que fera HUYGENS dans son *Horologium Oscillatorium* (publié en 1673 mais achevé dès 1665), en étudiant ce que l'on appelle les développées et développantes.

HUYGENS

"Si, explique-t-il, l'on enroule un fil flexible sur le côté concave d'une courbe, et si l'une des extrémités du fil reste en contact avec la courbe, pendant que l'autre se déplace sous une tension constante de la partie libre, alors cette seconde extrémité décrit une seconde courbe qui s'appelera DEVELOPPANTE (Descripta ex evolutione) " (voir 2, tome III, p140). HUYGENS démontre la proposition suivante : Toute tangente à la développée est perpendiculaire à la développante. Pour cela, il montre que, si la droite DC touche la développée en D et si au point C de la développante, on élève la perpendiculaire à DC, alors cette droite CE ne rencontre la développante en aucun point autre point qu'en C, et donc lui est tangente. (Figure 10)

Bien que le calcul différentiel ne soit pas encore inventé HUYGENS arrive, par des raisonnements géométriques équivalents à un tel calcul à mettre en évidence :

que l'on peut déterminer pour chaque courbe sa développée, et que celle-ci est nécessairement rectifiable.

que la développée est le lieu des points d'intersection de deux normales consécutives à la développante ; enfin, il donne un moyen de calculer la position de ce point d'intersection de deux normales en des points *"infiniment voisins"*. Il avait d'ailleurs déjà pu éprouver l'efficacité de ses méthodes en déterminant la développée d'une parabole et en montrant que la développée d'une cycloïde est une autre cycloïde.

L'élément remarquable de la méthode de HUYGENS c'est que tout en continuant à traiter des questions globales : développées, développantes, les démonstrations ne s'en font pas moins à un niveau local, par l'étude du point d'intersection de deux normales en des points *"infiniment voisins"*. Le calcul infinitésimal ou différentiel est *"dans l'air"* et tout est en place, apparemment, pour que chacun des deux grands de ce calcul : NEWTON et LEIBNIZ, essaye l'efficacité de sa nouvelle méthode sur ce problème *"type"* de géométrie différentielle. Chacun le fera à sa façon, et très probablement de manière indépendante.

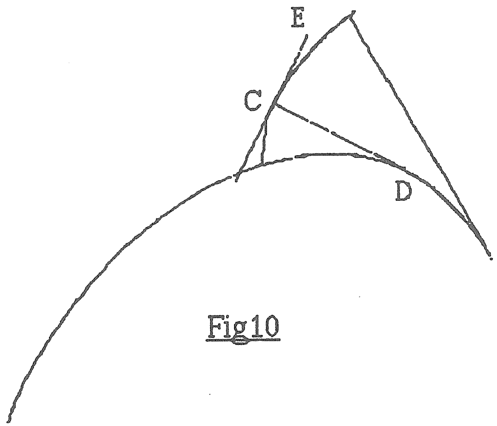


Fig10

L'émergence du concept d'osculation et la mise en place d'une théorie du contact.

NEWTON

Dès 1664-65, NEWTON avait noté un certains nombre de problèmes qu'il faudrait résoudre, entre autres :

Comparer la courbure des lignes à celle d'un cercle donné

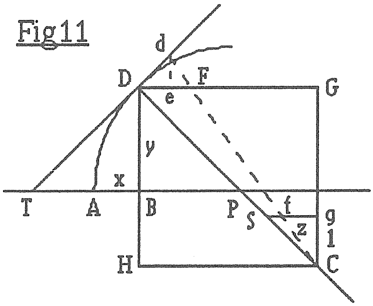
Déterminer les points où la courbure est maximale ou minimale[9]

Le 21 mai 1665, il avait noté une méthode de détermination de la courbure, qu'il reprend dans le $V^{ème}$ problème de la *Méthode des fluxions et* *des suites infinies* (1671) sous le titre[11] *"Trouver la quantité de courbure d'une courbe donnée à un point donné quelconque"* Le point de vue adopté est assez proche de celui de HUYGENS puisqu'il utilise le fait que le centre de courbure C en un point D *"est le concours de deux perpendiculaires qui chacune est infiniment près de DC."*

"Soit DT une tangente à un point quelconque D d'une courbe ; soit DC la perpendiculaire à ce point, et C le centre de courbure comme ci-devant ; soit AB l'abscisse sur laquelle DB est ordonnée à angles droits, et soit T le point où la perpendiculaire rencontre cette abscisse ; tirez DG parallèle à AB et CG perpendiculaire à la même AB, sur laquelle CG prenez Cg d'une longueur donnée quelconque ; à ce point g tirez la perpendiculaire gδ qui rencontre DC en δ.

