

LA REPRESENTATION EN PERSPECTIVE COMME OBSTACLE EPISTEMOLOGIQUE

Philippe LOMBARD
Irem de Lorraine

En vain les analystes voudraient-ils se le dissimuler : ils ne déduisent pas, ils combinent, ils composent : tout immatérielle qu'elle est, l'analyse n'est pas plus en notre pouvoir que d'autres ; il faut l'épier, la sonder, la solliciter. Quand ils arrivent à la vérité, c'est en heurtant de ce côté et d'autre qu'ils y sont tombés.

Evariste Galois

Cet exposé s'appelle : *la représentation en perspective comme obstacle épistémologique*, et je suppose que si vous êtes si nombreux à vous y être intéressés, c'est qu'il y a quelque chose d'attirant dans ces deux mots de *perspective* et d'*obstacle*, qui sont en effet deux mots un peu mythiques ...

Le mot *perspective* – c'est-à-dire la notion de perspective – est un thème un peu maudit en mathématiques. Vous savez sans doute que, sous le nom de *géométrie descriptive*, cela a servi pendant pas mal de temps à la formation en mathématiques, et aussi que cela a bien disparu avec les *maths modernes*. Mais en fait, au regard même de l'histoire, on peut se demander si la perspective a vraiment été un jour considérée comme un domaine à part entière des mathématiques. Tout le monde est d'accord pour penser qu'entre Apollonius et Poncelet – entre les coniques d'Apollonius et celles, projectives, de Poncelet –, on doit au moins placer les coniques de Desargues qui reposent, semble-t-il, sur la perspective ... Mais en fait, si vous ne comprenez rien à la géométrie projective aujourd'hui et que vous vouliez aller chercher des "tuyaux" dans

Desargues pour y comprendre quelque chose, je suis bien obligé de vous prévenir que vous n'y comprendrez rien du tout ! On prête à Desargues l'invention de la géométrie projective au nom de son invention de la *géométrie des projections*, or dans le livre de Desargues sur les coniques il n'y a pas un mot sur les projections ! Sur une centaine de pages, vous lirez à peu près cinquante pages, au début, qui sont complètement incompréhensibles et qui sont consacrées à la *théorie de l'involution* ; ensuite vous trouverez des théorèmes sur les coniques, et vous rencontrerez (peut-être) une remarque, entre une proposition et une démonstration, ... une remarque invitant le lecteur « à faire comme lui » [Desargues], « à s'amuser à faire une démonstration *par le relief* » [c'est-à-dire dans l'espace] ; sous-entendant ainsi que c'est ce moyen qui permet de faire une démonstration « générale de tous les cas » ...

C'est effectivement ainsi que les cas de l'ellipse, de la parabole et de l'hyperbole se ramènent à un seul en géométrie projective, mais à part une demi-ligne qui vous invite à le faire tout seul, vous ne trouverez pas un

mot de plus dans l'œuvre de Desargues : le mystère restera sans doute entier !

En fait, la perspective est une chose qui, dès l'Antiquité, a été considérée comme marginale par rapport aux mathématiques, au même rang que l'*optique* ou la *gnomonique* (la science des cadrans solaires). Et je ne suis pas sûr qu'elle ait jamais été intégrée véritablement aux mathématiques, modernes ou non. Cela n'empêche pas qu'il y ait un attachement à la perspective, d'ailleurs porteuse aujourd'hui d'une certaine mode, sans doute comme retour à l'ancien, en réaction aux *maths modernes*. Mais personne ne sait vraiment si elle peut servir à l'apprentissage de la géométrie ...

Une question importante, à la base de cet exposé, pourrait donc être : « est-ce que la perspective s'intègre, du point de vue épistémologique, à une démarche de compréhension de la géométrie projective ? ». C'est le premier aspect du problème. Le deuxième aspect, c'est que les mots même d'*obstacle épistémologique* correspondent, eux-aussi, à un mythe ...

La notion d'obstacle épistémologique – introduite par Bachelard en 1938 – a, dès sa naissance, souffert d'un péché originel, d'une *malédiction* en quelque sorte : Bachelard avait cru bon de dire (en substance) : « J'introduis la notion d'obstacle épistémologique pour les sciences, pour la physique, mais il n'est pas question que cela s'applique aux mathématiques ». C'est quand même gênant au départ ! Mais cela n'a pas empêché les didacticiens, à un moment donné, de reprendre cette notion en disant qu'il était nécessaire de la réintroduire pour comprendre ce qui se passait dans l'enseignement ...

Pourtant personne, jusqu'à présent, n'a donné de définition vraiment claire de la notion d'*obstacle épistémologique*. Si vous interrogez quelqu'un qui se sert de cette

expression *obstacle épistémologique*, il vous dira : « c'est un obstacle, une difficulté ... », un point c'est tout. En terme de modélisation, les didacticiens, disons *littéraires*, pensent que c'est une chose *qui entraîne un conflit entre connaissances déjà acquises et connaissances nouvelles à acquérir* ... Si cela peut vous suffire, je veux bien ! C'est à la fois *trop* et *pas assez* : cela n'explique pas *comment ça fonctionne*, et c'est trop *passé-partout* pour permettre de cerner effectivement la notion d'obstacle épistémologique !

Ce flou permet de plus toutes les récupérations manichéennes. Actuellement, dans la mesure où le manichéisme est de gauche, cela a été récupéré sous la forme d'une introuvable *théorie didactique de l'erreur*, dans laquelle l'*erreur* – c'est-à-dire le résultat de la confrontation à l'*obstacle* – est quelque chose de dynamiquement très porteur dans l'apprentissage ... Mais cette pétition de principe mise à part, j'ai eu beau chercher dans les documents qui parlent de *théorie de l'erreur*, je n'en ai pas trouvé de *modélisation* bien convaincante ! A vrai dire la seule modélisation de l'*obstacle* qu'on vous donnera actuellement tient dans un dessin :



fig. 1

C'est-à-dire qu'au lieu de franchir une marche vous avez un *phénomène* qui sépare un *premier équilibre* d'un *second équilibre*, et qui est schématisé par un pictogramme démarquant comme un bourrage de photocopieuse et se terminant comme un éclair de génie dans un encéphalogramme plat ... C'est la seule modélisation *scientifique* que je connaisse !

Bref, on peut donc dire que le sujet – ou plutôt le titre – de cet exposé est attirant. Mais en fait, qu'il s'agisse du problème de la *perspective* ou du problème de l'*obstacle épistémologique*, on ne dispose pas de base sûre pour dire « cela va être ceci ou cela ». Pour tout dire, en jouant sur les mots, j'ai pensé un moment intituler cet exposé : *l'obstacle épistémologique en perspective*, dans la mesure où il s'agit tout autant de *parler de perspective* que de *mettre en perspective* la notion même d'obstacle épistémologique ... Je ne sais pas ce que j'aurai le temps de dire aujourd'hui (le temps avance) ; mais je pense distinguer trois temps : d'abord, sur un

exemple très simple, essayer d'expliquer un embryon de *modélisation*, de façon à exposer la nature d'un modèle possible ; ensuite, dans un deuxième temps, je tâcherai de confronter ce modèle aux grandes idées de la didactique, de l'épistémologie et de la pédagogie ; enfin, si le temps le permet, j'essaierai de revenir sur la complexité du problème posé par la notion de perspective dans l'évolution épistémologique vers la géométrie projective ... Il s'agit là d'un problème très difficile, mais ce que je tiendrais à faire, simplement, c'est de montrer la difficulté du problème une fois que l'on s'est dit : « bon ; ceci est un modèle », ... et qu'on essaie de le faire marcher !

PREMIERE PARTIE : étude détaillée d'un exemple

Comme je l'ai annoncé, je m'en tiendrai à un exemple ; il s'agit de l'exercice suivant :

je dessine un carré ABCD avec ses médianes, et un autre carré à l'intérieur, déterminé par les points qui sont situés au quart des médianes

(c'est une figure arbitraire, ou presque), et

l'exercice proposé à l'élève sur une fiche de travail (cf. fig. 2) est :

j'ai dessiné une table (je travaille en perspective cavalière, c'est-à-dire en projection parallèle), j'ai commencé à dessiner sur cette table le bord A, B, C, D de la figure initiale, complétez-la.

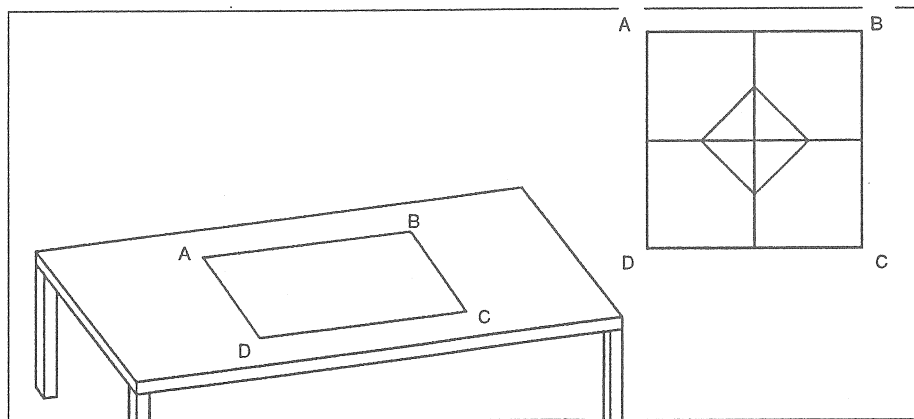


fig. 2

Autrement dit, il s'agit de *transférer* la figure initiale sur la table, en complétant le dessin. Evidemment, c'est un exercice que j'ai choisi volontairement très simple (j'espère que vous savez tous le faire !), mais en fait, ce qu'il faut bien comprendre, c'est que cet exercice-là entre dans une immense échelle de difficultés. Si je vous donne sur la table une ellipse toute bête et si je vous dis : *j'ai tracé ici un cercle et un pentagone régulier inscrit, vous terminerez la figure ...* vous commencerez sans doute à avoir quelques problèmes ! Si je fais la même figure que précédemment en perspective fuyante, vous risquerez aussi d'avoir des difficultés, etc. Donc il faut se placer à un certain niveau dans une échelle de difficultés, et pour dire autrement ce que vous avez tous compris : je parle en fait de l'exercice proposé à un élève qui ne sait pas le faire. Vous ressentirez certainement vous-même ce que peut ressentir l'élève en vous plaçant, par exemple, au niveau du pentagone régulier, ... et vous êtes finis pour l'exposé si vous savez tout faire ! Mais en fait, ce qui m'intéresse c'est d'analyser – ou plus exactement d'essayer d'analyser – le comportement d'un élève face à un exercice qu'il ne sait pas faire et qu'il découvre.

Donc je me cantonne à celui-là, il suffira largement et, de toute façon, je vous rassure tout de suite, ... je ne le ferai pas !

Donc l'idée est la suivante : je la résumerai simplement sous la forme du schéma représenté par la figure 3 : vous avez une *figure initiale* que j'ai rappelée en petit en haut à droite ; vous avez une *figure ébauchée*, (le parallélogramme donné dans l'énoncé et rappelé en bas, à gauche) ; et le problème est très simple en fin de compte : c'est d'essayer de déformer la première (ou de compléter la deuxième), pour arriver à la *figure solution* qui est représentée grossièrement au centre du schéma. On peut

donc presque dire que "tout élève normalement constitué" (en quelque sorte), a une idée de ce qu'il faut qu'il obtienne et a même l'idée qu'il y a une déformation.

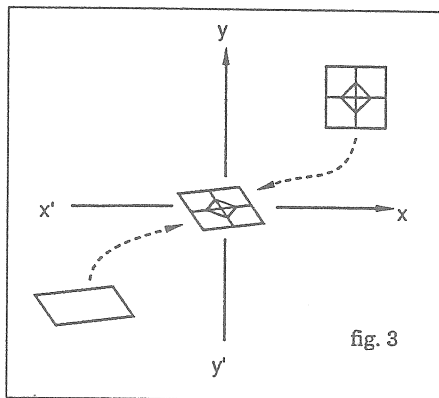


fig. 3

Si j'ai mis ainsi les trois figures dans une sorte de repère, c'est parce que j'ai envie d'exprimer que la déformation en question fait à la fois référence à deux types de trajet : d'une part à un trajet qui fait passer de la géométrie métrique à la géométrie affine, dans le sens où on peut dire qu'il y a une déformation qui fait passer d'une vision euclidienne d'une figure à une vision affine de cette figure, ou si l'on préfère le dire autrement, dans le sens où un rectangle devient un parallélogramme lorsque l'on oublie la structure métrique ; et d'autre part à un trajet qui correspond à une *mise dans l'espace* de la figure initiale (qui est une figure plane). Tout est là, d'une certaine façon, je dis que trouver la solution consiste à trouver un "trajet à deux paramètres" menant, sur mon schéma, vers le point qui représente la solution.

