LA « GEOMETRIE CALCULANTE » DE PASCAL, DANS LE TRAITE DES SINUS DU QUART DE CERCLE ET DANS LE TRAITE DES TRILIGNES RECTANGLES

Claude MERKER
IREM de Besançon

Le "Traité des sinus du quart de cercle" ainsi que le "Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets" ont été écrits par Pascal en 1658. Ils font partie d'un ensemble de sept petits traités regroupés dans les oeuvres complètes de Pascal, publiées aux éditions de la Pléiade, sous le nom de "La roulette et traités connexes". Tous tendent au même but : résoudre ensemble, c'est à dire par une méthode unifiée, les problèmes de la roulette : trouver la longueur, l'aire, le volume et la surface des deux solides de révolution engendrés, ainsi que les centres de gravité de tout cela ; soient 18 problèmes en tout que Pascal se laissa persuader de mettre au concours, car la logique de ses démonstrations mathématiques pourrait donner du poids à ses arguments contre l'incroyance.

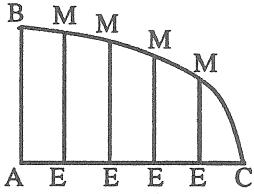
Ces sept traités ont un intérêt qui va bien au delà de l'anecdotique ; en effet comme le fait remarquer Emile Picard, Pascal y crée d'une manière entièrement géométrique des techniques trés avancées comme l'intégrale curviligne, l'intégrale double et triple ; nous ajouterons que bien des résultats s'apparentent à des changements de variable, et que le traité des trilignes se lit, sans audace interprétative, comme un traité systématique d'intégration par parties.

Tous ont été écrits avant que Newton et Leibniz ne mettent au coeur de leurs travaux sur le calcul différentiel et intégral le lien entre quadrature et dérivée, et ils apparaissent comme un étrange chant du cygne annonciateur de tout ce que le nouveau calcul permettra d'explorer quelques années plus tard.

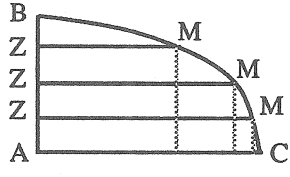
LES SOMMES CHEZ PASCAL

Pour résoudre les problèmes de roulette, ensemble, Pascal définit avec grand soin un grand nombre de sommes. Sur les 18 problèmes à résoudre, 12 sont des problèmes de position de centre de gravité. Le concept utilisé par Pascal à cet effet est celui de "somme triangulaire".

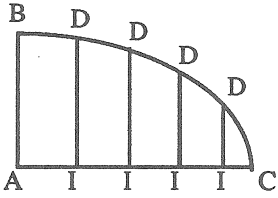
La figure de base est un triligne rectangle, sorte de triangle rectangle à hypothénuse courbe dont les trois côtés seront tour à tour *"divisés en un nombre indéfini de parties égales"*.



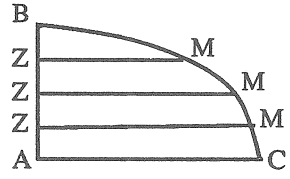
Les ordonnées à la base, ME "naissent de divisions égales sur la base" (les EE)



Les ordonnées à l'axe, MZ "naissent de divisions égales sur l'axe" (les ZZ)



Les sinus sur la base, DI naissent de divisions égales sur l'arc" (les DD)



Les arcs BM "naissent de divisions égales sur l'axe" (les ZZ)

Les *"ordonnées à l'axe"* sont nos actuelles abscisses, les *"ordonnées à la base"*, nos ordonnées ; pas tout à fait cependant...Telles les marguerites structuralistes, les ordonnées et les sinus pascaliens n'existent que dans leur relation avec les autres, parler d'*une* ordonnée n'a pas de sens.

Pascal définit de la même façon des sinus sur l'axe.

Pour un triligne non-triangle, les sinus ne sont jamais des ordonnées.

Bien qu'il ne s'explique jamais à ce propos, Pascal tient beaucoup aux «divisions égales» ; cela l'oblige à introduire de nouvelles lignes : les

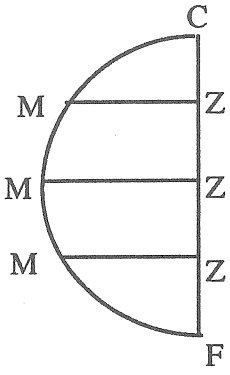
"*contre-ordonnées*" qui naissent du rappel des ordonnées sur l'autre axe ; sur le deuxième dessin sont dessinées en pointillé les contre-ordonnées à la base.

Si le triligne est un quart de cercle et dans ce cas seulement, les DI sont nos actuels sinus.

Sommes simples, quadrature de la roulette

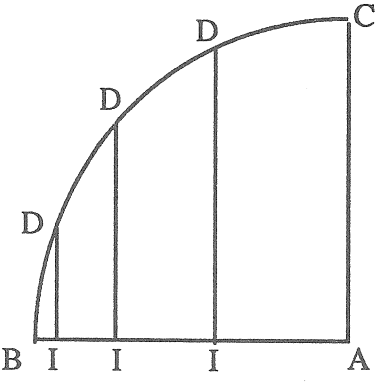
Dans l'avertissement du premier Traité, Pascal nous annonce qu'il usera du langage des indivisibles :

> *J'ai voulu faire cet avertissement pour montrer que tout ce qui est démontré par les véritables règles des indivisibles se démontrera aussi à la rigueur et à la manière des anciens ; et qu'ainsi l'une de ces méthodes ne diffère de l'autre qu'en la manière de parler : ce qui ne peut blesser les personnes raisonnables quand on les a une fois averties de ce qu'on entend par là.*



> *Et c'est pourquoi je ne ferai aucune difficulté dans la suite d'user de ce langage des indivisibles , la somme des lignes ou la somme des plans ; et ainsi quand je considérerai par exemple le diamètre d'un demi-cercle divisé en un nombre indéfini de parties égales aux points Z, d'où soient menées les ordonnées ZM, je ne ferai aucune difficulté d'user de cette expression, la somme des ordonnées, qui semble n'être pas géo-métrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indivisibles, et qui s'imaginent que c'est pécher contre la géométrie que d'exprimer un plan par un nombre indéfini de lignes ; ce qui ne vient que de leur manque d'intelligence, puisqu'on n'entend autre chose par là sinon la somme d'un nombre indéfini de rectangles fait de chaque ordonnée avec chacune des petites portions égales du diamètre, dont la somme est certainement un plan, qui ne diffère de l'espace du demi-cercle que d'une quantité moindre qu'aucune donnée(...)*

Ainsi en la figure où l'arc de 90 degrés est divisé divisé en un nombre indéfini d'arcs égaux aux points D , d'où sont menés les sinus droits DE , si on dit simplement ainsi, la somme des sinus DE, on entendra par là la somme

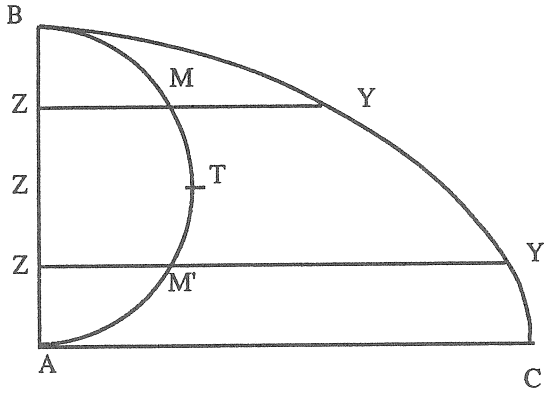


des rectangles compris de chaque sinus DE et de chacun des petits arcs égaux DD (considérés comme étendus en ligne droite) parce que ces sinus sont nés de divisions égales de l'arc.

Cet avertissement nous signale d'une part le caractère nominaliste des indivisibles[1], et d'autre part nous indique le code : "somme des ordonnées à l'axe" veut dire Σ MZ ZZ , "somme des sinus sur la base" signifie Σ DI DD etc. ME est une ordonnée, et DI qui ne s'en distingue en rien est un sinus ! Les mots ordonnées et sinus se rapportent aux divisions égales qui leur ont donné naissance ; tout se passe comme si l'égalité des division desquelles "naissent les sinus et les ordonnées" n'étaient là que pour indiquer par rapport à quoi il faut intégrer, on intègre par rapport à des divisions égales. Et là on peut se poser la question : Pascal pensait il qu'il est nécessaire que les divisions soient égales pour que l'aire soit Σ ME EE ?

---

1 Le mot «indivisible» n'apparait ici qu'à l'intérieur d'une expression, doctrine des indivisibles, règle des indivisibles, méthode des indivisibles ; il n'est qu'une manière de parler de rectangles dont la largeur est appelée à tendre vers zéro. On ne peut faire aux indivisibles de Pascal le reproche d'hétérogéneité.



Si maintenant le triligne est la demi-roulette, la somme des arcs BM permet la quadrature de manière immédiate[2].
En effet, le roulement sans glissement dit :
BM = MY
et donc l'aire
$\mathcal{A} = \Sigma$ ZY ZZ est
Σ BM ZZ + Σ MZ ZZ

Mais pour deux points M et M' symétriques par rapport à T, il vient :
Σ (BM + BM')ZZ = 2 Σ BT ZZ = BT Σ ZZ = π R/2 x 2R = π R^2.
En ajoutant Σ MZ ZZ, (qui est l'aire du demi-cercle) à π R^2 , on trouve que l'aire de la roulette est trois fois celle de son demi-cercle.

