METHODE CARTESIENNE ET FIGURE GEOMETRIQUE DANS LES *ELEMENTS DE GEOMETRIE* DE LAMY

Evelyne BARBIN
I.R.E.M. des Pays de Loire
Centre du Mans

"Je passai de là à la géométrie élémentaire[...]. Je ne goûtai pas celle d'Euclide, qui cherche plutôt la chaîne des démonstrations que la liaison des idées; je préférai la Géométrie du P.Lamy, qui dès lors devint un de mes auteurs favoris, et dont je relis encore avec plaisir les ouvrages".
Jean-Jacques ROUSSEAU, *Confessions* [1].

Le Père Bernard Lamy est un oratorien né au Mans en 1640. Il fut un fervent défenseur des idées de Descartes, ce qui lui valut une interdiction d'enseigner à l'Université d'Angers en 1675, après la censure du cartésianisme par la Papauté et la Sorbonne. Lamy fut à la fois un excellent pédagogue, un brillant vulgarisateur et un polémiste acharné.

Il est auteur de plusieurs ouvrages scientifiques : un *Traité de mécanique, de l'équilibre des solides et des liqueurs* en 1679, un *Traité de la grandeur en général, qui comprend l'arithmétique, l'algèbre et l'analyse* en 1680, des *Eléments de géométrie* en 1685 et un *Traité de perspective* en 1701. Les *Eléments de géométrie* ont connu de très nombreuses rééditions et une grande renommée. Le *Journal des Savants* du 9 janvier 1696 vante l'ouvrage : *"Aussi ne connaît-on pas de livre qui ouvre une entrée plus facile dans les mathématiques que celui-ci; on y trouve dans l'auteur un maître habile, qui s'accomode à la portée de ceux qui commencent, qui les prend pour ainsi dire, par la main, et les conduit pas à pas, entrant avec eux dans les plus petites difficultés et leur rendant partout raison des démarches qu'il leur fait faire".*

---

[1] ROUSSEAU, *Confessions*, p.370-71

Les ouvrages de Lamy sont destinés à transmettre, de manière appropriée, les nouvelles conceptions scientifiques. Ces conceptions, et tout particulièrement l'idée de méthode, appellent une nouvelle façon d'enseigner, d'étudier, et donc de s'adresser au lecteur. Ainsi, en 1684, Lamy consacre un ouvrage à l'acquisition des sciences : les *Entretiens sur les sciences "dans lesquels on apprend comme l'on doit se servir des Sciences, pour se faire l'esprit juste, et le coeur droit. Avec la manière d'étudier"*. La méthode est un art d'inventer, de penser par soi-même; aussi transmettre des savoirs ne peut-il pas se borner à donner un catalogue de résultats. Il faut apprendre au lecteur à chercher par lui-même, à exercer son esprit et à étendre ses connaissances. Ces buts sont ceux poursuivis par le Livre des *Eléments de géométrie* consacré à la méthode. Lamy y fait place à des questions heuristiques, parmi lesquelles nous retenons le rôle essentiel joué par la figure dans l'examen et la résolution d'un problème.

Ce rôle joué par la figure peut sembler paradoxal chez un cartésien. La géométrie de Descartes ne nous apprend-elle pas à résoudre les problèmes de géométrie en résolvant des équations algébriques, c'est à dire en maniant des signes plutôt qu'en cogitant sur des figures? Lamy est aussi bon pédagogue que cartésien averti. Il sait que l'intelligibilité de la méthode cartésienne suppose une nouvelle façon de concevoir les relations entre figure géométrique et grandeur. Il faut pouvoir, par exemple, considérer une ligne élevée au carré, non comme une figure carrée, mais comme une simple ligne. Il y a là une difficulté pédagogique à laquelle les enseignants de mathématiques sont toujours confrontés. Jean-Jacques Rousseau, admirateur de Lamy, nous le rappelle lorsqu'il écrit dans les *Confessions* :

"Je n'ai jamais été assez loin pour bien sentir l'application de l'algèbre à la géométrie. Je n'aimais point cette manière d'opérer sans voir ce qu'on fait, et il me semblait que résoudre un problème géométrique par les équations, c'était jouer un air en tournant une manivelle. La première fois que je trouvai par le calcul que le carré d'un binôme était composé du carré de chacune de ses parties, et du double produit de l'une par l'autre, malgré la justesse de ma multiplication, je n'en voulus rien croire jusqu'à ce que j'eusse fait la figure. Ce n'était pas que j'eusse un grand goût pour l'algèbre en n'y considérant que la quantité abstraite. mais appliquée à l'étendue, je voulais voir l'opération sur les lignes; autrement je n'y comprenais plus rien" [2].

