LA CLASSIFICATION DES COURBES DU TROISIEME ORDRE.

ASPECTS ALGÉBRIQUES ET ASPECTS PROJECTIFS : L'ABBE DE GUA DE MALVES ET PATRICK MURDOCH.

Denis LANIER
Jean-Pierre LE GOFF
IREM de Basse Normandie
Mai 1991[1]

INTRODUCTION.

L'objectif de cet article est l'étude de deux commentateurs au XVIII° siècle du traité de Newton sur la classification des courbes du troisième ordre - les cubiques. Le texte de Newton est plutôt allusif et il a suscité pendant tout le XVIII° siècle nombre de commentaires et tentatives d'éclaircissement. A ce moment les méthodes analytiques, algébriques, projectives sont encore intriquées et concurrentes. Leurs domaines respectifs d'application ont des frontières qui ne sont pas encore complètement fixées.

1 Le texte qui suit, rédigé pour les besoins et comme trace d'un atelier sur les courbes du troisième ordre, proposé au Colloque inter-IREM d'Histoire des Mathématiques de Lyon, les 31 mai et 1er juin 1991, est un prolongement des travaux entrepris depuis quelques années par Denis Lanier et Jean-Pierre Le Goff sur l'héritage arguésien. On en trouvera des traces écrites dans *SCHOLIES*, *Actes du Séminaire Interdisciplinaire d'Histoire des Sciences du Lycée Malherbe de Caen*, numéros 7 & 8 (*L'héritage arguésien*), 9 & 11 (*La perspective dans les pays anglo-saxons*), de février, juin & octobre 1989 & juin 1990; dans les *Cahiers de la Perspective* de l'IREM de Basse-Normandie, n° 5, juin 1991, et n° 6, à paraître; dans les *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, Actes des colloques de Lille et Paris organisés en 1989 par le Séminaire d'Histoire, Théorie et Pratique de la Perspective, à paraître ; et dans les Actes de l'Université d'été de Lille (7-13 juillet 1990) organisé par la Commission inter-IREM d'Épistémologie (*Un mémoire de Clairaut sur les courbes du 3è ordre*), à paraître.

Nous voudrions, en particulier, montrer que les méthodes projectives - dont on a souvent dit qu'elles furent oubliées après Desargues avant de renaître quasiment ex-nihilo à la fin du siècle avec Monge et Poncelet - restent présentes chez bien des mathématiciens de l'époque et leur paraissent peut-être plus légitimes que les méthodes algébriques. Cette légitimité relève-t-elle de l'art de démontrer ou de l'art de persuader ? Vérité *de jure* ou *de visu*, c'est ce que le retour au texte devrait permettre de démêler.

La classification des courbes par leurs équations est, on le sait, un des effets les plus importants de la *Géométrie* de Descartes. Descartes opère une première séparation entre courbes algébriques (qu'il appelle géométriques) et courbes transcendantes (qu'il nomme mécaniques). Par ailleurs, pour les courbes géométriques, Descartes mêle une classification par ordre liée au degré de l'équation et un classement par genre lié à sa résolution du problème de Pappus. Pour les courbes du premier et du second ordre (le premier genre de Descartes) la classification reconduit les espèces classiques : droites, cercles, ellipses, paraboles, hyperboles. Dans les mêmes termes, le problème de la classification en espèces des courbes du troisième degré se pose donc "naturellement". Reste l'ambiguïté du concept d'espèce : quelles particularités d'une courbe (branches infinies, point singulier) permettent-elles de faire un classement ? Et ce classement correspond-il à une définition géométrique - y compris projective - caractéristique ?

L'*ENUMERATIO* DE NEWTON.

Newton est le premier à publier un travail sur le troisième degré. Il s'agit d'un traité en latin, l'*Enumeratio linearum tertii ordinis*, publié en 1704 en appendice de l'édition anglaise de l'*Opticks*, mais il avait été écrit sans doute entre 1660 et 1676. Newton y montre sa maîtrise en géométrie algébrique, puisqu'il y utilise deux axes de coordonnées, avec des coordonnées positives ou négatives, ce qui lui permet de travailler dans les quatre quadrants du repère à la différence de Descartes. La Hire et Wallis avaient utilisé eux-mêmes des coordonnées négatives, mais ils n'étaient pas allés jusqu'à un tel point de généralité.

Newton commence son livre en définissant ce troisième ordre comme étant soit le degré de l'équation - *le nombre de dimensions de l'équation entre les ordonnées et les abscisses* - soit encore le nombre maximum de points d'intersection de la courbe avec une droite.

La première étape consiste à étendre à ces courbes le vocabulaire et les définitions des sections coniques : principalement, les diamètres (obtenus par l'alignement des centres de gravité des points d'intersection de la courbe avec des transversales parallèles), les asymptotes (trois au maximum, avec la propriété que la somme des segments compris entre chaque branche de la courbe et une asymptote est le même de part et d'autre du diamètre conjugué de la transversale), enfin une généralisation des "équations" coniques (au sens apollonien du terme), avec des définitions adaptées du *latus rectum* et du *latus transversum* avec la propriété que le produit des segments compris sur deux transversales parallèles aux axes, entre le point d'où elles sont menées et la courbe, sont entre eux dans un rapport constant.

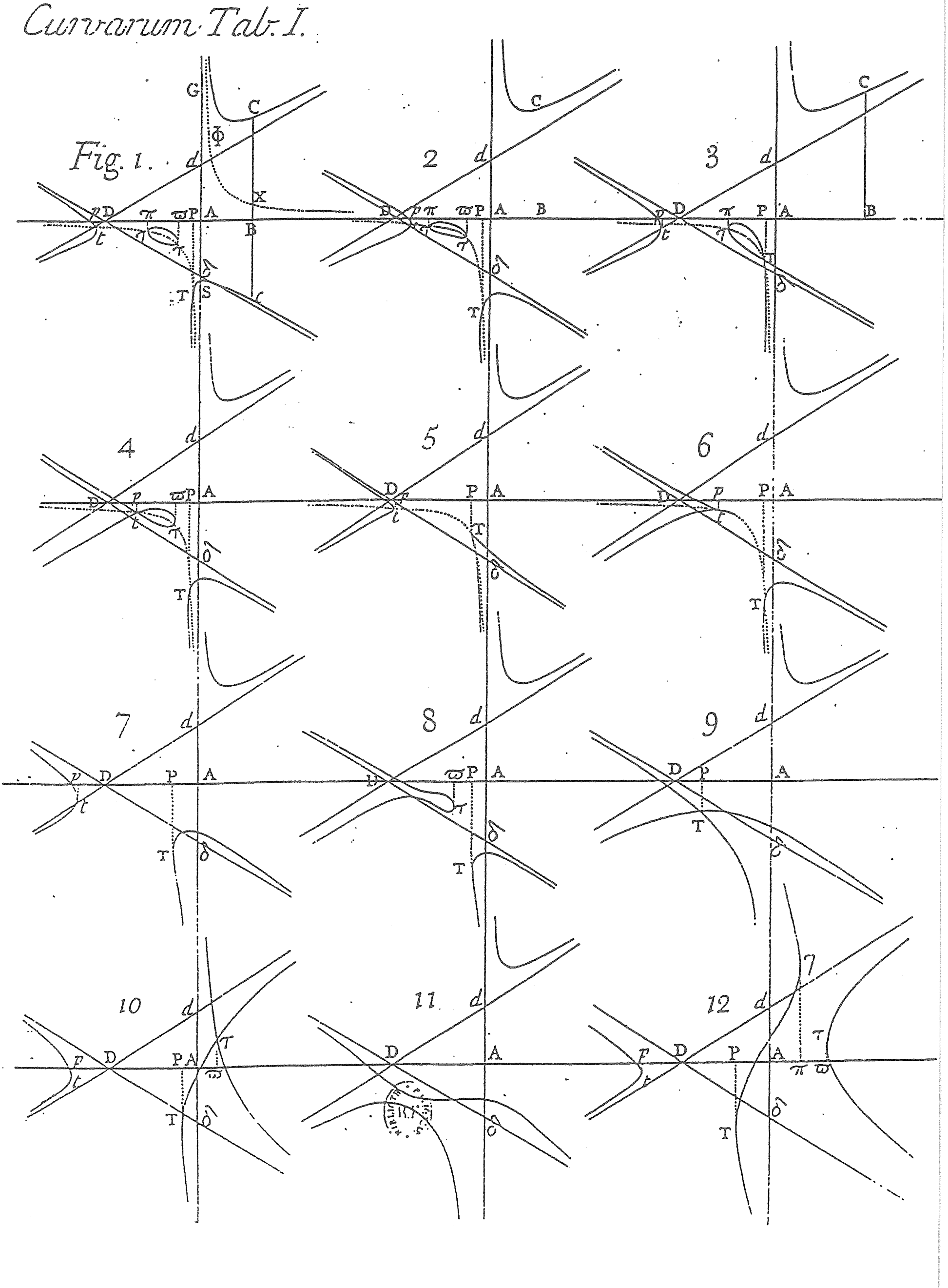
Le travail de Newton consiste ensuite à une discussion sur le nombre et la nature des racines de certaines équations déduites de l'équation initiale. Nous ne reprenons ici que les grandes idées de la classification, sans entrer dans le détail.

Newton réduit d'abord, par des changements d'axes appropriés, l'équation générale d'une courbe du troisième degré à quatre cas suivant les racines du polynôme obtenu en prenant les termes du troisième degré : y^3, y^2x, yx^2 et x^3.

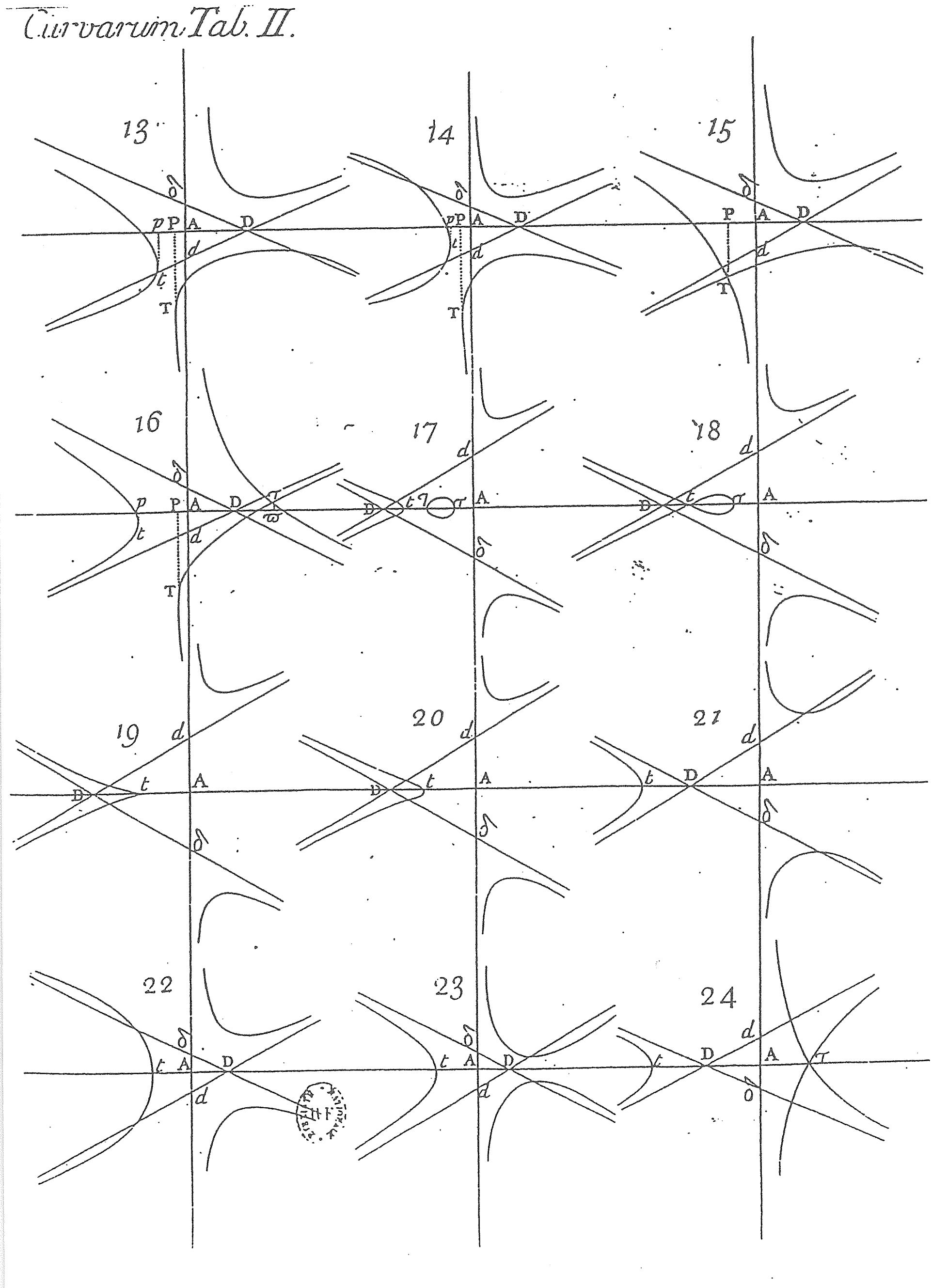
Dans le cas où ce polynôme n'a pas de racine triple, il a au moins une racine réelle différente des éventuelles autres racines. Pour cette racine, on a une branche hyperbolique simple avec une asymptote. On place l'axe des ordonnées sur cette asymptote : les termes en y^3 et y^2 disparaissent. On déplace ensuite l'origine sur l'asymptote de manière à faire disparaître les termes en x^2y et xy. On obtient alors une équation du type :

$$\boxed{xyy + ey = ax^3 + bxx + cx + d}$$

HORS-TEXTE I.
Planche I de l'*Enumeratio* de Newton (1704).

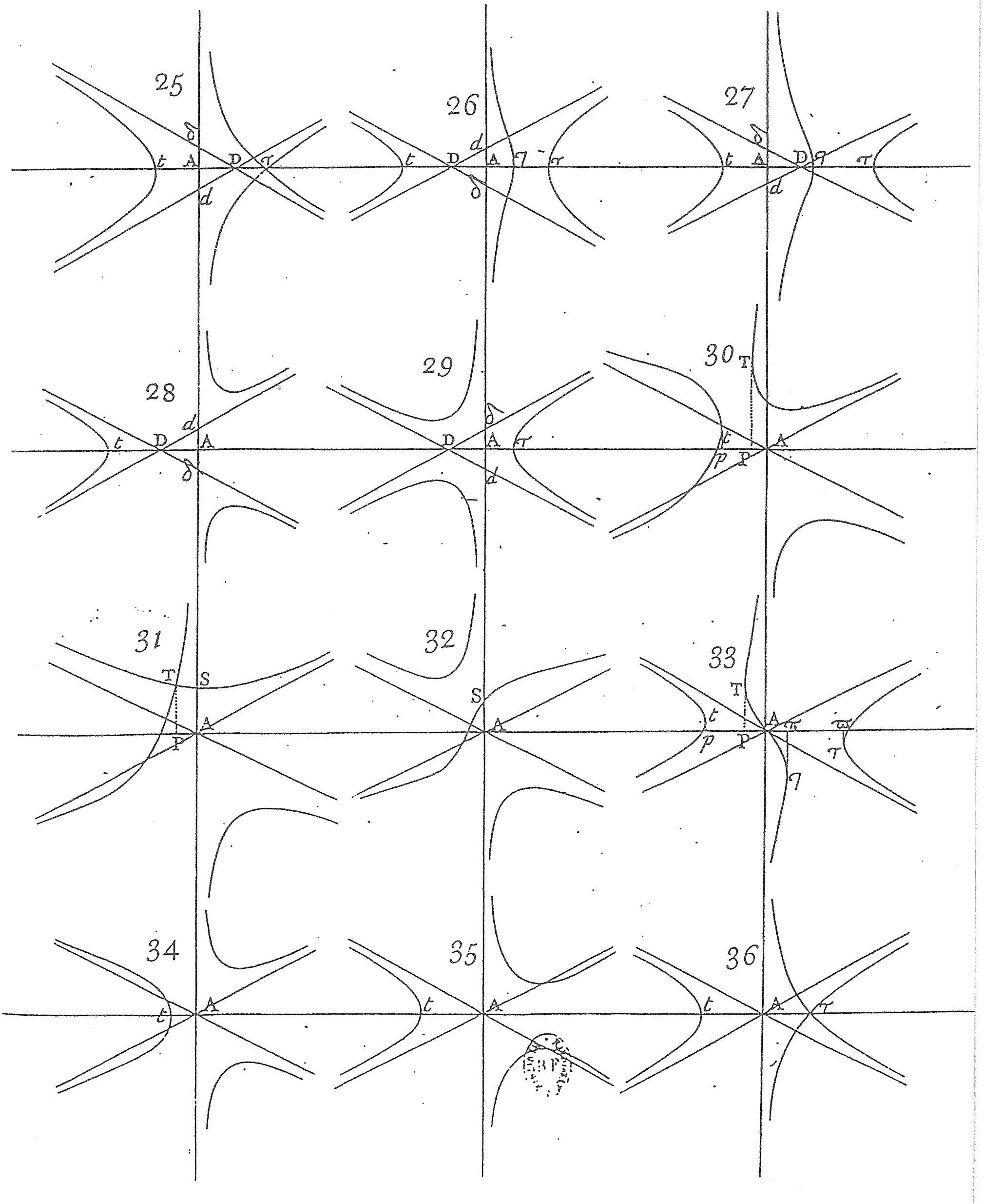


HORS-TEXTE II.
Planche II de l'*Enumeratio* de Newton (1704).



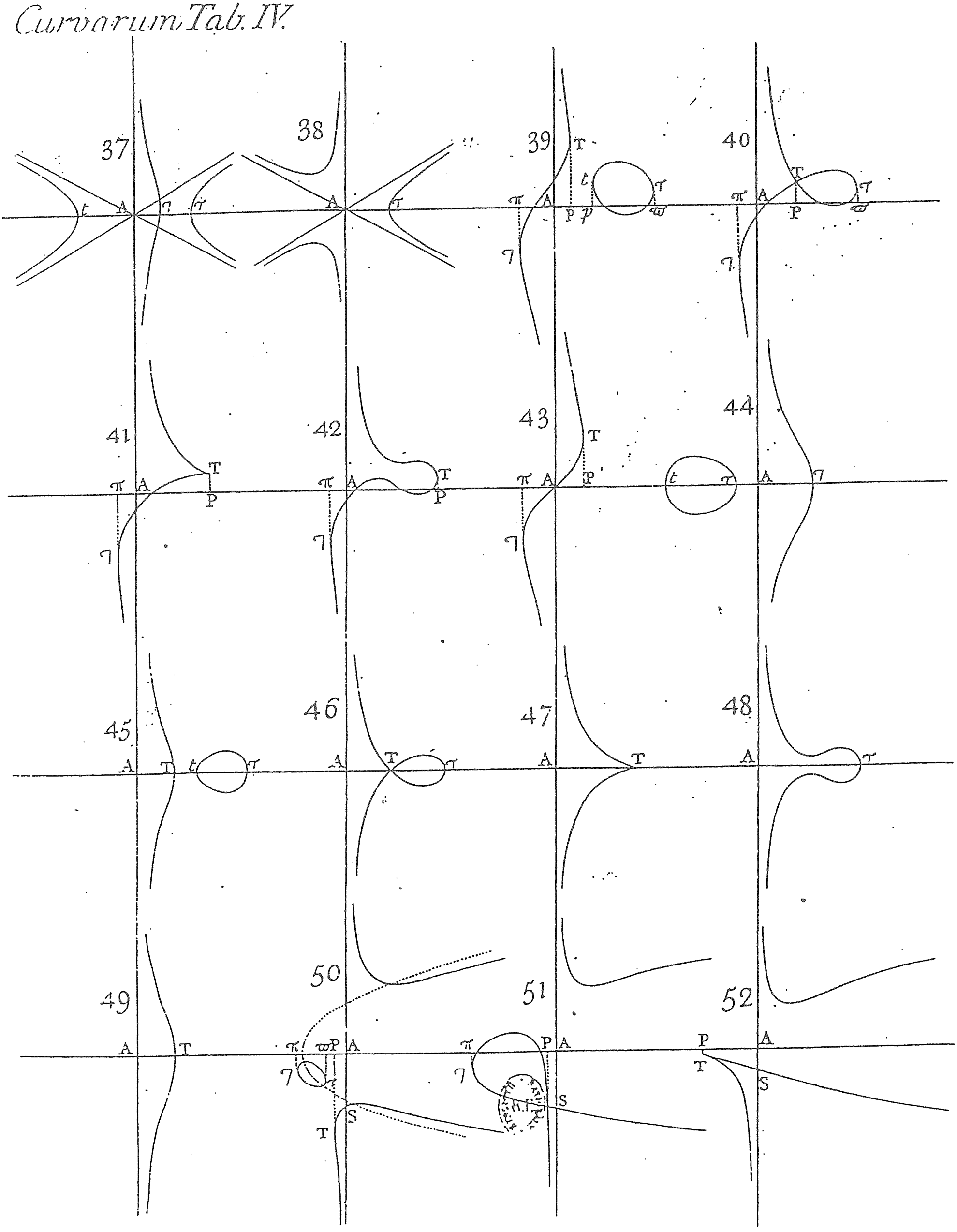
HORS-TEXTE III.
Planche III de l'*Enumeratio* de Newton (1704).