Sur l'axe horizontal il s'agit de *déformation*. (Evidemment, nous sommes entre mathématiciens et le paramètre en ques-

tion peut croître ou décroître, "déformation" ce sera dans le sens "des x décroissants", et "formation" ce sera le contraire...) Disons que c'est un axe de *structuration* de type affine / euclidien : si vous allez vers la gauche, vous passez en géométrie affine, si vous allez vers la droite c'est que vous passez en géométrie métrique (vous pouvez aussi pousser plus loin vers la gauche, par exemple en géométrie projective, enfin vous faites ce que vous voulez comme déformation de la figure initiale).

En ce qui concerne l'axe vertical, je dirai simplement pour le moment qu'il sépare ce qui relève de la géométrie plane de ce qui relève de la géométrie dans l'espace. La figure qui est donnée initialement est donnée en géométrie plane, c'est-à-dire que même si vous la voyez par hasard – en perspective, donc – posée sur la table, vous la lirez, vous, comme une figure de géométrie plane. Et puis celle qui est donnée "dans le dessin de la table de l'énoncé" est une figure à lire comme on lit une figure de géométrie dans l'espace. Donc ce passage-là, je dirai que c'est le déplacement sur l'axe géométrie plane / géométrie dans l'espace sans entrer dans les détails. Enfin j'y reviendrai peut-être plus loin...

Le chemin à trouver est un chemin comme celui qui est indiqué en pointillés : j'ai un point, qui s'appelle "C" (c'est l'image mentale du carré avec ses médianes et son petit carré à l'intérieur, c'est tous les carrés qu'il y a dans la figure) ; j'ai un point "P" (c'est une image mentale de type "parallélogramme") ; j'ai enfin un point "S" qui, dans la tête de l'élève, correspond à la solution. Résoudre le problème c'est construire la figure solution, cela suppose, par la pensée, soit de déformer convenablement la figure initiale, soit de compléter le parallélogramme donné dans le dessin de la table.

Mais je reviens encore une fois sur l'énoncé : il ne s'agit pas de demander à l'élève de faire l'exercice au sens de l'*observation* de ce qui se passe dans la réalité ; c'est-à-dire qu'il ne s'agit pas de prendre la feuille de papier, de la poser sur la table, de se mettre dans une position adéquate, puis de tirer des traits – "à la Dürer", en quelque sorte – pour dessiner ce que l'on voit. La solution, celle que le professeur de mathématiques attend habituellement, consiste en fait à démontrer la figure et à la remonter, en tenant compte des règles du jeu, qui sont essentiellement, en l'occurrence, celles qui résultent de la conservation des milieux. Il faut donc bien préciser cela : il ne s'agit pas d'observer le réel. Le réel n'est pas dans l'exercice. Il y a simplement deux "fantasmes" (si j'ose dire) : le fantasme "géométrie plane" et le fantasme "géométrie dans l'espace" ; ces deux fantasmes qui fonctionnent, soit quand vous lisez une figure de géométrie plane dans un livre (même si le livre est penché, vous ne la lisez jamais autrement que comme une figure de géométrie plane), soit lorsque vous regardez un dessin en perspective, vous travaillez, vous fonctionnez alors dans la lecture d'image "d'espace".

Le double pli

Mon propos se résume donc ici à la chose suivante : expliquer les deux "erreur-type" qui vont se produire avec cet exercice-là – et qui se produisent effectivement, même si vous pouvez penser : c'est idiot de faire des erreurs là-dessus alors que c'est si facile ! Je considère en effet l'élève qui *ne sait pas le faire* et vous, vous pouvez vous imaginer en face d'un pentagone régulier dans un cercle... Vous ferez deux types d'erreurs : le premier type d'erreur c'est d'essayer de reporter à l'équerre, directement sur le dessin de la table, les angles droits

que vous avez vus sur la figure initiale, c'est de se mettre à mesurer ou à utiliser l'équerre, c'est de faire de la géométrie métrique là où il n'y a pas lieu d'en faire ; et le deuxième type d'erreur, c'est d'en faire trop dans l'autre sens, c'est de proposer un dessin qui s'est déstructuré trop par rapport à la solution attendue, où l'intérieur est devenu très oblique, où le petit carré est un quadrilatère sans rapport avec le contour (voir par exemple la figure 4).

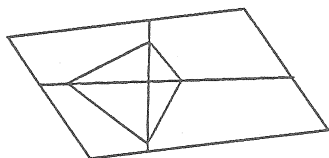


fig. 4

la mise en place du piège

Pour résumer succinctement ce que je pense, je dirai que, devant cet exercice,

l'élève n'a pratiquement aucune chance de trouver la solution ... J'annonce donc tout de suite que, dans ce schéma de première explication, l'exercice n'est pas *faisable*. J'expliquerai ensuite comment compléter ce schéma pour que le problème devienne *faisable*, et pourquoi il devient faisable.

Je pense en effet qu'il est bon de séparer plusieurs étapes. L'élève "normal", (et qui ne sait pas faire l'exercice), est en face de deux possibilités.

— Il va pouvoir, éventuellement, *déformer* la figure initiale, mais cette figure qu'il va déformer *il ne va pas la faire passer dans l'espace*. Si vous prenez la figure initiale et si vous "tordez" le carré sur votre feuille de papier, vous le déformez pour en faire un parallélogramme ou un quadrilatère quelconque, mais vous êtes en géométrie plane. Donc il va y avoir toute une infinité de positions (dans le schéma de la figure 3) pour placer vos possibilités d'images mentales à partir du point "C", mais elles ne rejoindront pas l'espace, c'est-à-dire la partie inférieure, vers les y décroissants.

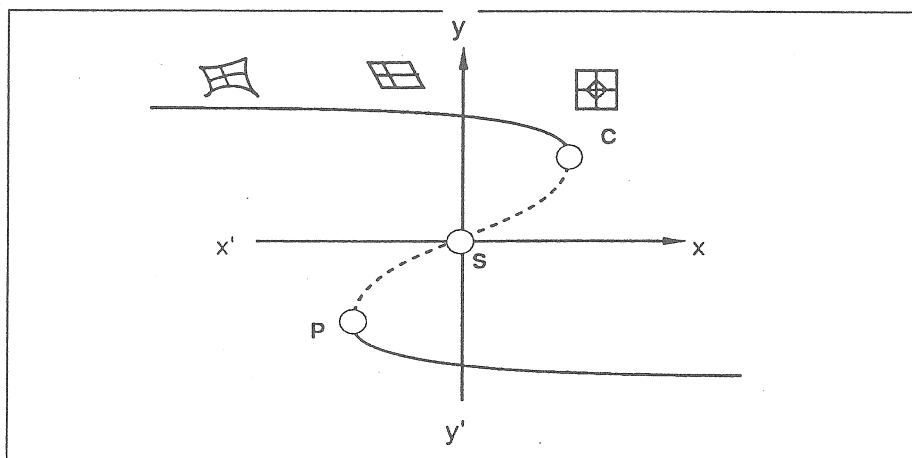


fig. 5

C'est la branche supérieure indiquée sur la figure 5. Vous pouvez, par exemple, mettre des dessins si vous voulez : d'abord on déforme un petit peu, puis on peut aller jusqu'à déformer énormément.

Ces déformations ne sont pas "efficaces" dans l'exercice, mais ce déplacement parallèlement à l'axe des x est celui de la déformation de la figure donnée en *géométrie plane*. C'est le "chemin que font les images mentales" quand on passe (par ex.) de la géométrie métrique à la géométrie abstraite.

— La deuxième chose qui peut se passer concerne le dessin de la table et du parallélogramme qui lui est attaché. Je la décrirai par la branche inférieure, partant du point "P", sur la figure 5. En effet, quand on regarde la table, celle-ci est donnée par un dessin que j'ai réalisé en perspective ; on n'a pas envie de la *déstructurer*, on a envie au contraire de la *restructurer* : c'est-à-dire que, face à une telle figure, qui vous est donnée en *géométrie dans l'espace*, vous avez envie de la recomposer dans votre tête pour y retrouver l'*objet* réel qui est représenté (pour refaire, ici, le parallépipède rectangle correspondant à la table). Ce faisant, vos images mentales vont s'établir dans le cadre de l'espace : l'objet reste dans l'espace, et nous dirons que vous vous mettez à tourner autour ; les points représentatifs de vos images mentales dans le repère de la figure 5 (qui correspond à *déformation* et à *passage espace/plan*) vont s'établir sur la branche inférieure. C'est-à-dire que s'éloigner du point "P" consiste à *structurer* le parallépipède, mais cette structuration reste dans l'espace : dans les y négatifs ...

Bien entendu la modélisation par des courbes est une idéalisation. Ce sont des courbes parce que j'en fais des courbes. Pour ceux qui auraient besoin d'une légitimation supplémentaire de cette modélisa-

tion, il est possible d'imaginer un *nuage de points* représentant les états — les "images mentales", ou les "états psychiques" comme dirait Thom, ou encore les "points de l'espace de contrôle" comme les appellerait Zeeman —, un nuage de points situé dans un espace ayant un grand nombre de dimensions, que l'on projetterait sur le plan de la figure 4 (voir la figure 6).

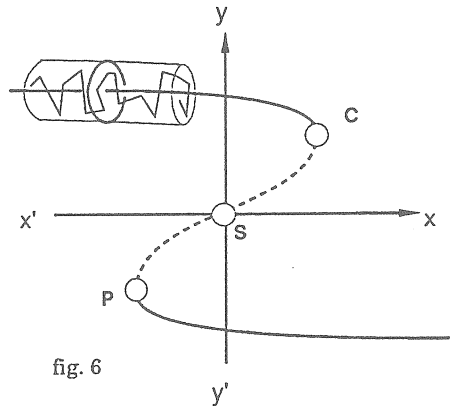


fig. 6

Je pose comme axiome de cette explication, qu'en fait le problème posé par l'exercice peut se résumer convenablement au schéma 5 pour décrire les images mentales possibles pour un élève (ou tout au moins pour celui qui ne sait pas faire l'exercice). La forme de ses images mentales dépend de sa culture, mais en gros, sur la ligne qui représente les possibilités à partir de cet énoncé, il se passe effectivement le phénomène dont je viens de parler : à partir de la figure initiale, on reste en géométrie plane (donc dans la partie supérieure par rapport au repère), et on peut déformer indéfiniment ; pour les images mentales qui se rapportent au dessin de la table, il se passe

surtout des *structurations* : on n'a pas envie de déformer la table, on a envie de la structurer et on reste dans l'espace.

le fonctionnement du piège

L'exercice reste celui-là : comprendre comment gérer une image qu'on peut voir à la fois du dessus, posée sur la table, c'est-à-dire en géométrie plane, et de biais, c'est-à-dire en géométrie dans l'espace. Ce que je pense, c'est que ce dilemme rend le problème impossible pour l'élève, car placé face à ces deux figures, l'élève regarde l'une ou l'autre, mais il est prisonnier de ses "images mentales" commandées par un "curseur" qui se promènerait sur l'axe des x , sans possibilité de maîtriser le déplacement sur l'axe des y ...

Imaginez que l'élève commence par regarder la figure initiale et que le point représentatif de son "image mentale" se place au point que j'ai appelé "K" sur le schéma de la figure 7. Il est naturel de penser qu'il n'aura pas d'emblée envie de

déstructurer la figure initiale, il sera plutôt attiré par le fait qu'il y a des régularités dans la figure (que j'ai résumées par le point "C"). C'est l'attracteur : "la figure est faite de carrés". Donc le point représentant son image mentale est attiré par "C". Dès lors, trouver la solution voudrait dire que l'élève sait négocier le tournant qui l'amènerait vers le point "S". Autrement dit, il devrait être capable, dès qu'il vient d'atteindre l'image "carré", de freiner en "C" afin de faire le chemin qui correspond à une déformation et à un passage à l'espace ... Eh bien cela n'est pas possible : en fait, son image mentale est attirée par le carré, son point représentatif – son curseur intérieur de structuration – a de l'élan, et pof ! ... il se retrouve au point que j'ai appelé "E1", parce qu'il n'y a plus de place sur la branche supérieure ! Qu'est-ce qu'il va faire quand il est arrivé là ? eh bien c'est le cas de l'élève, qui, attiré par l'image : "tiens ! un angle droit !", prend son équerre et va la mettre sur le dessin de la table. Cela s'observe à tous les

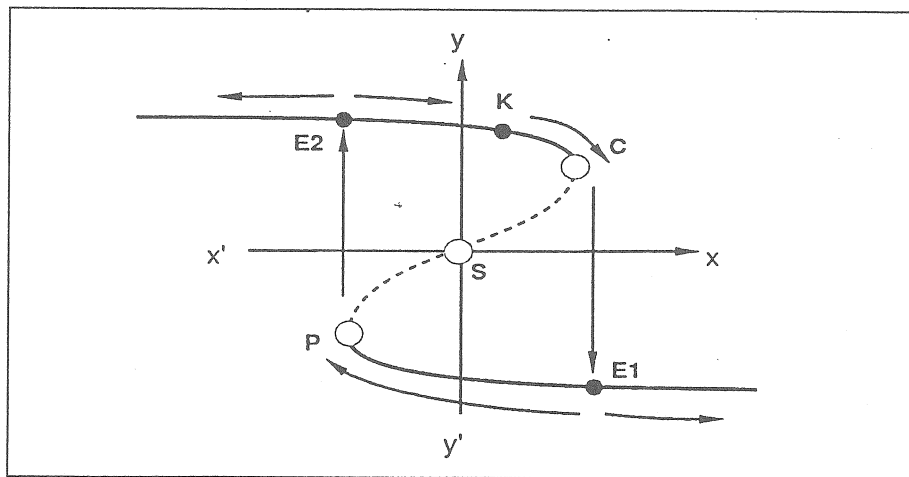


fig. 7

niveaux ; vous pouvez donner un exercice analogue en Fac, vous verrez des perpendiculaires qui sont tracées à l'équerre ! C'est donc l'erreur qui consiste à prendre directement l'équerre ou le double décimètre pour compléter le parallélogramme donné ; elle tient dans cette chute-là : passage brutal de l'idée qu'on avait de la "métrique" lue sur la figure plane (la figure initiale), qui brutalement se trouve transférée telle quelle sur les images mentales qui proviennent du dessin de la table dans l'espace.