Sur la figure, $(a+b)^2$, a^2, b^2 et 2ab sont des surfaces. Jean-Jacques Rousseau peut donc y "voir" que $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ (fig.1). Mais pour

---

[2] idem

considérer que la parabole, ramenée à un repère cartésien, correspond à l'équation $y = x^2$, il faut voir x^2 comme une ligne. La première conception correspond à la pensée géométrique grecque, la seconde à la pensée algèbrique de Descartes.

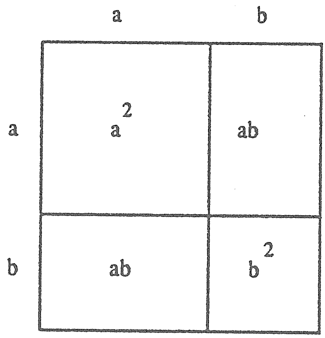

fig.1

Nous nous intéressons donc aux *Eléments de géométrie* de Lamy à partir de deux questions concernant la méthode cartésienne : quelle place doit être accordée à l'heuristique dans la transmission des connaissances? Quel rôle doit être attribué à la figure géométrique?

1. La place de l'heuristique

La transmission des connaissances est le sujet des *Entretiens sur les sciences*. Les conceptions de Lamy reprennent largement les idées émises par Descartes. Elles sont mises en oeuvre dans les *Eléments de géométrie*, qui se veut plus un ouvrage d'initiation à la recherche qu'une encyclopédie de résultats.

Chercher par soi-même

Descartes évoque à la dixième de ses *Règles pour la direction de l'esprit* son propre itinéraire intellectuel. Il a pris l'habitude, très jeune, de rechercher lui-même les résultats trouvés par d'autres. Ceci l'a conduit à comparer ses propres cheminements d'esprit aux raisons données par les autres, et à élaborer ainsi sa méthode. Il écrit :

"Je suis né, je l'avoue, avec un esprit tel que le plus grand plaisir des études a toujours consisté pour moi, non pas à entendre les raisons des autres, mais à m'ingénier moi-même à les découvrir. Cela seul m'ayant attiré, jeune encore, à l'étude des sciences, chaque fois que le titre d'un livre me

promettait une nouvelle découverte, avant de pousser plus loin ma lecture, j'essayais si par une sagacité innée je ne pourrais pas par hasard arriver à semblable résultat et j'évitais soigneusement de m'enlever ce plaisir innocent par une lecture hâtive. Cela me réussit tant de fois que je reconnus à la fin que je n'arrivais plus à la vérité suivant l'habitude des autres hommes par des recherches faites à l'aventure et aveugles, avec le secours de la fortune plutôt qu'avec le secours de l'art, mais qu'une longue expérience m'avait permis de saisir des règles déterminées, qui ne sont pas à cet effet d'une utilité médiocre et dont j'usai dans la suite pour en imaginer de plus nombreuses. Ainsi j'ai soigneusement perfectionné ma méthode toute entière et je me suis persuadé que, dès le début, j'avais adopté la manière d'étudier la plus utile de toutes" [3].

L'habitude de Descartes l'a amené à accorder de l'importance, non aux résultats eux-mêmes, puisqu'il les connaissait par lecture, mais aux processus de recherche. Ainsi, il s'est intéressé aux instruments de la connaissance et à leurs perfectionnements. La méthode est le moyen d'acquérir des savoirs par soi-même et non par la lecture des ouvrages des autres. Il la définit à la Règle IV comme l'ensemble des *"règles certaines et faciles dont l'exacte observation fera que n'importe qui ne prendra jamais rien de faux pour vrai, et que, sans dépenser inutilement aucun effort d'intelligence, il parviendra, par un accroissement graduel et continu de science, à la véritable connaissance de tout ce qu'il sera capable de connaître"* [4].

Descartes écrit : *"Nous ne deviendrons jamais Mathématiciens bien que notre mémoire possède toutes les démonstrations faites par d'autres, si notre esprit n'est pas capable de résoudre toute sorte de problèmes"* [5]. Nous retrouvons dans les *Entretiens sur les sciences*, la même importance accordée aux processus de recherches et à une science active :

"Il faut accoutumer les hommes à voir eux-mêmes la vérité. Lorsque pour leur rendre les Sciences faciles, on ne les oblige point de la chercher par eux-mêmes, de la découvrir, de la consulter, il se peut bien qu'à force de leur rebattre les choses, on les fasse entrer dans leur mémoire. On dirait même à les entendre parler qu'ils les savent; mais la suite fait voir le contraire; outre que ce qui n'est que dans la mémoire se perd aisément, comme on le voit dans les personnes de grande naissance qu'on a voulu exempter de la peine d'acquérir des Sciences. Ils ne conservent pas longtemps ce qu'ils ont appris;

---

[3] DESCARTES, *Règles pour la direction de l'esprit*, p.61-62

[4] ibid, p.19

[5] ibid, p.12-13

au lieu que quand on s'est exercé soi-même dans la recherche de la vérité, on a toujours son coeur où l'on trouve le fond de toutes les Sciences" [6].