Curvarum Tab. III.

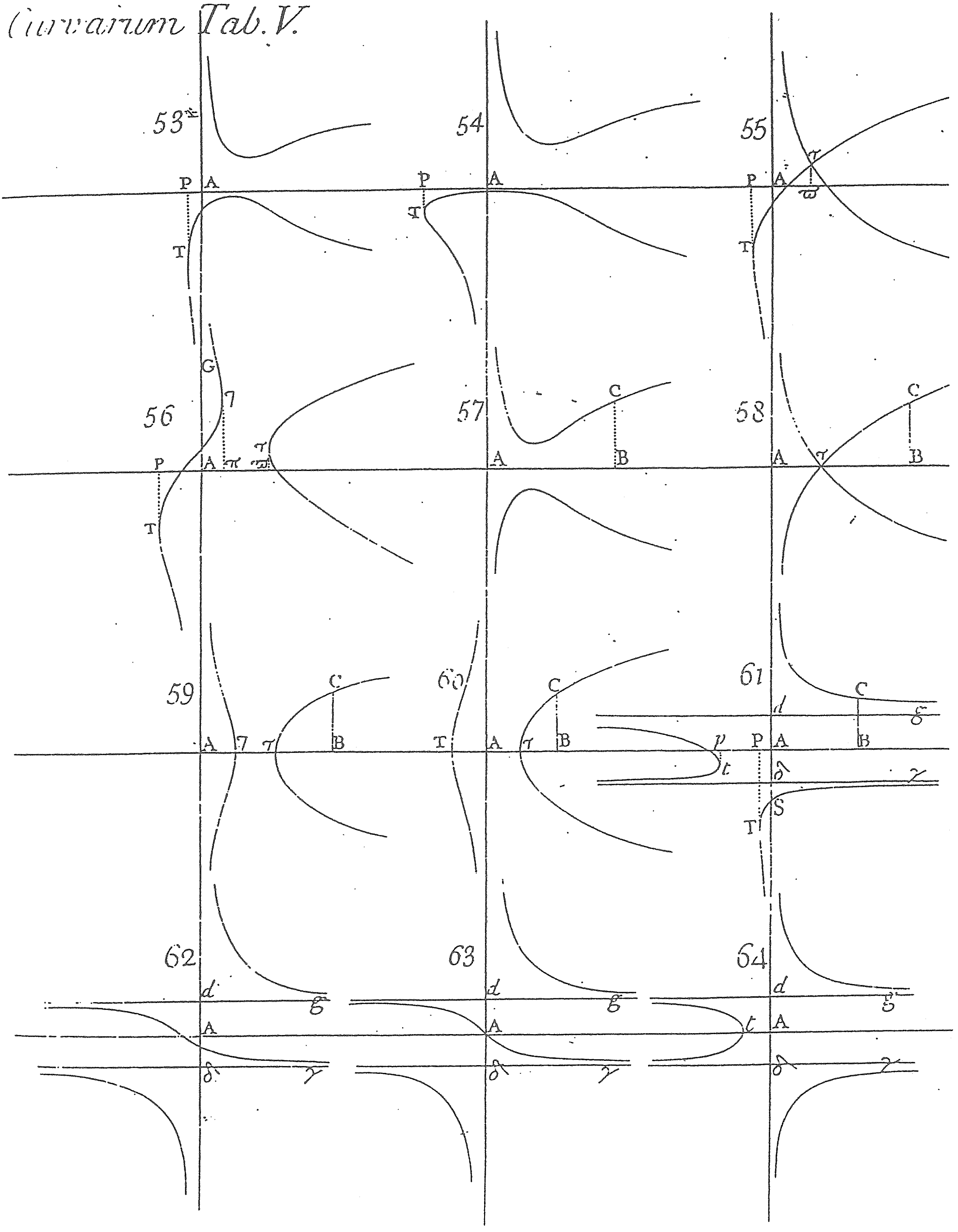


HORS-TEXTE IV.

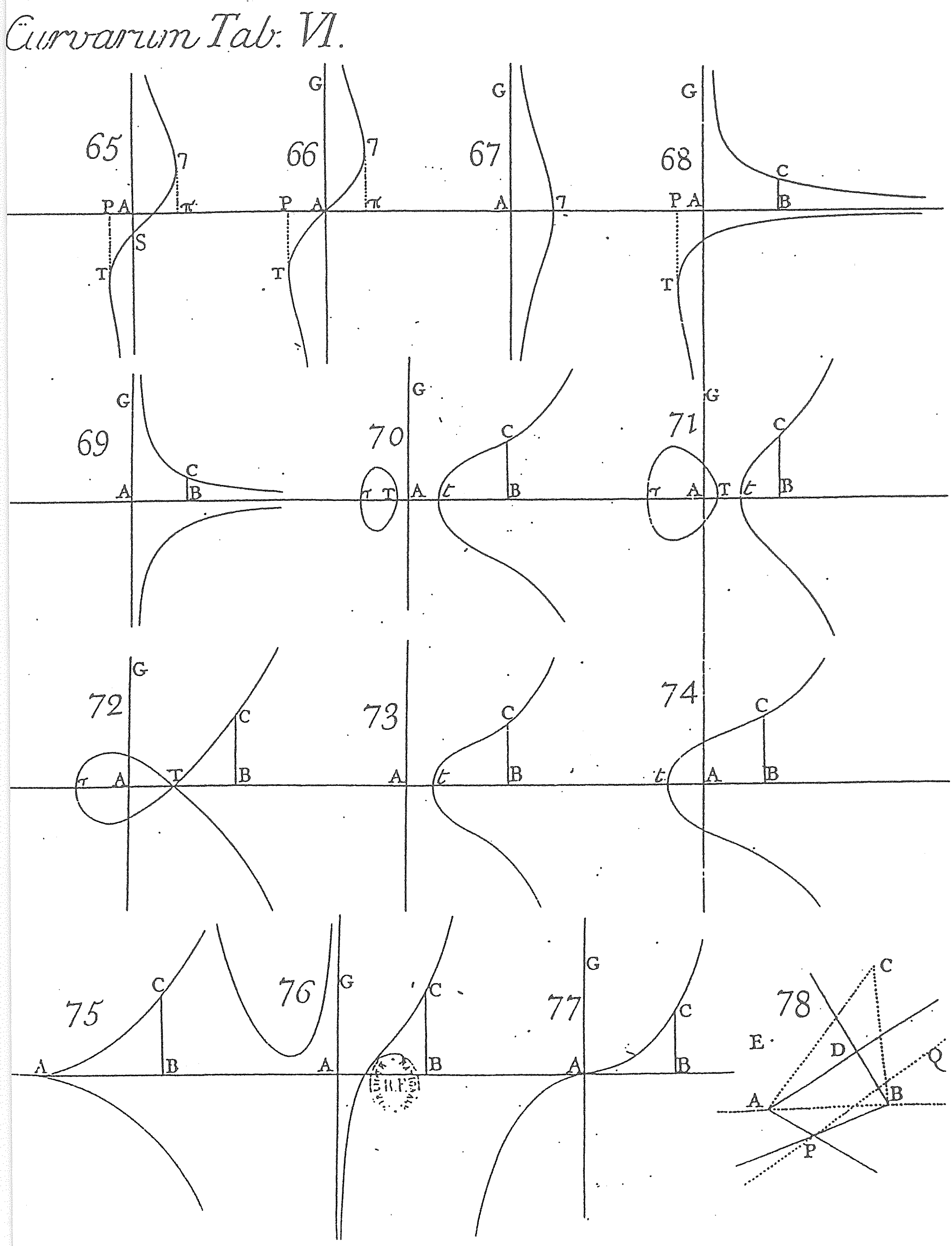
Planche IV de l'*Enumeratio* de Newton (1704).



HORS-TEXTE V.
Planche V de l'*Enumeratio* de Newton (1704).



HORS-TEXTE VI.
Planche VI de l'*Enumeratio* de Newton (1704).



On distingue ensuite trois cas suivant les autres racines de l'équation [$xy^2 = ax^3$].

* S'il y a deux racines réelles distinctes (soit “a>0”), on obtient les *hyperboles redondantes* (car elles ont trois asymptotes, soit une de plus que l'hyperbole conique). Sur les planches du traité de Newton (Hors-textes I à VI), il s'agit des figures 1 à 38 (Hors-textes I à IV).

** S'il y a deux racines imaginaires (soit “a<0”), on obtient les *hyperboles défectives* (car elles n'ont qu'une asymptote). Voir les figures 39 à 49 (Hors-texte IV).

*** S'il y a deux racines égales (soit “a=0”), on obtient une courbe avec une asymptote simple et une branche parabolique, ou deux asymptotes parallèles, ou encore une asymptote double ou imaginaire. Newton les nomme les *hyperbolismes de coniques*. Voir les figures 50 à 69 (Hors-textes IV à VI).

S'il y a une racine triple dans l'équation des termes du troisième degré, on distingue trois nouveaux cas suivant que cette racine est, ou non, racine de l'équation des termes du second degré.

* Si ce n'est pas le cas, on obtient une équation du type suivant :

$$\boxed{yy = ax^3 + bxx + cx + d}$$

On obtient ainsi, en discutant sur le type de racines du polynôme du membre de droite, les cinq ***paraboles divergentes***. Elles sont représentées sur les figures 70 à 75 (Hors-texte VI).

Les figures 70 et 71 correspondent au même cas d'équation type :

$$y^2 = x(x^2-1).$$

La distinction tient au nombre de racines positives de l'équation

$$[\ ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\ ].$$

La figure 72 correspond au cas d'équation type :

$$y^2 = x^2(x+1).$$

La figure 73 correspond au cas où il y a un point double isolé à l'origine, d'équation type :

$$y^2 = x^2(x-1).$$

La figure 74, en apparence identique à la précédente, correspond au cas où il n'y a pas de point isolé, d'équation type :

$$y^2 = x(x^2+1).$$

La figure 75 correspond au cas d'équation type :

$$y^2 = x^3.$$

** Si au contraire, la racine triple est aussi racine, et tout d'abord racine simple, de l'équation des termes du second degré, on obtient une équation du type :

$$\boxed{xy = ax^3 + bxx + cx + d}$$

On obtient alors le *trident* ou parabole de Descartes, représenté sur la figure 76 (Hors-texte VI).

*** Enfin, si cette racine triple est racine double de l'équation des termes du second degré, on obtient une équation du type :

$$\boxed{y = ax^3 + bxx + cx + d}$$

La courbe correspondante est la *parabole cubique* ou *wallisienne*, représentée sur la figure 77 (Hors-texte VI).

Newton trouve ainsi 72 espèces de courbes du troisième ordre. Dans son commentaire de l'*Enumeratio*, Stirling[2] en 1717 complétera la classification avec 4 nouvelles espèces. De Gua de Malves[3] en ajoutera encore 2 en 1740.

A la suite de cette énumération, que l'on pourrait comparer à un travail d'entomologie, et qui n'est accompagné que de peu de justifications, Newton

---

2 Stirling, *Linae Tertii Ordinis Neutonianae, sive Illustratio Tractatus D. Neutoni, De Enumeratione Linearum tertii ordinis*, Oxford, 1717, réédité en France, en 1797 chez Duprat.

3 Jean-Paul de Gua de Malves, *Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel, les propriétés, ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres*, Paris, 1740.

donne une *belle et curieuse proposition* [4], énoncée sans autre explication, et dont les conséquences ne sont pas plus développées.

> *"Si sur un plan infini éclairé par un point lumineux on projette les ombres de figures, les ombres des sections coniques seront toujours des sections coniques, celles de courbes du second genre seront toujours des courbes du second genre, celles des courbes du troisième genre seront toujours des courbes du troisième genre, et ainsi de suite à l'infini. Et de même qu'un cercle par son ombre projetée engendre toutes les sections coniques, de même les cinq paraboles divergentes engendrent par leurs ombres et exhibent toutes les autres courbes du second genre, et de même on peut trouver certaines courbes plus simples d'autres genres qui formeront sur un plan par leurs ombres projetées à partir d'un point lumineux toutes les autres courbes du même genre."* [5]

Ce court paragraphe a évidemment beaucoup intrigué les commentateurs de Newton. Nous étudierons ci-dessous deux de ces commentaires : celui de Jean-Paul de Gua de Malves et celui de Patrick Murdoch.

LES *USAGES DE L'ANALYSE* PAR DE GUA DE MALVES.

Le commentaire de Jean-Paul de Gua de Malves, paru en 1740, est le premier à essayer de donner une interprétation algébrique de la proposition de Newton sur la génération par ombrage des courbes du troisième ordre. Il est aussi le premier à tenter une analogie entre les points singuliers d'une courbe et ses branches infinies ; analogie qu'il développe à l'aide d'un travail algébrique sur l'équation de la courbe mené parallèlement avec un raisonnement projectif qui montre la "*nécessité* " de cette analogie.

De Gua se trouve donc confronté au problème de la primauté, de la légitimité respective de la méthode algébrique et de la méthode projective. Il affirme ainsi que les raisonnements purement algébriques, à propos des points singuliers et des branches infinies ne suffisent pas à comprendre la

---

4 Michel Chasles, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*, Bruxelles, 1837, Paris, 1889 pour la 3è éd., p.145.

5 Newton, *Enumeratio de linearum tertii ordinis*, Londres, 1704, p.157.

nature de cette analogie : quel en est la raison "*a priori* " ? Ses travaux lui permettront de conclure que l'analogie était "*absolument nécessaire* ", qu'elle est légitimée par un raisonnement projectif.

Notons de surcroît que de Gua se trouve ainsi mêlé au débat sur les méthodes infinitésimales ; son ouvrage est intitulé : *Usages de l'Analyse de Descartes pour découvrir, sans le secours du Calcul Différentiel, les Propriétés, ou Affections principales des Lignes Géométriques de tous les Ordres*. Comme on le verra, de Gua, par ailleurs traducteur de Berkeley, n'est pas foncièrement hostile aux méthodes infinitésimales, qu'il utilise d'ailleurs sans difficulté, mais il veut les réserver aux situations où il n'y a pas d'autre méthode possible. Ce qui n'est pas le cas des courbes algébriques, et, en particulier, de celles du troisième ordre.

Jean-Paul de Gua de Malves est né en 1712 à Carcassonne, d'une famille noble et ancienne. Son père ayant été ruiné par la chute de Law, il embrasse la carrière ecclésiastique, vient à Paris et se livre à l'étude, en particulier des mathématiques. Son premier ouvrage est, en 1740, l'*Usage...*, dont le succès lui ouvre, à 28 ans, les portes de l'Académie Royale de Sciences. De Gua va se trouver mêlé aux débuts de l'*Encyclopédie* : il est chargé en 1746 de la traduction de la *Cyclopaedia* de Chambers, mais le projet dépasse rapidement la simple traduction et de Gua se fâche avec les libraires concernés. Finalement l'entreprise est confiée en 1747 à d'Alembert et Diderot avec les suites que l'on connaît.

En dehors de ses travaux purement mathématiques, il traduit Berkeley en 1744, et publie un certain nombre d'ouvrages sur l'économie : un essai sur le déclin du commerce extérieur de la Grande-Bretagne ou un projet de recherche aurifère en Languedoc. Il tente d'ailleurs de réaliser ce dernier projet, mais il se casse la jambe en allant visiter les travaux, et dépense toute sa petite fortune en essais infructueux. Il meurt à Paris en 1786, dans un état proche de l'indigence.

Le livre qui nous intéresse est dédié à Son Altesse Sérénissime Monseigneur de Clermont. Il est précédé d'une préface importante, que nous allons détailler avant d'entrer dans le corps du sujet.

De Gua insiste d'abord sur la recherche des "*vrais principes des connaissances acquises par des voies éloignées* " en géométrie. Cette recherche de clarté et de simplicité doit permettre d'apercevoir d'un coup d'œil l'étendue précise des conclusions.

Concernant le calcul infinitésimal :

> "*on devra s'étonner de ce qu'on n'a point encore essayé de se passer autant qu'il serait possible du calcul différentiel dans la recherche des propriétés ou des affections des Lignes Géométriques.*" [6]

La première raison de cet étonnement est que la dénomination "géométrique" vient de la classification par Descartes des courbes par leurs équations. Il paraît donc naturel que ce soit l'analyse cartésienne et non celle des infiniment petits qui conduise aux propriétés de ces lignes.

Le calcul infinitésimal peut donc être réservé aux cas où il entre des expressions différentielles dans le problème lui-même, c'est-à-dire, soit s'il concerne des courbes mécaniques, soit s'il touche à une rectification ou à une quadrature. Mais s'il s'agit d'une courbe géométrique et de questions sur les points singuliers, les branches infinies ou les tangentes, on doit pouvoir en donner une solution purement algébrique, dans la lignée de Descartes. Suit un paragraphe à la gloire de ce dernier :

> "*Philosophe profond, ornement et de notre nation et de son siècle (...) dont toutes les pensées ont été fécondes, dont les fautes mêmes ont été celles d'un grand homme...*" [7]

De Gua cite ensuite l'*Enumeratio* de Newton, livre "sublime". Mais on peut, d'après lui, faire un reproche à Newton :

> "*la route qu'il a tenue dans une entreprise si difficile se dérobe aux yeux de ceux qui aperçoivent avec étonnement le degré d'élévation auquel il est parvenu.*" [8]

---

6 De Gua, op. cit., préface, p.viii.
7 De Gua, op. cit., préface, p.xi.
8 De Gua, op. cit., préface, p.xii.

Les quelques indices laissés par Newton, laissent penser que ce dernier a utilisé l'Analyse de Descartes "*portée même à un degré de perfection que le seul Monsieur Newton paraît avoir connu*" [9].

Ainsi se précise l'objectif du traité : "*suppléer les preuves qui manquent dans le traité de Monsieur Newton*"[10]. Cependant ce travail va amener de Gua à des conséquences imprévues, à des usages inconnus de l'Analyse de Descartes, qui conduisent à plus de succès que le Calcul Différentiel.

