PUZZLE ET CASSE-TETE

Martine BÜHLER et Michèle GRÉGOIRE
Groupe M: A.T.H.
IREM Paris VII

Peut-on décomposer des figures égales à l'aide des mêmes pièces ?

Au second congrès international des Mathématiciens (Paris 1900), David Hilbert posa vingt-trois problèmes touchant les différents domaines des mathématiques, et qui inspireront la recherche mathématique du XX^{ème} siècle. Le troisième problème, le seul qui touche aux mathématiques élémentaires, a pour titre: "De l'égalité en volumes de deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales". Comme on peut le lire dans l'extrait ci-dessous de sa communication, Hilbert fait remarquer que le problème analogue dans le plan, montrer que deux triangles de bases et de hauteurs égales ont même aire peut se résoudre de façon simple, par exemple par découpage et repositionnement d'un nombre fini de pièces. On peut même montrer de cette manière l'égalité des aires de deux polygones de forme quelconque. Par contre, pour calculer le volume d'une pyramide et pour montrer que deux pyramides de bases et de hauteurs égales ont même volume, les mathématiciens, depuis Euclide, ont toujours eu recours à des méthodes plus compliquées, la méthode d'exhaustion, ou des méthodes faisant intervenir des notions infinitésimales. Le tétraèdre est un solide élémentaire, à partir duquel on peut construire tous les polyèdres. La question posée dans le troisième problème de Hilbert peut donc être lue de la façon suivante: peut-on élaborer une théorie de la mesure des polyèdres évitant le recours à des procédés équivalents au calcul infinitésimal ?

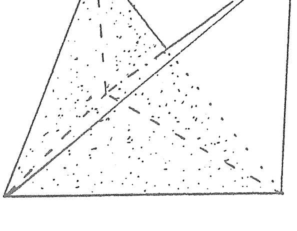


fig. 1

III. — De l'égalité en volume de deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales.

Dans deux lettres adressées à Gerling, Gauss , exprime le regret que certains théorèmes de Stéréométrie dépendent de la méthode d'exhaustion ou, comme on dirait aujourd'hui, de l'*axiome de continuité* (ou de l'axiome d'Archimède). Gauss cite en particulier ce théorème d'Euclide, que deux pyramides triangulaires de même hauteur sont entre elles comme leurs bases. Le problème analogue relatif au plan est aujourd'hui complètement résolu .. Gerling réussit à démontrer l'égalité des volumes de polyèdres symétriques en les décomposant en parties congruentes; mais la démonstration, par ce moyen, du théorème précité d'Euclide dans le cas général, ne me semble guère possible. Il s'agirait donc alors d'une démonstration rigoureuse de l'impossibilité du problème. On serait immédiatement en possession d'une telle démonstration du moment que l'on pourrait *assigner deux tétraèdres de bases et de hauteurs égales qu'il serait impossible de décomposer en tétraèdres congruents, et qui ne pourraient non plus, par l'addition de tétraèdres congruents, être transformés en polyèdres, eux-mêmes décomposables en tétraèdres congruents.*

Le but de l'atelier fut d'examiner cette question plus en détail, de préciser les analogies puis les différences entre les méthodes de comparaisons ou de calcul d'aires et les méthodes de comparaisons ou de calculs de volumes. Nous avons d'abord précisé les méthodes euclidiennes élémentaires d'étude des aires et des volumes, examiné les figures que permettent de mesurer ces méthodes élémentaires, fondées sur le principe que des figures composées de pièces égales sont elles-mêmes égales; puis exposé les problèmes que se sont posé les mathématiciens, principalement à partir du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, concernant les liens entre égalité d'aire ou de volume et décomposabilité des figures à l'aide des mêmes pièces en nombre fini.

La plupart des exemples étudiés peuvent donner matière à des exercices de géométrie plane ou de géométrie dans l'espace, pour des classes de collège ou de lycée.