Pour acquérir les sciences, il faut donc chercher par soi-même sans s'encombrer de lectures inutiles ou des règles de la logique. Lamy écrit plus loin : *"je n'ai nullement envie de m'accabler en étudiant tout un tas de différentes lectures. J'ai trop conçu de mépris pour ceux qui ont une fausse érudition, et qu'il n'y a point de science qui me paraisse comparable au bon sens, à cette justesse d'esprit et droiture de coeur[...]; mais aussi il me semble que la Logique est peu propre pour cela, et j'ai connu par l'expérience qu'elle gâtait plutôt l'esprit qu'elle ne le redressait"* [7]. Les critiques contre les syllogismes, comme celles contre la Dialectique, sont fréquentes au XVIIème siècle. Nous en trouvons, par exemple, à la fin des années 1620, chez Francis Bacon, Descartes ou Gassendi. Ce dernier demande qu'on les bannisse des Ecoles car *"tout cela, bien loin de rendre l'esprit plus vif, le force au contraire à rester en friche"* [8].

Lamy estime que le respect des règles de la Logique ne peut suffire à rendre l'esprit juste, car *"Il y a bien de la différence entre savoir et faire"*. Pour lui, *"Raisonnement exact et démonstration, est la même chose"* [9]. Dans la Préface aux *Eléments de géométrie*, il explique qu'il se sert de *"démonstrations courtes, en prenant des voies abrégées par où je mène tout d'un coup à la vérité"* [10]. L'accent mis sur la part d'investigation et de recherche conduit Lamy, comme Descartes, à une préférence marquée pour la démonstration qui éclaire plutôt qu'à celle qui convainc, et à un certain mépris pour la mise en forme démonstrative qui caractérisera le XVIIIème siècle[11].

S'exercer l'esprit

Dans les *Règles pour la direction de l'esprit* IX et X, Descartes explique comment *"cultiver en même temps les deux principales facultés de*

---

[6] LAMY, *Entretiens sur les sciences*, p.38

[7] ibid, p. 40

[8] GASSENDI, *Dissertations en formes de paradoxes contre les Aristiotéliciens*, p. 264

[9] LAMY, *Entretiens sur les sciences*, p.88

[10] LAMY, *Eléments de géométrie*, Préface, p.ix

[11] voir BARBIN Evelyne, *Les Eléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée*

notre esprit, savoir, la perspicacité, en voyant distinctement par intuition chaque chose en particulier, et la sagacité, en les déduisant avec art les unes des autres" [12]. Pour augmenter sa sagacité, il faut *"s'exercer à rechercher"* et *"parcourir avec méthode tous les arts ou métiers des hommes[...], et surtout ceux qui manifestent ou supposent de l'ordre"*. Les mathématiques, sciences de l'ordre et de la mesure, sont un domaine privilégié pour exercer son esprit.

Lamy estime également que la justesse de l'esprit *"s'acquiert par l'exercice et par la pratique"*. Il reconnaît, comme Descartes, les mêmes vertus aux mathématiques : *"Il n'y a point d'étude plus propre pour ces exercices que la Géométrie et les autres parties de Mathématique. Les vérités qu'elles enseignent sont simples et claires. Les mathématiciens apportent incomparablement plus de soin et d'exactitude pour déduire des premières vérités, toutes leurs suites et leurs conséquences; de sorte que la Géométrie fournit des modèles de clarté et d'ordre, et que sans donner des règles de raisonnement, ce qui appartient à la Logique, elle accoutume l'esprit insensiblement à bien raisonner"* [13].

L'intérêt pour les mathématiques ne réside pas dans leurs résultats mais dans leur objet, *"si pur et si simple"* écrit Descartes. Notre esprit peut s'y exercer avec profit car elles font appel aux instruments cartésiens du savoir : intuition et déduction. Dans la *Préface* à son ouvrage de géométrie, Lamy écrit : *"comme mon principal dessein est de contribuer à rendre l'esprit de ceux qui étudient, exact et pénétrant, à quoi la méthode des géomètres, qu'ils appellent analyse, est particulièrement utile, je tâche de donner une idée de cette méthode"* [14]. Il écrit aussi que la géométrie permet de voir comment dans la recherche des sciences, il faut *"se servir des premières connaissances qu'on a acquises, ou qui nous sont naturelles, pour aller plus loin"* [15].