De Gua présente ensuite le plan de son ouvrage :

la section I étudie les centres de symétrie, comme exemple de sa méthode ;

la section II expose cette méthode pour les branches infinies et les points singuliers, et la compare avec la méthode infinitésimale ;

la section III applique la méthode à divers problèmes.

Le livre, qui comporte 457 pages, est très touffu, avec des digressions et des polémiques avec d'autres auteurs, en particulier l'Abbé de Bragelongne. De Gua recherche des méthodes générales qui puissent s'appliquer à toutes les courbes algébriques, et non seulement aux courbes du troisième ordre. Mais cette méthode est en fait multiple, et sur un sujet donné, coexistent plusieurs points de vue. C'est pourquoi, nous avons choisi de regrouper le travail de de Gua en plusieurs grands thèmes, qui se trouvent éparpillés dans l'ouvrage. D'autre part, le cadre de cette étude nous a incité à restreindre le champ d'application des résultats aux courbes de degré inférieur ou égal à 3. L'ouvrage se veut beaucoup plus général, et donne pour les applications, des résultats jusqu'à l'ordre 5. Enfin, nous avons modernisé un certain nombre de notations. La présentation qui suit n'est donc pas du tout fidèle à l'esprit du livre, mais, peut-être plus accessible.

ALGEBRE ET CALCUL DIFFÉRENTIEL.

L'objectif de de Gua est de montrer qu'on peut se passer du calcul infinitésimal pour étudier les courbes géométriques. Une technique usuelle,

9 De Gua, op. cit., préface, p.xii.
10 De Gua, op. cit., préface, p.xii.

dans les deux méthodes, est le changement d'origine et/ou d'axes, pour placer l'origine en un point particulier ou un axe sur une asymptote.

Si l'équation initiale de la courbe est de la forme [$E(x,y) = 0$], en faisant un changement de repère, on obtient une équation du type :

$$E(p+nu,\ q+mu) = 0.$$

"p" et "q" correspondent au changement d'origine ; "n" et "m" sont les nouvelles coordonnées.

Pour étudier cette nouvelle équation, de Gua indique que l'on peut : soit développer algébriquement le polynôme et l'ordonner suivant "n" et "m" ; soit utiliser la différentiation, en remarquant que l'équation est semblable à :

$$E(x+dx,\ y+dy) = 0.$$

Les coefficients du développement algébrique de $E(x+dx, y+dy)$ sont les différentielles successives d'ordre "n" ("n" étant inférieur ou égal au degré de l'équation), divisées par "n!", dans lesquelles on supprime les différentielles d'ordre supérieur à 1.

De Gua ne donne pas la démonstration de ce résultat, mais cite des mémoires de Saurin et Bernoulli[11]. Il s'agit en fait de ce que nous appelons la formule de Taylor généralisée aux polynômes à deux variables.

De Gua applique cette méthode à la recherche d'un éventuel centre de symétrie, et arrive ainsi au résultat suivant : on prend les différentielles de l'équation jusqu'à "n-1" ("n" degré de l'équation). Si "n" est pair on prend les différentielles d'ordre impair, si "n" est impair, on prend celles d'ordre pair. En annulant tous les coefficients des $(dx)^{k-i}(dy)^i$, on obtient un système qui donne l'éventuel centre de symétrie. De Gua traite ensuite les exemples des cercles, des coniques, de la cassinoïde et de quelques cubiques. Par exemple, si on considère la courbe d'équation : [$xyy + ey = ax^3 + bxx + cx + d$], la différentielle d'ordre 2 donne l'équation :

$$2x(dy)^2 + 4ydxdy = (6ax+2b)(dx)^2.$$

---

11 *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, 1716, p.377 et 1711, p.55.

Un éventuel centre de symétrie doit vérifier le système :

$$\left|\begin{array}{l} xyy + ey = ax^3 + bxx + cx + d \\ 2x = 0 \\ 4y = 0 \\ 6ax + 2b = 0 \end{array}\right.$$

L'origine est donc centre de symétrie, si et seulement si :

$$b = d = 0.$$

Sur cette question, de Gua conclut que la méthode de recherche des centres est un exemple qui montre "*les rapports les plus secrets de l'Analyse ordinaire et du calcul différentiel*"[12], et que dans la suite, il utilisera la seule Analyse cartésienne, ce qui sera plus court, plus simple et plus naturel que le Calcul Différentiel.

INSPECTION DES EQUATIONS (I) : LA MÉTHODE DES "ÉQUIVALENTS".

De Gua utilise en fait plusieurs méthodes d'inspection des coefficients d'une équation pour en déduire diverses propriétés. Ces méthodes, souvent employées simultanément, ne paraissent pas toujours répondre à l'ambition décrite ci-dessus. Encore une fois, nous interprétons ici le texte pour tenter d'en décrire l'économie.

La première méthode utilisée pourrait être appelée des "équivalents". L'idée - qui est présentée comme ne soulevant aucun problème technique ni théorique - consiste à réduire, quand x tend vers 0, ou vers l'infini, l'équation de la courbe à une équation du type :

$$y^m = A.x^n \text{ ou } A.x^{-n} \qquad \text{("n" et "m" naturels).}$$

Ainsi, dans le cas d'une asymptote d'équation [$x = 0$] (c'est-à-dire : "x tend vers 0", "y tend vers l'infini"), on obtient une équation du type [$y^m = A.x^{-n}$]. De Gua distingue quatre cas suivant les parités respectives de "m" et "n" (en fait le cas où "m" et "n" sont pairs se ramène à l'un des trois autres). On a ainsi les trois types de branche infinie avec asymptote [$x = 0$] (voir figure 1) :

---

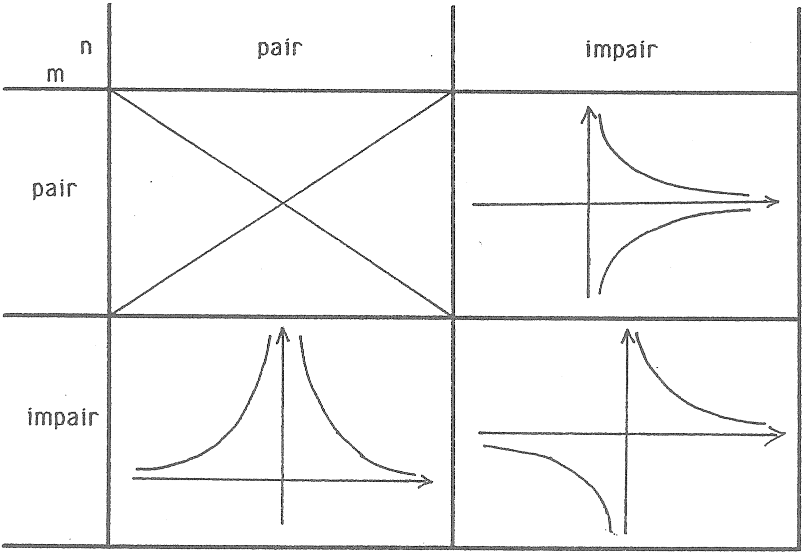
12 De Gua, op. cit., p.22.

si “n” et “m” sont impairs, on a la forme de l'*hyperbole conique*, du type [$y = 1/x$] ;

si “m” est pair et “n” impair, on a une forme d'*hyperbole cubique*, du type [$y^2 = 1/x$] ;

si “m” est impair et “n” pair, on a une autre forme d'*hyperbole cubique*, du type [$y = 1/x^2$].

[Fig. 1] Tableau des branches asymptotiques.



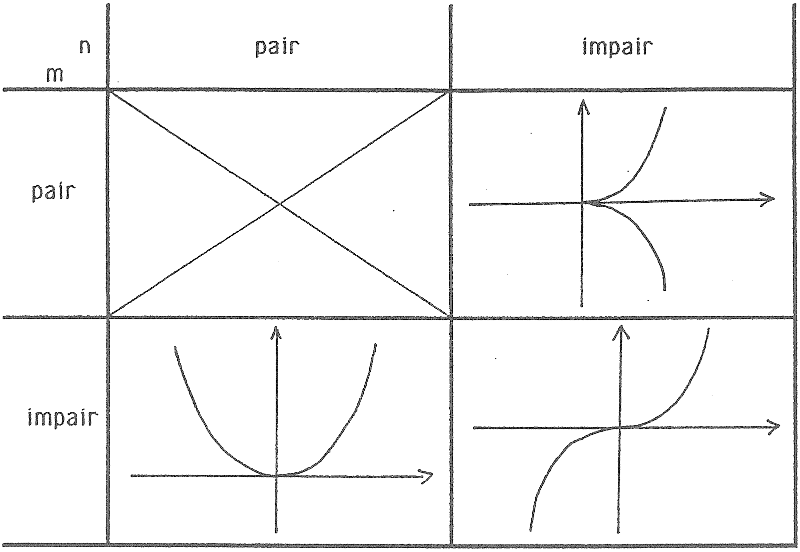
Dans le cas d'une branche parabolique d'axe (Oy), on se ramène à une équation du type : [$y^m = A.x^n$] (où “$m < n$”). On distingue de même trois cas, suivant les parités (voir figure 2) :

si “m” et “n” sont impairs, on a la forme de la *parabole cubique*, du type [$y = x^3$] ;

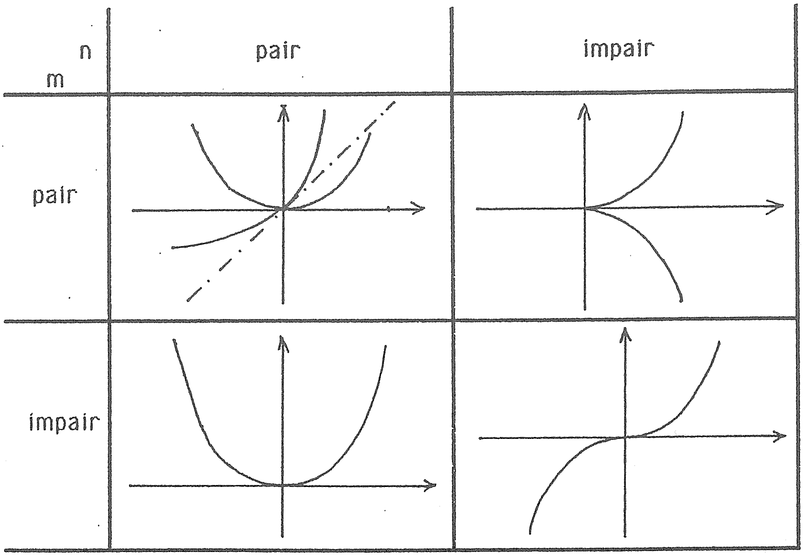
si “m” est pair et “n” impair, on a la forme d'une *parabole divergente*, du type [$y^2 = x^3$] ;

si “m” est impair et “n” pair, on a la forme d'une *parabole conique*, du type [$y = x^2$].

[Fig. 2] Tableau des branches paraboliques.



[Fig. 3] Tableau des points singuliers.



Dans le cas où l'origine est un point de la courbe, avec (Ox) comme tangente, on obtient une équation du type [$y^m = A.x^n$] (où "m < n"). De même la distinction des trois cas permet d'observer trois types de points (voir figure 3) :

si "m" et "n" sont impairs, on a un *point d'inflexion*, du type [$y = x^3$] ;

si "m" est pair et "n" impair, on a un *point de rebroussement* de première espèce, du type [$y^2 = x^3$] ;

si "m" est impair et "n" pair, on a un *point ordinaire*, du type [$y = x^2$].

De Gua note que le quatrième cas ("m" et "n" pairs) n'est pas à négliger : il conduit à un point d'intersection de deux branches de la courbe, ou *point de croix*, du type [$y^2 = xy$]. Il peut même conduire (dans le cas où $A < 0$) à un point isolé sans tangente, ou *point conjugué*, du type [$y^2 = -x^2$].

La classification que nous venons de présenter ne tient compte que d'un degré inférieur où égal à 3. De Gua travaillant dans un cadre plus général, il est amené à étudier des situations bien plus compliquées.

INSPECTION DES ÉQUATIONS (II) :
LE "TRIANGLE" DE DE GUA.

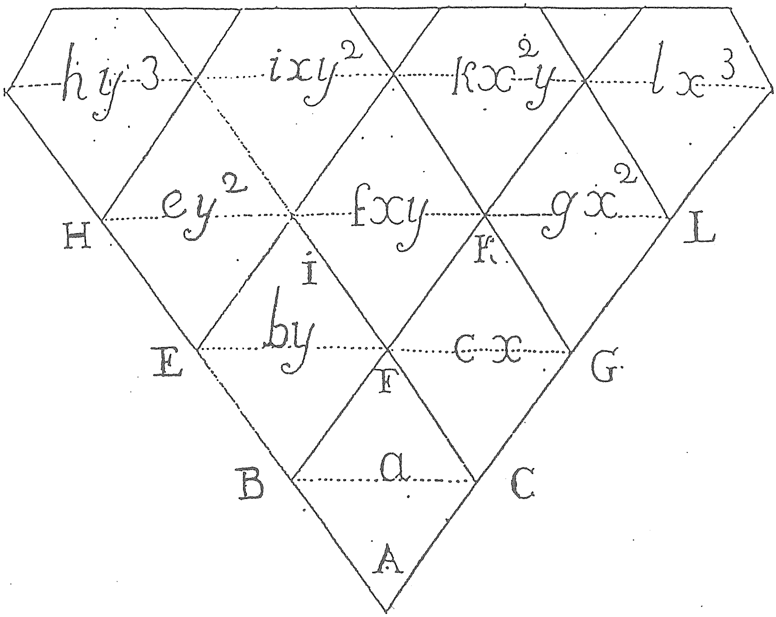
La deuxième méthode utilisée est celle du "triangle algébrique". D'abord on range dans un tableau (voir figure 4, qui est la figure originale) les termes de l'équation. Ceci est présenté sous forme de "demande" dans la Section II. Les lignes horizontales du triangle sont appelés les rangs.

Pour étudier la nature d'une branche infinie ou du point origine sur la courbe, on remplace dans l'équation "x" par "nu", "y" par "mu", pour étudier ce qui se passe dans une direction donnée. En fait cela revient dans le triangle à prendre "x" et "y" pour "n" et "m", et à multiplier chaque rang d'ordre "k" par "u^k".

On étudie pour chaque rang les racines de l'équation d'inconnue "n/m" ou "x/y" (multiplicité, racines communes à plusieurs rangs, ...).

L'examen des rangs inférieurs permet d'étudier la nature de l'origine comme point de la courbe. L'examen des rangs supérieurs permet l'étude des branches infinies. Nous ne donnons les résultats que pour les ordres 2 et 3.

[Fig. 4] Tableau original de de Gua de Malves.



Pour l'origine : comme la courbe passe par O, on est dans le cas où [a = 0]. Si le deuxième rang est non nul, on a un point simple avec une tangente donnée par la racine de ce deuxième rang. S'il manque aussi le deuxième rang inférieur, on a un point multiple. L'étude continue jusqu'au cas où on a une factorisation de l'équation initiale qui ramène la courbe à un ordre inférieur.

Ainsi, pour l'ordre 2, on a un seul type de point, le point simple, car les deux derniers rangs inférieurs ne peuvent manquer sans avoir une simplification.

Pour l'ordre 3, on a la classification suivante (voir la figure 5), en supposant à chaque fois qu'en O la courbe est tangente à (Ox) - s'il y a une tangente :

* *point simple*, [$a = c = 0$, $b \neq 0$]. On a deux cas suivant que [$y = 0$] est racine ou non du rang d'ordre 2, c'est-à-dire si "g" est nul ou non.

- Si [$g \neq 0$], on a un *point ordinaire*, du type [$y = x^2$].
- Si [$g" = 0$], on a un *point d'inflexion*, du type [$y = x^3$].

** *point double*, [$a = b = c = 0$]. On a trois cas suivant les racines du rang d'ordre 2.

- S'il y a deux racines réelles distinctes, on a le *point de croix*, du type [$xy = y^2$].
- S'il y a une racine double, on a un *point de rebroussement*, du type [$y^2 = x^3$].
- S'il n'y a pas de racine réelle, il n'y a pas de tangente, on a un point isolé, un *point conjugué*, "invisible", du type [$y^2 = -x^2$].

De Gua indique ainsi le nombre d'espèces de points suivant l'ordre de la courbe : 1 espèce pour l'ordre 2 ; 5 espèces pour l'ordre 3 ; 14 espèces pour l'ordre 4 ; 40 espèces pour l'ordre 5.

De même l'étude d'une branche infinie conduit à l'étude des rangs supérieurs. De Gua remarque qu'on peut transformer les branches hyperboliques en branches paraboliques, en changeant de repère pour "envoyer" l'asymptote à l'infini. Il suffit donc d'étudier les branches infinies avec direction asymptotique donnée, par exemple (Oy). Dans ce cas, [$x/y = 0$] est racine du rang supérieur. L'étude consiste à en étudier la multiplicité et à voir si elle est aussi racine des rangs inférieurs.

Pour une courbe du second degré, on ainsi une seule espèce de branche infinie (s'il y en a une dans la direction (Oy)), hyperbolique ou parabolique, avec les types [$y = 1/x$] ou [$y = x^2$].

Pour le troisième degré, on aboutit à la classification suivante (voir figure 5) :

* une *branche simple*, hyperbolique ou parabolique, du type : [$y = 1/x^2$] ou [$y = x^2$].

** une branche hyperbolique et une branche parabolique, ou deux hyperboliques parallèles, comme le *trident*, du type :

[$xy = x^3$] ou [$y = 1/(x^2-1)$].

*** une *branche imaginaire* avec deux asymptotes hyperboliques parallèles imaginaires, du type :

[$y = 1/(x^2+1)$].

**** une *branche parabolique cubique*, du type :

[$y = x^3$].

***** une *branche parabolique divergente*, du type :

[$y^2 = x^3$].

De Gua indique ainsi le nombre d'espèces de branche infinie suivant l'ordre de la courbe : 1 espèce pour l'ordre 2 ; 5 espèces pour l'ordre 3 ; 14 espèces pour l'ordre 4 ; 40 espèces pour l'ordre 5.

Il y a donc une "analogie" entre les espèces de points et les espèces de branches infinies que de Gua va ensuite aborder et que nous allons étudier maintenant.

L'ANALOGIE.

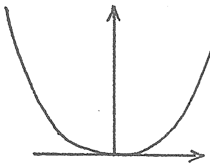
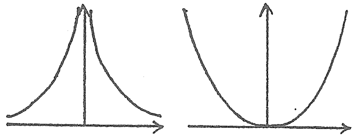
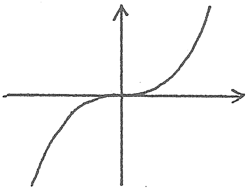
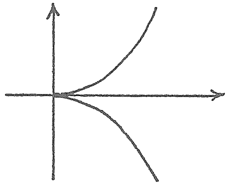
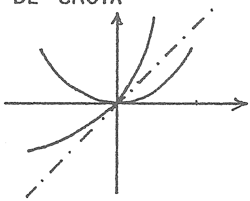
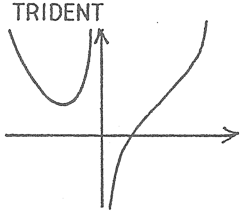
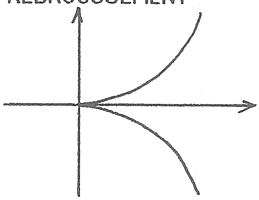
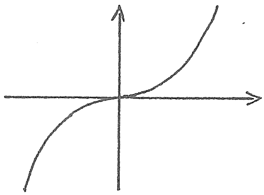
Il s'agit donc pour de Gua de rendre raison à cette analogie entre les espèces de points et les espèces de branches infinies. Les raisonnements purement algébriques "*ne peuvent (...) faire connaître la raison a priori de cette analogie ; c'est-à dire qu'on ne voit pas pourquoi il doit nécessairement y avoir une ressemblance si singulière entre ces deux indications.*" 13

L'idée de de Gua est d'utiliser une projection centrale et d'observer comment les courbes et leurs "*affections*" se transforment.