1. Historique rapide

Chez Euclide, comme dans toute la géométrie grecque, on ne trouve pas la notion numérique d'aire ou de volume, mais seulement des comparaisons de figures. Euclide établit des égalités ou évalue des rapports de "grandeurs"; Euclide ne définit pas ce qu'il entend par grandeur, on remarque que ce peut être un segment de droite, une surface limitée par des segments de droite ou des arcs de cercle, un solide polyédrique, un cône ou une sphère, un angle rectiligne... La "méthode des aires" est un des outils importants de démonstration du Livre I des *Eléments*. Elle permet en particulier de démontrer l'égalité (en aires) de deux parallélogrammes de même base et de même hauteur, par découpages et réarrangement de pièces. Dans le Livre VI, utilisant la théorie des proportions, mise en place au Livre V, Euclide montre que deux parallélogrammes puis deux triangles de même hauteur sont proportionnels à leur bases. En ce qui concerne les solides, Euclide, dans le Livre XI, montre un résultat analogue pour les parallélépipèdes: deux parallélépipèdes de même hauteur sont entre eux comme leurs bases, il peut étendre ce résultat aux prismes triangulaires qui sont des moitiés de parallélépipèdes. Mais il ne peut étendre ce résultat aux pyramides qu'en ayant recours à la méthode par exhaustion (équivalente à notre passage à la limite).

Au XIX$^{\text{ème}}$ siècle on a cherché à comprendre plus précisément le lien entre égalité d'aires et équidécomposabilité. Deux polygones sont équidécomposables si on peut découper l'un d'eux en un nombre fini de pièces et réarranger ces pièces pour obtenir l'autre polygone. On peut donner une définition analogue de l'équidécomposabilité de deux polyèdres. Il est bien évident que deux polygones équidécomposables ont même aire. La réciproque est-elle vraie? [1] Bolyai, le père de J. Bolyai, en 1832 et Gerwien, officier prussien et mathématicien amateur, en 1833, donnent une réponse affirmative à cette question. Nous verrons une démonstration postérieure de ce résultat. On peut même démontrer que deux polygones de même aire sont équidécomposables avec des pièces de même orientation et même avec des pièces à côtés parallèles: ce résultat a été démontré par Hadwiger et Glur en 1951...

Le problème analogue pour les volumes est de chercher si deux polyèdres de même volume sont équidécomposables. Hilbert mentionne que Gerling, en 1844, démontre que deux polyèdres symétriques sont équidécomposables avec des pièces strictement de même orientation. Remarquons que Legendre, dans une note ajoutée à ses *Eléments de Géométrie*, avait déjà, au tout début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, démontré ce résultat.

---

[1] Nous ne parlons pas ici de l'équicomplémentarité; deux polygones (ou polyèdres) sont équicomplémentables si ont peut, en les complétant par les mêmes pièces en nombre fini obtenir le même polygone (ou polyèdre) . Euclide, on le verra, utilise l'équicomplémentarité pour reconnaitre que des figures sont égales. On peut montrer que l'équicomplémentarité équivaut à l'équidécomposabilité, dans le plan comme dans l'espace euclidien de dimension 3. Cette équivalence en dimension 3 ne sera démontrée qu'en 1943, par J.P. Sydler.

Hill, en 1895 donne des exemples de tétraèdres équidécomposables avec un cube. Hilbert a cependant l'intuition que ce ne sont que des exceptions. Bricard, en 1896, a donné une condition pour que deux polyèdres de même volume soient équidécomposables, condition qui ne peut manifestement pas être vérifiée pour toute paire de solides de même volume. Hilbert ne mentionne pas ce résultat car la démonstration de Bricard est incomplète. C'est Max Dehn, un élève de Hilbert, qui montre en 1900, quelques mois après le Congrès de Paris, qu'il existe des polyèdres de même volume non équidécomposables. Il précise la condition trouvée par Bricard: Si deux polyèdres de même volume sont équidécomposables, il existe une relation linéaire entre les angles dièdres de ces polyèdres et l'angle plat, dont les coefficients entiers dépendent des longueurs des arêtes. Dehn met en évidence qu'un tétraèdre régulier et un cube de même volume ne peuvent être équidécomposables. Le mathématicien suisse Hadwiger a repris ces travaux dans les années cinquante et a simplifié la démonstration de Dehn. En particulier, il utilise ce qu'on appelle maintenant l'invariant de Dehn d'un polyèdre, qui est le même pour deux polyèdres équidécomposables. Or la décomposition d'un prisme en trois pyramides peut faire apparaître des pyramides de même volume mais d'invariants de Dehn différents. En 1965, après avoir obtenu plusieurs résultats intermédiaires, J. P. Sydler réussit à démontrer que les conditions de Dehn sont nécessaires et suffisantes pour que deux polyèdres de même volume soient équidécomposables.