Lamy explique que les *Eléments de géométrie* doivent être *"courts et faciles"*, juste suffisants pour *"renfermer les propriétés générales du sujet que l'on traite"* . Les quatre premiers livres de l'ouvrage ont pour but de donner ces propriétés, qui constituent la matière sur laquelle chercher. Puis ensuite, mais c'est l'essentiel, le livre cinquième, consacré à la méthode, montre comment exercer son esprit. Il ne faut donc pas donner tous les résultats géométriques, afin de laisser au lecteur le loisir de chercher. Lamy écrit : *"Pour savoir ce que nous ne disons point ici, ou plus que nous ne disons il*

---

[12] DESCARTES, *Règles pour la direction de l'esprit*, p.57

[13] LAMY, *Entretiens sur les sciences*, p. 41

[14] LAMY, *Eléments de géométrie*, Préface, p.ix

[15] ibid, p.iii

n'y a qu'à étudier avec soin ce qui a été dit. Il serait même dangereux pour ceux qui s'appliquent à la Géométrie qu'on ne leur laissât rien à faire. On ne l'étudie que pour exercer l'esprit et le former en cherchant avec méthode quelque nouveau théorème" [16]. Au lieu d'énoncer toutes les connaissances, il faut montrer comment étendre soi-même ses connaissances.

Etendre ses connaissances

Lamy écrit : *"Lorsqu'on étudie la Géométrie dans le dessein de se rendre l'esprit juste, ce qui doit être la fin de nos études, il ne suffit pas de s'exercer par la recherche de quelques problèmes. Il faut entreprendre quelque petit traité de Géométrie, pour s'accoutumer à étendre ses connnaissances, à traiter les choses dont on veut parler avec ordre"* [17].

La question de l'ordre est essentielle. Dans la *Préface* de son ouvrage, Lamy reproche aux livres des Anciens leur manque d'ordre : *"Les livres des anciens Géomètres ne sont pas si propres pour exercer l'esprit que ceux qui ont été faits en ce temps. Les premiers Géomètres ne faisaient que ramasser les matériaux, ils étaient occupés à trouver les principaux Théorèmes de la Science, ils n'ont point proposé leurs inventions dans un ordre qui soit naturel : cela était réservé à notre siècle [...]. La géométrie a été cultivée en ces derniers temps avec plus de succès qu'en aucun autre. On y a fait de grandes découvertes, et ce qui est de plus considérable, on a trouvé le moyen d'éclaircir ce que les Anciens avaient écrit avec obscurité et confusion"* [18]. Le manque d'ordre dans les travaux des Anciens est une critique fréquente au XVIIème siècle, et la méthode a pour but d'y remédier. On la trouve, en particulier, dans la préface des *Nouveaux éléments de géométrie* d'Arnauld de 1667, où l'auteur écrit que *"les Eléments d'Euclide étaient tellement confus et embrouillés, que bien loin de pouvoir donner à l'esprit l'idée et le goût du véritable ordre, ils ne pouvaient au contraire que l'accoutumer au désordre et à la confusion"* [19]. L'ordre qui préside aux *Eléments* d'Euclide est l'enchainement logique, alors que l'ordre "naturel" voulu par Arnauld est celui des inventions[20]. Lamy estime grandement l'ouvrage d'Arnaud, il considère

---

[16] LAMY, *Eléments de géométrie*, p.256

[17] idem, p.257-258

[18] idem, Préface p.vi

[19] ARNAULD, *Nouveaux éléments de géométrie*, Préface, p.xii

[20] voir BARBIN, *Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie*

que *"c'est le premier qui a donné un ordre naturel aux Eléments de Mathématiques"* [21].

Lamy apporte donc un soin particulier à l'ordre des matières. Il "distribue son ouvrage selon les trois dimensions" : le premier livre traite des lignes droites et circulaires, le second des surfaces planes bornées par des droites ou des cercles, le troisième des proportions et le quatrième des solides. Son lecteur a donc appris à étudier par ordre dans les quatre premiers livres. Il s'agit ensuite pour lui d'inventer de nouveaux résultats.