Une fois arrivé ici, il y a l'élève qui s'acharne : qui continue son dessin à l'équerre, qui peut même vous faire complètement le transfert de l'intérieur du carré, sans changement, dans le parallélogramme. Il peut aller loin comme ça (vers les x croissants), de toute façon il est perdu. Et puis il y a l'élève qui se rend compte "qu'il a faux" et qui retourne en arrière car il a trop *structuré*, il est trop loin à droite sur le schéma. [Mon schéma est "éclaté" sur les y parce que je vous en parle, l'élève ne travaille que sur le paramètre x . Le plus souvent c'est le maître qui a fait remarquer qu'il a faux : "Eh bien non ! tu vois bien que c'est un parallélogramme sur la table ; ce n'est pas un carré, donc le carré est devenu un parallélogramme, etc., etc.". Je vous laisse trouver toutes les explications pédagogiques que vous voulez !] Donc l'élève est cette fois attiré par cette structure "parallélogramme", il retourne dans la *déstructuration*, c'est-à-dire vers le point "P" du schéma (sur la branche inférieure où est désormais situé le point représentatif de son image mentale). Il va évidemment arriver en "P", ... et qu'est-ce qu'il va faire ? Vous avez tous compris le *scénario* : il tombe, puisque de toute façon il ne peut pas aller plus loin, et il tombe au point que j'ai appelé "E2", avec dans sa tête l'idée de déformation "parallélogrammatique" (si j'ose dire !)

et ce qu'il va faire, c'est *bricoler un dessin déstructuré*, ... mais incorrect ! S'il a de la chance il va assez bien le déstructurer, mais *a priori* il va déstructurer *trop* parce qu'il ne sait pas le faire, tant qu'il n'a pas compris que c'était la conservation des milieux l'idée essentielle ... Donc il tombe et c'est la deuxième erreur que j'évoquais tout à l'heure : dans l'élan, dans un retour vers l'attracteur "P" qui amène à déformer, on est brutalement privé de support, on tombe brutalement d'une *image de l'espace* sur une image qui relève de la *géométrie plane* et on invente un dessin qui n'est pas juste, qui ressemble mais qui n'est pas juste. C'est ce que vous feriez si je vous donnais le pentagone régulier. A force d'être ballotés entre les deux attracteurs "cercle" et "ellipse", vous renonceriez à chercher (surtout si vous ne connaissez pas le "truc" qui permet de faire toutes les constructions), mais vous vous mettriez à bricoler quelque chose qui vous plaît, c'est-à-dire que vous tomberiez dans votre fantasme personnel approchant du résultat prévisible. Arrivés au point "E2", vous pourriez vous acharner dans une déformation, vous pourriez au contraire être renvoyés vers "C" par le maître (ou par votre conscience), et vous tourneriez en rond ...

Vous pouvez vous perdre deux fois, dans les deux sens : dans le "trop métrique" ou dans le "trop affine", mais vous n'avez aucune chance d'aboutir au point "S" en empruntant la partie de la courbe en pointillés ! En fait, cette modélisation-là dit : "l'élève n'a aucune chance ; ce problème n'a pas de solution". Cela est vrai pour l'élève. Mais si vous observez l'histoire de l'invention de la perspective au *quattrocento*, vous savez qu'entre les grecs qui (peut-être) connaissaient quelques rudiments de perspective, et l'émergence des règles de la perspective fuyante en 1450, on peut consi-

dérer que pendant deux mille ans *le problème n'a pas eu de solution*. Toutes les fresques (byzantines et autres), vous donneront des représentations de l'espace ou simplement de plafonds à caissons qui sont archifausses. Pourtant le problème d'un plafond à caissons à dessiner sur une fresque (si vous prenez un plafond avec des poutres, par exemple), n'est pas grand chose d'autre que celui que nous venons de traiter, or jusqu'à la Renaissance les dessins sont toujours faux. Le problème n'a pas trouvé de solution pendant 2000 ans, et cela rejoint assez bien le problème de l'élève : il n'y a pas moyen de passer sur la branche en pointillés du schéma 5. Même si l'élève a plus d'atouts que ses anciens : parce qu'il a déjà vu des dessins en vraie perspective, parce qu'il a déjà vu des photos, enfin parce qu'il a une culture que n'avait pas la Renaissance. Mais en fait, en lui-même, le problème est "impossible" ; je veux dire qu'il est impossible tant qu'on reste *piégé* dans un seul paramètre d'action, qui est celui de la "déformation" (ou, en sens inverse, de la "structuration").

La fronce

Alors, quelle est la solution ? On est piégé tant qu'on est limité à la variable "structure" – structure au sens de forme, de déformation –, tant qu'on est restreint aux déplacements parallèlement à l'axe des x ... Alors, pour arriver à résoudre un problème qu'on ne sait pas résoudre, en général on le modifie un peu et on cherche des portes de sortie ... Chercher une porte de sortie, cela va consister à modifier le problème, le faire varier un peu dans ses données, et cela va donc être d'inventer un paramètre différent de celui dans lequel on est piégé, lorsque l'on est coincé comme tout à l'heure.

Alors, si vous faites varier le problème de l'exemple, en disant "eh bien je vais grossir les figures ou les rapetisser", vous obtenez une dimension possible de paramètre supplémentaire. Et vous avez aussi d'autres variations possibles : vous pouvez transformer les carrés en rectangles en pensant les aplatir ou les étirer, etc. Vous pouvez aussi chercher des idées supplémentaires, mais quand vous faites cela

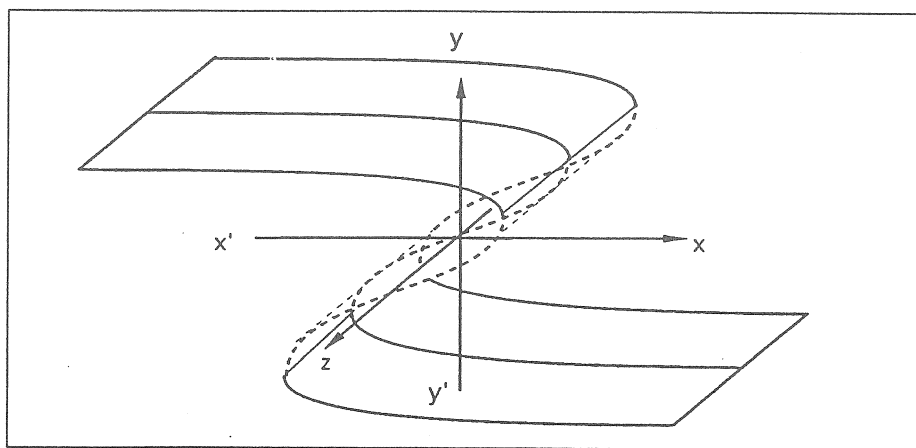


fig. 8

vous transformez le problème en un autre (ou en une famille d'autres, si vous voulez), et vous créez des dimensions supplémentaires en changeant d'énoncé. Vous allez le plus souvent vous trouver face à un problème analogue. Imaginez, par exemple, que vous transformiez l'énoncé en problème sur des rectangles, vous avez le même problème, ce n'est pas une solution. Je dirai que vous avez enrichi votre démarche, que vous vous êtes offert une surface de possibilités pour vos images mentales analogue à celle de la figure 8, avec toujours les mêmes axes que tout à l'heure, mais avec un degré de liberté supplémentaire que j'ai schématisé par la direction de l'axe des z ... Bon, mais ceci ne donne toujours pas la solution si, comme je le pense, vous restez sur une surface du type de celle de la figure 8.

En fait la solution n'existe que s'il y a une variation du problème, (un changement du problème au sens précédent), qui

amène à une surface qui n'a pas le type de la figure 8, mais qui a le type de celle qui est donnée par la figure 9, et que l'on appelle une "fronce".

la section avant est la courbe de la figure 5, et il faut imaginer que, contrairement à ce qui se passe dans la figure 8, si vous coupez la fronce par des sections de plus en plus éloignées, vous allez avoir des "courbes en S" de plus en plus petites, jusqu'au moment où les plis auront totalement disparu. Le point "limite" pourrait être ici le point "O", au niveau duquel il n'y a plus de "section en S", mais où le plan tangent à la surface est vertical.

C'est ce modèle-là qui pourrait représenter le deuxième temps de l'analyse (par le maître, pas par l'élève !), et qui permet d'arriver à la solution de l'exercice ... Ce qui est important en effet, c'est que l'élève ne savait pas faire l'exercice parce qu'il était piégé tout à l'heure, par des erreurs automa-

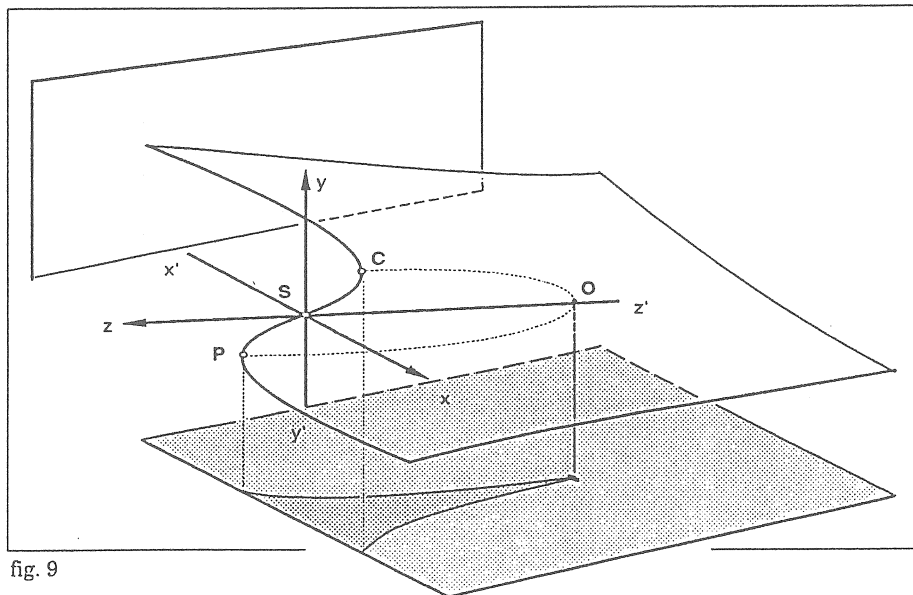


fig. 9

tiques, sur les deux branches de la section avant, et qu'il ne pouvait donc pas aller sur la portion intermédiaire (en pointillés). Mais si maintenant il démonte la figure – s'il *pense* à démonter la figure –, il enlèvera le petit carré que j'avais dessiné au centre pour se ramener à un problème de *médianes*, puis il enlèvera une médiane et il se ramènera à un problème plus simple avec le carré et une médiane ... ; et il faut espérer que, pour lui, arrivera le moment où la solution apparaîtra, c'est-à-dire où il va effectivement trouver les "images mentales" qui l'amèneront vers le point "O" ...

Il introduit ainsi une *autre démarche* de passage à l'acte, qui n'est plus fondée du tout en fait sur la "déformation", mais qui est fondée d'abord sur le "démontage" de la figure, sur la "déconstruction" de la figure. Attention, tout à l'heure c'était la figure qui se déformait – elle restait entière –, maintenant vous la démontez pièce par pièce (comme quand vous voulez transférer un immeuble pierre par pierre). Et en la démontant pièce par pièce, vous allez là-bas, dans le fond de la figure 8, vous arrivez à un endroit où l'exercice est très simple et ne contient plus le piège provoqué par le pli du type précédent, puis en "remontant la figure", vous pourrez désormais aboutir au point "S" représentant la solution cherchée ... Vous aurez parcouru un chemin sur la surface commandé uniquement par les paramètres x et z , et même essentiellement par le paramètre z , car il ne faut pas perdre de vue que le paramètre y n'est pas utilisable par l'élève : c'est une commodité de description pour le maître qui regarde la situation de l'extérieur et qui connaît l'arrière plan, aussi bien mathématique de l'énoncé que didactique du fonctionnement de l'exercice.