Aucune quadrature de la roulette n'est plus courte[3] ; écrire Σ BM ZZ est très audacieux ; les prédécesseurs de Pascal ramènent tous le «courbe» au «droit» par division de l'arc, tandis qu'ici BM n'est pas subdivisé en arcs infinitésimaux, il est gardé en tant qu'arc fini.

Sommes triangulaires

Une réécriture de la loi du levier d'Archimède permet à Pascal de poser les problèmes de la roulette sous une forme unifiée. Comme il s'agit d'une articulation très importante pour la suite, nous allons citer de larges passages du premier Traité (Lettre à M. de Carcavi), où l'auteur explique le cheminement de ses découvertes, contrairement aux anciens, dit-il.

---

2 Pascal ne fait jamais les calculs, il donne les méthodes générales, et laisse le lecteur faire le reste ; le calcul qui suit est suggéré par l'esprit des Traités, où les sommes d'arcs tiennent une grande place.

3 La première quadrature de la roulette a été donnée par Roberval en 1638 par une méthode indivisibles-à-la-manière-de-Cavalieri ; plusieurs autres ont suivi, par Fermat, Descartes, Torricelli. Même la méthode moderne par primitive est moins rapide que celle à la manière de Pascal.

" je ne me contenterai donc pas de vous donner les calculs (...) Mais je vous découvrirai ma méthode générale pour les centres de gravité, qui vous plaira d'autant plus qu'elle est plus universelle ; car elle sert également à trouver les centres de gravité des plans, des solides, des surfaces courbes et des lignes courbes. J'ai besoin pour vous l'expliquer de cette définition :

S'il y a tant de quantités que l'on voudra A, B, C, D, lesquelles on prenne en cette sorte : premièrement la somme de toutes A, B, C, D ; puis la somme des mêmes, excepté la première, savoir B, C, D ; puis la somme des mêmes excepté les deux premières, savoir C, D ; et ainsi toujours, comme on les voit ici marquées :

J'appelle la somme de ces quantités, prises de cette sorte, la somme triangulaire de ces mêmes quantités,à commencer par A ; car on pourrait prendre la mêmes quantités,à commencer par A ; car on pourrait prendre la somme de ces mêmes quantités à commencer par D, et qui ne serait pas la même.

A B C D
B C D
C D
D

Cela posé, je vous dirai les pensées qui m'ont mené à cette connaissance. J'ai considéré une balance B, A, C,suspendue au point A, et ses bras de telle longueur qu'on voudra AB, AC, divisés en parties égales de part et d'autre, avec des poids pendus à chaque point de division, savoir au bras AB, les poids 3,5,4, et au bras AC, les poids 9,8 ;et supposant la balance être en équilibre dans cet état, j'ai tâché de comprendre quel rapport il y avait entre les poids d'un bras et ceux de l'autre, pour faire cet équilibre. Car il est visible que ce n'est pas que la somme des uns soit égale à la somme des autres. Mais voici le rapport nécessaire pour cet effet.(...)

Si les quatre quantités A, B, C, D, sont prises en cette sorte ; la première une fois, la seconde deux fois, la troisième trois fois, etc., je dis que la somme de ces quantités prises de cette sorte est égale à leur somme triangulaire en començant du côté de A.

D C B A
4 3 2 1

A B C D
B C D
C D
D

Car en prenant leur somme triangulaire, on ne fait autre chose que les combiner en telle sorte, qu'on prenne A une fois, B deux fois, C trois fois, etc.
Venons maintenant à ce que je propose de la balance. On sait assez en géométrie que les forces des poids sont en raison composée des poids et des bras, et qu'ainsi le poids 4 en la troisième distance a une force triple ; que le poids 5 en la seconde distance a une force double, etc. Donc la force des poids des bras se doit considérer en prenant celui qui est à la première distance une fois, celui qui est à la seconde deux fois, etc. Ainsi, pour faire qu'il soient en équilibre de part et d'autre,(...) Il faut que la somme triangulaire des uns soit égale à la somme triangulaire des autres. C.q.f.d.

Une somme triangulaire est une *somme double* , une *somme de sommes* qui peut être calculée de deux manières différentes :

1) en faisant la somme des sommes obtenues pour chaque ligne :
(A + B + C + D) + (B + C + D) + (C + D) + (D)
2) en faisant la somme des sommes obtenues pour chaque colonne :
A + (B + B) + (C + C + C) + (D + D + D + D)

Nous verrons que Pascal calcule des intégrales doubles.[4] Auparavant il aura expliqué comment "passer au continu" ces sommes triangulaires ; le passage se fait naturellement comme nous le verrons ci-dessous.[5]

Les sommes pyramidales sont des sommes "deux fois triangulaires" , en reprenant l'exemple ci-dessus, il faut faire la somme triangulaire à partir de A, lui additionner la somme triangulaire à partir de B, puis la somme triangulaire à partir de C...jusqu'à épuisement. Ce sont des sommes triples. Le passage au continu sera aussi effectué par découpages de plus en plus fins.

Toutes ces sommes forment l'outil de base de ce que J. Chevalier appelle une "géométrie calculante"[6]. Les sommes triangulaires sont même dé-géométrisées dans le traité des trilignes où elles deviennent des moyens de transformer des sommes triangulaires d'ordonnées à l'axe en sommes d'ordonnées à la base

Nous allons maintenant voir les sommes pascaliennes à l'oeuvre dans deux des sept traités.

---

4 Voir le § "Intégration double et triple"

5 Pour une analyse de la manière dont Pascal traite l'infini dans ce passage au continu, on peut lire l'article de J.P. Cléro. (Cf. Bibliographie)

6 Dans les oeuvres complètes de Pascal éd. la Pléiade.

UN TRAITE TRES TECHNIQUE

On trouve dans l'ouvrage de Pascal sur la roulette, sous des formes géométriques extrêmemment ingénieuses, les résultats fondamentaux se rapportant à ce que les géomètres appellent aujourd'hui les intégrales curvilignes et les intégrales doubles (...) C'est le premier traité de calcul intégral. *Emile Picard*

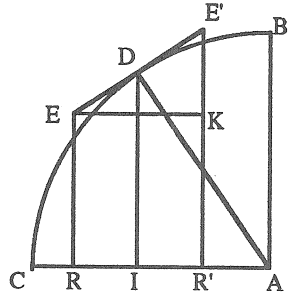
Au XVII^{ème} siècle, on ne parlait ni d'intégrale curviligne, ni de changement de variable dans une intégrale, ni d'intégrale double ou triple, ni d'intégration par parties ; cependant ces catégories permettent d'éclairer l'oeuvre de Pascal sur la roulette, véritable traitement géométrique de ces techniques non encore baptisées.

I INTEGRALE CURVILIGNE

Pascal commence le Traité des sinus par un lemme fécond sous des apparences innocentes. Si ABC est un quart de cercle, EE' la portion de tangente comprise entre les deux perpendiculaires ER et ER' à AC, les triangles EE'K et DIA sont évidemment semblables.

LEMME

«(...) Je dis que le rectangle compris[7] *du sinus DI et de la touchante EE', est égal au rectangle compris de la portion de la base (enfermée entre les parallèles)et le rayon AB »*[8]



---

7 C'est à dire le produit ; remarquer comme le langage est resté géométrique, à la manière des anciens.

8 Leibniz qui, sur les conseils de Huygens s'était plongé dans l'oeuvre mathématique de Pascal raconte qu'il "puisa soudainement la lumière" en lisant le lemme, car il y vit ce que Pascal n'avait pas perçu : l'existence, dans le cas général et pas seulement pour le cercle, de deux triangles semblables, l'un infiniment petit et l'autre fini ; il suffit pour cela de remplacer le rayon DA par la normale à la courbe quelconque. Il ne faut cependant pas oublier que cette "illumination" tient largement autant à Leibniz, qui avait encore très peu lu, qu'à Pascal, car ce dernier n'était pas le premier à avoir mis en évidence une

La similitude des triangles EE'K et DIA implique : DI EE' = RR' AB

Si EE' est infiniment petit, il se confond avec l'arc dα , tandis que RR' devient d(cosα) ; comme DI est sinα, le lemme exprime géométriquement ce que nous dirions aujourd'hui plus analytiquement sous la forme «la dérivée de cosinus est sinus».

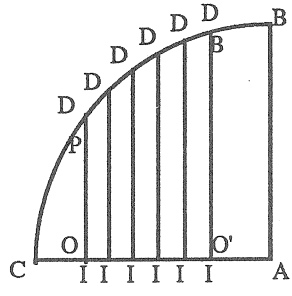
Le concept de dérivée, bien qu'il tente de sérieuses percées, n'existe pas au temps de Pascal.

Le mot "sinus" n'a en toute rigueur pascalienne pas de sens ici, puisque DI , tout seul, ne saurait «naître de divisions égales» ; mais, bien sûr, il annonce que vont apparaître sans tarder d'autres DI , compagnons de celui-ci et régulièrement espacés en D.

Le lemme est la clé de tout le *Traité des sinus du quart de cercle*, qui est un traité d'intégrale curviligne, comme l'indique le mot "sinus" dont le rôle est de signaler que la variable d'intégration[9] est l'abcisse curviligne. Voyons, dans ce § et dans le suivant comment les propositions I , II, III, IV s'articulent au lemme.

PROPOSITION I

La somme des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale à la portion de la base comprise entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon.



La proposition I exprime que
Σ DI DD = OO' AB , «pour un nombre indéfini de divisions égales DD de l'arc» ; en langage moderne :

---

similitude entre un triangle inassignable et un triangle de dimensions finies. (cf « Leibniz, naissance du calcul différentiel» par Marc Parmentier (Vrin).)