Mais il ne faut pas se borner à résoudre quelques problèmes : il faut étendre et d'organiser ses connaissances autour d'une problématique. Lamy donne un exemple d'une telle problématique : celle de la section des triangles. On peut découper un triangle de trois façons : en partageant les angles des sommets, en tirant les parallèles aux bases ou en coupant les côtés en parties égales. Et, à chaque fois, on peut chercher les proportions des longueurs ou des surfaces que l'on aura ainsi opérées. Voilà de quoi exercer son esprit et augmenter ses connaissances de façon ordonnée et inventive. En menant à partir du sommet A une droite qui coupe la base BC en D, on montre que la proportion entre les aires des triangles ACD et ABD est égale à celle des segments CD et DB, puis on s'intéresse au cas où CD égale BD et au point de rencontre des médianes du triangle, qui détermine sur celles-ci des proportions particulières, comme on le montre en menant des parallèles aux bases, qui elles-mêmes déterminent des proportions entre les surfaces découpées sur le triangle, etc (fig.2). Comme l'écrit Jean-Jacques Rousseau, chez Lamy, c'est la liaison des idées qui enchaîne les résultats et non pas l'ordre démonstratif.

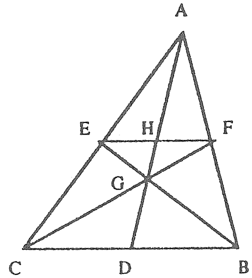

fig.2

---

21 LAMY, idem p.vii

2. Le rôle de la figure

Dans le livre consacré à la méthode, Lamy montre, d'une part, le rôle heuristique joué par la figure dans la résolution d'un problème. D'autre part, il explique comment les opérations sur les grandeurs doivent être figurées géométriquement pour qu'un problème soit résolu selon l'analyse cartésienne.

Examiner une question

Pour résoudre un problème, il faut d'abord l'examiner attentivement. Mais, remarque Lamy, notre esprit se distrait facilement et les pensées qui l'assaillent l'empêchent de considérer suffisamment longtemps la question proposée. Il indique : *"Pour remédier à ce défaut qui est cause de plusieurs autres, il faut tâcher de fixer l'esprit et de l'arrêter par quelque objet qui lui soit sensible, c'est à dire, qu'il faut exprimer d'une manière qui frappe les sens la chose qui est le sujet de la question"*. Il propose alors : *"De ce qu'on connait on peut supposer que la chose qui est proposée est telle ou telle : ce qui se comprendra mieux dans un exemple"* [22]. L'exemple est le suivant : *"On propose de couper un des côtés d'un carré par une ligne menée de l'un des angles de ce carré jusqu'a ce qu'elle rencontre un de ses autres côtés prolongé autant qu'il est nécessaire, de sorte que la partie de cette ligne qui est hors le carré soit égale à un ligne donnée"*.

Lamy écrit : *"Voilà la question. Pendant qu'aucune figure ne la rend sensible, l'esprit a de la peine à s'y attacher, il est vagabond. Quoiqu'on ne sache point encore quelle est la grandeur que l'on cherche, et comment il faut faire ce qui est proposé; néanmoins on peut supposer la chose faite en la manière suivante"*. Pour cela, il faut nommer *a* le segment connu et BCDE le carré connu, puis représenter la situation sur une figure : prolonger ED, mener BF et supposer que le point G est tel que GD égale *a* (fig.3). Lamy commente : *"Cette figure me donne de la facilité pour m'appliquer à la question proposée en me la rendant sensible. Je la considère sans peine, et j'en examine toutes les propriétés qui peuvent me découvrir la vérité"* [23].

---

22 LAMY, *Eléments de géométrie*, p.264
23 idem, p.265

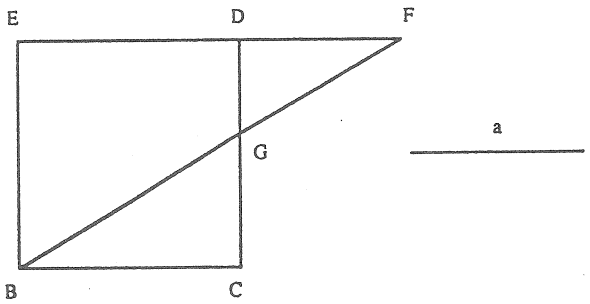

fig.3

Les premières étapes de la résolution analytique d'un problème énoncées par Descartes dans *La géométrie* sont les suivantes : *"Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues, qu'aux autres. Puis sans considérer aucuen différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montrent le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres"* [24]. Les indications de Lamy correspondent à ces préceptes, et elles nous expliquent de plus comment examiner le problème : il faut faire usage d'une figure. Elles mettent ainsi en lumière toute la valeur heuristique de l'analyse cartésienne.