En résumé, l'élève est censé *apprendre* cet aller-retour : démontage et remontage

de la figure. Il n'y a pas ici des choses bien nouvelles, mais je pense que c'est comme cela que fonctionne un tel exercice, et ce que j'ai envie de faire, c'est simplement de le "modéliser" par cette *surface fronce*, surface des "images mentales" associées à la figure. Si un problème n'a pas de fronce, si vous restez éternellement sur un pli en "S" comme je l'ai dit tout à l'heure, le problème est insoluble. En fait, la Renaissance a "inventé la perspective" le jour où elle a trouvé une fronce dans le magma de tous les tableaux possibles ; c'est-à-dire qu'elle a trouvé des "trucs" pour démonter les figures et les remonter, en trouvant des problèmes plus simples que ceux qui étaient abordés au départ ...

Retour sur le modèle

J'en terminerai là-dessus pour mon exemple. Je reviendrai simplement un instant sur les *paramètres* que j'ai reliés à la surface qui m'intéressait. Je l'ai dit tout à l'heure : le paramètre x , est un paramètre que j'ai appelé de *déformation-structuration* ; j'ai dit qu'il pouvait partir de la géométrie euclidienne (métrique) pour aller vers la géométrie affine, un peu comme on passe du carré au parallélogramme. Si vous voulez considérer la déformation au sens "bourbakiste" du terme, vous allez trouver tous les *affaiblissements de structure* habituels : vous passerez d'abord par la géométrie affine, ensuite vous pourrez déformer encore plus la figure dans le cadre de la géométrie projective, vous pourrez aussi la transformer encore plus sous forme de courbes différentiables ou continues, vous pourrez faire "éclater" la figure, vous pourrez en conserver uniquement la *mesure* en en faisant une sorte de puzzle, etc., etc. Ce sont là les "images mentales" des mathématiques actuelles, qui composent donc sur cet axe de lecture (que j'ai appelé *structuration-déstructuration*) toute une gamme pos-

sible d'images mentales et d'enrichissement de structures. Au niveau de l'espace, partant d'une vision affine – c'est-à-dire du dessin en perspective –, vous structurerez l'objet de façon métrique : ce qui se passerait sans doute si on allait plus loin vers la droite, sur la branche inférieure du schéma de la figure 5, c'est qu'à force de *structurer* la table et de la recomposer dans votre tête, vous allez certainement aboutir à une sorte d'*image limite*, qu'on pourrait appeler "l'idée qu'on peut se faire, géométriquement, d'un parallélépipède rectangle" ... Mais cette idée-là ne supporte plus le dessin. Vous ne dessinerez pas l'image mentale que vous avez d'un cube. Vous la dessinerez partiellement, en perspective, ou vue d'un côté ou de l'autre, mais l'image mentale que vous en avez, c'est-à-dire les angles droits, les égalités entre les côtés, etc., vous ne le dessinerez pas. C'est une image mentale *spatiale* ... et toute la difficulté de l'exercice est précisément de combiner ensemble ce type d'image avec le dessin qui est forcément à deux dimensions.

Ensuite il y a le paramètre *construction-déconstruction* ; c'est le paramètre *z* du "fonctionnement algorithmique". Vous l'utilisez en fait chaque fois que vous démontez un problème petit à petit et que vous le remontez ... J'y reviendrai plus loin.

Il reste un paramètre vertical (le paramètre *y*), que j'ai appelé grossièrement *géométrie plane-géométrie dans l'espace* ... Ce paramètre vertical est à la fois capital et extrêmement difficile à fixer : c'est en définitive celui qui correspond à "savoir des maths", et surtout à choisir "ce que l'on sait en maths". On peut par exemple l'associer à ce que l'on pourrait appeler la "position de l'observateur vis-à-vis de la table" : la zone des *y* positifs correspondrait alors à un observateur placé au-dessus de la table et regardant la figure initiale de face, la zone

des *y* négatifs correspondrait à une position latérale qui conduit à voir la figure en perspective. On pourrait aussi, de façon beaucoup plus savante, l'associer à une interprétation du problème en termes d'invariants, ou, si l'on préfère, à une lecture "kleinienne" de l'exercice. Quoi qu'il en soit, c'est ce paramètre qui permet la séparation des deux branches de la courbe (et des deux nappes de la fronce) pour amener au type d'analyse que j'ai développé jusqu'ici. Ce qu'il est important de comprendre, c'est que l'élève – à qui vous avez donné un exercice dans lequel il était piégé par le paramètre *x*, et qui ne pouvait trouver la solution que par un aller et retour grâce au paramètre *z* –, l'élève donc, ne peut "regarder" la surface de la fronce *que par le bas* ; c'est ce qui constitue le piège, car il doit alors affronter un pli. Le professeur (qui sait faire l'exercice) ne la regarde pas par le bas ; il la regarde *par le plan des yz* : il regarde la surface qui fait fronce pour l'élève, mais pour lui – qui sait des mathématiques –, *il n'y a pas de pli*, la surface est vue sans ambiguïté, d'une façon parfaitement biunivoque au voisinage du point "O". Vu ainsi, l'exercice n'a plus du tout le même intérêt ; le passage de la figure qui était donnée au départ à celle que l'on veut obtenir se fait, pratiquement "en ligne droite", par un chemin très simple d'analyse géométrique, sans provoquer de conflit.

C'est sans doute l'exemple le plus simple pour modéliser un certain type d'obstacle. Il est insuffisant à mon sens pour comprendre le problème épistémologique posé par l'invention de la géométrie projective et doit être alors compliqué pour atteindre une situation où les "images mentales" occupent une "surface" ayant plus de dimensions et où la singularité est plus "sophistiquée" qu'une fronce ... J'y reviendrai dans la troisième partie si le temps m'en laisse la possibilité !

DEUXIEME PARTIE : retour à l'épistémologie

La description précédente est suffisante pour dégager ce que l'on peut considérer comme la philosophie de ce type de modélisation et la confronter aux questions générales étudiées par l'épistémologie.

L'aspect psycho-cognitif

Nous nous placerons tout d'abord du point de vue que j'appellerai "psycho-cognitif" du fonctionnement de l'élève, c'est-à-dire au niveau épistémologique, pris non pas dans le sens historique de la construction des sciences, mais au niveau de la construction du savoir, ou de la résolution d'un exercice.

Dans la modélisation précédente, on peut dire "en gros" que se rejoignent les deux types de modèles épistémologiques que l'on peut rencontrer dans la littérature. Il y a en effet deux façons d'aborder l'épistémologie en mathématiques : l'une que l'on pourrait appeler "la façon Polya" (vous avez peut être lu le livre "La Mathématique du Plausible"), l'autre que l'on pourrait appeler "la façon Piaget" ...

La "façon Polya", c'est la méthode *stratégique* d'envisager la résolution d'un problème : "j'ai un problème à résoudre, donc je cherche sur la "carte" formée par les théorèmes et les différents résultats que je connais, et j'essaie de voir si je peux trouver un chemin efficace, passant à certains endroits de la "surface" constituée par mes connaissances, et revenant ensuite à mon problème." L'intelligence artificielle fonctionne en gros dans cette optique ; ceux qui essaient de programmer de l'intelligence artificielle, ou de créer de "l'aide à la démonstration" pour les élèves, cherchent le plus souvent dans cette voie : "bon, il y a le mot *parallélogramme* dans l'énoncé, donc

je peux faire appel à telle et telle propriété dans les théorèmes que je connais, ... etc." On explore sur une "carte" un chemin fait de "points de passage" constitués par les résultats connus. C'est la façon, disons "idyllique", de dire à l'élève : "il y a une méthode pour trouver, il suffit d'aller explorer le savoir qu'on a autour, et puis on trouve l'itinéraire correct dans les énoncés que l'on possède ..."

Il y a une autre façon de voir la chose : c'est "la façon Piaget", c'est le point de vue "conflit". Pour Piaget, en effet, le gros problème de l'obstacle, c'est le conflit. C'est devenu aujourd'hui de manière assez vague ce que l'on appelle "le conflit socio-cognitif". C'est en tout état de cause une lecture *dialectique* du phénomène, une analyse où l'élève est essentiellement pris dans un piège de type "conflit".

Ce conflit est, à mon sens, la première phase que je vous ai racontée, à ceci près que pour en faire un conflit "socio-cognitif" – ou bien pour en faire, en termes de didactique actuelle, un conflit entre *connaissance acquise* et *connaissance à acquérir* –, il faudrait simplement admettre que chacune des branches de la courbe de la figure 6 (ou chacune des nappes de la fronce) correspond à l'un des deux ingrédients du conflit étudié.

Audibert, ainsi que l'équipe de l'Irem de Montpellier font partie de ceux qui ont essayé d'aller plus loin. Ils ont assez bien réussi à séparer et à combiner ces deux façons de voir, c'est-à-dire à regarder d'une part le "micro-local" (au moment où il y a erreur et où l'élève est pris dans une forme de conflit), et à étudier d'autre part le temps du passage à l'algorithme, au démontage et au remontage de l'énoncé. Le

"modèle" que je vous ai détaillé ne fait au fond que redire par un dessin, ce que Audibert décrit : le piège dialectique d'un moment suivi de la trouvaille d'une porte de sortie ... C'est là, tout au moins, mon interprétation des travaux de l'équipe de Montpellier !

On peut voir aussi les choses un peu différemment : certains psychologues parlent aujourd'hui de "savoir déclaratif" et de "savoir procédural", dans un contexte qui recoupe l'analyse précédente. Ici, dans l'exercice que j'ai analysé, la solution consiste à dire : "je suis piégé dans un conflit, ... je fais appel à un savoir déclaratif du type *les milieux sont conservés* (dans la projection en perspective)". En d'autres termes : vous êtes prisonnier du double pli, alors vous "changez de paramètre" pour vous diriger vers ce savoir déclaratif, c'est-à-dire vers le point "O" de la figure 9. Cela enclenche une *procédure* pour y arriver, de la même façon que, lorsque vous voulez faire une multiplication compliquée, vous faites des appels successifs – par procédures – aux savoirs déclaratifs que sont les tables de multiplication, afin de pouvoir "remonter" vos calculs. C'est strictement la même chose, et le modèle de la fronce ne raconte pas autre chose, il met simplement dans une direction ce qui va faire conflit, et il met dans l'autre ce qui va faire procédure.

Bien sûr, l'exemple choisi est un "exercice-type" qui se prête bien à ce type d'analyse. Il y a d'autres exercices qui *a priori* ne s'y prêtent pas du tout.

– *Excusez-moi : est-ce qu'on peut établir un lien entre le schéma et le point de vue "savoir déclaratif/savoir procédural" ? (interruption d'une auditrice)*

On peut et on ne peut pas ! De toute façon ce schéma est avant tout une hypo-

thèse de travail ... Le savoir déclaratif "les milieux se conservent" ne me semble pas relever de la direction des x, mais seulement de la direction des y et des z. C'est-à-dire qu'en fait, j'ai personnellement tendance à le placer dans le plan tangent au point "O" (au bout de la fronce en quelque sorte) ; voyez c'est un point de la surface où le plan tangent est vertical. D'autre part, si vous projetez la surface sur ce plan tangent vertical, vous avez une sorte de "savoir faire l'exercice", car vous avez la vision de la surface qui ne fait pas de pli ... Pour aller à ce savoir déclaratif, il faut effectivement se débrouiller pour "décanter" le problème, le démonter et revenir vers l'avant ; mais quand vous êtes au niveau du savoir déclaratif, vous n'avez plus le paramètre "déformation-structuration", vous avez le paramètre "démontage" et, verticalement, une propriété concernant le passage "géométrie dans l'espace-géométrie plane".

Je ne sais pas mieux répondre à cette question difficile, qui est sans doute une des plus importantes pour la valeur épistémologique du modèle. Elle rejoint une autre question de fond : comment expliquer de façon convaincante le phénomène de "compréhension", et plus précisément encore le passage au "savoir faire l'exercice", c'est-à-dire d'une vision "par-dessous" (de la surface fronce) à une vision "latérale" de la fronce, dans laquelle le pli n'existe plus. On peut dire, en restant dans le même registre, qu'un savoir déclaratif fonctionne souvent comme un attracteur réflexe ... J'ai par exemple déjà posé des exercices difficiles de géométrie dans l'espace à des gens qui ont su les résoudre de façon inattendue.

Voici un exemple typique : si vous prenez un cube (cf. figure 10), et si vous tracez sur la face supérieure le triangle ABI, où I est le milieu de BC, vous pouvez proposer

l'exercice suivant : "tracez la hauteur du triangle ABI". Eh bien, j'ai déjà vu des gens qui disaient immédiatement : "c'est facile ! elle passe par le milieu de CD !"