Le troisième problème de Hilbert est complètement résolu. Il existe des pyramides de bases et de hauteurs égales non équidécomposables. Il n'est donc pas possible de construire une théorie des volumes des polyèdres en faisant l'économie de la méthode d'exhaustion ou d'une méthode équivalente au calcul infinitésimal.

SUR L'ÉQUIVALENCE DES POLYÈDRES, EN PARTICULIER DES POLYÈDRES RÉGULIERS, ET SUR LA DISSECTION DES POLYÈDRES RÉGULIERS EN POLYÈDRES RÉGULIERS

Par M. HENRI LEBESGUE,

1. Pendant longtemps le nombre attaché à une collection, une longueur, l'aire d'un domaine, le volume d'un corps ont été considérés comme des notions premières dont l'examen critique était du ressort de la métaphysique; les mathématiciens, eux, devaient se borner à évaluer ces nombres, ces longueurs, ces aires et ces volumes; c'est-à-dire essentiellement à décider de leur égalité ou de leur inégalité, et, dans ce second cas, à les classer en plus petits et plus grands. Cette conception est encore celle qui sert de base à la plupart des exposés élémentaires non axiomatiques. Bien avant de faire de l'axiomatique systématiquement les mathématiciens furent cependant obligés de traduire les points de départ métaphysiques en termes logiques qui servirent de bases à leurs raisonnements; mais cette traduction était si indiquée qu'elle se fit sans qu'on s'en rende nettement compte et dès les débuts de la science. Si bien que, tandis que la définition axiomatique des aires et des volumes, par exemple, n'a été expressement formulée qu'au XIX-e siècle, c'est pourtant cette même définition qui a toujours été utilisée dans toutes les recherches, élémentaires ou élevées.

Mais l'unité des considérations et leur grande simplicité n'est apparue que lorsque les savants eurent assez utilisé la notion de limite pour considérer que l'emploi de l'infini était chose naturelle, claire et légitime. L'infini s'introduit comme l'on sait dès la comparaison de deux longueurs, et c'est alors la fameuse question des incommensurables; mais elle s'introduit autrement encore dans l'étude des volumes. Il y a, à cet égard, une différence essentielle entre le problème des aires des polygones et celui des volumes des polyèdres: tandis qu'une comparaison de telles aires se ramène à une comparaison de longueurs sans l'emploi de l'infini, cet emploi est indispensable pour la comparaison des volumes des polyèdres. C'est de ce fait, prouvé au début du XX-e siècle, et de quelques questions connexes que je veux vous parler.

2. Lecture d'extraits des *Eléments* d'Euclide

Nous avons sélectionné, dans les Livre I et VI, les propositions nécessaires à une construction d'une théorie des aires des figures rectilignes, et les avons mis en parallèle avec les propositions analogues du Livre XI, concernant les solides. Nous ne donnerons d'abord que les énoncés des propositions, qui ont été lues de façon plus complète pendant l'atelier. En annexe, on trouvera le texte de certaines de ces propositions, extraites des Livres VI et XI des *Eléments*.

2.1. Propositions utilisant les principes d'équidécomposabilité et d'équicomplémentarité.

Livre I, propositions 34 à 38 :

34 Les côtés et les angles opposés des parallélogrammes sont égaux entr'eux, et la diagonale les partage en deux parties égales.

35 Les parallélogrammes, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

36 Les parallélogrammes, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

37 Les triangles, construits sur la même base et entre les mêmes parallèles, sont égaux.

38 Des triangles, construits sur des bases égales et entre les mêmes parallèles, sont égaux entr'eux.

Remarquons d'abord que les propositions que nous examinons étudient des relations entre des grandeurs. Les "grandeurs" peuvent être, pour Euclide, des "droites", des surfaces, des solides.... lorsqu'Euclide parle de figures égales, droites , surfaces ou solides égaux, nous disons que les longueurs des segments, que les aires, que les volumes , etc, sont égaux.