On aura $\frac{Cg}{g\delta} = \frac{TB}{BD}$, *comme la fluxion de l'abscisse est à la fluxion de l'ordonnée. Imaginant donc que le point D parcourt sur la courbe un espace infiniment petit Dd, tirez de perpendiculaire à DG et Cd perpendiculaire à la courbe, Cd rencontrera DG en F et δg en f ; et De sera le moment de l'abscisse, de le moment de l'ordonnée et δf le moment contemporain de la ligne droite gδ;*

Fig11



Ainsi $DF = De + \frac{de \times de}{De}$, *ayant donc trouvé le rapport de ces moments, ou, ce qui est la même chose, de leur fluxions, vous aurez le rapport de CG à la ligne donnée Cg, qui est le même que celui de DF à δf, et par là vous déterminerez le point C."*

Si l'on pose AB=x, BD=y, Cg=1 et gδ=z, on a donc : $\frac{1}{z} = \frac{\overset{\circ}{x}}{\overset{\circ}{y}}$

soit le moment δf de z égal à $\overset{\circ}{z} \times 0$ *"c'est à dire égal au produit de la vitesse et d'une quantité infiniment petite 0" - alors*

$$De = \mathring{x}x0,\ \mathring{y}x0,\ DF = x0+\mathring{y}\mathring{y}\,\frac{0}{\mathring{x}}$$

$$\frac{Cg}{CG} = \frac{\delta f}{DF} = \frac{z0}{\mathring{x}0+\mathring{y}\mathring{y}\,\frac{0}{x}} \text{ d'où } CG = \frac{\mathring{x}\mathring{x} + \mathring{y}\mathring{y}}{\mathring{x}\mathring{y}}$$

Et comme il nous est libre de donner à la fluxion eq $\mathring{x}$ *de l'abscisse telle vitesse que nous voudrons, parce que nous pouvons lui rapporter tout le reste, faisons x=1, nous aurons y=z et*

$$CG = \frac{(1+zz)}{\mathring{z}} \text{ d'où } DG = \frac{z+z^3}{\mathring{z}} \text{ et } \frac{1+zz\sqrt{1+zz}}{\mathring{x}\mathring{z}} \text{ „}$$

C'est à dire la formule bien connue : $r = \dfrac{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}{y''}$

L'idée remarquable de tout ce calcul est la représentation du quotient des fluxions y/x par une longueur z, ce qui lui permet de faire intervenir la fluxion de ce quotient de fluxions!

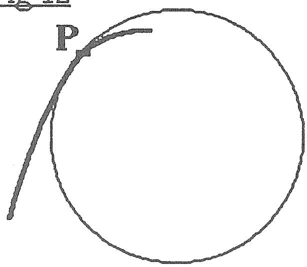
De fait, quoique achevée en 1671, la *Méthode des fluxions* ne sera publiée qu'en 1736. De sorte que LEIBNIZ pourra revendiquer la priorité pour sa propre méthode publiée en 1686 sous le titre *Méditatio nova de natura anguli contatus et osculi etc.*[12]

LEIBNIZ[3]

Ici, le point de vue est différent et l'on retrouve l'angle de contingence puisque LEIBNIZ définit le cercle osculateur comme celui qui forme avec la courbe le plus petit angle de contingence, celui qui se serre contre la courbe pour l'embrasser. Un tel cercle doit avoir avec la courbe deux contacts, c'est à dire une racine commune d'ordre quatre, mais on peut aussi envisager des osculations du second, troisième, etc... ordre, où ont lieu trois, quatre, etc... contacts. *"Pour obtenir alors un moyen de trouver le cercle osculateur par des équations possédant deux racines égales, c'est-à-dire en faisant coïncider deux intersections, et les points d'inflexion par l'égalité de trois racines, on obtient les cercles osculateurs comme toute autre courbe osculatrice, par l'égalité entre quatre racines, c'est-à-dire par la fusion de deux* *contacts en un."* Mais là, LEIBNIZ s'est trompé, peut-être parce-qu'il s'est reposé sur la seule intuition, au lieu d'appuyer sa réflexion par un calcul. Jacob BERNOULLI signale l'erreur de LEIBNIZ dans les *Acta Eruditorum* de 1662. Ce la reconnaît, sans réserve, quelques mois plus tard, et exprime sa reconnaissance. En 1694, Jacob BERNOULLI donne la formule $\frac{ds^3}{d^2ydx}$, montrant le lien étroit entre rayon de courbure et rectification.

APOLLONIUS et BORELLI

Fig 12



L'erreur de LEIBNIZ est surprenante à plusieurs points de vue. Si l'on pense mesurer la courbure en un point P à l'aide du rayon du cercle osculateur, pour les courbes étudiées à l'époque, cette courbure passera d'une valeur moindre, à une valeur supérieure, lorsque l'on parcourt cette courbe en passant par le point P, sauf pour des points particuliers correspondant à des sommets.

Donc, forcément, même une intuition élémentaire nous amène à penser que le cercle *traverse* la courbe, puisqu'il sera moins courbé (respectivement plus courbé) de part et d'autre du point P. (Figure 12)

Ce fait était connu à l'époque, depuis la découverte et l'édition des *coniques* d'APOLLONIUS par BORELLI en 1661[12], édition qui comprenait pour la première fois également les livres V, VI, VII, traduits en latin par une équipe dirigée par BORELLI qui, remarquable géomètre, fit accompagner le texte de commentaires, fort intéressants, comme on va pouvoir en juger bientôt.

En effet, le livre IV des *coniques* s'intéresse particulièrement au nombre de points d'intersection d'une conique et d'un cercle, ou d'une autre conique. APOLLONIUS y sait très nettement distinguer les coniques sécantes des coniques tangentes, les points d'intersection des points de tangence. Par exemple, il établit que deux coniques peuvent avoir :

Quatre points d'intersection, ou
Deux points d'intersection et un point de contact tangentiel, ou
Deux points de contact tangentiel. (cf [2] tome I p336)

Ou encore que deux paraboles ne peuvent avoir qu'un seul point de contact tangentiel.