9 En utilisant nos catégories pour parler des sommes pascaliennes. *Sinus* est perçu par le lecteur moderne comme un indicateur de variable d'intégration ; contrairement à Pascal le lecteur moderne sait qu'il n'y a pas de nécessité logique à découper la variable d'intégrations en parties égales.

$\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha \, d\alpha = \cos\alpha_2 - \cos\alpha_1$, puisque $AO = \cos\alpha_2$, $AO' = \cos\alpha_1$, $DA = DD$, et $\sin\alpha = DI$

Le rayon du cercle n'est pas égal à 1.

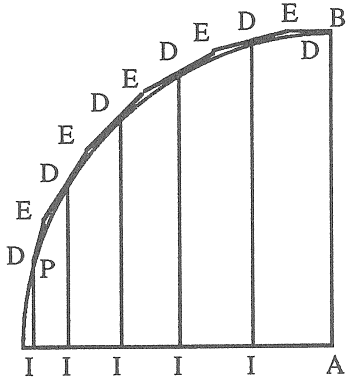
Comme Pascal a dessiné un cercle et non pas une sinusoïde, la proposition I calcule une *intégrale curviligne* : $\int_{\text{arc BP}} DI$

Nous nous souvenons que Pascal a dit très clairement que par «somme des sinus DI» il entend Σ DI DD *pour un nombre indéfini de divisions égales DD de l'arc* ; *sinus* renvoie donc à *divisions égales sur l'arc* et n'a rien à voir avec le sinus ligne trigonométrique, même si cela coïncide par hasard ici !

Il est à peu peu près clair que la proposition I découle facilement du lemme par assimilation de la portion de tangente EE' avec la portion d'arc correspondante ; le fait que les divisions soient égales va garantir d'une façon grossièrement suffisante le caractère licite de cette assimilation. Effectivement Pascal divise soigneusement (en faisant O' = A) l'arc BP en «un nombre indéfini de parties égales», mène les tangente en chaque poit D, d'où les portions EE de tangentes pour les D intérieurs, et les demi tangentes aux extrémités D = B et D = P ; il a ainsi exactement le même nombre (indéfini !) d'arcs DD et de tangentes complètes EE.

DEMONSTRATION DE LA PROPOSITION I

(...) il est visible que chaque sinus DI , multiplié par la touchante EE, est égal à chaque distance RR multipliée par le rayon AB. Donc tous les rectangles ensembles des sinus DI , multipliés chacun par sa touchante EE (lesquelles sont toutes égales entre elles) sont égaux à tous les rectangles ensemble faits de toutes les portions RR avec le rayon AB ; c'est à dire (puisqu'une des touchantes EE multiplie chacun des sinus,et que le rayon AB multiplie chacune des distances) que la somme des sinus DI , multipliés chacun par une des touchantes EE, est égale à la somme des distances RR, ou à AO multipliée par AB. <u>Mais chaque touchante EE est égale à chacun des arcs égaux DD.</u> Donc la somme des sinus multipliés par un des petits arcs égaux est égale à la distance AO, multipliée par le rayon.



Le dessin est fait pour 5 arcs DD égaux, et 4 tangentes complètes EE plus deux demi-tangentes aux extrémités, ce qui fait 5 tangentes égales EE en tout ; et il faut imaginer 5 infini...

Pascal dit que la somme à calculer : Σ DI DD n'est autre que ΣDI EE , laquelle est du ressort du lemme : elle vaut Σ AB RR, c'est à dire AB Σ RR , dont la valeur est immédiate.

Les points R , projections des points E ne sont pas représentés pour ne pas alourdir la figure ; se reporter à la figure du lemme

La partie soulignée par nous est ensuite soigneusement justifiée dans un avertissement :

AVERTISSEMENT

Quand j'ai dit que (...) chaque touchante EE est égale à chacun des petits arcs DD, on n'a pas dû en être surpris, puisqu'on sait assez qu'encore que cette égalité ne soit pas véritable quand la multitude des sinus est finie, néanmoins l'égalité est véritable quand la multitude est indéfinie ; parce qu'alors la somme de toutes les touchantes égales entre elles, EE, ne diffère de l'arc entier BP, ou de la somme de tous les arcs égauxs DD, que d'une quantité moindre qu'aucune donnée.

L'avertissement, excellent compromis entre la rigueur et l'intuition, préfigure admirablement le langage des limites. Les avertissements de Pascal, comme celui-ci, sont souvent empreints de dénégation *(«on n'a pas dû en être surpris»)* : comme certaines notions sont impossibles à clarifier de manière rigoureuse avec le savoir de l'époque, et que d'autre part Pascal, comme ses contemporains, ont la certitude intuitive de la véracité du résultat, leurs écrits vont au devant des critiques en affirmant qu'il n'y a pas de problème.[10]

Dans quelle mesure est il important que les divisions DD soient égales ? Certes il ne suffit pas que le nombre de divisions D soit indéfini pour que le remplacement de EE par DD soit licite : si l'un seulement de DD restait supérieur à un arc donné, même très petit, ce serait radicalement faux de remplacer les EE par les DD ; là intervient l'égalité des divisions, l'égalité

$$n\ DD = BP$$

pour des divisions égales au nombre de n, garantit que chaque DD devient plus petit que tout arc donné quand n devient indéfini. Au temps de Pascal, on n'a guère de raisons de rechercher une condition moins grossièrement suffisante ("le pas de la subdivision est arbitrairement petit") ; nécessaires au calcul pascalien, les divisions égales ne le sont pas au résultat, et l'énoncé de la proposition I ne contiendrait pas de nos jours, comme il le fait chez Pascal (implicitement par le mot «sinus») le terme «divisions égales » (en nombre indéfini).

Le calcul de Pascal, résumé dans l'avertissement peut se paraphraser ainsi : Pascal divise BP en n arcs égaux, puis écrit la double égalité

$$BP = n\ DD = n\ EE$$

La première égalité est vraie que n soit fini ou infini («indéfini») ; la deuxième ne l'est que pour n indéfini, elle signifie que

$$EE = DD + \text{un infiniment petit du deuxième ordre}$$

et c'est cela même qui autorise Pascal à remplacer EE par DD comme il le fait dans la démonstration de la proposition I .L'avertissement est une manière de dire "on pourrait bien montrer cela par exhaustion euclido-

---

10 Voir la préface à l'Analyse des infiniment petits du Marquis de l'Hospital. «Les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commencement de ce traité me paraissent si évidentes que je ne crois pas qu'elles puissent laisser aucun doute dans l'esprit des lecteurs attentifs» l'Hospital ne demande rien moins que de supposer le même dx nul ou non nul selon sa place dans le calcul ! Quant on sait le temps qu'il a fallu pour accorder cette demande avec le principe de contradiction, les métamorphoses que dut subir dx pour accéder au statut d'objet, on se rend compte que les mathématiciens ne sont pas exempts de dénégation.

archimédienne, mais c'est fatigant, et de plus, quand on a un peu d'intuition de l'ordre des infiniment petits, on sait bien que cela marche toujours ". Justement Pascal a une excellente intuiton des ordres infinitésimaux, comme il le montre à plusieurs reprises[11], et ce en relation étroite avec ses préoccupations métaphysiques et apologétiques ; ces dernières culminent à la fin de sa vie avec la théorie des trois ordres *du corps, de l'esprit, de la charité* , chacun infiniment petit par rapport à celui qui le suit. Les mathématiques de Pascal ne sont pas séparées de la foi en Dieu, alors que la démarcation entre cette dernière et les sciences physiques est soigneusement opérée dans la préface pour le traité du vide. La similitude des mots employés dans les Pensées et dans les traités mathématiques est frappante:

Les saints ont leur empire, leur éclat, leur grandeur, leur victoire, leur lustre, et n'ont nul besoin des grandeurs charnelles ou spirituelles, où elles n'ont nul rapport, car elles n'y ajoutent ni ôtent

(Pensées ; l'ordre des corps, l'ordre des esprits, l'ordre de la charité).

(...) on n'augmente pas une grandeur continue lorsqu'on lui ajoute en tel nombre que l'on voudra, des grandeurs d'un ordre d'infinitude inférieur. Ainsi les points n'ajoutent rien aux lignes, les lignes aux surfaces (...) les racines ne comptent pas par rapport aux carrés, les carrés par rapport aux cubes et les cubes par rapport aux carro- carrés.

(Traité du triangle arithmétique ; sommation des puissances numériques)

L'intégrale ordinaire $\int \sin \alpha \, d\alpha$ n'était pas impossible à concevoir au temps de Pascal ; en effet, Roberval avait dessiné la courbe sinus "compagne de la cycloïde" pour quarrer la dite cycloïde. Cependant si l'on ne dispose que de méthodes géométriques pour le calcul d'intégrales, il est plus facile de calculer l'intégrale curviligne $\int_{\overset{\frown}{BP}} DI$ que l'intégrale ordinaire $\int \sin \alpha \, d\alpha$.

Le calcul par l'algorithme-primitive opèrera donc une inversion des difficultés par rapport au calcul géométrique que Pascal nous donne à voir à son stade ultime.

---

11 Par exemple dans le calcul de sommes pyramidales de grandeurs continues (Lettre à Carcavi), ou dans l'application du triangle arithmétique à la sommation de puissances numériques.

Le lemme est le seul endroit des sept traités où Pascal frôle le lien quadrature-dérivée, c'est l'unique moment où il trace une tangente !

L'assimilation d'une portion infinitésimale de courbe à la portion correspondante de tangente est un grand saut conceptuel ; elle exige de sentir ce qu'est le deuxième ordre.