La proposition 34 utilise le premier cas d'égalité des triangles, (les trois cas d'égalité sont démontrés au début du Livre I) et l'égalité d'angles alternes-internes, résultat équivalent au cinquième postulat et démontré à la proposition 29). Les triangles BCA et CBD sont égaux, ayant un côté, BC, commun et deux angles égaux . (fig. 2)

Pour démontrer la proposition 35, Euclide n'examine qu'un cas de figure; il omet le cas le plus simple (fig.3 bis) qui ne demande que le principe d'équidécomposabilité. Ce principe n'est bien sûr pas nommé ainsi par Euclide; il se réfère à la deuxième notion commune, qu'il a énoncé au début du Livre I : "Si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux." Pour la figure 3 bis, il suffit d'ajouter au trapèze EDCB les deux triangles égaux AEB et DZC pour obtenir les deux parallélogrammes égaux. (au sens de l'aire..). Le deuxième cas de figure, considéré par Euclide, nécessite également le principe d'équicomplémentarité, qui est pour Euclide la référence à la troisième notion commune: "Si, à des choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux". Il suffit en effet de retancher aux deux triangles égaux ABE et DCZ le triangle DEH, puis d'ajouter BCH pour obtenir les deux parallélogrammes ABCD et BCZE.

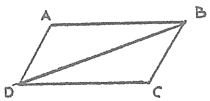


fig. 2

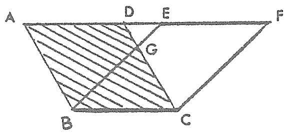


fig. 3

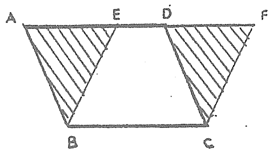


fig. 3 bis

Les propositions 37 et 38 font appel à la sixième notion commune: " Les moitiés du même sont égales entre elles": Les triangles, moitiés de parallélogrammes égaux sont égaux entre eux.(fig. 4)

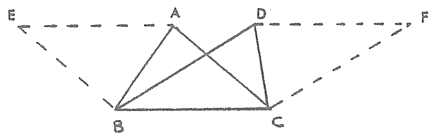


fig. 4

On trouve des raisonnements tout à fait analogues dans l'espace:

Livre XI , propositions 28, 29 et 30:

28 Si un parallélépipède est coupé par un plan selon les diagonales de deux plans opposés, le parallélépipède sera coupé en deux parties égales par ce plan.

29 Les parallélépipèdes qui ont la même base et la même hauteur, et dont les côtés sont placés dans les mêmes droites, sont égaux entr'eux.

30 Les parallélépipèdes qui ont la même base et la même hauteur, et dont les côtés ne sont point placés dans les mêmes droites, sont égaux entr'eux.

La proposition 28 est la transposition dans l'espace de la proposition 34, I. Cette transposition présente cependant quelques difficultés. Pour obtenir l'égalité, non seulement au sens des grandeurs mais aussi des "formes", des deux prismes découpés dans le parallélépipède par un plan diagonal, Euclide utilise la définition 10 du Livre XI: "Les figures égales et semblables sont celles qui sont contenues par des plans semblables et égaux en nombre et en grandeur." Les deux prismes ont bien leurs faces (triangles, parallélogrammes) deux à deux égales et on peut leur appliquer cette définition. Remarquons cependant que les deux prismes ne sont pas superposables ; ils sont symétriques par rapport au centre du parallélépipède, et donc d'orientations différentes. (fig. 5)