Le livre V quant à lui, se situe très nettement au dessus du niveau des préoccupations de son temps, en s'occupant des droites de longueur maximales ou minimales qu'on peut mener d'un point à une conique. Il est ainsi amené à s'intéresser aux normales à une conique et à constater que certains points ont une situation particulière. Ces points ont cette propriété remarquable qu'on ne peut mener à partir d'eux qu'une seule perpendiculaire à la partie opposée de la conique. En fait, ces points correspondent aux *centres de courbure*, et on peut penser qu'APOLLONIUS a même pressenti que ces points se trouvent sur une ligne continue (la développée).

Quant aux commentaires de BORELLI donnons en un simple exemple, suffisamment parlant relativement au sujet qui nous intéresse, à savoir la position du cercle osculateur par rapport à la courbe, au voisinage d'un point donné :

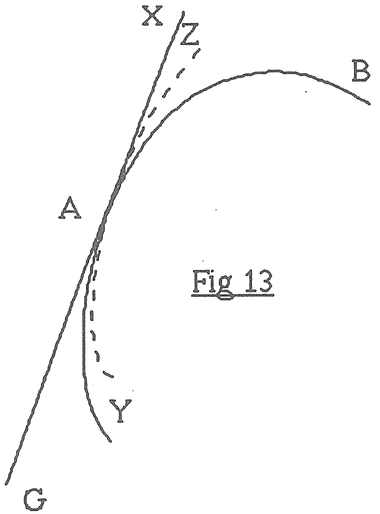


Fig 13

"Ainsi l'arc de cercle supérieur AZ tombe dans le lieu compris entre la tangente XA et la conique BA, alors que l'arc inférieur AY tombe non seulement en dessous de la tangente, mais aussi en dessous de la conique AG parce que la droite AX tombe en dehors de la conique AB, qu'elle coupe en A, comme il a été dit. Cela pourrait paraître étonnant à ceux qui pensent que l'angle de contingence, comme ils l'appelent, est un angle véritable". (Fig13)

Le XVIIIème siècle

C'est le 18ème siècle, bénéficiant de l'invention du calcul infinitésimal, qui va réaliser l'étape décisive. On mesurera mieux les progrès accomplis en mettant en parallèle deux études presque contemporaines, et pourtant radicalement opposées dans les méthodes : l'une tournée vers le passé se pliant aux contraintes de la géométrie des Anciens, l'autre résolument novatrice cherchant à exploiter à fond les ressources du nouveau calcul. La première date de 1740 et est l'oeuvre du jésuite BOSCOVIC, professeur de mathématique et de logique au Collège Romain, intitulée *"Des cercles osculateurs"*(*) (cf l'étude de J.DHOMBRES[6bis]). La seconde est extraite de l'*"Analysin infinitorum"* d'EULER, publiée comme l'on sait en 1748.

BOSCOVIC

Admirateur fervent des mathématiciens grecs, BOSCOVIC veut traiter le problème des cercles osculateurs par leur méthode qui lui paraît la seule rigoureuse.

Mais la difficulté est de taille, car comment traiter ce problème de nature fondamentalement locale, sans recours à un calcul sur des infiniment petits? La solution adoptée sera une *"géométrie de l'ultime"* déjà développée par NEWTON dans les *Principia* et appuyée sur un calcul sur des inégalités. Nous renvoyons à l'étude de J.DHOMBRES pour prendre la mesure de l'habileté avec laquelle le Jésuite développe ces méthodes, et la perspicacité avec laquelle il en tire de judicieuses conclusions. Il nous suffira ici de prendre connaissance de la définition - toute géométrique - que nous donne BOSCOVIC du cercle osculateur, et des propriétés qu'il en déduit. Voici le projet et la définition :

> *"Nous viserons a ce qu'il soit possible non seulement de contempler par l'esprit la nature des cercles osculateurs, mais à proprement parler de le faire en nous servant de nos yeux eux-mêmes. Nous essaierons d'y parvenir pour les sections coniques en définissant ces cercles osculateurs par une méthode entièrement euclidienne sans faire intervenir aucune notion d'infiniment petit. De là, en passant à d'autres courbes, nous ajouterons très brièvement ce que nous pensons du général et de quelle manière on peut s'en servir dans la méthode des infinitésimaux.*

(*) AMDG, de Circulis osculatoris, dissertatio habenda à P. P Societatis Jeseu in Collegio Romano, Anno MDCCXL

Nous appelerons cercle osculateur d'une courbe en un point donné celui qui a une tangente commune avec la courbe en ce point de telle sorte que pour n'importe quel cercle plus petit ayant la même tangente et situé du même bord, l'arc de chaque côté du point de contact de la courbe soit à l'intérieur ; mais soit à l'extérieur pour n'importe quel cercle plus grand."

Et voici une partie de la conclusion

"De là découlent de nombreuses propriétés assez merveilleuses et fort dignes d'être notées. Se trompent d'abord ceux, s'il en existe, qui croient qu'un arc quelconque du cercle osculateur, si petit qu'il soit coïncide vraiment avec un arc de la courbe dont la nature et l'équation sont différentes. Il concourt avec cette courbe en un point unique et, du côté où la courbure croît, l'arc de cercle se glisse entre la courbe et la tangente ; du côté opposé, celui où la courbure décroît, l'arc de courbe se glisse entre le cercle et la tangente. En l'occurrence, alors que tous les autres cercles supérieurs où inférieurs la rencontrent, il arrive à l'arc du cercle osculateur qui coupe la courbe quelque chose de semblable à ce qui arrive à une droite en même temps tangente et sécante à une courbe au point d'inflexion, quoique n'importe quel cercle ayant son centre sur la normale rencontre seulement la courbe de n'importe quel des deux côtés.