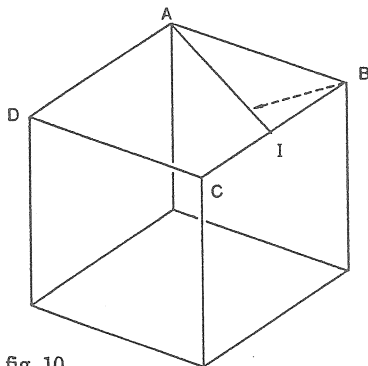


fig. 10

"C'est facile ? pourquoi ?", "Eh bien parce que c'est de la perspective cavalière, donc il n'y a que le milieu qui intervient, ça ne peut être que ça (!)". Voilà, le genre d'appel qui peut être possible avec un savoir déclaratif, cela ne veut pas dire que c'est compris, mais au lieu d'être piégé tout de suite dans le plan des xy (où vous, vous pataugeriez peut-être), il y a des gens qui réagissent autrement, sans avoir à sécher pour découvrir le fameux "aller retour" salvateur. Ils ont de la chance. Cela ne marchera pas à tous les coups, mais ils ont eu la chance de tomber sur le bon attracteur. Cela ne veut pas dire qu'ils ont fini. Ils n'ont pas "démontré", il n'ont sans doute pas "compris", ils ont cependant économisé la phase du piège dans le pli ...

Je disais tout à l'heure qu'il y avait des exercices "à pli" et des exercices "sans pli". Voici un exemple (que je vous cite parce

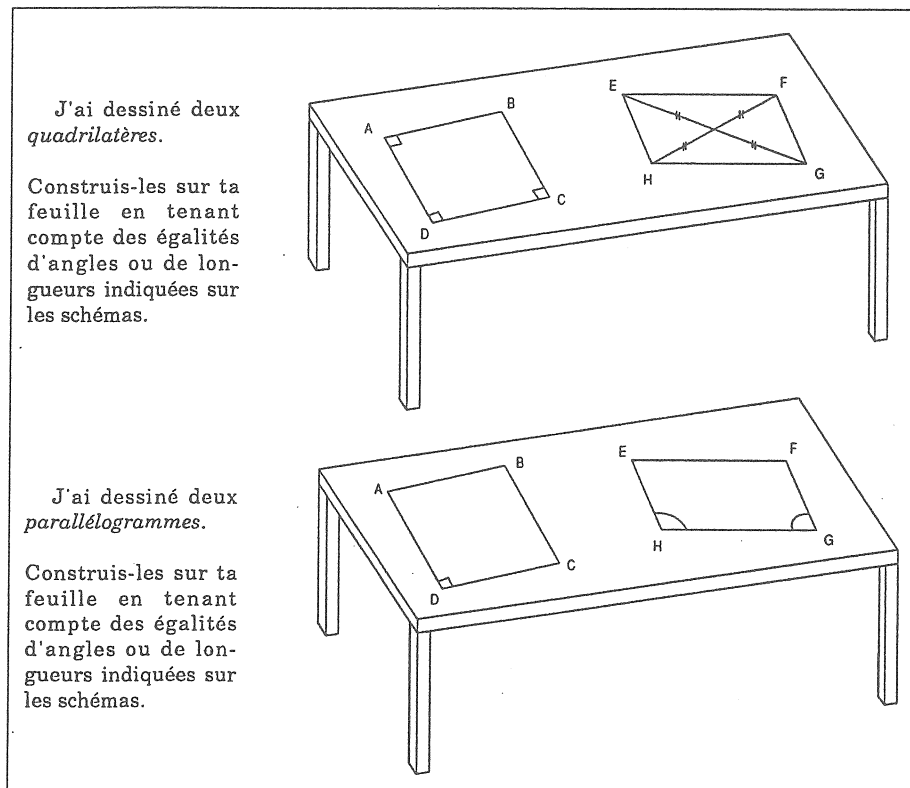
qu'il se trouve que nous l'avons rencontré récemment⁽¹⁾) : nous avons donné en cinquième, les exercices de la figure 11 ... Il ne s'agissait pas de nous situer dans la fronce évoquée plus haut, car avec ce type d'énoncé et ce niveau d'élèves chacun pouvait comprendre qu'il s'agissait simplement d'effectuer des constructions directement à partir des consignes ...

Cela posé, les trois premiers exercices ne correspondent pas (à mon sens, et pour des élèves "lambda") à une modélisation sous forme de pli. Il suffit en effet de suivre les données dans un ordre assez naturel pour les élèves. Je dirai donc qu'ils relèvent d'une stratégie (simpliste) à la "façon Polya". En revanche le quatrième exercice me semble correspondre réellement à un pli (puis à une fronce) : construire un parallélogramme qui a deux angles consécutifs égaux entraîne en effet deux types d'erreurs quasiment automatiques ... Vous commencerez évidemment à placer arbitrairement la "base", et ensuite vous allez mettre un des deux angles ... Alors il y a une lecture de la situation qui va vous focaliser sur "les angles sont égaux", donc vous allez faire un deuxième angle égal au premier, mais situé à l'intérieur ; et il y a une lecture qui va vous focaliser sur "c'est un parallélogramme", et vous placerez un deuxième angle égal au premier, mais à l'extérieur du parallélogramme ... Dans les deux cas vous êtes piégés ...

Alors, il y a les élèves qui, à force de sécher, disent : "Madame, est-ce qu'on peut prendre un angle droit ?" Eux, ils n'ont pas trouvé. Enfin, le professeur (la "Madame") ne considérera pas qu'ils ont trouvé. Il sont simplement passé "au-dessus" (ou "en dessous") du point "S" dans le schéma de la figure 5 en trouvant une idée approchant du résultat, à l'intuition, au hasard, au "coup

(1) cf. Michèle MUNIGLIA, "A propos de la démonstration en géométrie de cinquième", Repères-Irem n°7 avril 1992.

fig. 11



de chance" ... , tout en restant sur une des deux branches de la courbe des images mentales. Celui qui aura trouvé la solution, c'est l'élève qui aura dit : "la somme de deux angles consécutifs, dans un parallélogramme est égale à 180° , donc s'ils sont égaux ils valent forcément 90° ". Et cela veut dire qu'ils sont sortis de l'analyse immédiate des choses, qu'ils se sont échappés vers un savoir autre, ailleurs ... Et c'est ce *savoir* qui constituait le point "O" d'une fronce ...

C'est tout ce que je dirai ici sur le point de vue "cognitif", je signalerai seulement

pour terminer, l'intérêt "didactique" qu'il peut présenter en termes de "diagnostic".

Ce que j'ai raconté jusqu'ici pourrait être considéré comme une analyse "bourbakiste" de l'exercice, parce que le point de vue sur la "déformation-structuration" (sur mon paramètre x) se rattache, comme je l'ai dit, à des images "bourbakistes" de déformation et d'affaiblissement des structures. Ce qui est intéressant, c'est que l'on peut considérer aussi que l'élève a, *lui*, un fonctionnement des déformations qui est tout à fait "non bourbakiste". Là où j'ai dit :

"déformation de type affine de la figure", il est évident que pour un élève, la déformation de la figure initiale – les carrés – peut très bien consister en tout autre chose, comme : faire sauter les sommets, opérer une "désintégration" radicale, imaginer une désarticulation quelconque, comme par exemple celle d'un cadre en bois, même si elle est irréalisable ici, etc., etc. C'est seulement parce qu'on a une certaine culture de "géométrie affine" qu'on peut avoir envie, dans un tel problème, de le déformer exactement comme je l'ai suggéré. Mais en regardant les erreurs des élèves, c'est-à-dire les passages par les points "E1" ou "E2", quand l'élève se laisse aller à faire sa figure déformée à la place de la bonne, on peut se faire une idée de la façon dont il "déstructure", lui ...

Au niveau didactique, ce qui se passe, c'est que Piaget a toujours plus ou moins supposé que la déformation naturelle, ... génétique, de l'élève correspondait à la déformation "bourbakiste" ! C'est loin d'être toujours convaincant ...

L'aspect épistémologique

Pour essayer maintenant de faire comprendre ce que je voudrais dire, *épistologiquement parlant*, du point de vue historique, je vous ai distribué une belle image, une belle allégorie, ... C'est la *Melencolia* de Dürer. J'ai choisi le texte qui est audessous un peu comme un clin d'œil : vous l'avez vu, d'abord il devrait certainement vous mettre dans l'ambiance mélancolique de la *Melencolia* de Dürer, mais c'est surtout un texte de Tchekov qui a été choisi comme exergue par Arnold (le grand mathématicien russe), pour son livre sur la classification des singularités. Or ce que je vous ai raconté jusqu'ici n'est rien d'autre qu'une des singularités les plus simples pour une surface, ...

Bref, disons que j'ai choisi ce dessin comme une allégorie du savoir *mathématique*, ... Non pas pour l'ambiance mélancolique qu'il ajoute à la *Melencolia* de Dürer, non pas pour les gadgets mathématiques qui voudraient peut-être représenter le savoir mathématique, ... non pas pour le "voile" que pourrait représenter la robe du personnage, et qu'il s'agirait, selon la métaphore connue, de "soulever" (quand bien même il y aurait ici un côté freudien !), ...

C'est au contraire la robe elle-même qui pourrait représenter le savoir ...

Imaginez en effet que ce que vous voyez de la robe, avec ses ambiguïtés, avec ses plis, avec ses fronces, ... soit le "savoir mathématique" ; que cette vision de la robe que vous avez là, corresponde à la vision, à une certaine époque, du savoir mathématique ... Ainsi les grecs auraient eu une certaine vision de la robe, le XXème siècle a une autre vision de la "même" robe ... Entre ces deux visions, la robe a pu se déformer légèrement, elle a pu se déplacer, tourner ... , et ce faisant, certaines parties de l'étoffe ont peut-être été dégageées, certains plis ont peut-être disparu, d'autres sont peut-être devenus partiellement visibles ...

C'est là, bien entendu, une allégorie pure et simple ! En fait, je ne prétends pas que le savoir est sur deux dimensions ; il s'agirait plutôt de l'analogue de la robe à plusieurs dimensions ; mais c'est pour vous donner une idée : c'est-à-dire que, "épistémologiquement parlant", l'évolution du savoir, consisterait à ne pas voir grand chose d'autre, mais à le voir autrement, sous un autre angle, au sens de la comparaison avec la robe ... C'est-à-dire que si vous regardez cette robe, vous voyez une portion de l'étoffe, et vous pouvez aussi, en suivant la surface du dessus d'un des plis,

Albert Dürer. *Melencolia I*. 1514.

... Il n'y a rien de plus enthousiasmant, de plus grandiose, rien qui étourdisse l'esprit humain et s'en rende maître autant que les débuts dans une science. Après les cinq ou six premières leçons les espérances les plus lumineuses vous donnent déjà des ailes, vous vous voyez déjà le maître de la vérité. Moi aussi, je me suis donné aux sciences sans réserve, passionnément, comme à la femme aimée. J'étais leur esclave et ne voulais connaître nulle autre lumière que la leur. Jour et nuit, sans redresser l'échine, je bûchais, je me ruinais en livres, je pleurais quand, sous mes yeux, des gens exploitaient la science à des fins personnelles. Mais mon enthousiasme ne durait pas. C'est que chaque science a un début, mais absolument pas de terme, tout comme une fraction périodique. La zoologie a découvert trente-cinq mille espèces ...

arriver à un certain endroit limite, et puis retomber derrière, là où la nappe inférieure du pli redevient visible ... Vous pouvez éventuellement revenir sous le pli, mais vous retomberez devant, sur la nappe supérieure, ... et vous ne passerez jamais sur la partie d'étoffe intermédiaire ... En gros, si vous voulez, c'est ça, ... c'est une façon de retrouver à grande échelle le phénomène décrit dans la première partie !

L'épistémologie pourrait dès lors avoir comme objet de détecter les plis de compréhension (au moins localement par rapport à l'ensemble du tissu, et sachant que c'est toujours relatif à une certaine époque), elle pourrait chercher à les décrire avec suffisamment de précision, elle devrait enfin en expliquer l'évolution et le fonctionnement, en commençant par comprendre ce que peut signifier exactement le fait de se débarrasser de certaines fronces, qu'il s'agisse d'un simple "glissement de point de vue" (qui dégagerait légèrement la singularité, à la naissance du pli), ou qu'il s'agisse d'éventuelles ruptures radicales opérées historiquement dans la façon de "regarder la robe" ...

L'ambition de voir la robe parfaitement repassée et suspendue dans la penderie du repasseur, c'est la vision "bourbakiste" des mathématiques ... Et je dirai que les mathématiciens ont d'une certaine façon le "syndrome du repassage" ... ! C'est là un double syndrome :

– d'abord, quand il y a des plis, c'est : "attention à ne pas les coller malencontreusement !" C'est-à-dire à ne pas faire de confusions ou d'abus de langage. (Coller le pli, dans l'exemple de l'exercice, cela aurait consisté à dire : "oh ! c'est la même figure, donc c'est la même chose, ... il n'y a pas de problème à se poser !".) Au contraire, pour les mathématiciens, quand il y a des plis, la

réaction scientifique c'est presque : "chic ! voilà un pli" et comme on ne sait pas "boucher le trou" – c'est-à-dire faire un "aplat" de cette surface et accéder correctement à toutes les parties de l'étoffe –, il convient de bien délimiter les nappes accessibles du pli, ainsi que les superpositions possibles entre ces nappes ... C'est le premier temps du syndrome du repassage : "bien sentir les plis" !