Eclaircir une question

Lamy donne plusieurs exemples pour montrer comment nous devons examiner un problème en travaillant sur la figure. Il considère que *"l'éclaircissement d'une question consiste souvent à faire une figure qui l'exprime bien"*. Il prend l'exemple d'un triangle ABD et de la bissectrice BC, pour lesquels il faut démontrer que que le rapport AB sur AC est égal au rapport BD sur CD. Pour cela, il faut mener DE parallèle à BC et prolonger AB jusqu'en E (fig.4). Nous obtenons l'égalité des angles BED et BDE, et donc des segments BE et BD. Nous déduisons alors le résultat de l'égalité des rapports AB sur AC et BE sur CD.

---

[24] DESCARTES, *La géométrie*, p.5-6

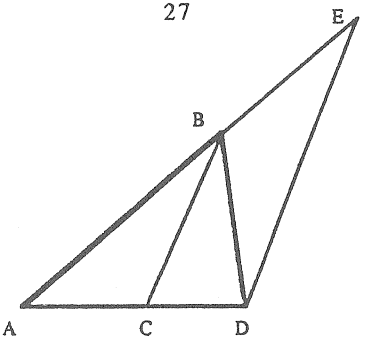

fig.4

Un autre exemple permet de voir *"combien la manière d'exprimer une question par une figure convenable en facilite la résolution"*. Il s'agit de démontrer que dans un triangle ABC de perpendiculaire AD, le rapport AB + AC sur BC est égal au rapport CD - DB sur AC - AB. Pour *"exprimer"* ceci *"d'une manière qui en facilite l'invention"*, il faut tracer un cercle de centre A et de rayon AB (fig.5). En effet, la somme AB + AC s'exprime alors comme le segment CE, la différence CD -DB comme le segment CG et la différence AC - AB comme le segment CF. La question se résoud alors aisément : elle devient une conséquence du théorème qui affirme que CG x CB = CF x CE.

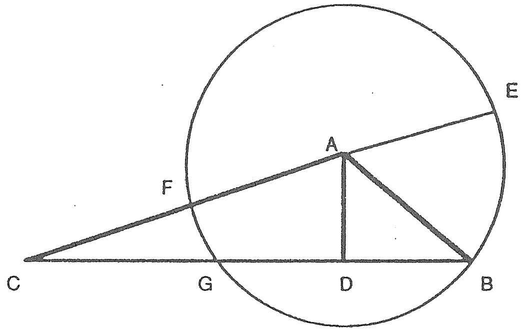

fig.5

Nous trouvons ici une idée essentielle de *La géométrie* de Descartes qui consiste en la correspondance entre les opérations arithmétiques et les constructions géométriques. Le texte de Lamy rend sensible l'importance de cette correspondance dans la méthode cartésienne, et permet de comprendre pourquoi Descartes commence avec elle son ouvrage. Quant à Lamy, c'est à cet endroit de ses *Eléments de géométrie* qu'il explique que l'on *"peut faire toutes les opérations de l'arithmétique avec le compas et la règle"*, en reprenant les propos de Descartes du début de *La géométrie*.

Opérations sur les grandeurs et figures géométriques

Les *Règles pour la direction de l'esprit* XV à XVIII sont consacrées à la représentation des grandeurs par des figures. Dans la Règle XV, Descartes explique que l'unité peut être aussi bien représentée par un carré, un segment ou un point. De même, une grandeur pourra être représentée aussi bien par un rectangle, un segment ou par de points. Ainsi, par exemple, 6 est susceptible de trois représentations (fig.6).

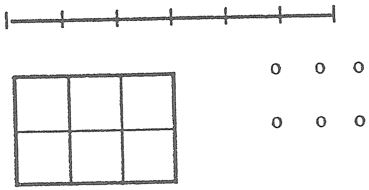

fig.6

Cette remarque, qui peut nous sembler anodine, marque une rupture par rapport à l'esprit géométrique hérité des Grecs. Elle signifie que le produit *ab* de deux grandeurs *a* et *b* ne doit pas être nécessairement vu comme un rectangle, et qu'il peut être représenté par un simple segment. Descartes explicite ceci dans la Règle XVIII, où il représente un produit *abc* de trois grandeurs par un rectangle de côtés *ab* et *c* [25]. Pourquoi? Parce que le travail algébrique sur les grandeurs doit pouvoir s'effectuer librement, sans référence à leurs dimensions.

Pour cette raison, au début de *La géométrie*, Descartes insiste sur la nouvelle façon de comprendre les opérations sur les grandeurs que suppose sa méthode. Il montre que le produit de deux segments peut s'obtenir, par une construction géométrique, comme un simple segment. En effet, pour multiplier BD par BC, il suffit de prendre AB l'unité, de mener AC puis DE parallèle à AC : BE est le produit de la multiplication (fig.7). Descartes montre que l'on peut même prendre la racine carrée d'un simple segment, alors que dans l'esprit géométrique prendre la racine carrée d'une grandeur signifie construire le côté d'un carré ayant pour aire cette grandeur. Il explique que pour prendre la racine carrée de GH, il suffit de lui ajouter l'unité FH et de tracer le cercle de diamètre FH : la perpendiculaire GI est la racine carrée demandée (fig.8).