*Il se fait que ces deux arcs, (celui de la courbe et celui du cercle osculateur), forment cependant un angle , de la même manière qu'entre un arc circulaire et la droite tangente aucune autre droite ne peut être menée (selon la proposition 16 des **Eléments** au livre 3). De même, entre un arc de courbe et un arc du cercle osculateur, aucun autre cercle ne peut passer."*

Comme on le voit sur ces extraits, la perception qu'a BOSCOVIC du cercle osculateur est parfaitement claire et précise, qui plus est, parfaitement démontrée. Pourquoi alors le considérons nous comme tourné vers le passé? C'est qu'on voit mal comment son raisonnement pourrait se généraliser à d'autres courbes que les coniques et que malgré l'habileté déployée par notre géomètre, la méthode n'en est pas moins lourde, nécessitant constamment le recours à une figure. DHOMBRES le qualifie de mathématicien surprenant

"Manipulant avec soin des relations d'inégalité, réalisant des encadrement exacts pour des rapports, et donc prêt à mettre en place

des procédures rigoureuses de passage à la limite, et d'autre part mais dans le même texte il refuse l'écriture algébrique cartésienne de l'équation des courbes, il distingue des cas de figure comme pour éviter l'emploi de quantités négatives et conduit son raisonnement comme s'il avait le nez collé à la figure."

ajoutant : *"Le développement des mathématiques passait ailleurs"*
Il passait par le calcul différentiel pour deux raisons au moins :

. parce-que c'est l'outil vraiment adapté à l'étude des situations locales.

. parce que la généralité, la souplesse et l'efficacité du calcul algébrique permettent l'étude pour une courbe quelconque, dès que l'on connaît son équation. C'est ce que mettra en place EULER.

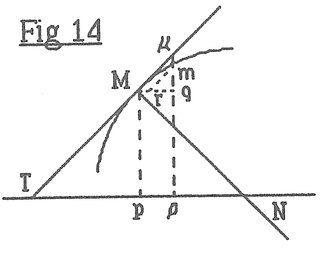
EULER : chap 14 de *"l'Analyse infinitésimale"*

Contrairement à BOSCOVIC, EULER n'éprouve nul besoin de définir le cercle osculateur comme objet géométrique puisqu'il ne va pas raisonner sur lui, mais seulement calculer un ordre de contact, c'est à dire la nullité d'un certain terme algébrique.

"Nous chercherons - dira-t-il - *d'abord la ligne droite qui touche la courbe et ensuite la courbe plus simple qui s'accorde beaucoup mieux avec la proposée, et qui au lieu de la toucher simplement, l'embrasse ou la baise pour ainsi dire. Ce contact intime de ces sortes de courbes s'appelle ordinairement OSCULATION."*

Plaçant l'origine au point M de la courbe où l'on cherche une courbe osculatrice, l'équation de la courbe proposée pourra s'écrire en coordonnées rectangulaires : $0=At+Bu+Ct^2+Dtu+Eu^2+Ft^3+Gt^2u+$ etc... où $t=MQ$ et $qm=u$ (voir figure 14)

Fig 14



"Comme nous supposons ces nouvelles coordonnées t et u très petites, les termes suivants seront presque infiniment plus petit que ceux qui les precèdent, et pourront pour cette raison être négligés à l'égard de ceux-ci. Ainsi, à moins que les coefficients A et B ne manquent à la fois, si l'on rejette tous les termes qui suivent, l'équation $At+Bu=0$ indiquera la ligne droite $M\mu$ qui touche la courbe au point M, et dont la direction en cet

endroit se confond avec celle de lacourbe."

EULER prend alors comme nouveau repère la normale MN et la tangente MT, de sorte que le point m aura pour coordonnées rectangulaires r=Mr et s=rm, avec les relations de changement de coordonnées :

$$t = \frac{-Ar+Bs}{\sqrt{A^2+B^2}},\ u = \frac{-As-Br}{\sqrt{A^2+B^2}},\ u = \frac{-At-Bu}{\sqrt{A^2+B^2}},\ s = \frac{Bt-Au}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

"Il suit de là qu'à cause de l'équation :
$-At-Bu=Ct^2+Dtu+Eu^2+Ft^3+Gt^2u+etc...$, r sera infiniment plus petite que s, car s est déterminée par t et u, et r l'est par les carrés ou les puissances supérieures des mêmes lettres t et u."

"Nous connaîtrons donc plus intimement la nature de la courbe Mm, si nous faisons entrer aussi dans le calcul les termes $Ct^2+Dtu+Eu^2$, en négligeant les suivants ; nous aurons entre t et u cette équation : $-At-Bu=Ct^2+Dtu+Eu^2$; si nous y substituons, au lieu de t et de u, leur valeurs trouvées ci-dessus, nous aurons :

$$\sqrt{A^2+B^2} = \frac{(A^2C+ABD+B^2E)rr}{A^2+B^2} + \frac{(A^2D-B^2D-2ABC+2ABE)rs}{A^2+B^2} + \frac{(A^2E-ABD+B^2C)ss}{A^2+B^2}$$

mais comme r est infiniment plus petite que s, les termes rr et rs disparaîtront devant le terme ss et on aura $ss = \frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E-ABD+B^2C}\, r$, équation qui exprime la nature de la courbe osculatrice au point M.