Mais la tangente au cercle est un être géométrique : pour des raisons évidentes de symétrie elle ne peut être que la perpendiculaire au rayon. Une tangente si peu infinitésimale n'incite pas à approfondir, à moins de penser, comme Leibniz, à généraliser, c'est à dire à sortir du cercle. Pascal, lui, est enfermé dans le cercle : tous les problèmes de roulette s'analysent en problèmes de cercle. Il n'a cherché de méthode générale que pour unifier les solutions des problèmes particuliers de roulette, il est à mi-chemin entre le particulier et le général comme l'homme entre les deux infinis. La démesure des horizons illimités intéressera Leibniz "puisant la lumière" dans le lemme de Pascal. Ainsi le traité des sinus a porté des idées qui dépassèrent leur auteur.

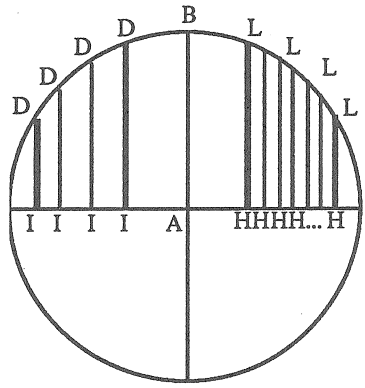
II CHANGEMENT DE VARIABLE

Restons avec le traité des sinus du quart de cercle ; la proposition I reposait sur une technique d'intégrale curviligne, les propositions II , III , IV , mettent en jeu deux techniques, celle de l'intégrale curviligne et celle du changement de variable.

PROPOSITION II

La somme des carrés des sinus d'un arc quelconque du quart de cercle est égale a la somme des ordonnées au quart de cercle qui seraient comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon.

Par *somme des carrés des sinus* Pascal entend Σ DI^2 DD (le mot *sinus* indique que DI^2 est multiplié par DD).



De même par *somme des ordonnées* il faut entendre Σ LH HH (à cause du mot *ordonnée* LH se voit multiplié par HH).

La contraignante (et superflue) condition des divisions égales oblige Pascal à faire deux dessins ; car si les DD sont des divisions égales sur l'arc, leurs projections ne sauraient l'être sur l'axe : les I I ne conviennent pas pour fabriquer des sommes d'ordonnées.

La proposition II exprime que pour les DI et les LH variant entre les positions extrêmes, on a

$$\Sigma \text{ DI}^2 \text{ DD} = \Sigma \text{ LH HH}$$

Les quatre positions extrêmes, deux à deux symétriques, de sinus (à gauche) et d'ordonnées (à droite) sont matérialisées par quatre traits gras.

Toutes les divisions égales, tant les DD que les HH, sont en nombre indéfini (infini).

Paraphrasons et commentons la démonstration que donne Pascal

- DI varie entre le rayon AB et DO (donc LH entre le rayon AB et le symétique de DO)
- DI^2 est visuellement dédoublé en DI x IG
- donc Σ DI^2 DD est Σ IG DI DD
- DI DD est DI EE, c'est le coup de force qui consiste à confondre localement la courbe et sa tangente ; coup de force légitimé par l'avertissement[12], autant qu'il est possible de le faire en 1658.

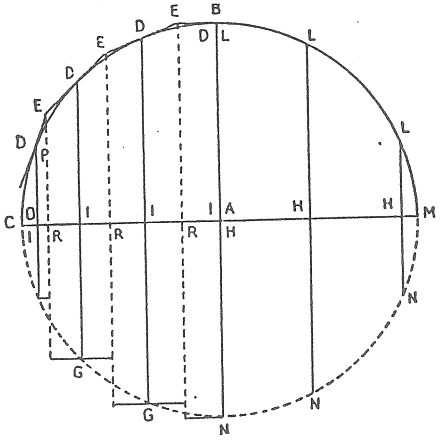


fig 19 p.276 (Pléiade)

- DI EE est AB I I par le lemme
- Donc Σ DI^2 DD n'est autre que AB Σ IG RR ; mais *cette somme n'est pas une somme d'ordonnées*, en effet les RR ne sont sûrement pas égales puisque la pente des EE est variable. C'est là qu'intervient la rigueur de Pascal *à l'intérieur de son propre système de pensée* ; la *somme des ordonnées*, il la suggère à droite de son dessin : c'est Σ LH HH (HH divisions égales, en nombre indéfini).
- C'est la géométrie qui sauve tout, car Σ LH HH est évidemment l'espace[13] entre les deux ordonnées extrêmes et Σ IG RR ne diffère du même espace que «d'une grandeur moindre qu'aucune donnée» ; subrepticement on a glissé des divisions RR (non égales) aux HH (égales), et donc d'une expression interdite dans la logique pascalienne Σ IG RR (être non répertorié, ni somme d'ordonnées, ni somme de sinus) à une somme admissible Σ LH HH.
- Le double rôle joué par les "divisions" "égales" est ici particulièrement intéressant : d'une part elles fonctionnent en tant que "divisions" comme indicateur de variable d'intégration, d'autre part, en tant qu'"égales" comme complicateur inutile de démonstration ! Pascal ne sépare pas les deux rôles ;

---

12 Voir page 337

13 La surface.

l'histoire rejettera l'"égalité" et la remplacera par le "pas", puisque l'égalité est une condition suffisante beaucoup trop forte pour assurer que toutes tendent vers zéro.

- Il semble que ce soit une des deux seules fois[14] où Pascal démontre lui-même dans les faits, mais sans le dire, que l'égalité des divisions est une hypothèse superflue ; aucune conséquence générale n'est tirée, aucun signe de doute sur l'utilité des divisions égales ne se montre, pas plus là que dans le Traité des trilignes. Pascal a seulement fait preuve d'une rigueur fidèle à ses propres conceptions là où un changement de variable s'est mis à détruire l'égalité des divisions.

Les propositions III et IV sont très semblables à la proposition II

PROPOSITION III

La somme des cubes des mêmes sinus est égale à la somme des carrés des mêmes ordonnées comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon.

PROPOSITION IV

La somme des carrés-carrés des mêmes sinus est égale à la somme des cubes des mêmes ordonnées comprises entre les sinus extrêmes, multipliées par le rayon.

Et ainsi à l'infini.

Ces trois propositions et celle à l'infini sont subsumées sous la formule générale

$$\Sigma \, DI^{\,n} \, DD = \Sigma \, LH^{\,n-1} \, HH \qquad (E)$$

Il y a changement d'élément différentiel, DD devient HH ; cela ressemble fortement à un changement de variable.

Utilisons le langage moderne pour voir qu'il s'agit bien d'une double technique, d'intégrale curviligne, de changement de variable. Le langage d'aujourd'hui, plus simple car il ne s'encombre pas d'inutiles égalités de divisions, rend caduque la distinction entre LH et DI. Les propositions II, III, IV et celle "à l'infini" s'énoncent alors

---

14 A la fin du *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets.* En accrochant des poids nuls là où il le faut Pascal démontre que le théorème de l'abcisse du centre de gravité vaut aussi pour des subdivisions inégales (il faut alors renoncer au langage des "sommes triangulaires" mais il n'en parle pas.)

$$\int \sin^{n} \alpha \, d\alpha = R \int \sin^{n-1} \alpha \, dx \qquad (E')$$

l'un des facteurs sin α, multiplié par dα, faisant R dx (c'est le Lemme). Il n'y a rien à montrer (E') n'est que le Lemme, résultat simple s'il en est ; ainsi toute la lourdeur de la démonstration pascalienne n'est qu'un tribut payé aux divisions égales.

La formule (E') égale une intégrale curviligne (Pascal ne dispose pas de sinusoïde, il intègre le long du cercle) à une intégrale ordinaire - via un changement d'élément différentiel.

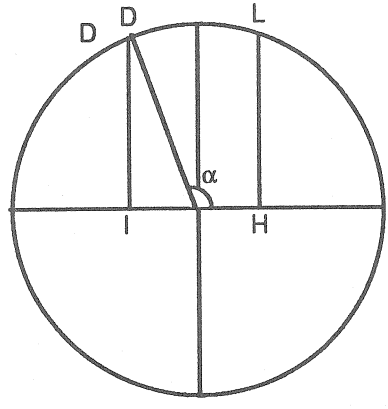
Le lecteur moderne est insatisfait par le deuxième membre : qu'est α dans $\sin^{n-1} \alpha$? ses habitudes de pensée l'incitent à expliciter la dépendance fonctionnnelle α(x) ; comme x = cosα, α = Arc cos x,et il aura tendance à écrire (E') sous la forme (E")

$$\int \sin^{n} \alpha \, d\alpha = R \int \sqrt{(1-x^2)}^{n-1} \, dx \qquad (E")$$

où le changement de variable est patent.

Pascal, qui intègre géométriquement, n'a pas besoin d'expliciter la fonction, chaque LH^{n-1} est multiplié par son HH, celui qui est à côté.

(E') est la plus évidente des trois formulations, mais elle exige d'être à la fois pascalien et moderne : pascalien pour renoncer à l'explicitation fonctionnelle, moderne pour renoncer aux divisions égales. Les exigences de la rigueur varient au cours du temps.



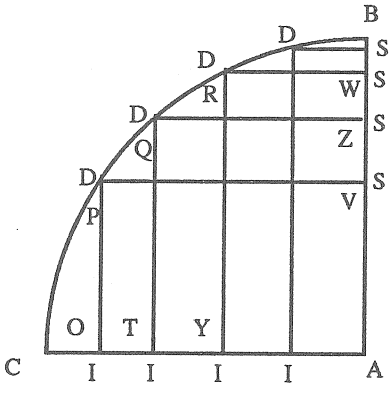
DI est un sinus ("nait de divisions égales sur l'arc")
LH est une ordonnée ("nait de divisions égales sur la base")
DI est sin α
DD est dα
La distinction entre DI et LH n'a de sens que dans le système de rigueur pascalien avec sa contrainte des divisions égales.