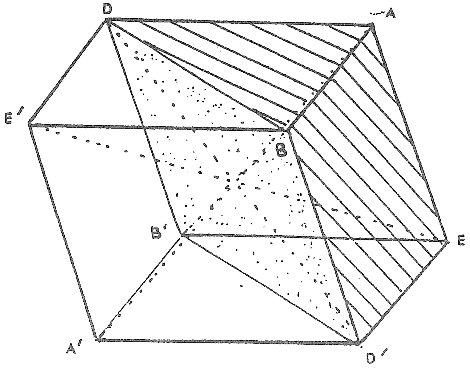


fig. 5

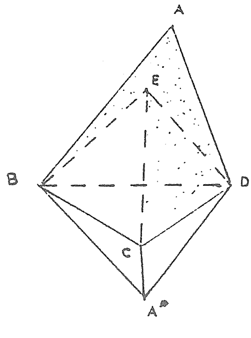


fig. 6

Cette définition 10 a été discutée. Robert Simson, dans son édition des *Eléments d'Euclide* de 1756, donne un contrexemple de deux solides vérifiant la définition 10 sans être ni superposables, ni égaux: la pyramide "évidée" ABCDE et le solide ABCDA' . (cf. fig.6). Il ajoute à la définition d'Euclide la condition d'égalité des angles solides. Legendre, dans sa 14ème édition des *Eléments de Géométrie* , propose une condition plus économique pour la similitude de deux tétraèdres.: il suffit qu'une paire de faces soient deux à deux semblables, semblablement disposées et semblablement inclinées l'une par rapport à l'autre. L'égalité de deux angles solides suffit.

Pour la proposition 29, analogue à la proposition 35, I, Euclide n'étudie aussi qu'un seul cas de figure, le plus simple cette fois: celui où il suffit d'ajouter au solide ACBLMHET l'un des deux prismes grisés pour obtenir l'un des deux parallélépipèdes égaux (fig. 7). Dans le cas de la figure 8, il faut , comme à la proposition 29, I, retrancher, puis ajouter un solide aux deux prismes triangulaires APGFCD et LMNKBH.

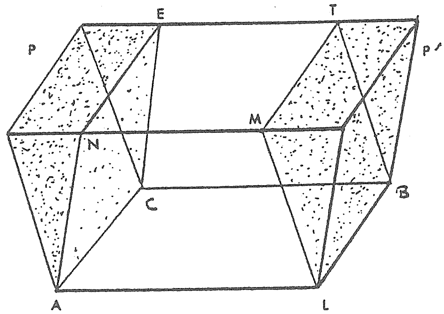


fig.7

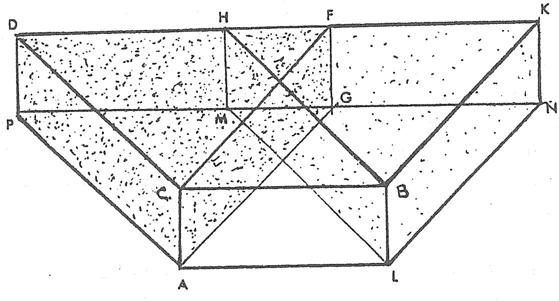
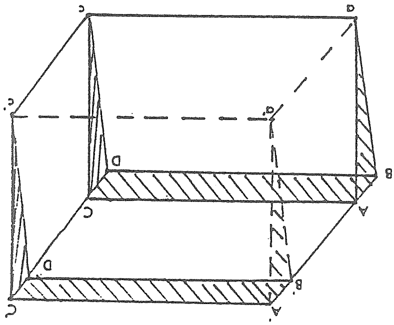
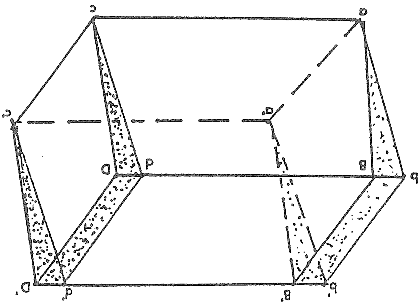


fig. 8

Pour la proposition 30, il suffit d'appliquer la proposition précédente deux fois selon chacune des deux directions des arêtes de la base du parallélépipède. Un parallélépipède quelconque étant donné, cette proposition permet de construire un parallélépipède droit qui lui soit égal. On verra qu'Euclide , à plusieurs reprises, se ramène au cas d'un parallélépipède droit.





Du parallélépipède quelconque au parallélépipède droit :
"redressage en deux temps".

fig. 9 9 bis

2. 2. Effectuer la quadrature d'une figure.

Les propositions 42 et 44 du Livre I expliquent comment construire un parallélogramme égal à un triangle donné, quand on s'est fixé un angle du parallélogramme, puis quand on s'est fixé un côté et un angle du parallélogramme. La proposition 45 explique comment construire un parallélogramme, dont un angle et un côté sont fixés, égal à un polygone donné : on peut trianguler le polygone et "empiler" les parallélogrammes égaux à chacun des triangles. Cette proposition permet de comparer deux figures polygonales quelconques en comparant par exemple deux rectangles de même base.