– le deuxième temps du syndrome, c'est de "bien repasser" chaque pli (quand on y arrive !). C'est de trouver des "fronces" permettant d'inventer les passages menant aux zones originellement inaccessibles, c'est de forger des théories capables d'aplatir – de mettre à plat, au moins localement – la surface de la robe au voisinage du pli ; c'est remplacer la vision "depuis le bas", par la vision "de côté", au sens du schéma de la figure 5.

On peut même considérer qu'une ambition comme celle de Bourbaki, c'est d'obtenir un repassage complet – voire un amidonnage ! – de toute la robe par rapport à un certain point de vue. C'est une ambition périodique, pourrait-on presque dire : le "repassage" total, le rêve d'Euclide comme de Bourbaki, c'était de trouver une "axiomatique totalitaire", si vous voulez, un "repassage" complet du savoir mathématique ... Sans aller en permanence jusque là, la moindre des honnêtetés intellectuelles chez les mathématiciens c'est bel et bien que, lorsqu'il y a un pli, avant même d'en trouver une "mise à plat", il convient d'abord de le faire sentir. Et en général le mathématicien s'amuse beaucoup avec un pli qu'il ne sait pas résoudre, ... il appelle cela, parfois, "un effet tunnel". C'est le cas chaque fois qu'il lui apparaît que des concepts, des notions, des formules, des propriétés se ressemblent trop étrangement, ... mais sans qu'il sache très bien pourquoi ils se ressemblent.

On pourrait trouver de nombreux exemples. Ainsi, aujourd'hui encore, la mécanique quantique, reste une mine de phénomènes de ce type. Plus ou moins localisés à l'intérieur d'un même pli énorme, qui serait constitué par les deux "nappes" que sont la vision corpusculaire et la vision ondulatoire de l'univers. On sait que c'est "pareil" mais on ne sait pas trouver d'explication, c'est-à-dire que l'on ne sait pas regarder le pli par "l'autre côté" ... Mais il est "vital", surtout, de se défendre de faire un amalgame trop abusif (en termes de "collage" de l'étoffe). Et, au fond, la "mécanique ondulatoire", lorsqu'elle s'en tire en disant : "bon, c'est de temps en temps l'un des deux aspects qu'il faut privilégier plutôt que l'autre, on ne sait pas trop pourquoi et on ne se pose plus de question", ne convainc vraiment personne.

un exemple

En mathématiques, d'Euclide jusqu'au vingtième siècle, il y a un phénomène fascinant de cette sorte, (d'ailleurs peut-être pas si éloigné qu'il y paraît du précédent) : il a trait à la notion de nombre réel. Sur ce point en effet, et par comparaison au point de vue qui est le nôtre aujourd'hui, on peut considérer que les *Eléments* d'Euclide sont écrits tout entiers sur un seul et immense pli, dont on pourrait, en simplifiant, attribuer une nappe à la tradition géométrique de Pythagore, et l'autre à la tradition géométrique de Thalès.

A maints endroits, on peut trouver dans Euclide des sortes de "doublons" : des propositions qui aboutissent à des résultats analogues, mais fondées sur deux démarches totalement différentes. Ainsi on peut dire qu'il y a deux propositions, à deux endroits différents, qui résolvent sans le dire exactement le même problème : celui de la "moyenne proportionnelle" ... C'est-à-

dire que, exprimée en termes actuels, la recherche d'un x tel que :

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$$

(où a et b sont donnés) donne lieu à deux solutions différentes : l'une à partir des égalités de rapports entre triangles semblables, l'autre fondée sur la recherche d'un carré ayant la même aire que le rectangle de côtés a et b ...

Pour les grecs, le rectangle correspondait à ce que nous regardons actuellement comme le *produit*, alors que les *rapports* (que nous assimilerions sans difficulté aux *quotients*) relevaient d'une théorie spécifique (c'est en ce sens, qu'en schématisant, on peut rattacher le premier point de vue à Pythagore et le second à Thalès), mais en fait, dans Euclide, vous ne trouverez jamais de passage direct entre ces notions, entre les deux approches. Il y a en l'occurrence la résolution vue par les surfaces ; plus loin, dans un autre chapitre, il y a la résolution vues par les proportions ... Et ces deux points de vue ne peuvent se confondre : l'équivalence actuelle entre

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{b} \quad \text{et} \quad x^2 = ab$$

n'a pas de sens chez les grecs, puisque les quantités concernées pourraient être (par exemple) des volumes, et donc ne pas se multiplier ...

Ce "pli" donc, entre les traditions "pythagoricienne" et "thaléssienne" est à mon avis un très bel exemple "d'effet tunnel" ... Dès avant Euclide, en effet, Platon disait : "évidemment, c'est la même chose ! C'est la même chose de faire $a/x = x/b$ que de faire le quarrage du rectangle". Il connaissait – presque aussi bien que nous, pourrait-on dire –, l'analogie possible entre rapports et produits. Il n'empêche : dans

Euclide cela n'y est pas ! Cet *amalgame* n'est jamais utilisé, car le chemin n'était guère justifiable entre les deux points de vue ! Même au prix, semble-t-il, des raffinements contenus dans l'approche que l'on attribue aujourd'hui à Eudoxe ...

Pour se ramener au modèle précédent, il faudrait donc inscrire les *Éléments* d'Euclide sur un pli (au sens de la figure 8), en attribuant une nappe à l'aspect "proportion", et une nappe à l'aspect "surface" (qui donne les produits). Ça ne passe pas de l'un à l'autre ! Ça ne passe pas parce qu'un produit de deux longueurs, cela existe : c'est une surface, mais un produit de deux surfaces, cela n'existe pas ... c'est seulement à la Renaissance que le "carré-carré" ou le "cubo-cube" rentreront effectivement dans les mœurs. Pour un grec, la multiplication n'est pas toujours possible, donc, vous n'auriez pas eu le droit de faire abusivement ce que l'on fait aujourd'hui, de dire : "quand j'ai $a/x = x/b$, j'ai $x^2 = ab$ " : c'est "recoller" trop cavalièrement les deux nappes.

Du point de vue *spéculatif* les grecs n'avaient pas trouvé la "fronce" ... Ils se proposaient, en caricaturant, de trouver la synthèse entre la *musique* – qui donne naissance aux rapports, aux proportions –, et la *géométrie* – avec les aires, les volumes qui correspondent aux produits –, ils n'ont pas réussi ... Alors que l'on peut dire, qu'aujourd'hui, les mathématiques ont trouvé quelque part une fronce, et ont "résolu le problème".

Alors comment est-ce qu'on résout ce problème ? Eh bien, il y a diverses façons. Il y a une façon qui consiste à faire l'*amalgame*, c'est la façon "abus de langage" ; et c'est normal que ça puisse s'amalgamer un jour : rappelez-vous l'exposé sur la perspective : le conférencier a fait un dessin au tableau, à un moment donné, et, pour expli-

quer ce que c'est qu'une involution, il a dit : "Le rectangle construit sur les longueurs est égal, etc." C'était un archaïsme, on ne le dirait plus aujourd'hui ainsi, et cela vous a peut-être surpris. Pour vous, c'est "le produit des longueurs en question", mais, à force de s'habituer à calculer de cette façon sur des figures de ce type et de passer du rectangle au rapport, il y a un *amalgame* qui se fait, fonctionnel, dynamique, ... Et au bout du compte on oublie qu'il y a un pli, car ça marche quand même.

Suivant les époques, le déploiement de ce pli-là s'est fait de façon différente. Ce que je pense, c'est que les arabes, en inventant (pour d'autres raisons) l'écriture décimale, ont inventé le *nombre* pour lui-même.

Chez les grecs, il n'y a pas "le nombre pour lui-même" ; le nombre réel n'existe pas vraiment. C'est, soit une longueur, soit un rapport, mais le nombre n'a pas d'existence propre. Alors qu'une fois passée la civilisation grecque, on peut dire que, grâce à la pratique et à la notation, le nombre a pris une existence, une individualité propre ... on pouvait dire désormais : "un nombre, c'est un "truc" qui est celui auquel je pense en l'écrivant", de la même façon que vos élèves travaillent sur une idée de nombre qui est beaucoup plus simple que la vôtre : pour les nombres réels, ils travaillent sur la calculatrice et un *nombre* c'est tout simplement ce qui apparaît sur l'écran ... C'est là un "concept" qui permet de sortir du pli et de faire une fronce ...

Si au contraire vous prenez l'*Encyclopédie* (des philosophes du XVIII^e siècle), vous vous apercevrez que la "fronce" est toute différente. Reportez-vous par exemple au théorème de Pythagore ; c'est un bon exemple pour le pli qui nous intéresse. Il y a en effet deux démonstrations classiques du théorème de Pythagore : la démonstra-

tion à partir des surfaces des carrés, et la démonstration à partir des triangles semblables. (Je ne vais pas vous les écrire, je suppose que vous les connaissez : ou bien on dessine la hauteur et on considère les triangles semblables, ou bien on construit les carrés sur les côtés et on les découpe) Dans Euclide, il n'y a que la seconde. La première n'est présente que comme résultat sur la similitude mais, comme je l'ai dit tout à l'heure, elle ne peut déboucher véritablement sur un énoncé en termes d'égalité de produits ... Donc, le théorème de Pythagore correspond, lui aussi, à un passage du "pli", avec une "version" sur une nappe et l'autre "version" sur l'autre nappe. Alors que pour nous, aujourd'hui, ces deux versions peuvent être regardées comme deux manifestations d'une même formule : $c^2 = a^2 + b^2$ – qui est un "savoir déclaratif" et peut donc correspondre au point "O" d'une fronce que l'on pourrait considérer comme relevant de "l'algèbre formelle" –, pour les philosophes donc, le dictionnaire encyclopédique, donnait comme démonstration du théorème de Pythagore, une démonstration ... fondée sur la "puissance d'un point à un cercle" ! Ils disaient : "On peut voir facilement le théorème de Pythagore, en connaissant la formule de puissance d'un point par rapport à un cercle, parce que c'est le cas particulier qui correspond au cas où la corde devient tangente". C'est complètement absurde de notre point de vue, parce que, pour nous (et pour Euclide !) démontrer la propriété de la puissance d'un point par rapport à un cercle, relève exactement du même pli, et vous êtes coincés dans une situation où vous démontrez plus que le théorème de Pythagore ! Il n'empêche : dans l'*Encyclopédie*, la fronce proposée – le point de passage proposé pour comprendre –, était : "la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle est

posée comme première si l'on veut parler de raisonnement sur les produits de nombres". C'est à relier au fait que le renouveau des mathématiques occidentales, s'est fait sur l'habileté à manipuler des nombres à la "façon arabe" et sur le jeu, un peu abusif, autour de la notion de puissance d'un point à un cercle : Descartes, lorsqu'il réinvente la géométrie à partir de la notion de nombre se sert effectivement essentiellement de la notion de puissance pour légitimer ce qui relève aujourd'hui, pour nous, de la notion très abstraite de "loi de composition" ...

A chaque époque, en quelque sorte, sa fronce de prédilection !

Vous en aurez une illustration particulièrement frappante si vous lisez le fameux livre de géométrie élémentaire écrit par Hadamard (c'est le début du XX^e siècle) ; vous y trouverez deux démonstrations du théorème de Pythagore : le livre commence avec la démonstration fondée sur la similitude des triangles rectangles évoquée tout à l'heure, et quelques cent pages plus loin, vous rencontrerez une démonstration par les surfaces qui est exactement celle d'Euclide. Vous passez cent pages, et donc, après le "théorème de Pythagore", vous tombez sur la "propriété de Pythagore" et Hadamard dit en note : "*Au fond*, ce théorème est le même que le précédent" ...

C'est fascinant, Il ne dit pas : "C'est le même théorème que l'on vient de démontrer différemment" ; il dit : "*Au fond*, le théorème est le même que celui que nous avons vu au début". Schématiquement, si je m'amuse ici à traduire cela en termes de surfaces et de plis (cf. figure 12), tout se passe comme si, partant du point que j'ai appelé "A", Hadamard revenait – après avoir fait un détour, dans le livre, par un itinéraire circulaire – au "même" point cor-

respondant au théorème de Pythagore ... Mais seulement il ne revient pas au point "A", mais en un point "B" situé sur une autre nappe ! Il ne dit pas comme on dirait aujourd'hui – enfin, aujourd'hui on ne se pose plus guère le problème, sauf dans les IREM, pour savoir quelle démonstration choisir ! – il ne dit pas : "voici une autre démonstration du théorème de Pythagore", mais il dit : "Au fond, c'est le même résultat", en sous-entendant que ce n'est pas vraiment le même résultat !

C'est dire qu'il laisse penser qu'entre les deux, il y a une explication à trouver, ... qu'il y a une "fronce" permettant de rejoindre les deux nappes du pli sans faire d'amalgame trop direct.