III INTEGRATION DOUBLE ET TRIPLE

Poursuivons la lecture du traité des sinus ; après les propositions V et VI qui reviennent à démontrer le théorème de la moyenne dans un cas particulier, viennent deux propositions qui calculent respectivement une somme triangulaire et une somme pyramidale de sinus.

PROPOSITION VII

La somme triangulaire des sinus sur la base d'un arc quelconque terminé au sommet, à commencer par le moindre des sinus extrêmes, est égale à la somme des sinus du même arc sur l'axe, multipliée par le rayon, ou, ce qui est la même chose, à la différence d'entre les sinus extrêmes sur la base, multipliée par le carré du rayon



Car la somme triangu-laire des sinus DI , à commencer par PO, n'est autre chose par la définition , que la simple somme de tous les DI compris entre les extrêmes BA, PO, plus la somme de tous les DI, excepté le premier PO,c'est à dire compris entre le second QT et AB et ainsi de suite. Mais la somme des sinus compris entre PO et BA est égale à OA ou PV en AB ; et la somme des sinus com-pris entre QT et AB est de même égale au rectangle TA ou QZ en AB, et ainsi toujours. Donc la somme triangulaire des sinus DI, à commencer par DO, est égale à la somme des sinus PV, QZ, RW, etc., multipliés par AB, ou à BV (qui est la différence entre BA et PO) multipliée par BA carré, puisque la somme des sinus DS est égale au rectangle VB en BA par la première de ce Traité.

Paraphrase et commentaire

Les points ont deux noms, un nom de point générique et un nom de point d'arrêt.

Une somme triangulaire *à partir de PO* , c'est une somme de sommes simples dans lesquelle on laisse progressivement tomber le terme le plus à droite , *le terme du côté de PO* donc, cette somme triangulaire est :

$$\sum_{\text{jusqu'à PO compris}} DI \ : \ PV, \text{ par la proposition I}$$

$$+ \quad \sum_{\text{jusqu'à QT compris}} DI \ : \ QZ, \text{ par la même}$$

$$+ \quad \sum_{\text{jusqu'à RY compris}} DI \ : \ RW, \text{ par la même}$$

$$+ \ldots$$

mais $PV + QZ + RW + \ldots$ n'est autre que BV («différence des sinus extrêmes») , toujours par la proposition I[15]

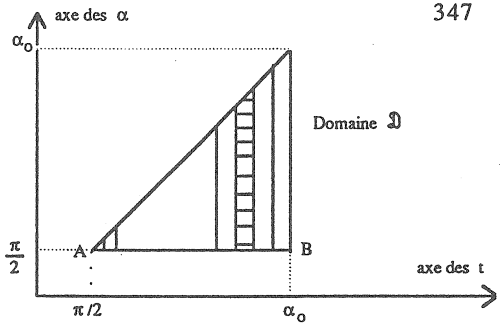
Il s'agit en notations modernes de $\int_{\pi/2}^{\alpha_0} dt \int_{\pi/2}^{t} \sin\alpha \, d\alpha$, ou encore de l'intégrale double $\iint_{\mathfrak{D}} dt \, d\alpha \sin\alpha$ calculée par la mé-thode de Fubini avec le découpage vertical dessiné ci-dessous du triangle $\mathfrak{D}$

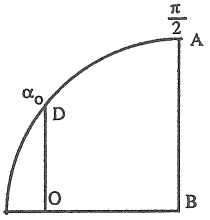
---

[15] En réintroduisant le DD deux fois sous entendu :

$$\sum_{\text{triang. PO}} DI \, DD^2 = \sum DD \left(\sum_{\text{jusqu'à PO}} DI \, DD + \sum_{\text{jusqu'à QT}} DI \, DD + \sum_{\text{jusqu'à RY}} DI \, DD \right) =$$

$$BV \times R^2$$





CALCUL EN LANGAGE MODERNE (A L'AIDE D'UNE PRIMITIVE)

L'intégrale double qui figure implicitement dans la proposition VI se calcule de deux manières par Fubini:

a) $\iint_{\mathfrak{D}} dt\, d\alpha\, \sin\alpha = \int_{\pi/2}^{\alpha_0} dt \int_{\pi/2}^{t} \sin\alpha\, d\alpha$ (Fubini avec préempilages verticaux ; voir le dessin ci-dessus)

b) $\iint_{\mathfrak{D}} dt\, d\alpha\, \sin\alpha = \int_{\pi/2}^{\alpha_0} d\alpha \int_{\alpha_0}^{\alpha} \sin\alpha\, d\alpha$ (Fubini avec préempilages horizontaux ; le dessin n'est pas fait)

Le deuxième membre de a) correspond à la lettre à ce que fait Pascal ; le cas b) conduirait à l'intégrale $\int_{\pi/2}^{\alpha_0} (\alpha - \alpha_0) \sin\alpha\, d\alpha$, plus difficile, et sans visualisation géométrique immédiate.

Le calcul par primitive permet de calculer la «somme triangulaire» de Pascal qui figure dans le deuxième membre de a).

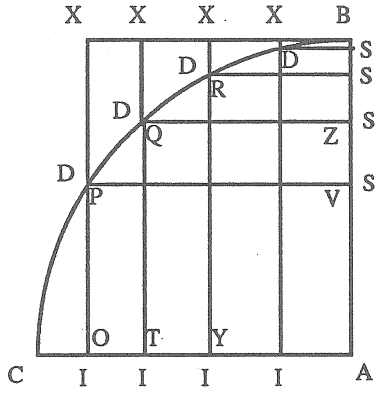
$$\int_{\pi/2}^{\alpha_0} dt \int_{\pi/2}^{t} \sin\alpha\, d\alpha = \int_{\pi/2}^{\alpha_0} (\cos\pi/2 - \cos t)\, dt = 1 - \sin\alpha_0$$

c'est bien la «différence entre les sinus extrêmes» (le rayon du cercle a été pris égal à 1).

Voyons la proposition VIII

PROPOSITION VIII

La somme pyramidale des sinus d'un arc quelconque terminé au sommet, à commencer par le moindre, est égale à la somme des sinus verses du même arc multipliée par le carré du rayon : ou ce qui est la même chose, à l'excès dont l'arc surpasse la distance entre les sinus extrêmes, multipliée par le cube du rayon.



PO est le «moindre» des sinus, AB et PO sont les «sinus extrêmes» et AO est leur «distance».

La somme pyramidale en question est la somme triangulaire à partir de DO des sommes triangulaires analogues à celles de la proposition VII.

Les «sinus verses» sont les compléments à R des sinus, c'est à dire les DX puisque DX = R - DI.

«L'excès dont l'arc surpasse la distance entre les sinus extrêmes, multipliée par le cube du rayon» est $(BP - AO) \times R^3$

A cause des sommes triangulaires les points D (et S) sont à la fois génériques et points d'arrêt, c'est pourquoi ils ont deux noms.

La démonstration qui suit est lumineuse, la beauté du langage des indivisibles y est à son apogée : tout se passe comme si les DD^3 n'étaient même pas sous-entendus !

Car cette somme pyramidale n'est autre chose que la somme triangulaire des sinus DI compris entre PO et AB, plus la somme triangulaire de tous les sinus compris entre QT et AB, et ainsi de suite. Mais la première de ces sommes triangulaires est égale, par la précédente, à BV ou PX en AB carré. Et la seconde de ces sommes triangulaires est égale, par la même raison, à BZ ou QX en AB carré. Donc toutes les sommes triangulaires ensemble, c'est à dire la somme pyramidale des sinus DI, à commencer par PO, est égale à la somme des sinus verses DX multipliés par AB carré. C.q.f.d.

Paraphrase et commentaire

La somme pyramidale des sinus *à partir de PO* , c'est, par définition, la somme de toutes les sommes triangulaires suivantes :

$\sum$ DI : triang. à partir de PO — PX, par la proposition VII

\+ $\sum$ DI : triang. à partir de QT — QX, par la proposition VII

\+ $\sum$ DI : triang. à partir de RY — RX, par la proposition VII

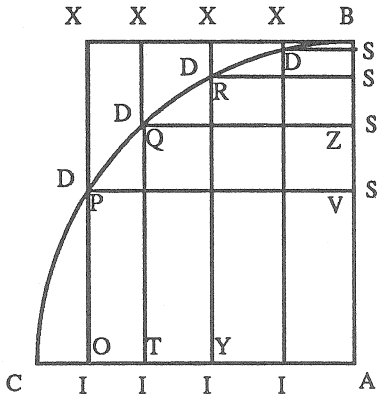
\+...

C'est la somme des sinus verses ; il reste donc seulement à voir à voir que cette somme est bien «l'excès dont l'arc surpasse la distance entre les sinus extrêmes» : BP - AO. La rédaction de Pascal n'est pas heuristique (quoiqu'il critique les anciens à ce sujet) et le corollaire de la proposition I répond d'avance à la question deux pages plus tôt.

COROLLAIRE DE LA PROPOSITION I

De la première proposition il s'ensuit que la somme des sinus verses d'un arc est égale à l'excès dont l'arc surpasse la distance d'entre les sinus extrêmes, multipliée par le rayon.

Je dis que la somme des sinus verses DX est égale à l'excès dont l'arc BP surpasse la droite AO, multipliée par AB.