Sur la figure 6 (planche originale), S est le point lumineux, centre de la projection. La courbe que l'on va projeter est ADQB, la courbe projetée AdqB. La droite (FIG), intersection du plan de la courbe et du plan passant par S et parallèle au plan de projection passant, est la *directrice*. La droite

13 De Gua, op. cit., p.197.

[Fig. 5] Tableau récapitulatif de l'analogie relevée par de Gua de Malves.

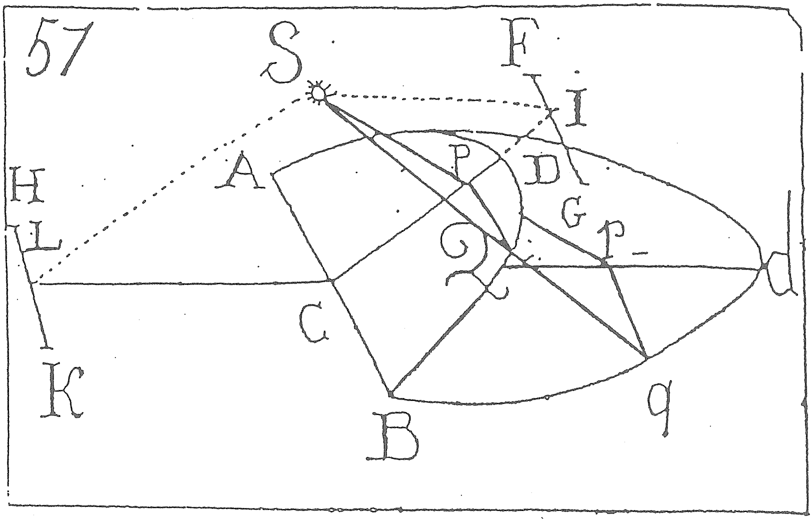
ESPECES DE POINTS	ESPECES DE BRANCHES INFINIES
SIMPLE $y \approx x^2$ 	SIMPLE $y \approx 1/x^2$ ou $y \approx x^2$ 
D'INFLEXION $y \approx x^3$ 	PARABOLE DIVERGENTE $y^2 \approx x^3$ 
DE CROIX $xy \approx y^2$ 	TRIDENT $xy \approx x^3$ 
DE REBROUSSEMENT $y^2 \approx x^3$ 	PARABOLE CUBIQUE $y \approx x^3$ 
CONJUGUÉ $y^2 \approx - x^2$	IMAGINAIRE $y \approx 1/(x^2 + 1)$

(HLK), intersection du plan de projection et du plan passant par S et parallèle au plan de la courbe, est l'*antidirectrice*.

De Gua effectue d'abord la projection par le calcul. Ainsi, dans le plan de la courbe (ABD), on prend comme origine I sur la directrice, la directrice comme axe des ordonnées. Dans le plan de projection (AdB), on prend comme origine L sur l'antidirectrice, l'antidirectrice étant prise comme axe des ordonnées. Si un point Q a pour coordonnées (x, y) dans le repère du plan (ABD), son projeté "q" a pour coordonnées (z, u) dans le repère du plan de projection. De Gua montre, à l'aide de triangles semblables, qu'en posant les constantes [SI = p] et [SL = q], on a les relations suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} x = pq/z \\ y = pu/z \end{array} \right.$$

[Fig. 6] Planche originale de de Gua de Malves.



En remplaçant x et y par ces valeurs dans l'équation de la courbe initiale, on obtient l'équation de la courbe projetée, qui est aussi polynômiale, après multiplication par z^n.

De Gua, indique, assez rapidement, les relations que l'on trouve alors entre les triangles algébriques des deux courbes. Par exemple, si on ordonne par rapport à "u", on trouve les mêmes rangs que dans le premier triangle rangé par rapport à "y", mais à l'envers à l'intérieur de chaque rang. De Gua conclut, sans autre forme de procès, que cela démontre l'Analogie par le calcul. Ce qui l'intéresse manifestement, c'est l'analogie sans calcul.

Par un raisonnement purement géométrique, "sur la figure", de Gua indique ainsi que :

- les points de la directrice sont les seuls à être projetés à l'infini, et ceux de l'antidirectrice ne reçoivent aucun point ;
- il y a conservation de l'alignement, du degré des équations, de la tangence et des branches infinies ;
- si on projette le point I, supposé être un point simple sur la courbe, avec une tangente autre que la directrice, on va obtenir une branche hyperbolique conique. Si I est un point d'inflexion, on obtient une branche hyperbolique cubique. Si I est un point de rebroussement, on obtient une autre branche hyperbolique cubique ;
- si on projette le point I, supposé être un point simple de la courbe, avec la directrice comme tangente, on obtient une branche parabolique conique. Si I est un point d'inflexion, on obtient une branche parabolique divergente. Si I est un point de rebroussement, on obtient une branche parabolique cubique. Enfin si I est un point de croix, on obtient une branche parabolique et une branche hyperbolique dans la même direction, soit le trident ;
- si on projette un point isolé, sans tangente, un point conju-gué, on obtient des branches hyperboliques parallèles à distances imaginaires.

Les réciproques sont aussi vraies, de même que les projections des différentes espèces de branches infinies donnent les différentes espèces de points sur l'antidirectrice. De Gua peut ainsi conclure :

> "*on peut donc assurer généralement que l'analogie que nous avions observée était absolument nécessaire afin que les résultats du calcul répondissent, comme cela doit arriver en effet, à ce que les Principes les plus simples de la théorie des Ombres ou des Projections pouvaient d'ailleurs, et indépendamment du Calcul faire découvrir sur ce sujet, et voilà par conséquent la raison a priori que nous avions en dernier lieu promis de donner à cette analogie si remarquable.*" [14]

Cette même analogie permet de démontrer enfin la proposition de Newton sur les ombres. De Gua remarque que dans la classification de

---

14 De Gua, op. cit., p.221.

Newton, toutes les espèces ont un point d'inflexion ou (non exclusivement) une double branche hyperbolique cubique.

En plaçant dans la directrice l'asymptote de cette branche hyperbolique, ou le point d'inflexion avec la directrice comme tangente, la projection (l'ombre) de la courbe sera aussi une courbe du troisième ordre qui sera l'une des cinq paraboles divergentes. Ce qu'il fallait démontrer.

Alexis-Claude Clairaut avait tenté dans son mémoire de 1731, paru dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences* de 1733[15], une explicitation analytique de l'énoncé de Newton sur la génération des courbes du troisième ordre par l'ombragement de cinq d'entre elles[16].

L'abbé de Gua de Malves - nous venons de le voir -, proposait neuf ans plus tard une explication en termes algébriques de la classification de Newton, et une interprétation géométrique de cette proposition qui rendait compte, en termes de transformation projective, des affections rencontrées dans les équations ; c'était probablement la première tentative de mise en relation systématique, sur une famille de courbes, de leurs propriétés et particularités géométriques, et des caractéristiques formelles de leurs équations. De Gua de Malves préfigurait ainsi les travaux d'un Poncelet[17], fondateur de la géométrie projective, dont la défense d'une géométrie dite supérieure ne doit pas faire oublier qu'il rédigea aussi un volumineux traité de géométrie analytique qu'il plaçait à la source de sa théorie projective[18], ou encore les travaux de l'école analytique allemande : Möbius[19], Plücker[20] et Von Staudt[21].

---

15 *Sur les courbes que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque par un plan donné de position*, op. cit. Cf. les articles de J.-P. Le Goff, in Actes de l'Université d'été inter-IREM de Lille (1990), op. cit., et *Les* Recherches sur les Courbes à double courbure *d'A.-C. Clairaut*, dans le présent volume.

16 On pourra retrouver les principales étapes de la démonstration de Clairaut dans l'article de ce volume, à défaut des actes de Lille, où le mémoire est analysé en détail.

17 Jean-Victor Poncelet : 1788-1867.

18 Les *Applications d'Analyse et de Géométrie*, parues en 1862, furent rédigées vers 1814, durant son incarcération à Saratov, et ont servi, de son propre aveu, *en 1822, de principal fondement au Traité des Propriétés Projectives des Figures*.

19 Augustus-Ferdinand Möbius : 1790-1868.

20 Julius Plücker : 1801-1868.

21 Karl G. Ch. Von Staudt : 1798-1867.

LA GÉNÉRATION DES COURBES DU TROISIEME ORDRE PAR LES OMBRES, SELON PATRICK MURDOCH (1746).

Algèbre et géométrie analytique *versus* géométrie projective ?

En regard de Clairaut et de Gua de Malves, dont les recherches sont fondées sur une sorte de sainte alliance du calcul et de la géométrie d'incidence, le point de vue projectif, presque entièrement dégagé - ou faut-il dire appauvri ? - du calcul analytique ou algébrique, devait s'illustrer quelques années après en Angleterre : Patrick Murdoch, en 1746, rédigeait un traité de perspective spéculative dont les visées ultimes étaient de reprendre la classification newtonnienne sous l'éclairage exclusif du singulier paragraphe sur l'ombre portée des paraboles divergentes. Même si l'auteur consacre une sous-section de son ouvrage à la question des équations algébriques d'une courbe et de son ombre, c'est cette fois une sorte de confirmation analytique d'un propos dont l'essentiel touche à la projection conique et à ses effets.

Patrick Murdoch : l'homme et l'œuvre, c'est-à-dire, la *Génération des Courbes par les Ombres*, suivant Newton.

L'ouvrage de Murdoch s'inscrit, pour sa première partie consacrée à la perspective, dans le droit fil des recherches de Brook Taylor[22], mais la finalité en est clairement mathématique, comme l'avoue son titre : *Neutoni Genesis Curvarum per Umbras, seu Perspectivæ Universalis Elementa ; Exemplis Coni Sectionum et Linearum Tertii Ordinis Illustrata* ; i-e : *De la Génération* [à la manière] *de Newton, des Courbes par les Ombres, ou Éléments de Perspective universelle ; illustrés par les Exemples des Sections coniques et des Lignes du troisième Ordre*[23].

---

22 Brook Taylor (1685-1731) a rédigé deux traités de perspective : Linear Perspective, A *new Method*, Londres, 1715, et *New Principles of Linear Perspective*, Londres, 1719.

23 NEUTONI // *Genesis Curvarum per Umbras.* // SEU // PERSPECTIVAE UNIVERSALIS // ELEMENTA; // EXEMPLIS // *Coni Sectionum* // ET // *Linearum Tertii Ordinis* // ILLUSTRATA. // * // LONDINI : // Apud A. MILLAR. M. DCC. XLVI. Les différents extraits cités ici ont été traduits par J.-P. LE GOFF, à partir d'une copie de l'exemplaire de la Bibl. Nat. (cote V. 2208).

L'on sait fort peu de choses de Patrick Murdoch (?-1774) : il ne figure pas dans les *Biographies universelles* du 19è siècle[24]. Dans son *Histoire des Mathématiques* [25], Montucla évoque son œuvre au détour d'un passage consacré à Taylor, dans lequel il signale que le Père Rivoire s. j., traducteur en français des *New Principles of Linear Perspective* de 1719, fit suivre sa version du second traité de Taylor, d'une traduction de la première partie de l'ouvrage de Murdoch, consacrée à la perspective[26]. Ces traductions du père Rivoire sont signalées par Poudra dans son *Histoire de la Perspective* [27], mais il se contente d'analyser les *Nouveaux Principes* de Taylor, et expédie en une phrase sur laquelle nous reviendrons, le traité tronqué de Murdoch, que Rivoire intitule *Principes de la Perspective Linéaire.*

Michel Chasles, dans son *Aperçu historique* [28], le cite comme l'un des géomètres qui ont tenté d'expliciter la génération par ombrage des courbes du troisième ordre, mais il ne donne pas d'analyse de son traité. Enfin, Maximilien Marie, qui écarte pourtant peu de noms, n'en parle pas dans son *Histoire des Sciences Mathématiques et Physiques* [29]. L'on possède cependant plusieurs ouvrages de cet émule de Newton et de Taylor : ses *Nouvelles tables loxodromiques...* furent traduites en français par M. de Brémond[30] ;

---

24 Par ailleurs, si l'on excepte les allusions à son apport dans la question des courbes du troisième ordre, que l'on peut trouver dans le récent ouvrage de J.V. Field et J.J. Gray, *The Geometrical work of Girard Desargues*, 1987, et notre propre article sur *La perspective dans les pays anglo-saxons*, op. cit., nous ne connaissons qu'un seul article moderne qui lui est consacré : *Die Behandlung der Perspektive durch Murdoch*, de H. Wieleitner, in *Bibliotheca Mathematica*, III-14, 1913-14, pp. 620-635.

25 Montucla : *Histoire des Mathématiques*, T. 1er, Paris, An VII, Partie III, Livre V, p. 712.

26 L'ouvrage de Rivoire parut à Amsterdam en 1759, et se vendait *à Lyon, Chez Jean-Marie Bruyset, Imprimeur-Libraire, rue Merciere, au Soleil*, sous le titre : *Nouveaux Principes de La Perspective Linéaire. Traduction de deux Ouvrages, L'un Anglois du Docteur Brook Taylor, L'autre Latin de M. Patrice Murdoch, avec un Essai sur le Mêlange des Couleurs par Newton.*

27 Noël-Germinal Poudra (1794-1894) : *Histoire de la Perspective ancienne et moderne*, Paris, 1864.

28 Chasles, op. cit., p. 146.

29 Maximilien Marie : 1819-1891. Son ouvrage parut en douze volumes, à Paris, entre 1883 et 1888.

30 *Nouvelles tables loxodromiques, ou Application de la théorie de la véritable figure de la Terre à la construction des cartes marines réduites...*, Paris, 1742.

on relève aussi un *Mémoire sur la vie et les œuvres de M. James Thomson*, que l'on trouve en tête des *Works of J. Thomson* [31], et du recueil *The Seasons*, du même[32] ; par ailleurs, il est l'éditeur de MacLaurin et de son *Mémoire sur les découvertes philosophiques de Sir Isaac Newton* [33].

Voici quelques extraits de la préface de l'ouvrage, qui donnent une bonne idée de son contenu :

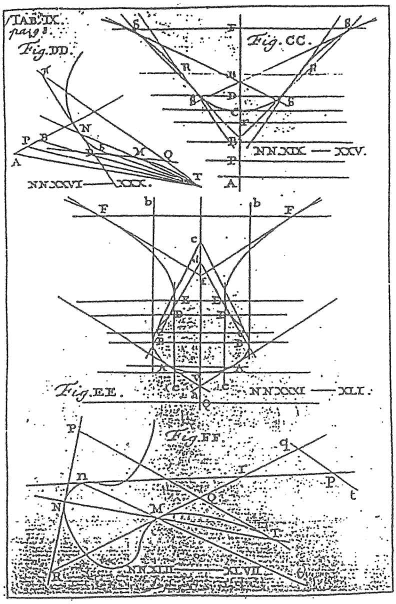
> *Au Lecteur.*
>
> *Une chose est la Grandeur étendue, qui est la* Réalité *même et la* Constance, *et qui admet toujours et partout une Mesure d'un même Genre : une autre est l'* Apparence, *dont l'* Idée *est déférée à l'esprit principalement par le Moyen de la Vue ; celle-ci est variable et sujette à la mutation du fait de la variation de lieu des* Choses visibles ; *cependant, il est une loi certaine de ces Variations, qui est déterminée par les Conditions données* *. [en note : * *De cette distinction, certaines Fictions vendues par les Sceptiques se trouvent condamnées*]. [...]
>
> *Reçois, en peu de mots, la Raison et l'Ordre de cet Opuscule. La Section* Première *est composée des Principes de la Perspective Linéaire ;* [...]
>
> *La* Seconde *traite des Affections Géométriques des Projections ; d'où il tombera sous le sens de définir une Courbe quelconque* Engendrée *par l'ombre d'une autre Donnée, par le* Nombre *de ses Branches, son* Espèce, *son* Étendue. *Il y sera brièvement indiqué que les Projections se désignent encore par le moyen d'Équations* Algébriques.
>
> *Dans la Section* Troisième, *la Projection sera illustrée par certains Exemples très utiles des Sections Coniques* [avec des applications à la projection stéréographique, à la gnomonique et à la détermination des orbites planétaires].
>
> *Il sera traité ensuite et enfin d'une Recension des* Lignes *du* Troisième *Ordre, parachevée quant à son nombre ; avec quelques* Théorèmes *touchant à ces Courbes, qui montrent que cette méthode d'investigation est sans aucun doute d'un Usage sortant de l'ordinaire.* [...]

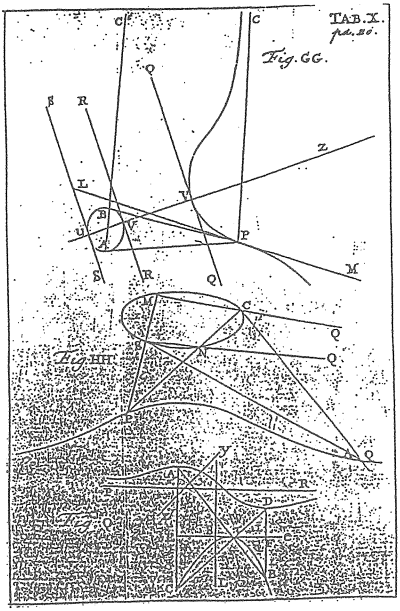
---

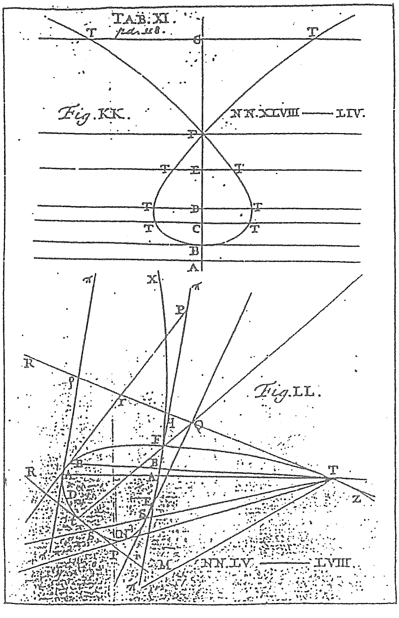
31 Londres, 1788.
32 Londres, 1793.
33 Londres, 1748.

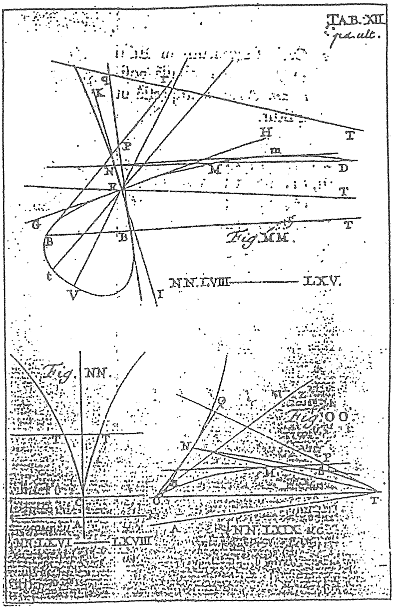
HORS-TEXTE VII :

Planches originales IX à XII du traité de Murdoch, *Neutoni Genesis Curvarum Per Umbras* (1746).









Les sections I et II du traité de Murdoch : la perspective linéaire définie comme projection conique.