Or il se trouve qu'il y a effectivement la possibilité d'imaginer une nappe "en pointillés" entre les deux nappes de la fig. 12 : il y a une démonstration qui est juste intermédiaire (à l'époque d'Hadamard précisé-

ment) entre celle d'Euclide (en "B") et celle des rapports de longueurs (en "A"). Il y a une démonstration "introuvable" – introuvable au sens qu'on ne peut pas la trouver parce qu'elle est dans la partie intermédiaire du pli –, qui est la synthèse entre les deux : c'est la démonstration due à Julia (je pense qu'elle est de Julia) ... Elle consiste à considérer la figure 13 et à dire "Si je construis des figures semblables sur les côtés d'un triangle rectangle, la somme des surfaces vérifie la propriété de Pythagore", c'est-à-dire que la surface d'un "machin" quelconque construit sur l'hypoténuse, est la somme des surfaces des "machins" semblables construits sur les deux côtés (ce n'est jamais qu'un problème de rapport d'homothétie dans les calculs de surface). C'est ce qu'on appelle le "théorème du dromadaire" : "le dromadaire construit sur l'hypoténuse est égal à la somme des dromadaires construits sur chacun des côtés !". Eh bien la démonstration introuvable de

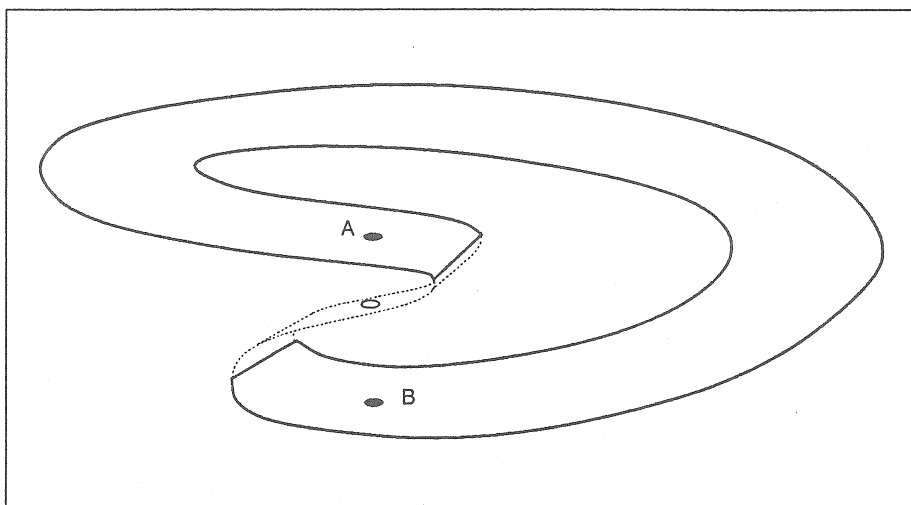


fig. 12

Julia, consiste tout simplement à dire : "c'est facile ! Pythagore est démontré en considérant la partie inférieure de la figure 13 ...". Je vous le démontre en détail quand même parce que je suis gentil : ... sur la figure, je vous ai "ouvert" les triangles. Il suffit donc de remarquer que le grand triangle construit sur l'hypoténuse est nécessairement *égal* à la somme des deux petits triangles construits sur les côtés de l'angle droit. Donc que, *reciproquement*, cela suffit à impliquer la "propriété du dromadaire" dans tous les cas ! ...

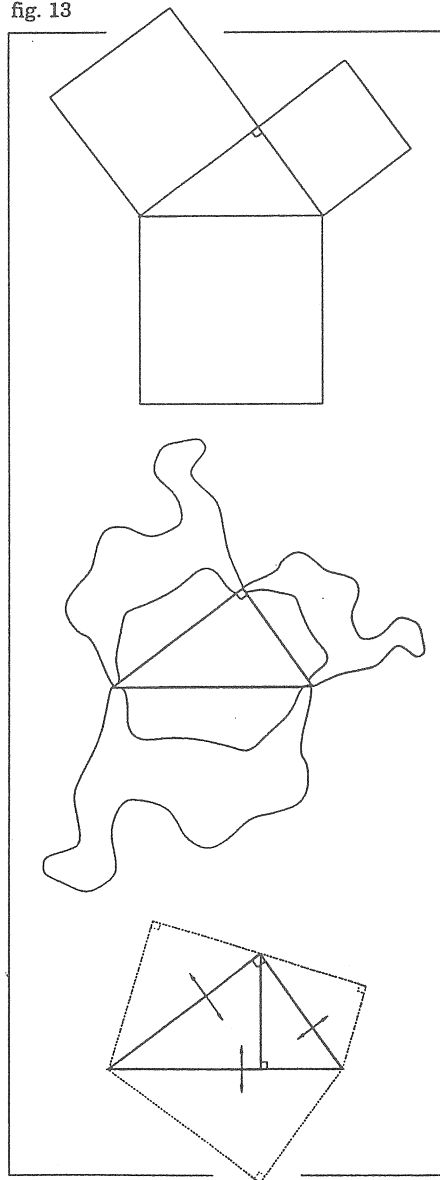
l'aspect pédagogique

Nous n'aurons certainement pas le temps de traiter la troisième partie de l'exposé que j'avais annoncée dans l'introduction, mais nous pouvons essayer de conclure sur la confrontation du modèle des plis et des fronces avec les questions plus générales posées par l'enseignement ...

Avec l'exemple d'Hadamard, nous venons d'ailleurs de basculer sur ce domaine ; celui de la "communication"...

Je n'ai évidemment pas cité Hadamard pour critiquer sa méthode, mais pour montrer comment il procède pour communiquer à ses lecteurs un pli qu'il n'était pas vraiment obligé de communiquer (parce que, à son époque, il n'est pas obligé de dire les choses ainsi et pouvait certainement se permettre un "amalgame"). En disant au contraire *tout à la fois* que ce deuxième théorème est le même que le premier, mais qu'il n'est pas vraiment le même, il choisit, entre les lignes, d'entrouvrir une porte : de laisser (inconsciemment) comprendre, d'une part que l'on peut faire l'amalgame en identifiant les deux propriétés, et d'autre part que ces deux points de vue doivent rester différents, c'est-à-dire *qu'il y a une fronce à trouver* !

fig. 13



C'est au fond tout le problème posé par l'enseignement des mathématiques : quelle politique choisir vis-à-vis des obstacles – lorsque l'on peut les traduire en termes de surface –, avec ses plis, ses fronces, et toutes ses singularités ? ... Le mathématicien lui-même est confronté au problème de sentir et de se faire une théorie qui aplatit le pli, (mais pas qui le recolte) ; le professeur lui aussi est bien obligé de toujours faire des choix ...

A l'époque des années 70, on a lui a dit et répété : "attention ! surtout pas de pli !", et en plus on s'est comporté comme si l'on pensait qu'il était possible d'exposer une théorie parfaitement "repasée" (voire amidonnée ! ...), en racontant les choses *dans le cadre d'une axiomatique qui se tenait totalement*, d'un bout à l'autre. C'est faisable, ... et ça marche très bien, ... dans les livres ! Seulement, ce qui se passe, c'est que ça se heurte aux possibilités et aux connaissances acquises des élèves (là le sens de "conflit socio-cognitif" pourrait peut-être s'appliquer).

En ce qui concerne par exemple la notion de *nombre réel*, vous pouvez si vous voulez, raconter les choses à un élève en étant perfectionniste au point de faire systématiquement la différence entre *longueur* et *nombre*, vous pouvez le faire de façon plus discrète sous la forme retenue par Hadamard ... Mais vous prenez évidemment le risque d'induire chez l'élève un pli dont il n'a rien à faire. Car pour lui, un nombre c'est un "objet" qui correspond à ce qu'il voit sur une calculatrice ; on lui a appris à mesurer avec, ... on lui a appris à faire les calculs avec, mais en fait il est dans un "recollement" presque total. Vous pouvez le perturber en lui disant : "attention, je construis des nombres, je construis des longueurs, ... et je bâtis une théorie ..."

C'est-à-dire, que grossièrement, vous essayeriez ainsi de lui "vendre" la théorie de la "mesure des grandeurs" (précisément celle pour laquelle Hadamard tente de susciter une curiosité de la part de son lecteur), alors que l'élève moyen d'aujourd'hui n'a guère de chances d'y trouver un intérêt palpitant ...

De manière analogue, lorsque vous racontez les nombres relatifs en 5e, vous commencez généralement par raconter aux élèves une théorie qui est une modélisation algébrique du concret. C'est une théorie qui marche très bien ... , à un petit détail près : c'est qu'il faut confondre "additionner l'opposé" avec "soustraire", ... Or auparavant, on a appris aux élèves une vision des problèmes – une "modélisation du réel et de résolution des problèmes concrets" – qui est fondée sur la *soustraction* et l'*addition* ! Il serait étonnant qu'à un moment donné, cela ne "coince" pas en introduisant un "pli" ... Et même si cela ne coince pas – c'est que vous vous êtes bien débrouillés pour que ça ne coince pas –, on finit en général par rencontrer un pli au lycée, au moment de l'utilisation des "valeurs absolues" ...

Il y a tout lieu de penser en effet que l'on touche là à un pli fort important qui, même s'il ne se trouvait pas exactement dans la même "configuration", s'est déjà largement manifesté dans l'histoire. Historiquement en effet, on pourrait presque considérer que l'époque de Viète a inventé sans coup férir tout ce qui peut paraître difficile en algèbre : des nombres relatifs aux nombres complexes ... Or ces découvertes se sont faites essentiellement sur ce que l'on pourrait appeler une nappe "algébrique" de la "surface" représentant le "savoir mathématique". Tant qu'il s'agissait de combiner formellement les "nombres

impossibles", il n'y avait guère de difficultés. C'était tout autre chose à chaque fois que cette "nappe" algébrique venait interférer avec la "nappe" correspondant aux considérations sur la relation d'ordre ou la modélisation de problèmes concrets ... Et il est clair qu'à un moment donné "ça coïncide" ... ; et jusqu'aux Encyclopédistes, jusqu'à Carnot, jusqu'au XIX^e siècle, les mathématiciens disaient : "je ne comprends pas ! Les quantités négatives *ne peuvent pas exister*, or il faut bien que j'admette ces nombres impossibles et que je les fasse fonctionner de façon cohérente avec les nombres naturels ... !" Ils étaient sur un "effet tunnel", ils étaient sur un pli comme celui des figures précédentes ... On a compris les choses – on a inventé une fronce –, le jour où on a changé de modèle ; on a dit en quelque sorte : "je me fais une fronce là-bas, avec la notion abstraite de nombre, avec la notion d'anneau par exemple".

Dans Bourbaki, c'est comme ça ; et la réforme de 1970 c'est cela aussi : "il suffit de raconter d'abord les structures, et puis après on appliquera, comme un rouleau compresseur, les règles canoniques en matière de modélisation du concret" ... On a oublié simplement que l'élève n'était pas forcément d'accord pour trouver cela joli, compréhensible et efficace ! On a cru qu'il suffisait d'un discours rigoureux. Et que si vous, professeurs, vous possédiez un discours sans plis, bien à plat, et que vous le lanciez à l'élève, celui-ci n'allait pas y voir des plis ...

Belle utopie ! Alors même que c'est dans le meilleur des cas que l'élève se contente d'ajouter *quelques plis isolés* au discours parfaitement "repasé" ... Il considère bien souvent que la belle surface que vous tentez de lui transmettre, la belle *feuille de papier* que constitue votre discours, lui parvient complètement froissée, un peu comme si vous lui aviez envoyé une

boulette de papier !

Pour conclure, on peut donc dire que tout le problème pédagogique tient dans ces questions : faut-il "repasser le discours" ? comment gérer les plis, les fronces qu'il ne peut manquer de faire naître ? faut-il faire des exercices "à plis" ou est-ce qu'il faut anticiper toute espèce de difficulté, repasser d'avance, et bien faire attention à soufler toutes les possibilités de fronces ?

Je dirai personnellement que c'est là le domaine de l'empirisme et de l'éclectisme ... : que c'est à vous de choisir !

J'aimerais simplement, pour terminer, citer aussi un exemple qui peut souligner un des aspects de la question : il s'agit (je crois) d'une anecdote citée par Le Lionnais dans son livre sur "Les grands courants de la pensée mathématique". Il prétendait, en effet, que, pour lui, l'intérêt porté aux mathématiques remontait à sa petite enfance, au moment où il s'était trouvé une réponse à la question : "*pourquoi, lorsque je donne la main à mon père, suis-je obligé de lever le bras ? Ce n'est pas normal parce que je suis plus petit que lui, et donc mon bras est plus court que le sien, si bien qu'il n'y a pas de raison que ma main ne tombe pas au même niveau que celle de mon père ... qui est plus grand, ... mais dont le bras est plus long !*" Répondre à la question ne me semble être rien d'autre que de trouver une issue – une fronce – au pli dans lequel était "piégé" le raisonnement initial ... Je vous laisse le soin de "modéliser" ce problème ... Mais c'est cela aussi le plaisir du mathématicien : de se trouver des plis et de les résoudre ... Le plaisir du mathématicien, ce n'est pas de raconter Bourbaki, c'est plutôt contenu dans l'instant où il tombe sur des plis et où il s'invente le moyen de les repasser !