La proposition 14 du Livre II complète la "quadrature" en expliquant comment construire un carré égal à une figure rectiligne donnée.

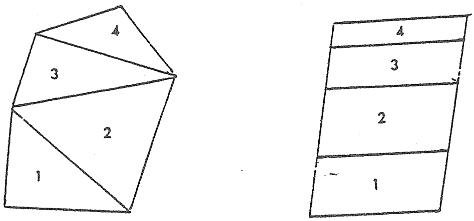


fig. 10

2. 3. Usage de la théorie des proportions pour mesurer les figures.

Les égalités ne suffisent pas pour comparer les figures, elles ne permettent pas de mettre en évidence toutes les propriétés des figures d'égale grandeur. On va voir que la notion de rapport joue un rôle important. La théorie des proportions est mise en place au Livre V, et appliquée aux figures planes au Livre VI. Nous commenterons la définition 6 du Livre V et la première proposition du Livre VI, utiles à notre étude.

LE CINQUIÈME LIVRE

DÉFINITIONS.

6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

LE SIXIÈME LIVRE

PROPOSITION PREMIÈRE.

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

LE ONZIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION XXV.

Si un parallélépipède est coupé par un plan parallèle à des plans opposés, la base sera à la base comme un solide est à un solide.

La définition 6 du Livre V explique à quelle condition quatre grandeurs A, B, C, D sont proportionnelles. Traduisons en notations plus contemporaines ce que nous dit Euclide. Pour un entier m quelconque strictement positif, considérons mA et mC ; et pour un entier n, considérons nB et nD.

$$mA > nB \quad \text{si et seulement si} \quad mC > nD$$

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \quad \text{signifie: } mA = nB \quad \text{si et seulement si} \quad mC = nD$$

$$mA < nB \quad \text{si et seulement si} \quad mC < nD$$

Autrement dit, pour deux entiers quelconques strictement positifs quelconques m et n, on est dans l'une des trois situations suivantes:

- $mA > nB$ et $mC > nD$ (ou : $\frac{A}{B} > \frac{n}{m}$ et $\frac{C}{D} > \frac{n}{m}$)
- $mA = nB$ et $mC = nD$ (ou : $\frac{A}{B} = \frac{n}{m}$ et $\frac{C}{D} = \frac{n}{m}$)
- $mA < nB$ et $mC < nD$ (ou : $\frac{A}{B} < \frac{n}{m}$ et $\frac{C}{D} < \frac{n}{m}$)

Deux rapports de grandeurs sont égaux si et seulement si, un rationnel quelconque est soit plus grand, soit égal, soit plus petit que les deux rapports. Un rapport de grandeurs sépare les rationnels en trois classes; ceux qui lui sont égaux, ceux qui lui sont strictement supérieurs, et ceux qui lui sont strictement inférieurs. Deux rapports de grandeurs sont égaux si ces trois ensembles sont les mêmes. Cette définition est bien proche de la définition des réels par les coupures de Dedekind.

Pour montrer, à la première proposition du Livre VI, que les triangles ABC et ACD de même hauteur sont entre eux comme leurs bases BC et CD, Euclide va effectivement construire une longueur CT égale à mBC et une longueur CL égale à nCD. Tous les triangles de sommet A et de base égale à BC, tels ABH, sont égaux à ABC. De même tous les triangles de sommet A et de base égale à CD sont égaux à ACD. Le triangle ATC est m fois le triangle ABC; le triangle ACL est n fois le triangle ACD. Euclide vérifie que:

- si $m\,BC = n\,CD$ alors $m\,ABC = n\,BCD$
- si $m\,BC > n\,CD$ alors $m\,ABC > n\,BCD$
- si $m\,BC < n\,CD$ alors $m\,ABC < n\,BCD$

Il obtient bien, conformément à la définition 6, la proportionalité des des quatre grandeurs; BC, CD, ABC et ACD.