---

[25] DESCARTES, *Règles pour la direction de l'esprit*, p.116

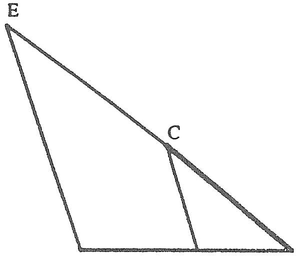

fig.7

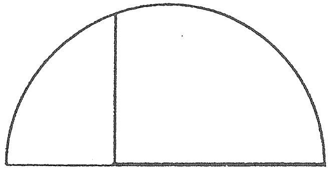

fig.8

Descartes sait qu'il demande à son lecteur un "déconditionnement" par rapport aux conceptions habituelles. Il insiste : *"il est à remarquer que par* a^2 *ou* b^3 *ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes toutes simples"* [26]. Il fait encore remarquer que cela l'autorise à prendre la racine cubique de *aabb-b*. Chose impensable et que Viète n'aurait pas oser : cela signifie que l'on soustrait une longueur d'un corps à quatre dimensions et que l'on obtient un volume cubique dont on cherche à connaître le côté! Afin que son lecteur puisse le suivre, Descartes rétablit l'homogénéité des dimensions : il lui demande de penser que *aabb* est divisée une fois par l'unité, et que *b* est multipliée deux fois par l'unité.

Lamy reprend les correspondances établies par Descartes entre les opérations arithmétiques sur les grandeurs et les constructions géométriques à la règle et au compas. Il montre comment on peut construire un segment qui soit la somme, la différence, le produit ou la division de deux segments, ou encore la racine carrée d'un segment. Nous allons voir que Lamy va plus loin en montrant comment une correspondance entre figure et opération peut permettre de résoudre une question, et ici l'intérêt pour l'heuristique et celui pour la figure géométrique se rejoignent.

Résoudre la question

Lamy énonce quatre moyens pour résoudre une question : connaître les propriétés données par les *Eléments*, connaître les angles pour découvrir les rapports entre segments, chercher le quatrième d'une proportion quand on connaît les trois premiers et réduire les figures en triangles. Pourquoi réduire les figures en triangles? Parce que l'existence de triangles semblables permet d'établir des proportions. Ainsi, la figure du triangle devient un instrument heuristique.

---

26 DESCARTES, *La géométrie*, p.4

Lamy propose de chercher la démonstration de la proposition suivante : *"le produit ou le rectangle fait des diagonales AC et BD est égal à la somme des rectangles BC par AD, et de AB par DC, côtés opposés du quadrilatère ABCD inscrit dans un cercle"* [27]. Etant donné un quadrilatère ABCD inscrit dans un cercle (fig.9), il s'agit de démontrer que :

$$AC \times BD = BC \times AD + AB \times DC.$$

Lamy appelle "rectangle" le produit des segments, expression qui correspond aux conceptions grecques que nous avons rappellées, mais aucune figure rectangle ne va intervenir dans la solution du problème. Lamy nomme les segments :

$$AB = a,\ BC = b,\ AD = c,\ DC = d,\ AC = q,\ BD = m$$

suivant en cela le précepte de la Règle XVI de Descartes, celui d'utiliser des notations brèves afin de *"tout parcourir par un mouvement rapide de la pensée"* [28].

Selon Lamy, il faut trouver des triangles semblables afin d'établir des proportions. La figure comporte déjà de nombreuses paires d'angles égaux. Lamy demande de mener BE tel que les angles ABE et DBC soient égaux, ce qui implique également l'égalité des angles ABD et EBC. Il note :

$$AE = o,\ EC = p \text{ et } AC = q = o+p.$$

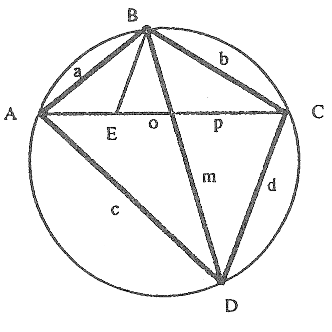

fig.9

---

27 LAMY, idem, p.274
28 DESCARTES, *Règles pour la direction de l'esprit*, p.128

Il remarque alors que les triangles BDA et BCE sont semblables, ainsi que les triangles BDC et BAE. Ceci fournit les proportions suivantes :

BD/BC = DA/CE et BD/BA = CD/AE

traduites immédiatement sous formes de produits algébriques :

mp = bc et mo = da.