La première *Section* de l'ouvrage est donc consacrée aux *Principes de la Perspective Linéaire*. On y retrouve les éléments essentiels de la méthode de Taylor, mais ils subissent quelques transformations en raison du prétexte géométrique qui sous-tend ces principes. Ce qui peut expliquer le jugement de Poudra, qui semble n'avoir pas lu l'ouvrage original, et n'avoir pas compris que cet essai de perspective était assez maladroitement sorti de son contexte par le père Rivoire :

> *"Le traité de Murdoch, qui termine le volume, ne se compose que de quelques généralités sur la perspective, dans le genre de celui de Taylor, mais beaucoup moins clair."*[34]

Par exemple, Murdoch va, dès la première définition, faire usage du mouvement pour faire entendre le tracé de la projection d'une courbe par l'artifice cinématique d'un rayon lumineux mobile :

> *DEFINITION I.*
> *Si une ligne droite infinie XY, passant par un point immobile Z appelé* Pôle, *se meut le long d'une ligne quelconque donnée, et si dans le même temps, elle rencontre un Plan quelconque infini donné de position, on dit que cette rencontre est la* Projection *de la Ligne Exposée, et que le Plan MN est le* Plan de Projection.

En corollaire, Murdoch ajoute que, si la ligne exposée est une figure rectiligne (par morceaux), la droite engendre une double pyramide, et que dans le cas où cette ligne est courbe, la droite mobile engendre un cône. Il note enfin que pour la suite de son ouvrage, il suppose que le point Z est hors du plan de projection, et qu'il est à distance finie ; ce qui limite la projection à une perspective centrale ou conique stricte et écarte les projections cylindriques comme la perspective cavalière, mais ce qui est symptomatique d'un renversement qu'il nous paraît important de souligner : le fait de parler d'une droite mobile passant par un point fixe éventuellement situé à l'infini était à peine pensable un siècle auparavant, et tout juste pensé par les auteurs singuliers que furent Girard Desargues et Blaise Pascal. En 1746, Murdoch croit utile d'apporter cette précision qu'il écarte le cas du cône de sommet infiniment éloigné, qui serait un cylindre et dont les génératrices formeraient un faisceau de parallèles (*colonne* parmi les *rouleaux*, et *ordonnance de droites parallèles*, selon la terminologie de Desargues) : c'est qu'entre temps,

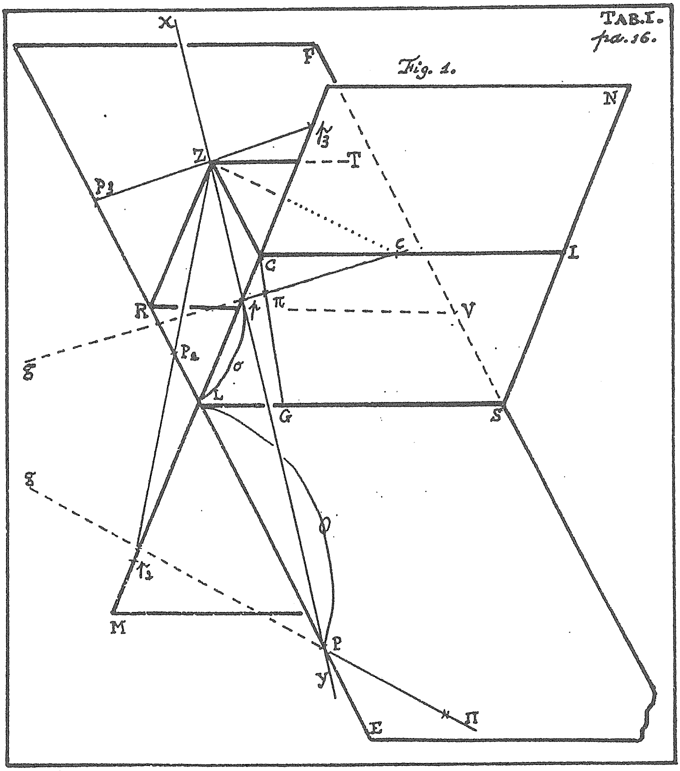
---

34 Poudra, op. cit., p. 529.

reprenant le flambeau, un Le Poivre a pu parler des sections du cylindre comme de celles du cône en 1704, et qu'un Taylor n'a pas hésité à définir une orthographie (projection cylindrique orthogonale) comme une projection centrale dont le centre est à l'infini ; et c'est d'ailleurs ce qu'énonce Murdoch dans le corollaire XIII et dernier de cette section de perspective. La mise à l'écart du cas cylindrique ne procède donc pas d'une incompréhension, mais d'une mise en conformité avec l'objectif poursuivi : la projection cylindrique ne transforme une courbe d'un certain type qu'en une courbe du même type (cercles et ellipses par exemple) ou d'une forme dégénérée (couple de droites parallèles ou confondues).

Nous n'entrerons pas de façon exhaustive dans le détail de la partie perspective du traité : Murdoch y redéfinit d'abord certains des éléments spatiaux que Taylor avait repérés en son temps comme fondamentaux ; nous utiliserons désormais le vocabulaire de Murdoch (**en gras** dans la liste qui suit). Par exemple (Fig. 7) :

[Fig. 7] D'après Murdoch : figure 1, planche I, p. 16.



- Z est le **pôle**, c'est-à-dire "l'œil", ou le **sommet** du cône de projection ;
- et MN[35] est le **plan de projection**, c'est-à-dire le "tableau" ;
- à toute ligne "exposée" à la lumière issue de Z suivant un cône de rayons en ligne droite comme xy, répondra une projection dans le plan MN ;
- FE est le **plan de base**, c'est-à-dire notre "géométral", que Taylor appelait plan originel, que Rivoire nomme objectif, et dans lequel Murdoch placera la courbe génératrice du cône : ce plan n'est pas nécessairement perpendiculaire au tableau ;
- LS est la **ligne de base**, notre "ligne de terre", intersection du tableau avec le plan de base ;
- CI est la **ligne horizontale,** notre "horizon" parallèle à LS, c'est-à-dire l'intersection du "tableau" avec un plan passant par "l'œil" et parallèle au plan de base : ce sera la ligne de fuite du plan de Base, et tout autre plan non parallèle au "tableau" a de même son propre "horizon" ;
- ZRV est un plan parallèle au "tableau" et passant par "l'œil" Z, que Taylor appelait le plan directeur : son intersection avec le plan de base, c'est-à-dire la ligne directrice pour Taylor, est nommée **ligne des extrêmes** par Murdoch ; elle est parallèle à la ligne de base.

La seule question qui vaille en perspective est celle de la détermination de l'apparence d'un point, puisque la construction de l'image d'un point quelconque permet celle de toute figure rectiligne, à raison de la connaissance de l'apparence de deux points par segment, et de toute figure curviligne, point par point autant que le nécessite la précision du tracé.

Le traité de Murdoch, de ce point de vue, va à l'essentiel, puisque son auteur se contente de résoudre ce problème classique, présenté sous la forme d'un problème unique en trois cas suivi de treize corollaires : il n'y a pas ici multiplication d'exemples pratiques d'architecture ou de corps platoniciens représentés en perspective, ni de procédés alternatifs permettant de diminuer le nombre des opérations de tracé ; ce n'est pas le propos d'un théoricien cherchant des voies simples et rapides pour les praticiens du dessin.

En revanche, la distinction en trois cas du problème de base est intéressante et innovante : Murdoch envisage, outre le cas standard d'un point-objet "derrière la vitre", le cas, moins banal, où ce point est entre "l'œil" et le "tableau" (déjà envisagé dans la pratique par les peintres qui font sortir hors-cadre tel élément de leur sujet, dans le trompe-l'œil par exemple), et le cas, plus hypothétique pour un perspectiviste, où le point-objet, placé en retrait de "l'œil" serait comme une idée de derrière la tête. Il est clair qu'il

---

35 Murdoch, suivant la tradition, nomme souvent un plan quadrangulaire par deux de ses sommets non consécutifs.

s'agit là d'une idéalité de géomètre qui sait que les cônes ont deux nappes : certes, si l'on use de la métaphore skiagraphique, le sommet du cône peut être vu comme un flambeau éclairant de toutes parts, mais aucun ouvrage de perspective n'a jamais traité de ce cas singulier où le flambeau est en retrait du point de vue, et d'autre part, l'ombre n'est réellement portée que si le point-objet s'interpose entre la lumière et le tableau. L'innovation ne vaut donc que pour le problème à traiter : quand Newton, et après lui Murdoch, parlent d'ombre, c'est une pure vue de l'esprit, qui va jusqu'à concevoir une lumière privée de sens, comprenne qui pourra.

Voici l'énoncé du problème sous ses trois espèces, sans les solutions de Murdoch, qui sont classiques, ni les figures, qui se déduisent aisément de la première [Fig. 7] :

> *PROBLEME.*
> *Étant donnés* [de position], *un Pôle Z, un Plan de Projection MN, et un point P, trouver* [36] *sa projection (p).*
> *Cas I. Fig. 1* [et 2].
> *Soit d'abord le point P de l'autre côté du Plan de Projection relativement au Pôle Z* [...]
> *Cas II. Fig. 1 et 3.*
> *Soit le point exposé du même côté que le pôle, mais à distance moindre du Plan de Projection, comme en* P_2 [...]
> *Cas III. Fig. 1 et 4.*
> *Soit enfin le point P du même côté mais à distance plus grande du Plan de Projection que n'est le Pôle Z, comme en* P_3 [...]

Murdoch traite de cette question suivant les procédés habituels de la perspective, par comparaison de raisons pour fixer la position de (p) sur LC, et par des constructions élémentaires, mais avec une arrière-pensée cependant, qu'il développe au travers des corollaires qui suivent le problème unique : il s'agit de comprendre le jeu réciproque des éléments à distance finie et de ceux à l'infini, qui peuvent s'échanger dans une projection.

Ce qui permettra d'expliquer, le moment venu et entre autres choses, qu'une courbe fermée, comme un cercle ou une ellipse, puisse se muer en une courbe présentant des branches infinies, parabole ou hyperbole dans notre exemple, ou qu'une courbe monobranche sans rupture apparente, comme la parabole cubique, puisse se projeter en une courbe formée de plusieurs branches ; les tangentes en des points envoyés à l'infini deviendront alors des asymptotes ou des directions asymptotiques. Nous ne citerons que deux

---

36 Murdoch utilise le verbe *invenire*, "inventer" au sens primitif du terme, c'est-à-dire exhiber en le construisant.

passages de cette première section, qui mettent en évidence cette préoccupation, puisque nous verrons ces considérations à l'œuvre dans les sections suivantes ; tout d'abord l'énoncé du corollaire II :

> *Corollaire II.*
>
> *Les Projections de toutes les lignes droites parallèles à la ligne de Base LS, que ces lignes soient situées dans le plan de Base, ou hors de ce plan, sont parallèles entre elles et à la ligne droite LS.* [...] *Mais celle de ces lignes droites qui est à distance infinie, de quelque côté du plan de Projection qu'elle soit, se projette dans la droite Horizontale CI. Et vice versa, la Ligne des Extrêmes RV se projette à distance infinie.*

Puis celui du corollaire VII :

> *Corollaire VII.*
>
> *En général, les points en lesquels sera coupée la Ligne des Extrêmes* [par une courbe à projeter], *seront projetés à l'infini. Par conséquent, celles* [des lignes] *qui sont concourantes sur la Ligne des Extrêmes, s'éloigneront en parallèles ; et inversement* [c'est-à-dire : des lignes parallèles sont projections de lignes concourant sur la ligne des extrêmes]. *De cela et des Corollaires 4 et 6, il s'ensuit clairement, en raison des fonctions réciproques des Plans de Base et de Projection, que les fonctions des lignes des Extrêmes et Horizontale sont aussi mutuellement réciproques.*

Quant à l'usage que fait Murdoch d'une perception cinématique de l'engendrement des courbes par projection, il va jusqu'à déterminer numériquement le rapport des vitesses de deux points mobiles, ombre l'un de l'autre. C'est l'objet du corollaire V, qui semble inspiré, si ce n'est tout droit sorti, de la méthode des fluxions de Newton (notations de la Fig. 7) :

> *Corollaire V.*
>
> *Si l'on note ZC, PL, CL, par des lettres a, d, r, on aura, dans le premier Cas du Problème :* $Lp = rd/(a + d)$ *; et si l'on augmente d pour qu'il devienne* $d + x$*, la Projection* [Lp' du segment LP' obtenu] *sera* $r(d + x)/(a + d + x)$ *; dont, si l'on retranche* $rd/(a + d)$*, le résidu sera* $arx/[(a + d).(a + d + x)]$*, projection* [pp'] *du Segment x. D'où, étant donné un Segment, sa Projection sera en raison inverse du rectangle des distances de ses Extrémités à la Ligne des Extrêmes. Et un point qui serait en mouvement uniforme dans la ligne droite LP, se verra animé* [en projection] *dans la droite LC avec une vitesse en raison inverse du carré de la distance du point à la Ligne des Extrêmes.*

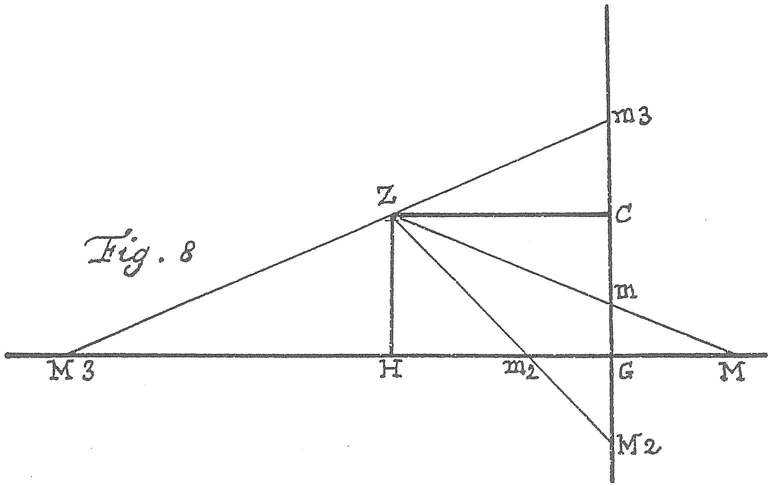
La *Section II* traite *Des Symptomes Géométriques généraux des Projections* et *Des Équations Algébriques désignant une Projection Curviligne*. Dans la première partie, Murdoch traite des conséquences de sa définition de la perspective comme projection générale pour les affections des courbes : il énonce par exemple, dans le paragraphe VII de cette section, la réciprocité des rôles du plan de base et du plan de projection, et donc de ceux de la courbe génératrice et de la courbe engendrée ; il montre que cette *mutation d'apparence*, comme aurait dit Leibniz, transforme mutuellement asymptotes et tangentes, points doubles et branches, renverse ou conserve la convexité suivant la position relative des courbes et du pôle, etc...

Deux scholies terminent cette première partie et traitent entre autres des diverses projections d'un triangle, ce qui n'est pas sans évoquer le théorème de Desargues concernant les triangles homologiques : ce passage correspond au désir de Murdoch de rendre compte ultérieurement du devenir du triangle des asymptotes, défini par Newton dans le cas des hyperboles redondantes, lorsqu'il est projeté de façon à ce que l'un au moins de ses sommets ou de ses côtés soit "envoyé" à l'infini, ce qui produira hyperboles défectives et autres paraboles divergentes (avec deux asymptotes parallèles sur les trois, ou bien à une ou deux asymptotes seulement). On peut aussi, connaissant la position d'un point du plan d'un triangle donné, fixée dans l'une des 7 zones que les supports de ses côtés déterminent, en déduire la position de la projection de ce point, dans l'une des zones définies par le triangle projeté dans le plan de projection : là encore, Murdoch prépare le terrain pour fixer la position d'une branche relativement à ses asymptotes ou à certaines de ses tangentes.

Dans une seconde partie, Murdoch explicite les formules de passage d'un point à son ombre, permettant d'établir les équations de la courbe d'ombre à partir de celle de la courbe ombrée : c'est, en substance, le travail accompli par Clairaut dans son mémoire de 1731. Il distingue deux cas, suivant que la ligne d'intersection des plans vertical et de base est l'axe des abscisses de la figure génératrice (ou est parallèle à cet axe), ou que la *ligne des extrêmes* coupe cet axe suivant une direction oblique.

Par exemple, dans le premier cas, illustré d'une figure de la planche IV, on a (Fig. 8) :

[Fig. 8] D'après Murdoch : figure 8, planche IV, p. 32.



CG = ZH = r, ZC = HG = a (données) ;
et si HM = x (abscisse sur la courbe génératrice),
Cm = z (abscisse sur la courbe engendrée),
alors : xz = ar, soit x = (ar) / z.

De même ("P" étant le pied de la ligne ordonnée d'un point courant de la courbe génératrice et "p" son équivalent pour la courbe engendrée après projection) :

PM = y (ordonnée sur la courbe génératrice),
pm = v (ordonnée sur la courbe engendrée),
et l'on a : ay = vx ou yz = rv, soit y = (rv) / z.

Et si l'on reporte ces expression dans l'équation de la courbe génératrice par exemple :

[$y^2 = px^2 + qx + s$], dans le cas d'une section conique, ou [$y^2 = px^3 + qx^2 + sx + t$] dans le cas d'une des cinq paraboles divergentes de Newton,

on obtient celle de la courbe engendrée par exemple :

[$v^2 = (s/r^2).z^2 + (qa/r).z + pa^2$] qui définit une conique, ou [$v^2z = (t/r^2).z^3 + (sa/r).z^2 + qa^2.z + pa^3r$], qui définit une cubique d'une autre espèce.

L'exemple des sections coniques : *Section III*.

Nous ne développerons pas les éléments de cette section, que chacun concevra assez bien à partir de nos précédents travaux sur Desargues, La Hire ou Le Poivre[37]. Il convient cependant de signaler que Murdoch y explicite la transformation que Newton avait esquissée dans le Lemme XXII des *Principia*[38].

Rappelons que Newton y transformait point par point une courbe HGI en une courbe hgi, de la façon suivante (Fig. 9a) :

Deux parallèles AO et BL étant données, sécantes en A et B d'une troisième droite AB donnée, on projette un point courant G de HGI sur AB, parallélement à AO, en D ; d est alors défini comme l'intersection de OD et de BL, et g, transformé de G, est enfin défini comme étant situé sur une droite dg faisant un angle donné avec BL, et fixé sur cette droite par l'égalité de rapports [dg/Od = DG/OD][39].

Newton, sans autre forme de procès, indiquait en substance, que cette transformation conservait le degré des courbes, les contacts et les tangentes. Murdoch, soit pour mettre en évidence sa communauté de pensée avec Newton, soit pour montrer l'efficacité de sa méthode de projection, signale, que la transformation de Newton revient à une perspective de pôle O, de centre de projection le point a (point de fuite dans une direction donnée, ici projeté de O sur BL, parallélement à AB), telle que aB soit un "rayon" (i-e l'intersection avec le tableau d'un plan (OAB) contenant le rayon visuel Oa), telle que A soit l'intersection de l'axe des abscisses ABI de la courbe génératrice HGI avec la *ligne des extrêmes*, intersection du plan neutre et du plan de base (donc parallèle à BL, "ligne de terre"), et telle que l'angle gdi donné soit celui que font entre elles dans l'espace les droites aB et BL.