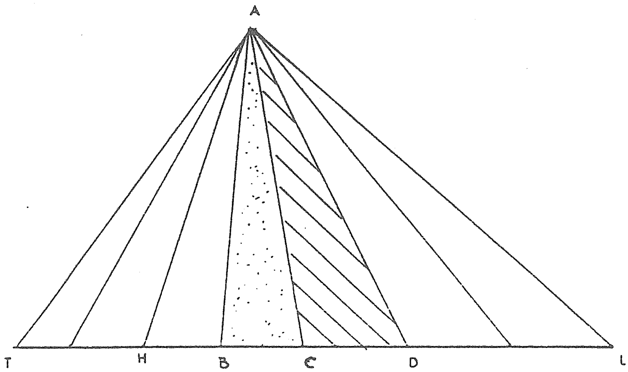


fig. 11

On retrouve une démonstration analogue dans l'espace, à la proposition 25 du Livre XI. Les quatre grandeurs proportionnelles sont les bases B (AEZF), B' (EZCT), coplanaires et les parallélépipèdes P et P' de bases B et B' et dont les arêtes sont toutes égales et parallèles. La démonstration consiste à comparer simultanément des multiples mB de B et nB' de B' et les multiples mP et nP' de P et P'.

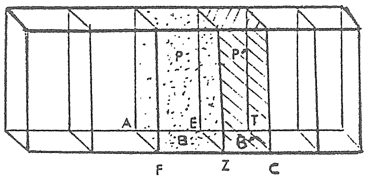


fig. 12

Les propositions 31 et 32 du Livre XI prolongent le dernier résultat à des parallélépipèdes de bases égales (mais pas nécessairement semblables) et de même hauteur (mais dont les directions des arêtes peuvent être quelconques); puis à des parallélépipèdes de même hauteur seulement.

Grâce à la proposition 30 , on peut se ramener, pour démontrer la proposition 31, au cas de deux parallélépipèdes, P et Q, droits. Les arêtes LM, et ON, des deux parallélépipèdes sont supposées perpendiculaires aux bases. Leurs bases sont égales sans être semblables. On construit, dans le prolongement du côté CR de la base de Q, un segment RT égal au côté LA de la base B de P, et un angle TRV égal à l'angle ALE de la base B. On obtient ainsi un parallélépipède P' de base B. On complète la figure 13 bis pour former les parallélépipèdes P'' (de base R R' T' T, égale à B) et Q' (de base D T'' T R, notée b) .

Par la proposition 29, $P = P'$;

par la proposition 25, $\frac{P''}{Q'} = \frac{B}{b}$ et $\frac{Q}{Q'} = \frac{B}{b}$ donc

$\frac{P''}{Q'} = \frac{Q}{Q'}$;

on obtient donc $P'' = Q$ et $P = P' = P'' = Q$.

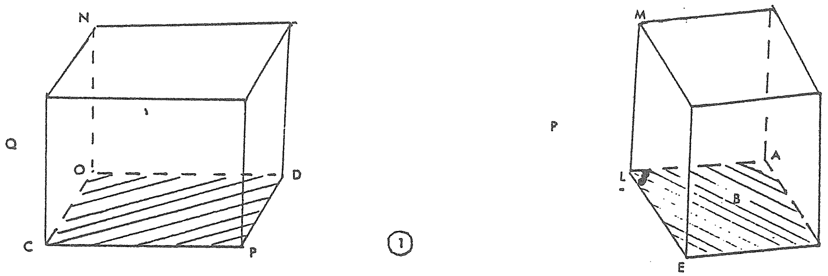


fig. 13

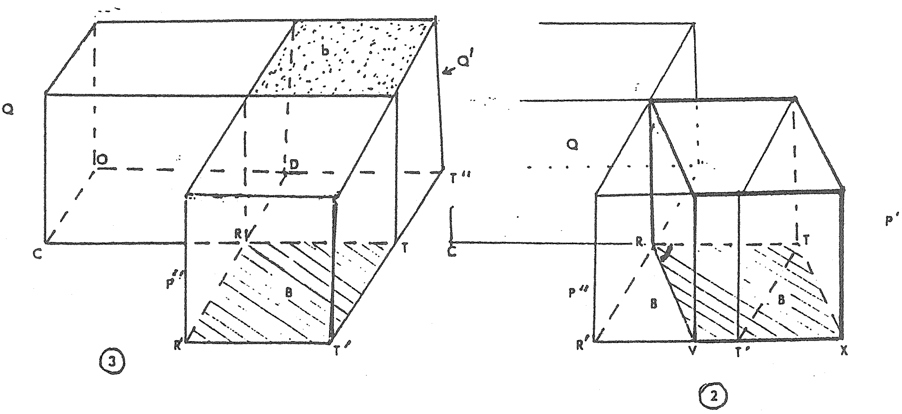


fig. 13 bis

La proposition 32 se démontre facilement en construisant (fig. 14), dans le prolongement de la base B' de P' un parallélogramme D égal à la base B de P et un parallélépipède Q de base D et de même arête que P'. Par la proposition 31 , P et Q de même hauteur et de bases égales sont égaux. Par la proposition 25,