Pour l'élève, ce n'est pas toujours sûr ...

DISCUSSION ET DEBAT EN GUISE DE CONCLUSION

A. — *on voit parfois des comportements très différents entre certains élèves : les uns trouveront immédiatement la "bonne" démarche, pour d'autres c'est très difficile, cela ne veut pas dire qu'ils soient idiots ...*

Ph L. — Il y a plusieurs possibilités : il y a l'élève qui n'a pas de pli par rapport au discours que vous êtes en train de raconter, il y a l'élève (éventuellement) qui a des réflexes du type "savoir déclaratif" comme je l'ai dit tout à l'heure, c'est-à-dire qui trouve tout de suite ; et il y a des élèves qui arrivent péniblement à la solution de l'exercice donné. Mais l'idéal du professeur c'est que l'élève reçoive bien le discours "repassé". Cela suppose éventuellement qu'il surveille ses propres plis.

A. — *Mais le problème, est le suivant : "est-ce que les plis de l'élève sont les mêmes pour tous et sont nos plis à nous ?"*

Ph L. — Non, certainement pas. Ils ne sont ni des plis historiques, ni des plis nécessairement répertoriés à l'avance.

B. — *La question qui me paraît importante personnellement est celle de savoir quel moyen a l'élève de vérifier que sa solution est juste ou fausse. Il ne peut y avoir obstacle que si l'élève ressent un conflit. Mais que veut dire "juste" ou "faux" ? Est-ce au sens du mathématicien ?*

Ph L. — Non, cela n'a pas vraiment de sens. Dans ce que je décris, il n'y a pas de notion de "juste" ou de "faux". Vous pouvez éventuellement relativiser ces notions de bien des façons ; en disant par exemple : "on y' arrive ou on n'y arrive pas" ... ; ou

bien : "l'élève est dans tel ou tel modèle psychique" ... ; ou encore : "il est dans tel type de discours mathématique" ; etc. Mais l'erreur n'est en fait qu'un décalage, et il ne s'agit surtout pas de greffer sur le modèle une sorte de jugement de valeur du type "c'est bien, ou ce n'est pas bien", il n'est chargé que de *décrire* le fonctionnement.

B. — *Ce n'est pas ce que je veux dire. Je veux dire que l'élève peut très bien proposer une solution, mais que votre modèle ne m'intéresserait que dans la mesure où il donnerait à l'élève un moyen de savoir si sa solution est bonne ou mauvaise. Un moyen autre que le fait que le professeur lui dise : "c'est juste" ou "c'est faux" !*

Ph L. — Intérieurement, il n'en a pas ! ... si ce n'est son "honnêteté intellectuelle" lorsqu'il tombe sur une contradiction. Par exemple si le résultat ne lui paraît pas "ressemblant" ... C'est-à-dire qu'il me semble que c'est cela l'attitude du mathématicien confronté à un problème quelconque ...

B. — *Mais non, il n'a pas moyen de trouver... il n'a aucun moyen de savoir si c'est vrai ou si c'est faux !*

Ph L. — S'il le propose, c'est qu'il le pense "vrai", sinon il ne le proposerait pas ... Vous donnez l'impression de mettre un jugement de valeur sur la question. Disons que, sur l'exercice que j'ai pris comme exemple, l'élève qui est tombé en "E1" et qui continue la construction avec son équerre se trompe ; ... comment le sait-il ? Eh bien si rien ne le fait revenir vers "P", il ne peut pas le savoir ! Il peut rendre sa copie telle quelle et on lui dira : "c'est faux".

B. — *Oui, mais comment ? Donc il ne peut pas le savoir autrement que parce que le professeur dit : "c'est juste ou c'est faux" ! C'est en cela que je ne vois pas de conflit ou d'obstacle chez l'élève lui-même !*

Ph L. — Je ne dis pas qu'il y a conflit, dans la tête de l'élève ! Dans la tête de l'élève, les deux nappes de la fronce n'existent pas vraiment : elles ne se séparent qu'accidentellement à l'occasion des passages en "E1" et "E2". Ce que veut enseigner le professeur, c'est que la surface ne doit pas être regardée "par en dessous" pour obtenir un pli, mais qu'elle doit être regardée "de côté", là où on ne voit plus le pli, mais seulement la surface "bien repassée" ... C'est à ce moment là que l'élève a compris au sens du professeur ... Mais attention ! le mot "regardée" n'a absolument pas le sens d'une action consciente : le modèle ne fait que donner un moyen de décrire des actes non maîtrisables par le sujet lui-même.

B. — *Oui, mais alors si c'est cela que les professeurs doivent enseigner, je crois qu'il faut le dire tout de suite ! Je veux dire que dans ces conditions je ne vois pas ce que l'exercice va apporter de plus pour l'enseignement ...*

Ph L. — L'exercice lui-même ? A mon avis, il n'apprend pas la perspective. Il apprend tout simplement la *structuration* des images planes : le seul apprentissage qu'il y a dans cet exercice-là, c'est d'apprendre à démonter une figure plane (qui est celle du début) et à en comprendre ce qu'on appelle sa structure géométrique.

B. — *Oui, mais l'élève, il n'a pas compris !*

C. — *Précisément, ce qui est intéressant dans le problème, c'est que le modèle qui*

est proposé ici est un modèle qui fonctionne au niveau de l'apprentissage des élèves, et au niveau de la fabrication des mathématiques ... Celui qui fabrique des mathématiques n'a pas de possibilité de savoir si c'est vrai ou faux, sinon l'acceptation de la communauté ... C'est cela en général. Ce qui est proposé ici, c'est finalement (si on l'extrapole à l'enseignement), faire "faire des mathématiques" comme ça se fabrique, et la validation elle viendra du consensus général. Le professeur a un rôle prépondérant dans la question, mais dans les classes il n'y a pas que le professeur. Il y a les copains, il y a plusieurs solutions... Vous, vous donnez l'impression d'être dans une "logique bourbakiste" du juste ou du faux ...

D. — *On parle de vrai ou faux, dans la mesure où on peut parler de vrai ou faux, parce que c'est une question relative à une époque ; il y a des choses qui sont vraies à une époque ... mais qui deviennent "fausses". Il y a la communauté qui décrète, ou qui dit : "c'est vrai, c'est faux", et puis il y a aussi le problème des contradictions. Tant qu'on a une solution dans laquelle il n'y a aucune incohérence, il n'y a pas de raison de l'évacuer. Donc, si l'élève est seul avec sa solution et qu'il n'a pas d'incohérence, il va la garder ... Chronologiquement, s'il est confronté ensuite à des gens qui disent : "non, il y a une incohérence", là on va décréter que c'est faux, mais il n'y a pas de faux et de vrai dans l'absolu ... La physique, par exemple, n'est construite que de théories qui évoluent, qui sont en mouvement, et qui ne bougent (en général) que quand il y a, à un moment donné, une contradiction interne. C'est notamment le cas de la mécanique, relativiste ou pas. S'il y a des dysfonctionnements ou des choses contraires, vous passez dans l'autre champ,*

et elles deviennent fausses ... Donc, on ne peut pas dire avant : "elles étaient fausses" et on n'en était pas conscient ; elles étaient "vraies" dans un système, elles deviennent "fausses" dans une autre théorie ou "à prolonger", ou "à modifier", à "mettre en mouvement", etc.

Ph L. — En fait, peu importe si la vérité existe ou non dans l'absolu : ce serait un problème philosophique intéressant pour les "idéalistes" ou les "constructivistes" de savoir si la robe de la *Melencolia* existe par elle-même ou non ! ... Là, il s'agit simplement du conflit entre le discours que veut inculquer le professeur et ce que l'élève en perçoit ; on ne discute pas de vérité universelle. Le professeur a un "vrai", l'élève a un "vrai" et ils peuvent se heurter, c'est tout. Ce qui m'intéresse dans le modèle, c'est qu'à propos d'un exercice on peut décrire, d'une part le pli qui explique les erreurs et la nature de la difficulté sous-jacente, et d'autre part que le *déploiement* de ce pli-là — autrement dit le passage par la fronce —, soit, en l'occurrence, à peu près accessible à tous les élèves. Cela ne veut pas dire qu'ils auront compris la géométrie projective, mais comme vous allez être privés de la troisième partie, je ne peux pas dire ce qu'il faudrait éventuellement faire en plus pour cela. Il faudrait (à mon sens) *déployer* une singularité de dimension supérieure que l'on appelle classiquement "l'aile de papillon" ... Mais, disons que, pour notre exemple, l'élève doit se construire un schéma du type : « quand je suis confronté à un exercice comme cela, il y a une "transformation" qui fait passer d'une figure à l'autre et elle conserve les milieux et les parallèles ... et je me débrouille avec ça pour faire l'exercice en démontant et en remontant la figure ». Voilà le "vrai" que veut faire passer le professeur.

E. — Finalement, la géométrie dans l'espace, c'est dans les lycées qu'on l'enseigne, c'est quelque chose où on va "apprendre" à représenter l'espace, mais le but c'est aussi de pouvoir faire des démonstrations dans l'espace. Ce n'est pas le même problème que de simplement "voir les choses" ... Moi, j'ai eu ce problème assez récemment : il fallait tracer un triangle rectangle dans l'espace, puis la perpendiculaire au plan qui contenait le triangle rectangle pour pouvoir faire des démonstrations. J'ai été vraiment "estomaqué" parce que la majorité des élèves avait fait un triangle rectangle vu de face ! Je leur ai dit : "mais enfin, où est la perpendiculaire ? C'est une figure dans l'espace !". Ils m'ont répondu : "c'est le point-là", car ils l'avaient dessinée "de bout" ! C'était juste de faire une telle figure, mais on ne pouvait absolument pas l'utiliser pour la démonstration. Ils étaient bloqués à cause de ça, ils ne voyaient pas comment faire. Donc je pense que, dans la géométrie dans l'espace il y a ce problème : c'est que nous, nous avons une vision d'une figure qui sert effectivement à faire la démonstration dont on a besoin. De son côté, l'élève peut faire une autre figure dans l'espace qui va le bloquer complètement, comme on le voit sur cet exemple caricatural ...

B. — Et le seul argument à adopter, c'est de dire : "moi, je suis prof, c'est comme ça".

Ph L. — Attendez ! Ce n'est pas ce que j'ai dit ! Au contraire ; le modèle induit ceci : si les seules variations autour de l'exercice se situent *sur le pli*, alors vous devrez dire "moi je suis le prof ! et je dis qu'il faut faire ainsi" ; en revanche, si vous trouvez une *fronce* (éventuellement, de façon spiralaire), et si elle est accessible à l'élève de façon assez naturelle, alors vous aurez peut-être réussi à ce que l'élève tente

presque de lui-même la déconstruction et la reconstruction de la figure, en cherchant des cas de plus en plus simples. Voilà, didactiquement c'est de cela dont il s'agit : il ne sert à rien de faire accepter un pli qui n'est pas une fronce, et quand un pli existe, il faut le "froncer" en allant à un endroit où il se simplifie. C'est la démarche pédagogique naturelle.

F. — Moi, ce que j'ai compris de ce modèle c'est que c'est un modèle "d'expert", destiné non pas à l'élève, mais par exemple au professeur qui réfléchit et qui essaie de comprendre ou d'interpréter certaines choses, certaines erreurs des élèves notamment. Vis-

à-vis de ton élève, le problème, ce n'est pas de savoir si lui, il a "juste" ou "faux", mais c'est de savoir que, quand il croit qu'il a répondu à la question en faisant un carré au lieu d'un parallélogramme, alors tu sais qu'il est à ce niveau-là de la "surface" ...

Ph L. — Voilà, à ce niveau-là, cela ne sert qu'à ça. La seule ambition du modèle, c'est d'être plus intelligent que le "bourrage de la photocopieuse" et "l'éclair de génie, etc." ! c'est d'essayer éventuellement de décrire des possibles ! Est-ce qu'on peut vraiment décrire tous les possibles de l'élève ? Sans doute pas ; le modèle est simplement un cadre qui pourrait permettre de les y inscrire ...

Le texte présenté ici est la retranscription de la conférence tenue au colloque. Y compris en ce qui concerne la discussion finale. Nous nous excusons auprès des différents intervenants de les avoir ainsi désignés par des lettres : pour la plupart, nous ignorons leur identité ...

La "troisième partie" promise, consacrée plus spécialement à la géométrie projective, fera l'objet de deux exposés ultérieurs :

Le premier au colloque de Brest de 1992 : "La notion de point de fuite comme obstacle épistémologique". Il concernera la naissance de la perspective artistique au XV^{ème} siècle.

Le suivant, lors d'un colloque à venir, s'attachera à l'étude de l'"aile de papillon" évoquée ci-dessus, qui structure — à notre sens — l'obstacle épistémologique lié à la "géométrisation" de la perspective qui fut effectuée au début du XVII^{ème} siècle.