Autrement dit (Fig. 9b), si la courbe à projeter HGI est dans un plan (P), elle est vue du point O, et dans un tableau (T) érigé au-dessus de BL parallélement à OA, comme la courbe h'g'i', où [h' = H] et i' est l'intersection de OD et de aB. DG étant parallèle à la "ligne de terre" BL, son

---

37 Cf. *L'héritage arguésien*, op. cit.

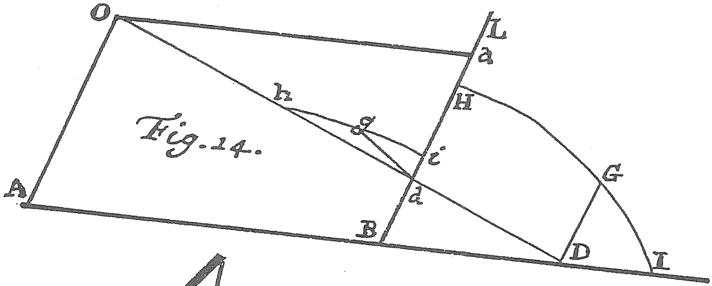
38 Newton : *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londres, 1687. Voir aussi : *L'héritage arguésien*, in *Scholies* n°8, pp. 106-108.

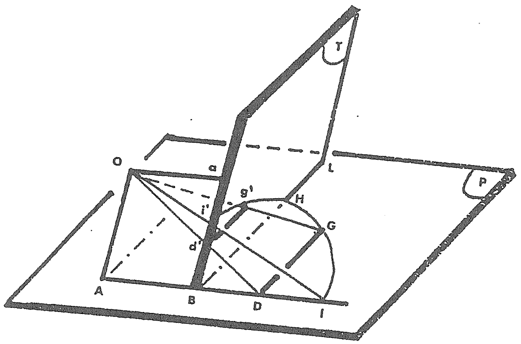
39 À noter que dans la figure de Murdoch, contrairement à celle de Newton, "O", "I" et "i" sont alignés comme il se doit puisqu'en "I", "D" et "G" sont confondus. En revanche, et au contraire de la figure de Newton, "hB" n'y est pas parallèle à "gd" comme ce devrait être le cas ; "hB" est cependant égal à "HB" comme il se doit, chez Murdoch comme chez Newton.

image d'g' leur est parallèle dans (T) et vérifie [d'g'/Od' = DG/OD]. Pour définir la courbe plane engendrée hgi dans le plan de la courbe génératrice HGI, il suffit donc de rapporter cette ligne d'g' à la ligne BL, c'est-à-dire d'appliquer Ba sur BL en ayant amené d'g' en dg dans le plan (P) par rotation autour de l'axe Ba, de façon que [Bd = Bd'], [Bi = Bi'] et que dg fasse avec BL le même angle que d'g' avec d'i', soit encore le même angle constant que font entre elles les droites Ba et BL[40].

[Fig. 9]

a) D'après Murdoch : figure 14, planche VII, p. 74, et b) figure spatiale moderne.





Rappelons ce que Chasles pouvait dire dans son *Aperçu* de ce lemme des *Principes* et de quelques-uns qui le précèdent :

"Dans toutes ces propositions préliminaires, et dans leurs corollaires, Newton a borné ses recherches à ce qui lui était strictement nécessaire pour sa grande entreprise. Mais on voit, par la

---

40 Dans le cas particulier où AB, Ba et BL sont orthogonales, c'est-à-dire d'un tableau perpendiculaire à l'axe des abscisses de la courbe génératrice et parallèles à ses ordonnées, le passage de h'g'i' à hgi se fait par deux simples rabattements : rotation autour de l'axe Ba, puis autour de AB.

nature de ces propositions, que s'il eût eu en vue l'accroissement et le perfectionnement de la théorie des coniques, elles l'eussent conduit facilement, par des généralisations naturelles de ses premiers résultats, aux propriétés les plus générales de ces courbes.

Il ne lui aurait point échappé, non plus, que sa méthode pour la transformation des figures, s'appliquait naturellement aux figures à trois dimensions ; et, depuis près d'un siècle et demi, nous saurions, ce que l'on n'a fait que dans ces derniers temps, transformer la sphère, par exemple, en une surface quelconque du second degré, comme on transforme par la perspective, depuis Desargues et Pascal, le cercle en une conique, pour découvrir et démontrer les propriétés de cette courbe.

Toutes ces généralisations n'entraient point dans le dessein de Newton. Mais elles n'auraient pu échapper aux géomètres qui auraient médité sur la partie purement géométrique du livre des Principes *; et cette circonstance prouve combien peu les doctrines géométriques ont été cultivées depuis lors.* »[41]

Il apparaît donc que Murdoch fut un de ces mathématiciens, trop rares comme le déplorait Chasles, à avoir lu les *Principes* en géomètres plus qu'en astronomes, en physiciens, voire même en analystes.

La classification des cubiques par Murdoch: *Section IV*.

Avec la *Section IV* de son ouvrage, Murdoch en arrive à ce qu'annonce la seconde partie du titre : les courbes du troisième ordre. À ce stade de son exposé, il se contente d'une classification sous forme d'énumération des cas, sans trop de justifications, puisqu'il a développé antérieurement, dans des propositions générales, les questions des images projectives d'un point, d'une droite et de leurs positionnements et ordonnancements relatifs, et qu'il a traité alors de toutes sortes de cas particuliers relatifs aux courbes, quelles qu'elles soient : points simples ou doubles du plan des "extrêmes" (plan neutre passant par l'œil et parallèle au plan de projection) et branches infinies, asymptotes et tangentes, etc...

Nous ne pouvons donner ici la classification dans sa version intégrale : un tableau de correspondance entre les espèces recensées par Murdoch et celles de Newton et de Stirling indique que l'auteur parvient à 78 espèces par sa méthode des projections, contre 72 pour Newton, et 76 pour

41 Op. cit., chap. IV, § 16, pp. 160-161.

Stirling[42]. Murdoch ne recherche pas la parabole divergente génératrice de chaque cubique, mais procède au contraire par projection systématique des cinq paraboles divergentes : le chemin était tracé ; mais il parvient ainsi à retrouver les quatre espèces de Stirling et à mettre en évidence deux nouvelles espèces.

Pour illustrer la méthode de Murdoch, nous présenterons la *première classe* qu'il propose en tête de cette quatrième section, et dont les 18 courbes sont obtenues par projection de la parabole divergente à trois intersections réelles et distinctes avec son axe (du type [$y^2 = x(x^2-1)$], espèce 67 de Newton, figures 70 et 71 de l'*Enumeratio*, dans les deux éditions de 1704 et 1711, voir [Fig. 10] et [Fig. 11]) ; cette première classe comporte elle-même deux parties, distinguant les onze cas obtenus lorsque la *ligne des extrêmes* occupe diverses positions parallèles et normales à l'axe de la courbe, et les sept autres cas, obtenus avec une *ligne des extrêmes* pivotant autour d'un de ses points d'intersection avec la courbe.

"SECTION IV.
"*De la Génération des Lignes du troisième Ordre*
"*au moyen de l'Ombre (portée) des cinq*
"*Paraboles divergentes* *[43].

"*De la première Classe :*
"Contenant les Courbes qui sont engendrées par la "*Parabole divergente* avec un *Ovale conjugué*, laquelle est "désignée par l'équation $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$, dans le cas "où, ayant posé y = 0, on obtient trois valeurs de l'Abscisse "x, réelles et inégales (*Espèce* 67 chez *Newton*. Figures 70, "71 †[44]).

---

42 Un *Index Projectionum*, p. 123 en fin du volume, est en fait une table de concordance entre la classification par projection de Murdoch (de I à LXXVIII, soit 78 types), les espèces de Newton (de 1 à 72, pour 76 figures) et de Stirling (de 1 à 76), et les figures de l'édition de l'*Enumeratio*, dans sa réédition de 1711 par Jones (de 1 à 77). Pour cette réédition, voir la note 44.

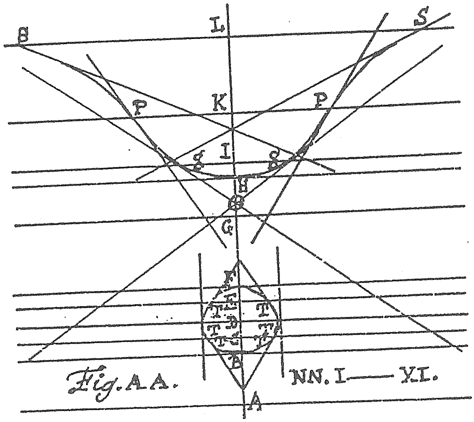
43 L'astérisque est de Murdoch et renvoie à une note qui cite le paragraphe de l'*Enumeratio* dans lequel Newton énonce sa "proposition" sur la génération des courbes du troisième ordre par les cinq paraboles divergentes, puis sa généralisation aux courbes de tous ordres ; le texte en est conforme au latin de l'original traduit dans la première partie de cet article ; la citation se termine par la mention : "Neutoni Enumeratio, *vers la fin* ".

44 La croix latine est de Murdoch et appelle une note dans laquelle il spécifie les références données en fin des paragraphes composant cette section qui développe sa classification projective des courbes du troisième ordre; en effet, ces

"*Partie* I. *Fig.* AA. [Fig. 10]

"Où la *Ligne des Extrêmes*, en laquelle le Plan passant "par le Point fixe et parallèle au Plan de Projection, coupe "le Plan des Figures exposées (à la lumière), *est normal à "l'Axe des Figures*, ou à défaut une *Parallèle à l'Ordonnée* "(y). *Désormais dans ce qui suit on notera de la Lettre* (L) "*cette Ligne, par souci de brièveté.*

[Fig. 10] D'après Murdoch : figure AA., planche VIII, p. 86.



---

références ne renvoient pas à ses propres figures, appelées par des mentions littérales en tête de paragraphe (Fig. AA à OO des planches VIII à XII, notations propres à cette quatrième section de son ouvrage). Voici le texte de cette note :

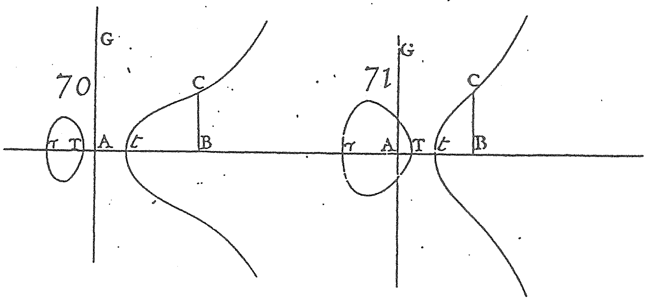
† *Les Espèces et les Figures auxquelles il est fait référence sont celles de* (l'édition de) *l'Enumération de D. Jones, publiée en 1711. lequel Traité est supposé être sous la main de celui qui nous lit ; de même que le traité des* Linae tertii Ordinis *de Jacobo Stirling, Oxon. 1717.*

Une note, page 126, précise la correspondance entre les numéros d'ordre des figures dans l'édition de Jones (1711) et dans l'édition princeps de l'*Enumeratio* qui fait suite à l'Optique de Newton (1704), la numérotation ayant changé entre les deux éditions. Cette correspondance fait suite à l'*Index Projectionum*. Voici la correspondance Newton-Jones, indispensable lorsque l'on a seulement "sous la main" l'édition de 1704 :

Neut.	9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 72, 73, 74, 75, 76	(1704).
Jones,	11, 12, 15, 16, 9, 10, 13, 14, 73, 74, 75, 76, 72	(1711).

L'autre ouvrage donné en référence de Murdoch est le traité de James Stirling (1692-1770), les *Lineae tertii Ordinis Neutonianae, sive Illustratio Tractatus D. Neutoni De Enumeratione Linearum Tertii Ordinis*, parues en 1717 à Oxford, qui explicitent la classification de Newton et la complètent de quatre espèces.

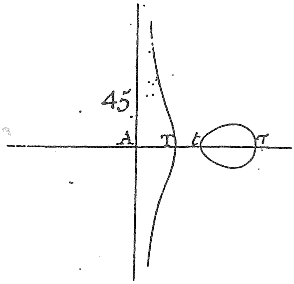
[Fig. 11] Newton : figures 70 et 71 de l'*Enumeratio* (éditions de 1704 et 1711).

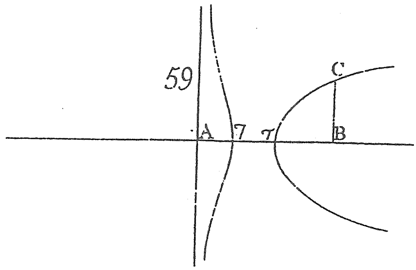


"I.

"Si la ligne L coupe l'Axe en A, hors de la Courbe. Alors "la Parabole se projette en une *Hyperbole Conchoïdale*, dont "l'*Asymptote* est cette même Ligne Horizontale, en laquelle, "dans tous les cas, se projette l'Ordonnée de longueur "infinie. Tandis que l'Ovale se transforme en un *Ovale* situé "au Sommet de la Conchoïde. Ce cas est celui de l'*Espèce* 39. "*Figure* 45[45].

[Fig. 12] Newton : figure 45 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).





[Fig. 13] Newton : figure 59 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).

"II.

"[Si cette ligne L] touche l'Ovale en B, l'*Ovale* se "convertit en une *Parabole*, et il en résulte l'*Espèce* 55. "*Figure* 59.

---

45 Il s'agit bien de la figure 45, contrairement à ce que Murdoch indique (i-e : 44) dans son *Index Projectionum*.

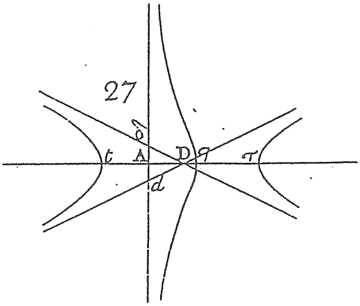
"III.

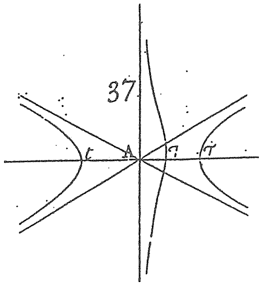
"[Si cette ligne L] coupe l'Axe en C, et l'Ovale aux "points T T ; et que soient conduites en T, T des tangentes "qui concourent en A, leurs projections seront deux "asymptotes à des *branches Hyperboliques* tirant leur "origine de l'Ovale. Le point de concours de ces Asymptotes "tombera sur la Ligne Horizontale, troisième Asymptote. "D'où vient alors l'*Espèce* 21. *Figure* 27.

"IV.

"[Si la ligne L] coupe l'Axe en D, et que les droites qui "touchent l'Ovale en T, T en arrivent à être Parallèles ; "celles-ci se projettent encore en deux Asymptotes, mais "dont le point de concours se situe sur la troisième "Asymptote ; c'est en fait l'*Espèce* 31. *Figure* 37.

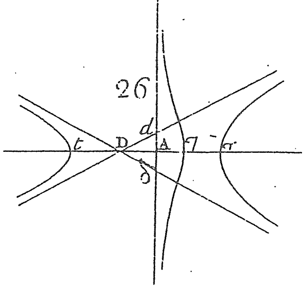
[Fig. 14] Newton : figure 27 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).

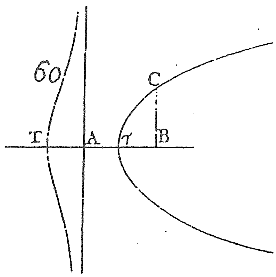




[Fig. 15] Newton : figure 37 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).

[Fig. 16] Newton : figure 26 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).





[Fig. 17] Newton : figure 60 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).

"V.

"Soit E le point d'Intersection [de L avec l'axe], et que "les Tangentes [en T, T] concourent de l'autre côté [de "l'Ovale], alors, en Projection, le Triangle formé par les "Asymptotes tombe sous l'Asymptote de la *Partie "Conchoïdale*. Ce qui correspond à l'*Espèce* 20. *Figure* 26.

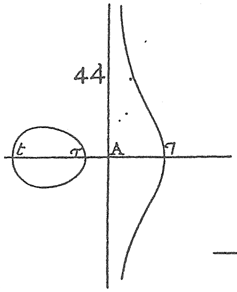
"VI.

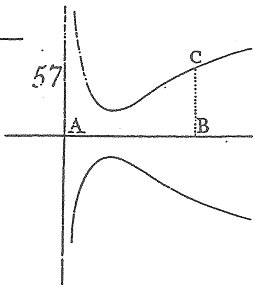
"Que L touche l'Ovale en F ; [cet ovale] se convertira en "une *Parabole*, dont le Sommet est situé au-dessus de "l'Asymptote à la Partie Conchoïdale. Ainsi apparaît "l'*Espèce* 56. *Figure* 60.

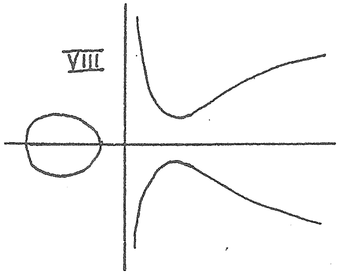
"VII.

"[Si L] coupe l'Axe en G, entre la Parabole et l'Ovale ; "alors la Projection sera de l'*Espèce* 40. *Figure* 45[46].

[Fig. 18] Newton : figure 44 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).







[Fig. 19] Newton : figure 57 de l'*Enumeratio* (1704-11).
[Fig. 20] Courbe décrite par Murdoch, dans le cas n° VIII.

"VIII.

"[Que L] touche la Parabole en H ; il s'en suivra une "Courbe *Hyperbolo-Parabolique* qui peut être aperçue dans "la *Figure* 57, avec un *Ovale* disposé au-dessus de "l'Asymptote.

"Mr. Newton n'a pas recensé cette Espèce. En vérité, "son Équation est $xy^2 = bx^2 + cx + d$, d'écriture identique "que pour l'*Espèce* 55 [Figure 59 de Newton], dans le cas où "les racines de

---

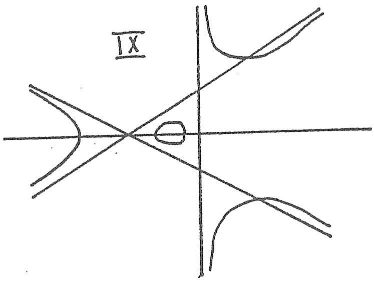
46 En fait, figure 44, contrairement à ce que Murdoch indique ici et dans son *Index*.

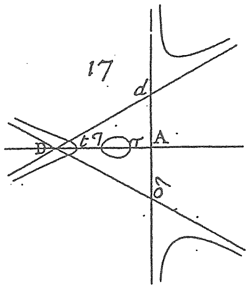
l'Équation $bx^2 + cx + d = 0$ sont supposées "négatives, ou encore si le Coefficient c est affirmatif.

"IX.

"Que la ligne droite L coupe la Parabole aux Points S, S "[en un lieu] où la concavité est tournée vers l'Axe ; que "soient menées les tangentes SO, SO à la Courbe, qui "concourent en O entre la Parabole et l'Ovale ; et qu'elles "embrassent l'Ovale dans l'Angle qu'elles forment ; et "d'autre part que les Branches Paraboliques les [re]coupent "en d'autres parties plus éloignées. Alors la Projection sera "[formée de] *trois Hyperboles* avec un *Ovale* comprise à "l'intérieur du Triangle des Asymptotes. L'Hyperbole en "laquelle se projette l'Arc compris entre la ligne droite L et "le Sommet est *inscrite*, et les deux autres, engendrées par "les branches infinies, sont *Ambigènes* [47]. Ce cas est "l'*Espèce* 11 de Mr. *Stirling* [48], omise par *Newton*.

[Fig. 21] Courbe de Stirling (espèce 11) décrite par Murdoch, dans le cas n° IX.





[Fig. 22] Newton : figure 17 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).

"X.