Le petit arc Mm de la courbe se confondra donc avec le sommet d'une parabole décrite sur l'axe MN dont le paramètre est $\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{A^2E-ABD+B^2C}$. Ainsi la courbure de la courbe proposée au point M sera la même que celle de la parabole à son sommet ; mais comme il n'y a point de courbure dont on ait une idée plus distincte que celle du cercle, parce-qu'elle est partout la même, et qu'elle est d'ailleurs d'autant plus grande que le rayon est plus petit ; il sera plus commode de déterminer la courbure des courbes par celle d'un cercle qu'on appelle ordinairement cercle osculateur. C'est pourquoi il faut trouver le cercle *dont la courbure s'accorde avec celle de la parabole proposée à son sommet, afin de pouvoir substituer ce cercle à la parabole osculatrice."*

Il suffit alors à EULER d'appliquer le calcul précédent au cercle de rayon a d'équation $y^2=2ax-x^2$, dont il cherchera la parabole osculatrice en un point M quelconque et dont il trouvera l'équation suivante : $s^2=2ar$. *"Donc réciproquement, la courbe embrassée par le sommet d'une parabole ss=br, le sera également par le cercle, dont le rayon égale 1/2b."* Et de conclure que le rayon osculateur en un point quelconque d'une courbe d'équation $o=Ct^2+Dtu+Eu^2+Ft^3+Gt^2u+etc...$ sera donné par $\frac{(A^2+B^2)\sqrt{A^2+B^2}}{2(A^2E-ABD+B^2C)}$.

Le traitement original que fait EULER de cette question de l'osculation, comparé aux intuitions d'un WALLIS et à la puissance inventive d'un NEWTON, montre de façon exemplaire ce que peut apporter la méthode analytique à une pensée éprise de certitude, comme celle d'ARBOGAST. Non seulement le calcul permet d'éviter et de corriger les erreurs d'une intuition trop rapide (cf LEIBNIZ). Il donne aussi un contenu précis (numérique) à des concepts qui sans lui, resteraient des idées vagues, telle que l'angle de contingence. Au contraire d'une explication purement qualitative, il emporte cette *"conviction parfaite"* dont parle ARBOGAST dans l'introduction à son *Essai sur les nouveaux principes...*[14] Il lui suffira d'éliminer encore les infiniment petits dont se sert EULER, pour que la méthode analytique devienne LA méthode rigoureuse de démonstration mathématique.

L'OSCULATION CHEZ ARBOGAST

(§45 à 63 de l'*"Essai sur de nouveaux principes"*)

Reprenant en effet une idée de LAGRANGE pour fonder le calcul différentiel indépendamment de tout recours, tant aux infiniment petits qu'aux limites, ARBOGAST envoie en 1789 à l'Académlie des Sciences de Paris un mémoire inédit sous le titre :

"Essai sur de nouveaux principes de calcul différentiel et de calcul intégral, indépendans de la théorie des infiniment petits et de celle des limites"

Ces principes reposent sur un usage systématique du développement local des fonctions sous la forme :

$$y+\Delta y=y+\frac{dy}{dx}\Delta x+\frac{1}{1.2}\frac{d^2y}{dx^2}(\Delta x)^2+\frac{1}{1.2.3}\frac{d^3y}{dx^3}(\Delta x)^3+\ldots$$

Ce qui va permettre à ARBOGAST de traiter la question de l'osculation d'une façon à la fois plus générale et originale :

Générale, car en reprenant et en développant la méthode analytique d'EULER, il ne sera plus limité par aucune considération géométrique particulière, le raisonnement étant uniquement porté par un calcul sur les valeurs numériques des coefficients de la série.

Originale, car l'utilisation d'un tel développement lui permettra d'étudier la relation locale entre deux courbes quelconques, et donc de rassembler en une seule étude, la recherche des tangentes, la recherche du cercle osculateur, ou toute autre relation entre deux courbes données.

Pour ce faire, ARBOGAST utilisera deux paramétrages distincts pour les deux courbes étudiées, ayant bien conscience que le problème ne concerne pas les propriétés d'*une* seule courbe isolée, mais les relations locales entre *deux* courbes. Il y a donc deux systèmes de coordonnées : (x,y) pour un point de la première ; V=0 ; (t,u) pour la seconde U=0.

"Supposons actuellement (cf figure 15) que nous ayons deux courbes quelconques HMB, DMC dont on connaisse les équations V=0, U=0 ; supposons de plus que les coordonnées de la première courbe soient AP=x, PM=y, celles de la seconde étant t et u, les abscisses étant supposées à la même origine A. L'équation V=0 sera donnée en x et y, et constantes, et l'équation U=0 en t, u et constantes.