Les grandeurs sont devenues des signes et le traitement algébrique des deux égalités précédentes conduit finalement au résultat cherché :

mq = m(p+o) = mp + mo = bc +ad.

Le cas particulier où le quadrilatère ABCD est un rectangle conduit au théorème de Pythagore (fig.10). Mais la démonstration proposée par Lamy, contrairement donnée à celle de la proposition XLVII du Livre I d'Euclide (fig.11), ne fait pas intervenir de surfaces. De plus, il y a une tentative d'expliquer comment trouver la démonstration, c'est à dire pourquoi mener BE (ou AL chez Euclide). Cette explication s'inscrit dans la systématisation d'un procédé de recherche : construire des triangles semblables pour établir des proportions.

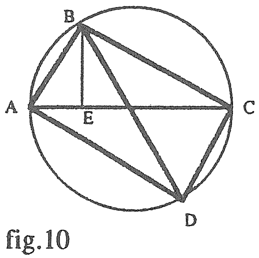

fig.10

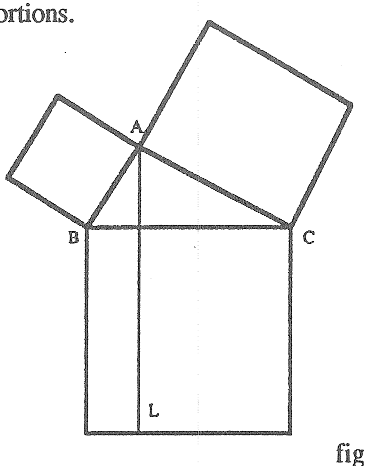

fig.11

Conclusion : méthode cartésienne et rôle de la figure

Un mérite des *Eléments de géométrie* de Lamy est de nous rappeller que la méthode cartésienne est une méthode analytique avant d'être algébrique, c'est à dire qu'elle est d'abord un procédé de résolution de problème. Cet ouvrage met ainsi en lumière que, dans les trois étapes de résolution décrites dans *La géométrie*, nommer, exprimer le problème par une équation et résoudre l'équation, la seconde est celle qui doit retenir le plus notre attention. Celle-ci ne doit pas passer pour une simple traduction algébrique. C'est elle, au contraire, qui demande l'ordre sur laquelle se fonde la déduction et l'évidence sur laquelle est basée l'intuition. Or, comme nous le montre Lamy, l'éclaircissement et la mise en ordre d'un problème géométrique ne peuvent se passer d'un travail sur la figure.

Un autre mérite de cet ouvrage est de mettre en évidence la rupture épistémologique que constitue ce que l'on pourrait appeler "l'applatissement dimensionnel", et que suppose la méthode algébrique. En effet, cette rupture peut constituer un obstacle pédagogique si elle n'a été pensée par l'enseignant. Lamy, pédagogue de la fin du XVIIème siècle, ne pouvait pas l'ignorer

Notons, pour conclure, que l'idée de Lamy de consacrer une partie d'un ouvrage géométrique à la méthode et à l'heuristique, dont nous avons dit en quoi elle pouvait être redevable aux idées cartésiennes, se retrouvera dans de nombreux ouvrages à une époque pas très lointaine[29].

BIBLIOGRAPHIE

ARNAULD, *Nouveaux éléments de géométrie*, Savreux, Paris (1667), réédition I.R.E.M. de Dijon, 1982.

BARBIN Evelyne, Les Eléments de géométrie de Clairaut : une géométrie problématisée in *Repères I.R.E.M.*, n°4, juillet 1991, pp. 119-133.

BARBIN, Trois démonstrations pour un théorème élémentaire de géométrie in *La démonstration mathématique dans l'histoire,* Actes du Colloque inter-I.R.E.M. de Besançon, 1989.

DESBOVES,*Questions de géométrie élémentaire. Méthodes et solutions*, Delagrave, Paris, 1875.

DESCARTES, *Règles pour la direction de l'esprit,* réédition Vrin, Paris, 1970.

DESCARTES, *La géométrie*, ed. Christophe David, Paris, 1705.

GASSENDI, *Dissertations en formes de paradoxes contre les Aristotéliciens*, trad. BROCHOT, Vrin, Paris, 1959.

LAMY, *Entretiens sur les sciences*, seconde édition, Jean Certe, Lyon, 1694

LAMY, *Eléments de géométrie*, première édition, Pralard, Paris, 1685.

ROUSSEAU, *Confessions*, Le livre de poche, Paris,1968.

---

29 voir par exemple l'ouvrage de DESBOVES de 1875 : *Questions de géométrie élémentaire . Méthodes et solutions*