Car les sinus verses ne sont autre chose que l'excès dont le rayon surpasse les sinus droits. Donc la somme des sinus verses DX est la même chose que le rayon AB pris autant de fois, c'est à dire multiplié par tous les petits arcs égaux DD, c'est à dire multiplié par l'arc entier BP, moins la somme des sinus droits DI, ou le rectangle BA en AO. Et par conséquent la somme des sinus verses DX est égale au rectangle compris du rayon AB et de la différence entre l'arc BP et la droite AO.

Autrement dit, puisque $DX = AB - DO$, $\Sigma\, DX\, DD = \Sigma\, AB\, DD - \Sigma\, DO\, DD$, ou si l'on préfère, l'intégrale curviligne (le long du cercle) de la différence est la différence des intégrales curvilignes : $\int \sin \text{ver}\, \alpha\, d\alpha = \int R\, d\alpha - \int \sin \alpha\, d\alpha$.

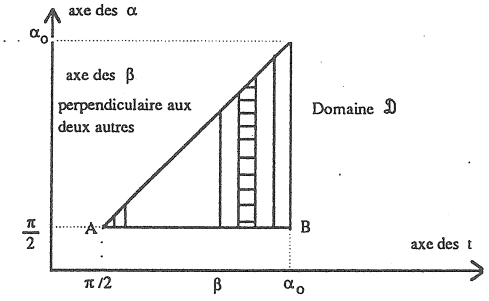
CALCUL EN LANGAGE MODERNE (A L'AIDE D'UNE PRIMITIVE)

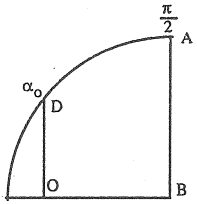
Revenons à la proposition VIII ; imaginons la pyramide $\mathfrak{P}$ construite sur le triangle $\mathfrak{D}$ en élevant en son sommet A un segment perpendiculaire à son plan et de longueur AB. Si l'on appelle $\mathfrak{D}(\beta)$ le triangle ombré, celui-ci est la projection de la coupe horizontale de $\mathfrak{P}$ faite à la hauteur β. Alors, la somme pyramidale considérée dans la proposition VIII est, en notations modernes, <u>à la lettre</u>

$$\int_{\pi/2}^{\alpha_0} d\beta \iint_{\mathfrak{D}(\beta)} dt\, d\alpha \sin \alpha \quad \text{ou} \quad \int_{\pi/2}^{\alpha_0} d\beta \int_{\pi/2}^{\beta} dt \int_{\pi/2}^{t} \sin\alpha\, d\alpha$$

(selon la manière dont on pense cette somme pyramidale) ; nous pouvons encore dire, mais là nous sortons de la lettre du texte de Pascal, qu'il s'agit de l'intégrale triple $\iiint_{\mathfrak{P}} d\beta\, dt\, d\alpha \sin \alpha$ calculée par la méthode de Fubini avec

prédécoupage en tranches horizontales de la pyramide $\mathcal{P}$! Sous la première forme le calcul donne $\int_{\pi/2}^{\alpha_0} d\beta\ (\sin\beta - 1)$ (par la proposition VI), ou $(\cos\beta - \beta)_{\pi/2}^{\alpha_0} = \cos\alpha_0 - (\alpha_0 - \pi/2) = OB - \text{arc } AD$, c'est bien «l'excès dont l'arc surpasse la distance entre les sinus extrêmes (il n'y a pas de signe - au temps de Pascal).





Pour résumer

- Il s'agit probablement des deux premiers énoncés d'intégrale double et triple (mais il faut être prudent en matière d'antériorité).

- Ces intégrales sont vues respectivement comme somme de sommes (proposition VII), comme somme de sommes de sommes (proposition VIII), et ce grâce au langage des sommes triangulaires et pyramidales, véritables techniques fubiniennes de sommations par paquets avant la lettre.

- Le langage des indivisibles réussit cette prouesse d'occulter les infiniment petits DD^2 et DD^3, sans que le sens en souffre le moins du monde : au contraire c'est leur réintroduction qui compliquerait la compréhension.

IV INTÉGRATION PAR PARTIES

Il s'agira essentiellement ici des résultats généraux mis en place dans le «Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets» (TTR en abrégé).

Dans ce calcul intégral géométrique, le triligne est quelconque ("fonction quelconque", une fonction étant vue comme un graphe et pas comme une correspondance), mais les formules ne sont pas pour autant complètement générales : Pascal intègre géométriquement ce dont il a besoin pour la problème qui l'occupe ; or de quoi a-t-il besoin ? de calculer des longueurs, des surfaces planes et courbes, des volumes, ainsi que les centres de gravité de tout cela ; tous ces calculs font intervenir des intégrales de monômes, de degré inférieur ou égal à trois[16]

De fait, Pascal découvre par une investigation entièrement géométique des relations générales entre les intégrales de tous les monômes de degré pas trop élevé (juste ce dont il a besoin), en les trois variables d'importance égale "arc", "ordonnées à l'axe", "ordonnées à la base" (nos "abcisses curvilignes", "abcisses","ordonnées"). Ces relations nous apparaissent aujourd'hui comme autant de formules d'intégration par parties.

La première proposition, énoncée et démontrée en trois lignes, est exemplaire :

"PROPOSITION I

La somme des ordonnées à la base est la même que la somme des ordonnées à l'axe.

Car l'une et l'autre est égale à l'espace du triligne."

En effet, les nombreuses formules d'intégration par parties qui figurent dans le TTR, seront toutes sur ce modèle ; vue géométriquement, l'intégration par parties sera toujours l'expression de *l'identité d'un attribut géométrique*. (ici l'espace (l'aire) d'un triligne).

Lue aujourd'hui la proposition I dit

$$\int y\,dx = \int x\,dy$$

---

16 Il n'y a qu'à la fin du dernier Traité : le "Traité général de roulette" qu'il faut faire la somme de "FM cube en MV"

Figure adjointe et identité d'un volume

Pascal crée une figure de base, composée d'une partie constante (le triligne ACB), et d'une partie sujette à des variations (ABK, l'*adjointe* du triligne). Chaque particularisation de l'adjointe ABK , à la seule condition que l'on sache calculer son aire, fournira une formule d'intégration par parties. Si l'aire de ABK n'est pas calculable avec les moyens de l'époque, on obtiendra une formule mêlant l'intégration par parties et l'intégration multiple.

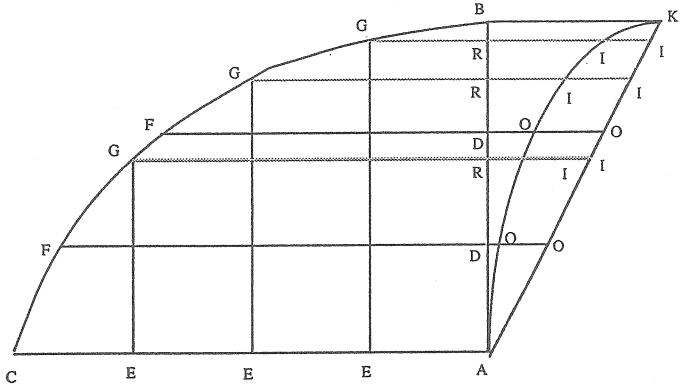


Figure du lemme général

Pascal part donc d'un triligne quelconque ACB , mène les ordonnées à l'axe et à la base avec les divisions égales requises, ainsi que les «contre-ordonnées» GR qui ne sauraient pour lui se confondre avec les ordonnées à l'axe, vue la nécéssaire égalité des divisions ; puis il accole la figure adjointe ABK astreinte à la seule condition d'être un triligne rectangle en B (deux exemplaires de ABK sont représentés ici). Et il énonce un "lemme général", sorte de machine à fabriquer des formules d'intégration par parties :

LEMME GENERAL

Je dis que la somme des rectangles FD en DO, compris de chaque ordonnée du triligne et de chaque ordonnée de la figure adjointe, est égale à la somme des espaces ARI, qui sont les portions de l'adjointe, comprises depuis chacune des contre-ordonnées jusqu'à l'extrémité de l'adjointe du côté de A.

Cette égalité a lieu dans le plan, mais elle ne devient une évidence que si l'on passe dans l'espace, car alors elle exprime l'identité d'un certain volume (avec lui-même).

Le passage dans l'espace va aussi nous renseigner sur ce qu'est la somme des espaces ARI : Σ ARI RR ?, Σ ARI EE ?

Le volume est ainsi fabriqué : on construit un cylindre droit sur le triligne ACB perpendiculairement au dessin , on relève le triligne adjoint BAK en le faisant tourner autour de BA de 90 degrés, puis on promène AC parallèlement à elle-même le long du bord AK relevé ; AC recoupe le cylindre et engendre un volume qui se termine lorsqu'elle retombe verticalement en K.

Deux ordres de plans verticaux découpent ce volume

– Les plans passant par GE, produisant les découpages "espaces ARI, d'épaisseur EE "

– Les plans passant par DF, les découpages seront des rectangles de côté FD et DO , d'épaisseur DD.

Les reconstitutions du même volume par les deux découpages conduisent à l'égalité :

$$\Sigma \text{ ARI EE} = \Sigma \text{FD DO DD}$$

> Or il est visible que la somme des sections faites par chacun de ces ordres de plans sont égales chacune au solide, et par conséquent entre elles (puisque les portions indéfinies AE, EE, etc. de la base, sont égales, tant entre elles qu'aux portions égales et indéfinies AD, DD, etc. de l'axe) ; c'est-à-dire que la somme de tous les rectangles FD en DO est égale à la somme de toutes les portions RIA. C.q.f.d.