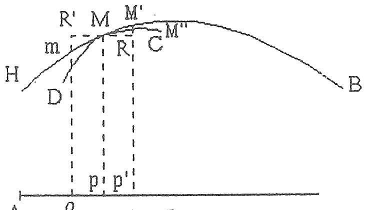


Fig 15

La première courbe étant tracée et les constantes qui entrent dans son équation ayant des valeurs déterminées, on demande quelles valeurs il faut donner aux constantes qui entrent dans la seconde courbe DMC pour que celle-ci touche la première courbe au point M donné et qu'elle l'y touche d'une manière plus ou moins intime ; car c'est à ce problème général qu'on peut ramener tous ceux sur les courbes qui sont du ressort du calcul *différentiel. Si comme il est permis de la faire, on suppose $\Delta t=\Delta x=PP'$, il est évident qu'on aura pour les deux courbes :*

$$(m)\quad y' = P'M' = y + \frac{dy}{dx}\Delta x + \frac{d^2y}{1.2dx^2}\Delta x^2 + \frac{d^3y}{1.2.3dx^3}\Delta x^3 + ...etc...$$

$$(n)\quad u' = P'M'' = u + \frac{du}{dt}\Delta t + \frac{d^2u}{1.2dt^2}\Delta t^2 + \frac{d^3u}{1.2.3dt^3}\Delta t^3 + ...etc...$$

où $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ *etc... sont des fonctions de x et y et* $\frac{du}{dt}, \frac{d^2u}{dt^2}$ *etc... des fonctions de u et t. (...)*
et puisque les deux courbes doivent passer par le même point donné M, il est clair que pour ce point on a : t=x et u=y, x et y étant regardées comme des constantes tant qu'il s'agit du même point (...)"

En pratique, la courbe DMC correspondra à une famille de courbes (droites, ou cercle, ou paraboles etc...) dépendant d'un certain nombre de paramètres que l'on déterminera selon le degré du contact souhaité ou possible. Leur équation peut être donnée sous forme implicite, il suffira de différencier en considérant y comme fonction de x.

"Cela posé, connaissant l'espèce de la courbe DMC, on examinera combien son équation renferme de constantes indépendantes entre elles, et si l'on demande ensuite quelle est de toutes les courbes de même nature, celle dont le cours s'approche le plus du cours de la courbe donnée HMB, il suffit de déterminer les n constantes de U=0 (la nature de la courbe DMC étant exprimée par l'équation U=0 entre t, u et n constantes), de manière que dans les séries (m) et (n) les n premiers termes deviennent égaux entre eux, x et y étant regardées elles-même comme des constantes tant qu'elles appartiennent au même point donné M, par lequel la courbe DMC doit passer."

"Mais on ne détermine pas toujours toutes les n constantes de U=0 (...)

1) En égalant seulement les deux premiers termes y et u des séries, c'est-à-dire en ne déterminant qu'une seule constante, nous avons vu précédemment que l'on détermine la courbe DMC à passer par le point M de la courbe HMB.

2) En égalant les deux premiers termes pour déterminer deux constantes, c'est à dire en faisant y=u et dy/dx=du/dt la courbe DMC deviendra tangente à la courbe HMB au point M. (suit une démonstration de ce dernier résultat faisant intervenir le signe de Δx.) *Nous appelerons désormais HMB la courbe touchée, et DMC la courbe touchante.*

3) Si pour déterminer trois constantes on égalait les trois premiers termes des séries en faisant $y=u$, $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2u}{dt^2}$ *; en vertu des deux premières de ces équations, la courbe DMC touchera HMB au point M, et en vertu de la troisième équation, elle la touchera d'une manière plus intime, le cours de la touchante s'écartant moins proprement de celui de la touchée. Ce contact est appelé contact du second ordre, parce qu'il dépend des secondes différentielles, tandis que l'autre espèce de contact du n° précédent qui ne dépend que de* $\frac{dy}{dx}$ *et* $\frac{du}{dt}$ *se nomme contact simple, ou du premier ordre.*

4) En faisant, pour déterminer quatre constantes, $y=u$, $\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dt}$, $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2u}{dt^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d^3u}{dt^3}$ *les deux courbes auront un contact du troisième ordre. En général, pour que la touchante ait avec la touchée un contact de l'ordre n-1, il faut égaler entre eux les n premiers termes des séries (m) et (n)."*

Puis ARBOGAST donne les méthode pratiques, dans le cas où les fonctions y et u sont implicites dans les équations V=0 et U=0, et il en fait l'application aux problèmes classiques sur les tangentes, les cercles osculateurs.

Exemple 1 : La touchante est une droite

L'équation en u est alors de la forme u-at-b=0
La droite passe par M donc y-ax-b=0
En différentiant : dy-adx=0
d'où $a = \frac{dy}{dx}$, $b = y - x \cdot \frac{dy}{dx}$

"D'où il vient l'équation de la tangente :

$$u-y = \frac{dy}{dx} \cdot (t-x)$$

x, y, $\frac{dy}{dx}$ étant regardées comme des constantes tant qu'il s'agit du même point M.
Si l'on fait u=0, alors -t+x est ce que l'on nomme la sous tangente, c'est-à-dire la partie de l'axe des abscisses comprise entre l'ordonnée et la tangente, et nous avons :
$soutang = -t+x = y.\frac{dx}{dy}$ ce qui est la formule ordinaire."