"Si les Points d'Intersection S, S [de L avec la courbe] "étaient en un lieu où la Courbe présente sa convexité à "l'Axe, les Tangentes prolongées à rebours se couperaient en "deça du Sommet ; alors une

47 Selon la terminologie de Newton, une branche d'hyperbole *Inscrite* est comprise entre ses asymptotes, à l'instar des hyperboles coniques ; une branche d'hyperbole *Ambigène* possède une branche infinie *inscrite* et une autre *Circonscrite*, c'est-à-dire qui traverse l'asymptote.

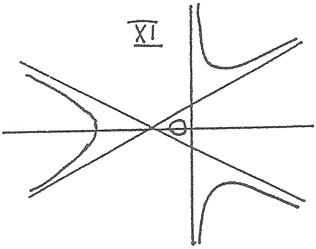
48 Stirling, dans son traité de 1717, renvoie aux figures de Newton et n'en donne pas pour les nouvelles espèces.

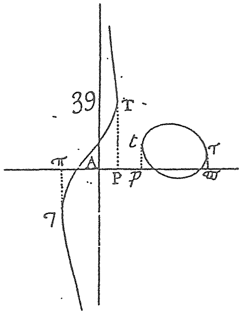
Hyperbole sera "*Circonscrite* [48], et les deux restantes seront inscrites. Ce "qui produit l'*Espèce* 10. *Figure* 17.

"XI.

"Enfin, si la ligne droite L coupe la Courbe aux Points "d'Inflexion P, P, les Tangentes en ces Points traversent la "Courbe elle-même, et [il en résulte] trois Hyperboles "*inscrites*. Cas que *Newton* a omis, est qui est l'*Espèce* 24 "de Mr. *Stirling*.

[Fig. 23] Espèce 24 de Stirling, cas n° XI de Murdoch.





[Fig. 24] Newton : figure 39 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).

Avant de compléter cette première série consacrée aux cas où la "ligne des extrêmes" L est ordonnée et de passer à des lignes L concourantes (voir la figure 25 qui reproduit la figure BB, planche VIII, du traité), Murdoch signale que de telles projections s'interprètent aisément algébriquement par la forme des équations produites : par exemple, dans le cas où l'un des sommets de l'ovale ou celui de la parabole est envoyé à l'infini du fait qu'il est sur L (donc dans le plan neutre), le second membre (polynômial en x) de l'équation de la courbe engendrée sera défaillant de son terme du troisième degré, et n'aura donc plus que deux zéros ; c'est-à-dire que [ax^3] manquera dans :

$$[\ xy^2 = bx^2 + cx + d\ ].$$

"*Autre Partie.*

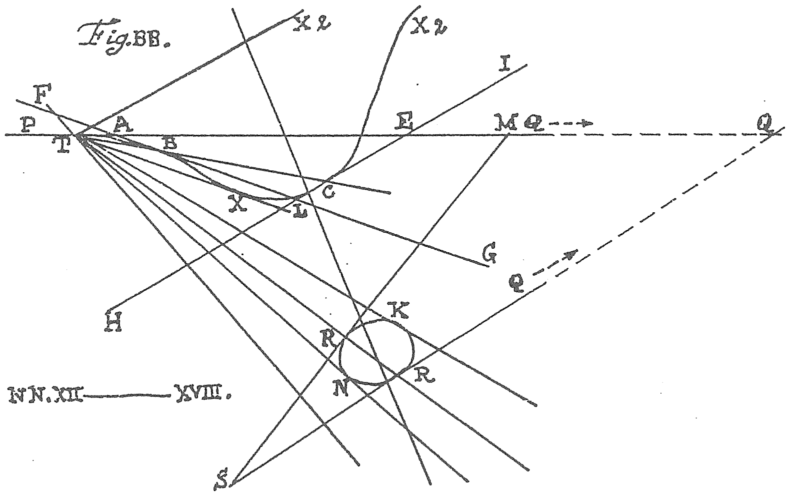
"*Où la ligne droite L n'est pas Parallèle à l'Ordonnée (y).*

"XII.

"La ligne L coupe la *Parabole* en un point T, n'importe "où, situé d'un côté ou de l'autre d'un point d'inflexion, et "ne traverse pas l'*Ovale* ; la tangente TQ en ce point est "*Asymptote* de la Figure engendrée. Dans la Projection, les "extrémités de la Branche rejoignent la Ligne *Horizontale* "de part et d'autre ; l'Ovale donne un *Ovale*. Et il s'ensuit "une Figure Hyperbole *Serpentine* [49] avec un *Ovale*, de "l'*Espèce* 33. *Figure* 39.

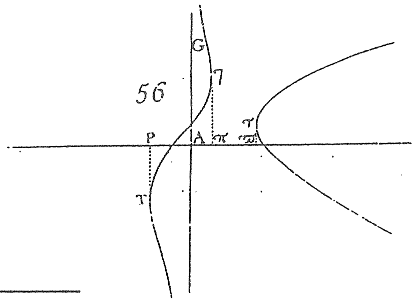
Puis Murdoch fait tourner la droite L autour du point T fixé, produisant ainsi les espèces XIII à XVIII correspondant aux espèces respectives 52, 9, 26, 46 et 1 de Newton :

[Fig. 25] D'après Murdoch : figure BB., planche VIII, p. 86.



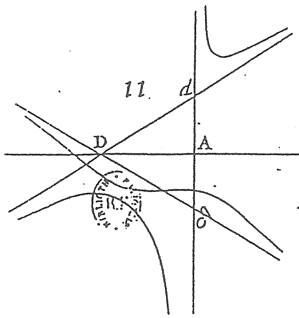
- XIII, lorsque L est tangente à l'ovale en N ou K : on obtient une serpentine et une parabole (esp. 52, fig. 56),

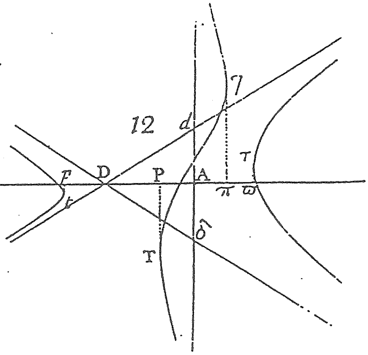
[Fig. 26] Newton : figure 56 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).



49 *Anguinea*, dans la terminologie de Newton, se dit d'une branche "hyperbolique" dont les deux extrémités sont de part et d'autre d'une même asymptote, l'enserrant comme une anguille.

[Fig. 27] Newton : figure 11 de 1704, ou 15 de 1711.



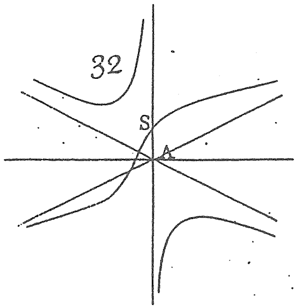


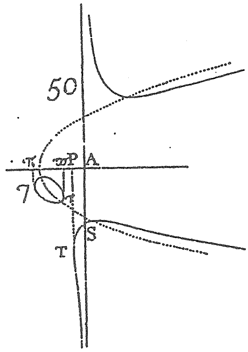
[Fig. 28] Newton : figure 12 de 1704, ou 16 de 1711.

- XIV, lorsque L coupe l'ovale en deux points R, R, à tangentes parallèles ou ne concourant pas sur la tangente TQ en T : on a alors une serpentine et deux branches d'hyperbole inscrites (esp. 9, fig. 15 & 16 de l'édition de 1711, i-e 11 & 12 de celle de 1704),

- XV, lorsque L coupe l'ovale en deux points dont les tangentes se coupent sur TQ : on a une figure analogue à la précédente, mais dont les trois asymptotes sont concourantes (esp. 26, fig. 32),

[Fig. 29] Newton : figure 32 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).





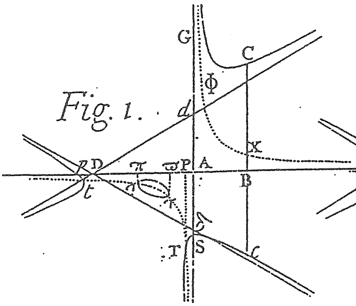
[Fig. 30] Newton : figure 50 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).

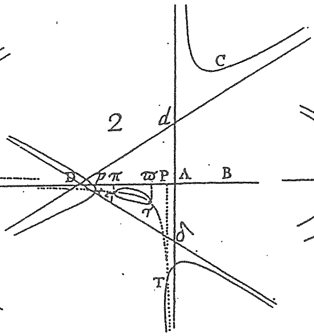
- XVI, lorsque L recoupe la parabole en la touchant (en X ou X_2) : la projection se compose de deux figures hyperbolo-paraboliques dont l'une coupe son asymptote et possède un ovale conjugué (esp. 46, fig. 50),

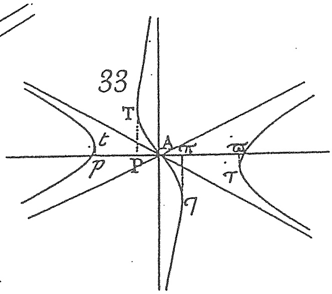
- XVII, lorsque L coupe la parabole en trois points (T, B, C), à tangentes non concourantes, la projection produit trois asymptotes formant un vrai triangle : la courbe engendrée est alors constituée de trois branches hyperboliques issues de la parabole, dont l'une est inscrite, l'autre circonscrite et la troisème ambigène, et d'un ovale intérieur au triangle asymptotique (esp. 1, fig. 1 & 2), et enfin,

- XVIII, lorsque L coïncide avec l'axe, produisant trois intersections à tangentes parallèles, ces dernières se projettent en trois asymptotes concourantes en un point de la ligne horizontale en lequel passera la courbe puisqu'il est l'image des points à l'infini de la parabole dont les branches ont pour direction celle des tangentes : la courbe engendrée sera composée d'une serpentine et de deux branches opposées d'hyperbole (esp. 27, fig. 33).

[Fig. 31] Newton : figure 1 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).
[Fig. 32] Newton : figure 2 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).







[Fig. 33] Newton : figure 33 de l'*Enumeratio* (1704, 1711).

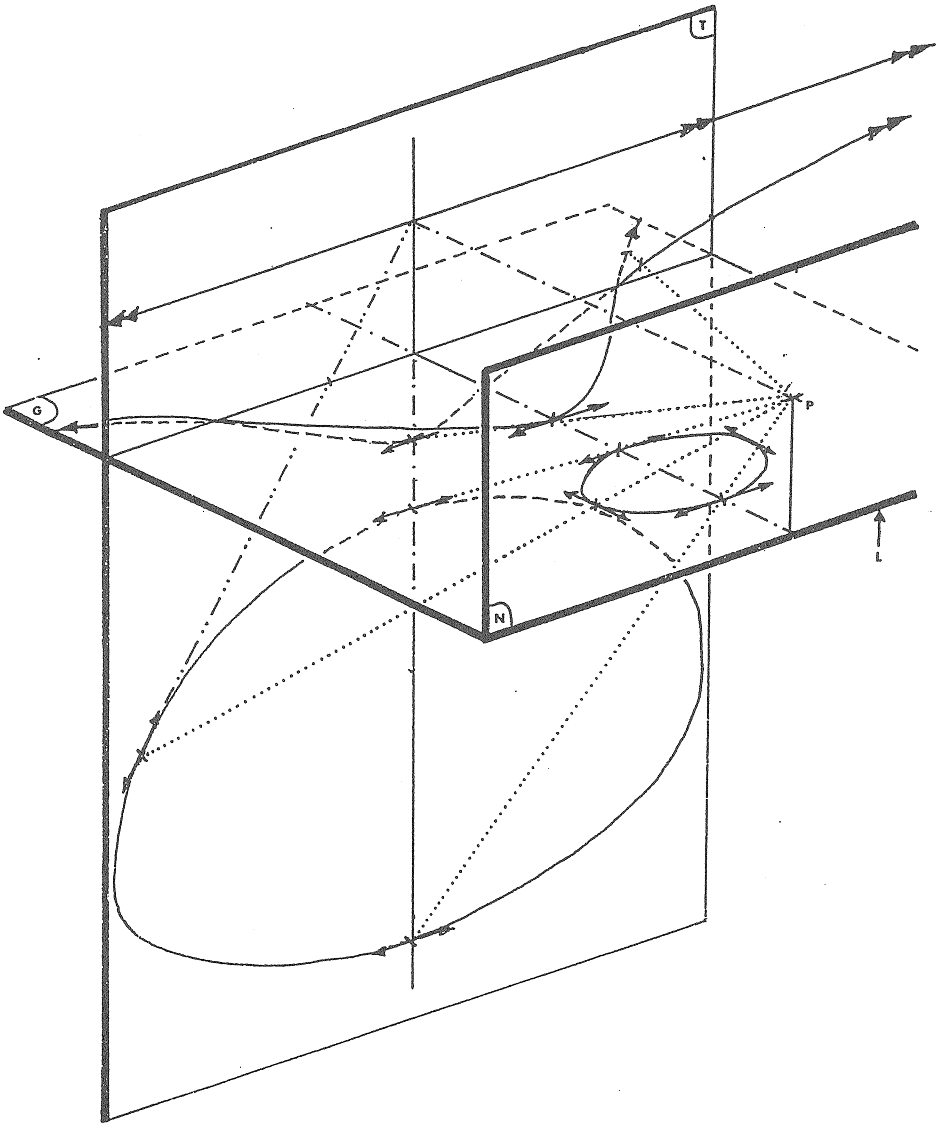
Murdoch procède de même pour les quatre autres paraboles divergentes, en distinguant le cas d'une "ligne des extrêmes" se translatant en restant ordonnée à l'axe, donc parallèle à elle-même, puis celui d'une "ligne des extrêmes" pivotant autour d'un point fixe donné de la courbe (ce qui revient au même d'un point de vue projectif, comme n'aurait pas manqué de le souligner Desargues, en assimilant faisceaux de parallèles et faisceaux concourants). Il procède donc à l'inverse de Clairaut ou de de Gua : projetant les cinq paraboles divergentes suivant deux procédés systématiques, il retrouve les 72 espèces de Newton, les 4 espèces supplémentaires produites par Stirling, et même 2 espèces nouvelles oubliées par eux. Mais il n'acquiert pas pour autant la certitude d'une description exhaustive des courbes d'équation cubique, selon les caractéristiques de Newton.

Enfin, pour apprécier la méthode de Murdoch, il faut rappeler que le choix de la "ligne des extrêmes" (L) dans le plan de la courbe génératrice (ou géométral), dépend soit de celui du plan de projection (ou tableau), une fois le pôle (ou point de vue) fixé, soit de celui du pôle, une fois le tableau donné de position, puisque (L) est l'intersection du géométral et du plan neutre (plan parallèle au tableau, passant par l'oeil). Mais dans le cas où le tableau est fixé, la variation du pôle ne peut entraîner qu'une translation de (L), parallélement à elle-même, puisque le plan neutre reste parallèle au tableau. Il faut donc interpréter spatialement le choix des deux faisceaux de droites, dans la méthode de Murdoch, de la façon suivante : dans l'hypothèse, non réductrice, où le pôle est fixé, le plan neutre tourne d'abord autour d'un axe parallèle au géométral et passant par l'oeil, produisant des lignes (L) parallèles à elle-mêmes : à noter qu'alors, tout tableau parallèle à un plan neutre donné produira une courbe d'espèce donnée, indépendante de la position du tableau ; puis le plan neutre tourne ensuite autour d'un axe reliant l'oeil à un point fixe de la courbe à projeter : de même, tous les tableaux parallèles à un plan neutre de ce faisceau produisent des courbes de même espèce, semblables entre elles.

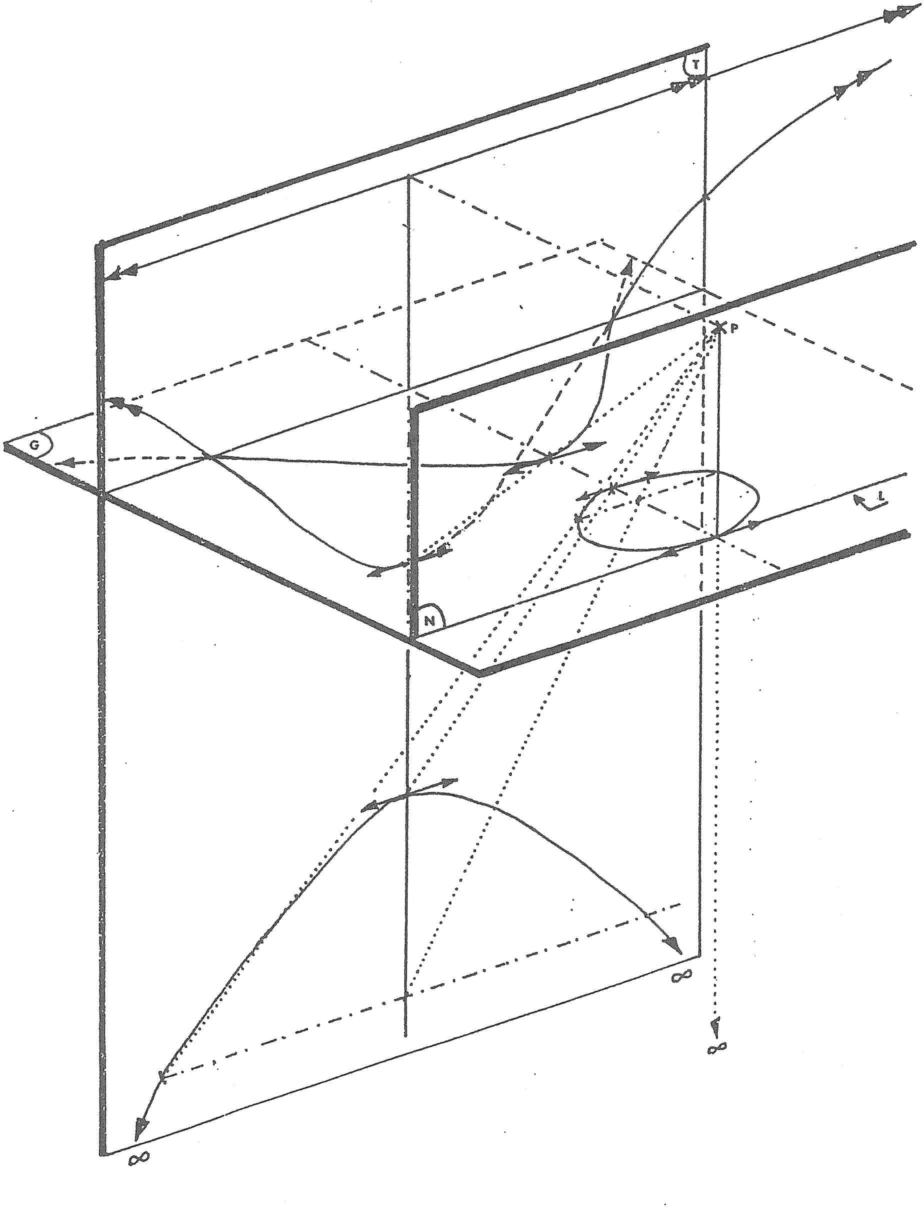
Cette méthode met en évidence, comme chez de Gua, une certaine capacité d'appréciation des effets des projections de l'espace ; d'autant que le support illustratif est assez restreint et se limite à des figures planes dès qu'il s'agit de courbes (c'est-à-dire à l'exception de la figure 1 de la planche I). Mais on notera ici la primauté du recours aux éléments géométriques de la courbe et de la transformation pour mettre en évidence les correspondances entre cubiques quelconques et paraboles divergentes et pour mettre en place une méthode systématique ; la question qui subsiste est la suivante : une telle méthode eût-elle été possible sans l'effort préalable de classification de Newton et de Stirling ? Seul sans doute, Newton possédait la réponse, qui avait dû percevoir tout ou partie de l'analogie relevée et développée par de Gua de Malves, et qui aurait pu être l'autorité initiatrice d'une voie géométrico-analytique s'il eût consenti à livrer tout le fond de ses spéculations, si la vague analytique n'eût imposé assez aveuglément chez les *géomètres* sa propre absence de *point de vue*, ou entériné une certaine impuissance à se persuader de la légitimité des méthodes projectives.