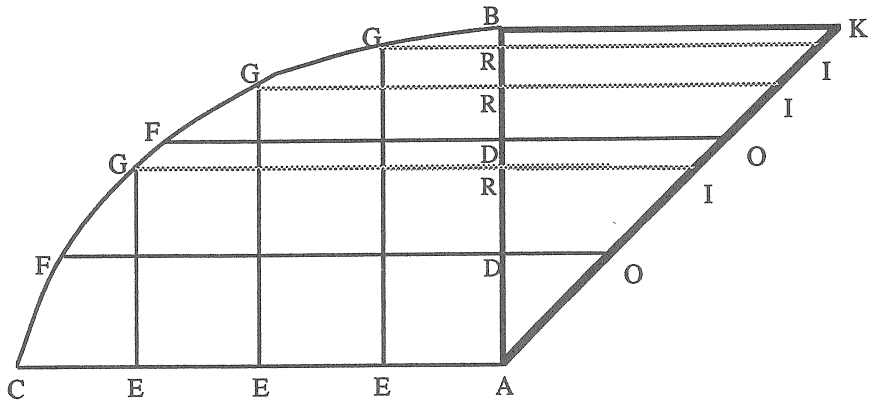
Il y a profusion d'égalité. Que les DD soient égales entre elles possède un intérêt calculatoire ; il en est de même de l'égalité des EE. Mais "DD = EE" relève de l'incantation.

Le lemme général est un lemme d'intégration par parties. Nous allons le voir sur trois cas particuliers en faisant, comme Pascal, varier l'adjointe, puis nous le regarderons dans le cas général à la lumière du calcul Leibnizo-Newtonien (c'est à dire en recourant à la primitive).

Variations sur l'adjointe

Pascal applique tout de suite le lemme général à la découverte des "rapports entre les ordonnées à l'axe et les ordonnées à la base d'un triligne rectangle quelconque" :

"PROPOSITION II

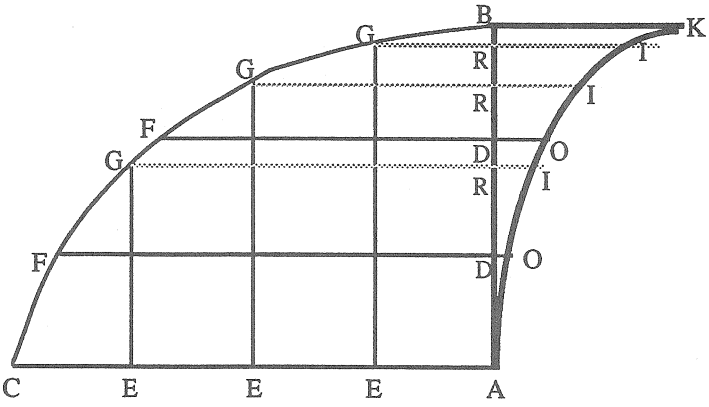


La somme des carrés des ordonnées à la base est double des rectangles compris dechaque ordonnée à l'axe et de sa distance à la base.

C'est-à-dire que la somme de tous les EG carré est double de tous les rectangles FD en DA.

Car si le triligne ABC a pour adjoint un triangle rectangle et isocèle ABK, dont les côtés AB, BK soient égaux entre eux, et la base AK une ligne droite qui soit coupée par les ordonnées FD aux points O, et par les contre-ordonnées GR aux points I, il arrivera, comme il a été démontré, que la somme de tous les rectangles FD en DO, ou FD en DA (puisque partout DO sera égal à DA) sera égale à la somme de tous les triangles ARI ; c'est-à-dire, à la moitié de la somme de tous les AR carré, ou de tous les EG carré.

PROPOSITION III



La somme des cubes des ordonnés à la base est triple des solides compris de chaque ordonnée à l'axe et du carré de sa distance à la base.

La somme de tous les EG cube esttriple de la somme de tous les FD en DA carré

Car si la figure adjointe ABK est composée des deux droites perpendiculaires AB, BK et de la parabole AOK, telle qu'elle a été supposée dans le lemme précédent[17], il arrivera toujours (par le lemme général) que la somme des rectangles FD en DO sera égale à la somme des portions ARI (qui seront ici des trilignes paraboliques). Donc en multipliant le tout par BA, la somme des solides FD en DO en AB, ou FD en DA carré, sera égale à la somme des trilignes ARI, multipliés par AB ; c'es-à-dire (par le lemme précédent) au tiers de la somme des AR cube, ou des EG cube.

---

17 Le lemme en question rappelle simplement le résultat d'Archimède : Si AB = BK (ce qui revient à dire que l'équation de la parabole est AB x RI = AR carré), alors l'aire du triligne ARI, multipliée par AB est le tiers de AR cube.

PROPOSITION IV

On démontrera de même que la somme des carrés-carrés des ordonnées à la base est quadruple de la somme des odonnées à l'axe et ainsi toujours."

Suivant les formes que reçoit l'adjointe, triangle rectangle dans la proposition II, parabole dans la proposition III, puis, devine-t-on, "parabole" de degré 3 dans la proposition IV, etc..., différentes formules d'intégration par parties sont crées, dont le terme tout intégré est nul de par la forme du triligne ; lues aujourd'hui :

$$\int y^2\,dx = 2\int xy\,dy \quad \text{(Proposition II)}$$

$$\int y^3\,dx = 3\int xy^2\,dy \quad \text{(Proposition III)}$$

$$\int y^4\,dx = 4\int xy^3\,dy \quad \text{(Proposition IV)}$$

Ce sont bien trois formules d'intégration par parties, à savoir

$$\int y^2\,dx = \int x\,dy^2 \quad \text{(Proposition II)}$$

$$\int y^3\,dx = \int x.dy^3 \quad \text{(Proposition III)}$$

$$\int y^4\,dx = \int x\,dy^4 \quad \text{(Proposition IV)}$$

Le lemme général est complexe, il contient de l'intégrale double de manière sous-jacente, puisque les ARI sont déjà des intégrales effectuées ; pour qu'il donne un résultat, il faut choisir des adjointes dont les espaces soient calculables (de manière à éviter de conserver une intégrale double au deuxième membre : la somme des ARI). A l'époque de Pascal le catalogue de telles fonctions est restreint, d'une part à ce que savait faire Archimède (paraboles, cercles, droites), d'autre part aux puissances d'exposant entier ou fractionnaire (Fermat, Torricelli). Il se trouve que ces fonctions suffisent pour résoudre les problèmes de roulette.

LE LEMME GÉNÉRAL, RELU AVEC LA NOTION DE FONCTION ET LE CALCUL PAR PRIMITIVE

Reportons nous à la figure du lemme général, et appelons f la correspondance AD = f(DF), pour le triligne, et ϕ la correspondance DO = ϕ(AD) pour l'adjointe. Cassons la symétrie pascalienne en privilégiant x :

FD est x — DD est d(f(x))

AD est f(x)

DO est $\phi(f(x))$ (les abcisses de ϕ sont les ordonnées de f) — ARI est $\int_0^{f(x)} \phi(f(u))\, df(u)$[18]

* La somme des rectangles FD en DO (sous-entendu x és par DD) est

$$\int_0^c x\, \phi(f(x))\, df(x)$$

* La somme des espaces ARI (sous-entendu x és par EE) est

$$\int_0^c dx \int_0^{f(x)} \phi(f(u))\, df(u)$$

* Et si on connait à la fois l'algorithme de la primitive et l'intégration par parties :

$$\int_0^c dx \int_0^{f(x)} \phi(f(u))\, df(u) = \text{(IPP)} \int_0^c x\, dv =$$

(Calcul par primitive) $\int_0^c x\, \phi(f(x))\, df(x)$

puisque $d\left(\int_0^{\nabla} g(\phi)\, d\phi\right) = g(\nabla)\, d\nabla$. (formule clé du calcul par primitive...)

C.q.f.d.

---

18 C'est f(u) qui varie entre o et f(x), il s'agit en notation plus rigoureuse (mais moins proche de la figure géométrique) de $\int_0^{f(x)} \phi(u_1)\, du_1$.

Figure du double onglet et identité d'un centre de gravité

Si maintenant on exprime l'identité du bras d'un certain solide[19], on obtient une nouvelle formule, très symétrique, d'intégration par parties :

PROPOSITION V

La somme des solides compris de chaque ordonnée à la base, et de sa distance à l'axe est égale à la somme des solides compris du carré de chaque ordonnée à l'axe et de sa distance de la base.

Je dis que la somme des solides[20] *de tous les EG carré en EA est égale à la somme des solides de tous les DF carré en DA.*

En supprimant les sous-entendus :

$$\sum EG^2 \, EA \, EE = \sum DF^2 \, DA \, DD$$

Ici il n'y a plus d'adjointe, mais un "double onglet de la base", c'est à dire une figure ainsi construite sur le triligne CBA du lemme général : on prend deux plans passant par CA, inclinés à 45 degrés au dessus et au dessous du plan du triligne ; les deux plans, perpendiculaires entre eux, rencontrent le cylindre droit bâti sur la partie CB U AB du triligne ; la figure ainsi délimitée s'appelle "double onglet de la base".

Ce double onglet a un centre de gravité dont la distance à l'axe (bras sur l'axe) va, comme le volume du lemme général, être calculé de deux manières[21]. Et la proposition V traduira simplement l'égalité de ce bras avec lui-même, son "identité".

---

19 Le bras sur l'axe (resp. sur la base) est la distance du centre de gravité à l'axe (resp. à la base)

20 Cette somme de solides est un hyper-volume de dimension 4 ; le langage géométrique met hors de la géométrie habituelle, paradoxalement.