Exemple 2 : La courbe touchante est un cercle de centre O

L'équation du cercle est de la forme $(u-b)^2=r^2-(t-a)^2$
S'il passe par M, on doit avoir $(y-b)^2=r^2-(x-a)^2$ et
$(y-b)dy=-(x-a)dx$
$(y-b)d^2y+dy^2 = -dx^2$
desquelles on tire

$$a = x - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \times \frac{dy}{dx} \; ; \quad b = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\text{et } r = \frac{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Ces dernières valeurs permettent également de trouver l'équation de la développée lorsque l'on connaît celle de la développante, puisque la première est le lieu des centres des cercles osculateurs. Il suffit donc d'éliminer x et y entre l'équation V=0 de la développante et les relations :

$$t = x - \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \times \frac{dy}{dx}\ ;\ b = y + \frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Plus généralement, *"si l'on demandait de toutes les lignes du second ordre, celle qui touche le plus intimement une courbe proposée, on trouverait que l'équation générale de cette courbe renfermant cinq constantes, il pourrait y avoir un contact du quatrième ordre."*

Enfin, ARBOGAST traite les mêmes questions dans le cas de coordonnées polaires.

Comme on le voit, cette théorie de l'osculation avec ses applications très simples et très générales représente l'aspect le plus solide et le plus crédible de la méthode développée dans l'*essai sur de nouveaux principes...* Et c'est à juste titre, nous semble-t-il, que LACROIX rends hommage à son auteur dans son *Traité du calcul différentiel et intégral* lorsque il écrit *"ARBOGAST présenta le premier sous ce point de vue l'application du Calcul Différentiel à la théorie des courbes, et M. LAGRANGE y fut conduit aussi par sa manière d'envisager ce calcul."*

On ne peut douter que le chapitre deuxième, de la deuxième partie de la *Théorie des fonctions analytiques*[16] de LAGRANGE ne soit fortement inspiré du mémoire d'ARBOGAST, seules les notations étant différentes, et peut-être une certaine clarté dans la rédaction, qui manque quelquefois à ce dernier. C'est pourquoi nous ne nous y attarderons pas et nous contenterons d'en donner un exemple.

"Prenons pour la courbe du contact un cercle dont l'équation la plus générale est

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 - c^2 = 0,$$

elle ne sera susceptible que d'un contact de second ordre, puisqu'il n'y a que trois éléments a, b, c. On déterminera donc ces éléments par les trois équations :

$$(x\text{-}a)^2 + (y\text{-}b)^2 - c^2 = 0,$$
$$x - a + (y\text{-}b)y'' + y'^2 = 0,$$
$$1 + (y\text{-}b)y'' + y'^2 = 0,$$

dont la seconde et la troisième sont les équations prime et seconde de la première. De ces équations on tire tout de suite

$$y\text{-}b = -\frac{1+y'^2}{y''},\quad x\text{-}a = \frac{(1+y'^2)y'}{y''},\quad c = \frac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{y''}$$

comme plus haut."

La géométrie différentielle est ainsi en place, sous ses deux aspects : métrique et topologique, même si une perception séparée des deux n'est pas encore évidente. Les développements ultérieurs porteront surtout sur cette distinction et sur l'étude des courbes en dimension supérieure ; mais ceci est une autre histoire, liée également à l'étude des surfaces. On trouvera en note de[9] des indications et des références bibliographiques sur ces deux questions.

Mais notre étude ne serait pas complète sans la mention d'un travail récent de Detlef LAUGWITZ sur *la mesure de l'angle de contingence* traité selon des méthodes s'apparentant à l'analyse non standard [16] et [17] mais que nous n'avons pas besoin d'expliciter, si nous nous limitons aux idées essentielles.

Les germes de courbe et la mesure de l'angle de contingence

Germe de courbe au point P_0

Soit $K_1(P_0)$ l'ensemble des applications continues d'un intervalle $0 \leq r < r_0$ (r_0 peut être indépendant de l'application) dans le plan : $r \dashrightarrow P(r)$ avec $P(0)=P_0$ et $|P(r)-P_0|=r$

Deux éléments P et P' de $K_1(P_0)$ seront dits équivalents s'il existe un réel $r_1>0$ tel que $P(r)=P'(r)$ pour $0 \leq r < r_1$. Les classes d'équivalence en seront appelées : *germe de courbe en P0* que nous noterons [P]=[P'] ou encore

$[P(r)]=[P'(r)]$. L'ensemble des germes de courbe sera noté $K(P_0)$. Remarquons que cette idée de germe de courbe pourrait assez précisément correspondre à l'intuition de WALLIS lorsqu'il parle de grandeurs en naissance ou en commencement.

Définition d'un angle curviligne

Soient $([P],[\overline{P}])$ et $([P'],[\overline{P'}])$ deux couples de germes de courbes de $K(P_0)$ (respectivement $K'(P'_0)$). Ces couples seront dits équivalents très exactement lorsqu'il sont congruents, c'est à dire, s'il existe : 1) Des représentants $P \varepsilon [P]$ etc...; 2) Un réel $r_0>0$; 3) Un déplacement B du plan tel que pour $0\leq r<r_1$ on ait $B([P])=[P']$ et $B([\overline{P}])=[\overline{P}]$. Les classes d'équivalence définissent alors les angles (curvilignes) qui seront notés :

$$\alpha = \sphericalangle([P],[\overline{P}]),$$ et leur ensemble W.