Afin de pallier l'absence de figures spatiales chez Murdoch, nous terminerons sur quelques illustrations hors-texte, proposant des perspectives de la première parabole divergente.

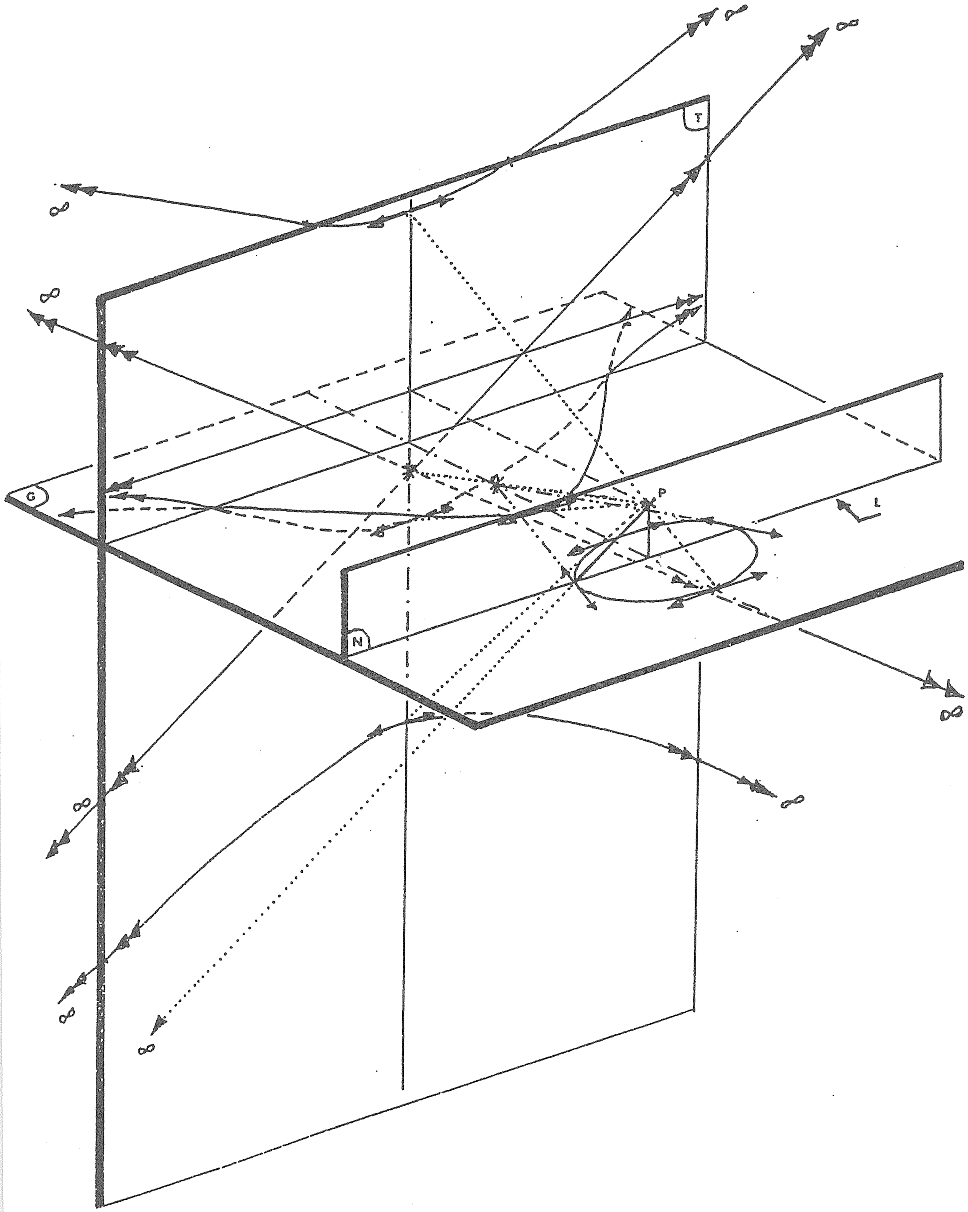
HORS-TEXTE VIII :
Projection n°I de Murdoch : la fig. 70-1 devient fig. 45.



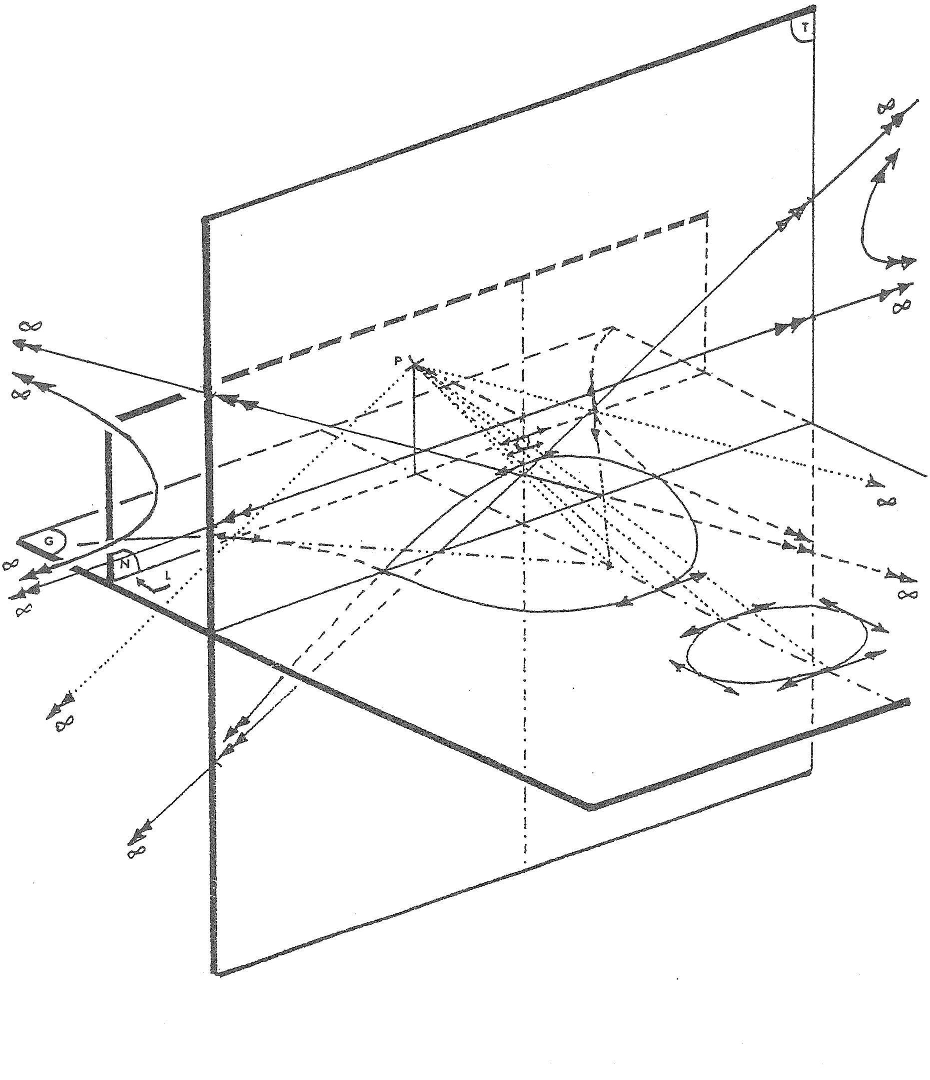
HORS-TEXTE IX :
Projection n°II de Murdoch : la fig. 70-1 devient fig. 59.



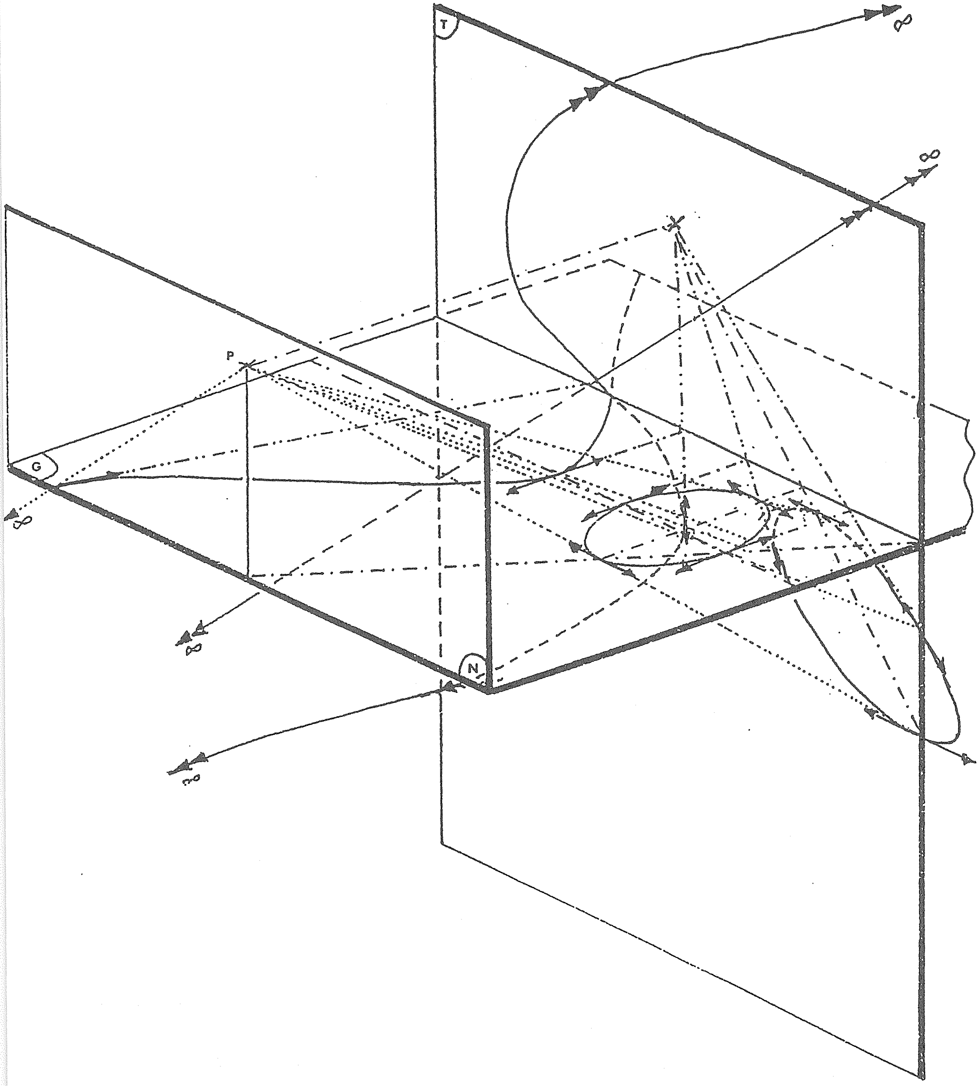
HORS-TEXTE X :
Projection n°III de Murdoch : la fig. 70-1 devient fig. 27.



HORS-TEXTE XI :
Projection n°X de Murdoch : la fig. 70-1 devient fig. 17.



HORS-TEXTE XII :
Projection n°XII de Murdoch : la fig. 70-1 devient fig. 39.



CONCLUSION.

Ces deux commentaires de l'*Enumeratio* de Newton nous paraissent montrer clairement la permanence des idées projectives développées par Desargues. Mais ce type de raisonnement ne semble pas reconnu comme une méthode générale et universelle, qui se suffit à elle-même. Chez Newton, comme chez ses commentateurs, nous voyons sourdre les idées et les principes de la géométrie projective, mais elle y est confrontée aux autres méthodes. Face à la géométrie des coordonnées de l'héritage cartésien, face au calcul infinitésimal dont la puissance s'affirme, les méthodes arguésiennes semblent avoir du mal à se faire reconnaître. Il leur manque une généralité plus grande, une autre application que les coniques. La classification des cubiques aurait pu être le prétexte à cet élargissement du champ d'application des idées projectives. Mais les résultats de Newton, les travaux de ses commentateurs, ne peuvent que nous laisser sur notre faim. On voit bien comment on pourrait rattacher les manipulations des équations par Clairaut ou de Gua aux coordonnées homogènes, on voit aussi comment une vision de l'espace et des projections comme celle de Murdoch prépare la voie de la géométrie sans figure de Monge, Poncelet ou Chasles. Mais nous avons vu aussi que ces méthodes ne se détachent pas clairement du fond commun des méthodes d'étude des courbes algébriques. Nous laisserons la conclusion à Michel Chasles, dont l'*Aperçu historique*, malgré ses tendances à l'interprétation rétrospective et finaliste, a été et reste toujours notre guide :

> [...] *Le peu d'usage que l'on fait maintenant des propositions de Géométrie et des nombreuses propriétés des coniques, par lesquelles il faut passer pour traiter par la méthode de Newton les grandes questions du sys-tème du monde, a contribué, indépendamment des avantages que présen-tait, sous d'autres rapports, la voie analytique, à faire abandonner cette première méthode que l'on a jugée longue et pénible, et qu'on a regardée comme ne promettant rien ou presque rien pour l'avenir. Et ce jugement a acquis chaque jour d'autant plus d'autorité que l'Analyse, cultivée exclusivement, a fait des progrès continus qui permettent de simplifier et de perfectionner, de plus en plus, les premières méthodes analytiques que l'on a substituées à celle de Newton. Celle-ci, au contraire, ayant cessé d'être cultivée, est restée dans l'état où elle était en sortant des mains de son illustre auteur. Et l'on ne songe pas, quand on la met en parallèle avec l'autre, à prendre celle-ci à son origine, et à citer les premiers essais des analystes pour convertir les beaux résultats de Newton en une Analyse d'abord pénible et sans élégance, mais qui, depuis, s'est*

perfectionnée de jour en jour, par les efforts continus des plus célèbres géomètres. Pourquoi donc, au moins, ne pas tenir compte des perfectionnements que la méthode géométrique, qui peut devenir si souvent intuitive, eût reçus aussi, si elle n'avait pas été abandonnée complétement ? [50] [...]

****

---

50 Op. cit., chap. IV, § 14, p. 158.

BIBLIOGRAPHIE.

SOURCES.

- CHASLES, M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie...*, Paris, 1837 (2de éd. 1875, 3ème éd. 1889), pp. 144 à 153, et 348 à 350.
- CLAIRAUT, A.-C., *Recherches sur les courbes à double courbure*, Paris, 1731.
- CLAIRAUT, A.-C., *Sur les courbes Que l'on forme en coupant une surface courbe quelconque, par un plan donné de position*, 1731, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1733, pp. 483 à 493 et 8 figures en une planche (n°30 du volume, insérée en p. 492).
- DE GUA de MALVES, voir GUA de MALVES.
- DE JONQUIERES, voir JONQUIERES.
- DE LA HIRE, voir LA HIRE.
- DESCARTES, R., *La Géométrie*, pour faire suite au *Discours de la Méthode*, Paris, 1637.
- GUA de MALVES, (L'abbé) J.-P. de, *Usage de l'analyse de Descartes pour découvrir sans le secours du calcul différentiel, les propriétés, ou affections principales des lignes géométriques de tous les ordres*, Paris, 1740.
- GUISNÉE, *Application de l'Algèbre à la Géométrie, ou Méthode de démontrer par l'Algèbre, les Théorêmes de Géométrie, & d'en résoudre & construire tous les Problêmes. L'on y a joint une Introduction qui contient les Règles du Calcul Algébrique. Par Mr Guisnée de l'Académie Royale des Sciences, Professeur Royal de Mathématique, & ancien Ingénieur ordinaire du Roy.* A Paris, 1705.
- JACQUIER, F. (le père, de l'ordre des minimes), *Elementi di Prospettiva secondo i Principi di Brook Taylor...*, Rome, 1755.
- JONQUIERES, E. de, *Traduction du Traité de MacLaurin sur les courbes du troisième ordre, avec des notes et additions*, in *Mélanges de Géométrie pure*, Paris, 1856.
- LAGNY, voir FANTET de LAGNY.
- LA HIRE, Ph. de, *Nouveaux Elemens des Sections Coniques, Les Lieux Geometriques, La Construction, ou Effection des Equations*, Paris, 1679.
- MACLAURIN, C., *Geometria Organica : sive Descriptio Linearum Curvarum universalis*, Londres, 1720.
- MURDOCH, P., *Neutoni Genesis Curvarum per Umbras, seu Perspectivae Universalis Elementa ; Exemplis Coni Sectionum et Linearum Tertii Ordinis illustrata*, Londres 1746.
- NEWTON, I., *Philosophiae naturalis principia mathematica*, Londres, 1687.

- NEWTON, I., *Enumeratio Linearum Tertii Ordinis*, à la suite d'*Opticks*, Londres, 1704. Une 2de éd. de l'*Enumeratio* fut publiée en 1711 par D. Jones. Version anglaise en 1860 par C. R. M. Talbot : *Sir I. Newton's Enumeration...*
- NICOLE, F., *Maniére D'engendrer dans un Corps solide toutes les lignes du troisiéme ordre*, in *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences*, Paris, 1731, pp. 494 à 510 et 14 figures en trois planches (n^{os} 31 à 33, insérées en page 510).
- PAPPUS d'Alexandrie, *La Collection mathématique*, trad. P. Ver Eecke, Bruges, 1933, rééd. Paris, 1982.
- PLÜCKER, J., *System der analytischen Geometrie*, Berlin, 1835.
- POUDRA, N.-G., *Histoire de la Perspective ancienne et moderne*, Paris, 1864.
- RICHER du BOUCHET, (Le chanoine) Cl., voir FANTET de LAGNY.
- STIRLING, J., *Linae Tertii Ordinis Neutonianae, sive Illustratio Tractatus Domini Neutoni De Enumeratione Curvarum Tertii Ordinis*. Oxford, 1717. Réédition latine par J. B. M. Duprat, Paris, 1797.
- TAYLOR, B., *Linear Perspective, A new Method*, Londres, 1715.
- TAYLOR, B., *New Principles of Linear Perspective*, Londres, 1719.

BIBLIOGRAPHIE SECONDAIRE.

- BRUNET, P., *La vie et l'œuvre de Clairaut (1713-1765)*, Paris, Centre International de Synthèse, 1952.
- FIELD, J.V., & GRAY, J.J., *The Geometrical Work of Girard Desargues*, New-York, 1987, ch. III, pp. 31 à 46.
- LANIER, D., LE GOFF, J.-P., *L'héritage arguésien*, in *Scholies*, Actes du Séminaire Interdisciplinaire d'Histoire des Sciences du Lycée Malherbe de Caen, numéros 7 & 8, février & juin 1989. À paraître en 1991 dans les *Cahiers de la Perspective* de l'IREM de Basse-Normandie, n° 5, et dans les *Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences*, Actes des colloques de Lille et Paris organisés en 1989 par le Séminaire d'Histoire, Théorie et Pratique de la Perspective.
- LE GOFF, J.-P., *La perspective dans les pays anglo-saxons*, Actes du Séminaire Interdisciplinaire d'Histoire des Sciences du Lycée Malherbe de Caen, numéros 10 & 11, février & juin 1990.
- STRUIK, D.J., *A Source Book in Mathematics*, Harvard, 1969, pp. 168 à 178.
- TATON, R., *L'œuvre scientifique de Gaspard Monge*, Paris, 1951, en particulier, pp. 101 à 147.
- WIELEITNER, H., *Die Behandlung der Perspektive durch Murdoch*, in *Bibliotheca Mathematica*, III-14, 1913-14, pp. 620-635.