21 Le calcul est long, inutilement compliqué par cette nécessité interne de divisions égales qui jalonne l'oeuvre de Pascal sur le calcul intégral. Pour plus de détails, voir la brochure "Pascal intègre" C. Merker, à paraître.

Lue aujourd'hui, la proposition V dit :

$$\int xy^2\,dx = \int x^2 y\,dy$$

qui est la formule d'intégration par parties (aussi symétrique que celle de la proposition I)

$$\int y^2\,dx^2 = \int x^2\,dy^2$$

"Figure rectifiante" ou "comment faire pour que des sinus deviennent des ordonnées"

Le § suivant qui donne dix propositions s'intitule :

"RAPPORTS ENTRE LES SINUS SUR LA BASE D'UN TRILIGNE QUELCONQUE ET LES PORTIONS DE SA LIGNE COURBE COMPRISES ENTRE LE SOMMET ET LES ORDONNÉES À L'AXE"

En voici quelques unes (se reporter à la figure ci-dessous)

PROPOSITION VI

la somme des arcs de la courbe compris entre le sommet et chaque ordonnée à l'axe est égale à la somme des sinus sur la base.

c'est à dire que la somme de tous les arcs BO, est égale à la somme des sinus IL.

PROPOSITION VII

La somme des carrés de ces mêmes arcs BO est égale à deux fois la somme triangulaire des mêmes sinus IL, à commencer par A.

PROPOSITION XI

La somme triangulaire des carrés des mêmes arcs BO, à commencer par A, est égale à la somme triangulaire des carrés des mêmes sinus IL, à commencer par A.

PROPOSITION XII

Je dis maintenant qu'en menant les sinus sur l'axe, savoir les perpendiculaires IR, la somme des rectangles compris de chacun des mêmes arcs et de l'ordonnée qui le termine, savoir la somme de tous les rectangles BO en OD est égale à la

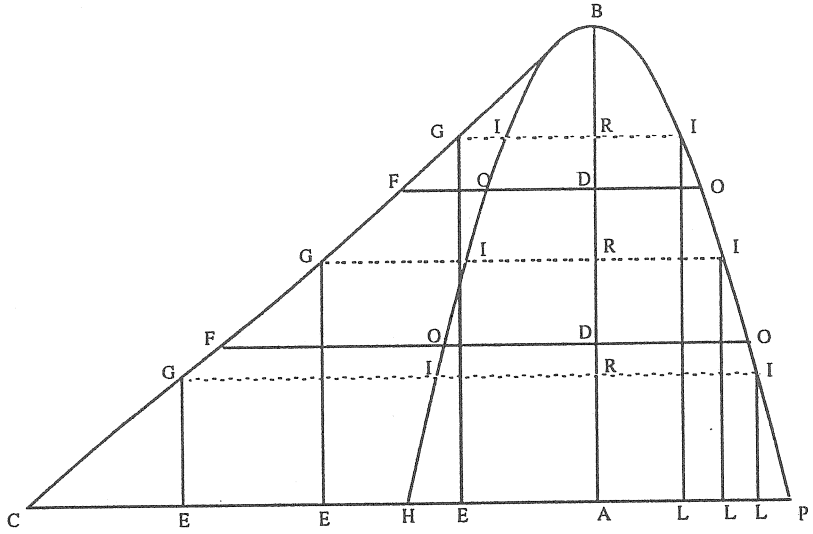
somme des portions du triligne comprises entre chaque sinus sur l'axe et la base, savoir la somme de toutes les portions IRAP.

Soulignons à nouveau que les arcs BO figurent "entiers" dans les sommes.

En réintroduisant les infinitésimaux sous entendus la proposition VI exprime Σ BO DD = Σ IL II.

La somme triangulaire en question dans la proposition VII est une somme de sinus cela indique la variable d'intégration : I (s). De plus elle est triangulaire à partir de A cela indique que chaque poids infinitésimal IL II pèse proportionnellement à son éloignement-courbe du côté de A (c'est à dire à partir de B...) ou encore proportionnellement à arc BI (= s) ! La proposition VII dit : Σ BO^2 DD = Σ BI IL II (BI est l'arc). Il faut reconnaître que Pascal est souvent plus clair.

Tel Michel Chasles qui deux siècles plus tard s'amusera à créer des théorèmes en en transformant d'autres par une transformation suffisemment déformante pour les rendre méconnaissables, Pascal a, grâce à une figure, transformé les propositions du § précédent. Qualifions cette figure de "rectifiante", car son rôle est d'étaler la partie courbe BH du triligne BHA en le segment rectiligne AC. Nous verrons plus loin ce qu'il en est de la déformation des théorèmes.



"Figure rectifiante"

Tout d'abord le triligne BHA est symétrisé par rapport à BA, simplement pour ne pas surcharger le dessin ; puis l'arc BH est "étalé" en AC et les promenades concomitantes sur l'arc BH et sur la droite AC sont régies par la ligne (courbe!) BC ; BC est construite de telle sorte que chaque parallèle à la base (GR, FD) soit égale à l'arc qu'elle délimite (à partir de B) ; donc, par la nature de la ligne BC

GR = BI FD = BO EE = II

Puis les rôles sont partagés entre trois trilignes
- le triligne T = BHA porte les arcs BO (les DD sont les divisions égales sur l'axe, des arcs "naissent de divisions égales")
- son double T' = BPA porte les sinus sur la base (les II sont les divisions égales sur l'arc)
- le triligne $\mathcal{T}$ = BCA joue le rôle de passeur entre BHA et BPA, il porte des ordonnées à la base GE et les (EE = II, divisions égales) et des ordonnées à l'axe FD (DD divisions égales)

avec la correspondance :
- les arcs de T sont les ordonnées à l'axe de $\mathcal{T}$ (DD égales)
- les sinus sur la base de T' sont les ordonnées à la base de $\mathcal{T}$ (II et EE divisions égales et égales entre elles),

correspondance qui transforme les rapports "sinus sur la base - arcs" d'un certain triligne en les rapports (connus) "ordonnées à l'axe - ordonnées à la base" d'un autre.

La figure rectifiante opère un transfert de propriétés ; les propositions VI, VII, XI, sont de simples traductions des propositions I, II, V, et la proposition XII traduit le lemme général.

Simples images des propositions du § précédent, VI, VII, XI, XII sont encore du ressort de l'identité d'un attribut géométrique avec lui-même.

Lues aujourd'hui :

$$\int y\, ds = \int s\, dy$$ (Proposition VI, traduction de propos.I)

$$\int s^2\, dy = 2\int s\, y\, ds$$ (Proposition VII, traduction de propos.II)

$$\int y\, s^2\, dy = \int s\, y^2\, ds$$ (Proposition XI, traduction de propos. V)

En résumé

L'intégration par parties est née de la géométrie, avec un terme tout intégré nul, et sans le signe moins, impensable au XVII ème siècle.

L'attribut géométrique est variable, ce peut être un espace (aire), un solide (volume), un bras, mais le principe est toujours le même : c'est l'identité de cet attribut géométrique avec lui-même qui fournit les égalités que nous lisons aujourd'hui comme des formules d'intégration par parties.

Il y a une manière de généralité, dans le fait que y (le triligne) est général, mais on ne multiplie cet y que par des monômes en x (ou s, c'est la même chose puisque la figure rectifiante étale l'arc pour en faire une abcisse).

REMARQUES SUR CETTE LECTURE

Il est pratique de lire Pascal en pensant parallèlement "variables", "fonctions", "intégration curviligne, multiple, par parties" ; mais il ne faut pas oublier que Pascal n'a pas plus que les mathématiciens de son époque la notion de fonction, ni, donc, celle de variable ; et si ces objets que nous appréhendons maintenant comme des variables, x, y, s, nous apparaissent démocratiquement traités, aucune n'étant privilégiée, c'est qu'elles ne sont pas dans une dépendance fonctionnelle repérée, laquelle crée inmanquablement des hiérarchies ; leurs liens sont des liens de contiguïté géométrique. Sans aucun formalisme et à sa manière, Pascal parle de Σ DI DD, et pas de Σ DI(D) DD.

Les choses gardent leur essence géométrique très profondément dans ces traités ; la preuve ? si nous nous laissons aller au schéma de pensée pascalien géométrique, non fonctionnel, alors nous pouvons croire que la figure rectifiante crée des théorèmes vraiment nouveaux. Revenons sur les propositions II et VII.

Une somme de carrés d'ordonnées à la base est égalée à une somme triangulaire d'ordonnées à l'axe (propos. II)

Une somme de carrés d'arcs est égalée à une somme triangulaire de sinus (propos. VII)

A première vue l'intervention de la figure rectifiante peut paraître indispensable, et le résultat que ces deux propositions n'en font qu'une seule, un miracle.

Pourtant si Pascal avait pensé en termes de dépendance fonctionnelle plutôt que de contiguïté géométrique, il n'aurait pas ressenti le besoin d'inventer une figure de passage,

en effet, l'égalité $\int y^2\,dx = 2\int xy\,dy$ étant vraie pour toutes les dépendances fonctionnelles y(x) le changement purement nominal de y(x) en s(y) a pour effet immédiat d'écrire la proposition VII.

Le manque d'abstraction de ces traités où l'essence géométrique des objets est trop présente ne doit pas faire oublier leur extrême articulation ; des cascades de réductions d'intégrales y ont été effectuées par Pascal pour résoudre les difficiles problèmes de roulette, par des méthodes qui suscitèrent l'admiration de ses contemporains.

Biblographie

Pascal Oeuvres complètes. Bibliothèque de la Pléiade.
Articles de J.P. Cléro, dans «Aspects divers de l'infini en mathématique et en philosophie». CRDP Rouen.