Dans la pratique, on peut donc se ramener aux germes de courbe définis tous en un même point pris pour origine. Un germe de courbe sera dite rectiligne s'il est représenté par une demi droite, et un angle rectiligne est défini par un couple de germes rectilignes. Passons sur l'accolement d'angles curvilignes pour aller directement à leur mesure.

Mesure des angles curvilignes

Soit $R_{2\pi}$ l'ensemble des réels congrus modulo 2π et $\Phi(r)$, $\overline{\Phi}(r)$ deux fonctions continues de $]0,r_0[$ dans $R_{2\pi}$. Ces deux fonctions seront dites équivalentes s'il existe un $\varepsilon>0$ tel que $\Phi(r) = \overline{\Phi}(r)$ pour $0<r<\varepsilon$. Les classes d'équivalence en seront alors des germes de fonctions notés $[\Phi]$. Ces germes de fonction définissent un groupe additif F où l'addition est induite par l'addition des images. Alors chaque germe de courbe a une représentation polaire $(r,[f])$ avec $[f]=[\Phi(r)]$ où $[\Phi(r)]$ est un germe de fonction. Nous définissons donc la mesure de l'angle curviligne $\alpha= \sphericalangle([P],[P'])$ par $m(\alpha)=[\Phi'(r)-\Phi(r)]$ qui est un germe de fonction dont on peut montrer facilement qu'il est <u>indépendant</u> des représentants choisis pour les germes de courbe.

L'angle de contingence et sa mesure

L'angle $\alpha = \sphericalangle ([P2],[P1])$ sera un angle de contingence si et seulement si la limite lorsque r tend vers 0 de $\Phi_2(r)-\Phi_1(r)$ égale 0, où Φ_1 et Φ_2 sont les germes de fonction associés respectivement à $[P_1]$ et $[P_2]$ par leur représentation polaire.

Exemple :

Mesure de l'angle de contingence entre un cercle et sa tangente en un point O.

Ici, si le cercle a pour rayon R, $f_2(r)=\arcsin\left(\frac{r}{2R}\right)$, pour le cercle et $f_1(r)=0$ pour la tangente et donc $\alpha = \sphericalangle ([\Phi 1],[\Phi 2])$, $m(\alpha)=\arcsin\left(\frac{r}{2R}\right)$.

Plus généralement, l'angle de contingence entre un germe de courbe (deux fois continûment différentiable) et la tangente en un point O peut être mesurée par $\left[\frac{xr}{2} + r^2(\ldots)\right]$ où x est la courbure en 0.

On peut envisager d'autres fonctions pour Φ, par exemple $F(r) = \frac{2}{r^2}\int_0^r f(t)dt$ qui permet de mesurer l'aire limitée par les deux germes de courbes.
On assiste ainsi à un extraordinaire retour au point de départ où l'on tentait de comprendre le courbe par la grandeur *"surface"* limitée par deux courbes.

BIBLIOGRAPHIE

1. **WEIL S.** *Oeuvres complètes* Tome 1, Premiers écrits philosophiques, (Note 243 p421) GALLIMARD 1988.
2. **CANTOR M.** *Vorlesungen über Geschichte des Mathematik* II p77 B.G TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT-STUTTGART 1965.
3. **LEIBNIZ** *Méditatio Nova...* Traduction française de Marc PARMENTIER dans *LEIBNIZ : naissance du calcul différentiel* (p118 à 125) VRIN Paris 1989.
4. **L'HOSPITAL** *Analyse des infiniment petits* Paris 1797 réédition ACL-éditions 1988 PARIS.
5. **EUCLIDE** traduction Peyrard, réédition Blanchard 1966.
6. **DHOMBRES**, *Nombre, mesure et continu* p30 CEDIC-NATHAN 1978.

6bis. **DHOMBRES** *Boskovic aux prises avec le calcul différentiel : art nouveau des inégalités et pratiques anciennes.*

7. **CLAVIUS** *Euclidis elementa* Köln (edIII) 1591 p133/145
8. **WALLIS** *Opera II* 631-644 cf [2] tome II p26
9. **GERICKE** *Zur Vorgeschichte und Entwicklung des Krümmungsbegriffs-Archiv for history of exact science* 1982 Vol 27, (p1 à 21)
10. **DESCARTES** : *La géométrie* 1637, Dover publications, 1954, Réédition avec traduction anglaise.
11. **NEWTON** *La méthode des fluxions et des suites infinies* (trad BUFFON) 1740 - rééd. Blanchard 1966.
12. **ITARD J.** *Essais d'histoire des mathématiques* réunis et introduits par R. RASCHED Blanchard Paris 1984.
13. **EULER** : *Introductio in Analysin Infinitorum* Tome II 1748, traduit du latin en français chez BARROIS PARIS réédition ACL-éditions 1988 PARIS.
14. **ARBOGAST** *Sur de nouveaux principes...* manuscrit inédit 1789 Bibliotheca LAURENZIANA FLORENCE Cod Laur. ASHB app 1840.
15. **LAGRANGE** *Théorie des fonctions analytiques 1797.*
16. **LAUGWITZ** : *Die Messung von Kontingenzwinkeln* Journal für reine und angewandte Mathematik Band 245 (1970).
17. **LAUGWITZ** *A new theory of contact angles* simposia Mathematica vol XI 1973.
18. **HEATH Th.** *"The thirteen Books of EUCLIDS'ELEMENTS DOVER Publications 1956.*