$$\frac{P'}{Q} = \frac{B'}{D} = \frac{B'}{B}, \quad \text{donc } \frac{P'}{P} = \frac{B'}{B}.$$

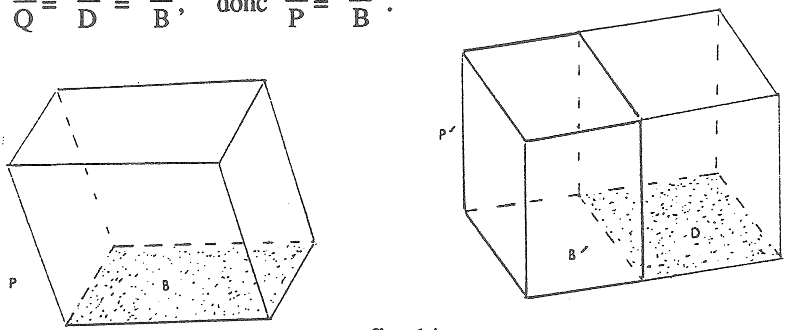


fig. 14

2.4. Une relation entre les côtés de figures égales

La proposition 14 du Livre VI établit une relation entre les côtés de deux parallélogrammes égaux (toujours au sens de l'aire), et la proposition 34 du Livre XI une relation entre les bases et les hauteurs de deux parallélépipèdes égaux.

Livre VI PROPOSITION XIV.

Deux parallélogrammes étant égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et les parallélogrammes équiangles dont les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, sont égaux entr'eux.

Livre XI PROPOSITION XXXIV.

Les bases des parallélépipèdes égaux sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs; et les parallélépipèdes dont les bases sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs sont égaux entr'eux.

Les parallélogrammes P et P', supposés égaux, de la proposition 14 ont des angles égaux; on peut donc les construire avec le sommet B commun et des côtés parallèles, puis completer la figure 15 en construisant le parallélogramme Q. Alors $\frac{P}{Q} = \frac{BD}{BE}$ et $\frac{P'}{Q} = \frac{BH}{BZ}$; mais P= P' , donc $\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q}$ et $\frac{BD}{BE} = \frac{BH}{BZ}$. Les côtés de P et P' sont inversement proportionnels. La réciproque s'obtient en remontant les calculs.

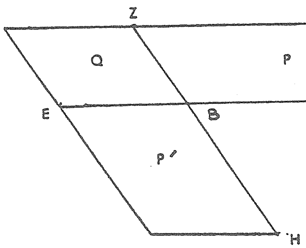


fig. 15

Cette proposition, interprétée dans un langage plus contemporain, nous indique que deux rectangles R_1 et R_2 (parallélogrammes équi-angles) sont égaux si et seulement si leurs côtés L_1 , l_1 , L_2 et l_2 vérifient $\frac{L_1}{l_2} = \frac{L_2}{l_1}$, ou $L_1\ l_1 = L_2\ l_2$; on voit que le même nombre $L_1\ l_1$ peut être associé aux deux rectangles. Ceci n'est bien sûr pas présent dans les *Eléments* d'Euclide. On trouve cependant à la proposition 23, " Deux parallélogrammes équi-angles ont entre eux la raison composée de leurs côtés", une relation qui approche de très près le concept d'aire. Pour deux rectangles R_1 et R_2 , elle énonce donc, si on transpose en notations modernes, que :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1}{L_2} \times \frac{l_1}{l_2} \quad \text{soit que} \quad \frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1\, l_1}{L_2\, l_2}$$

La proposition 34 énonce que deux parallélépipèdes P et P' sont égaux si et seulement si leurs bases B et B' et leurs hauteurs h et h' vérifient $\frac{B}{B'} = \frac{h'}{h}$

Pour la démontrer, on peut, comme à la prop. 31, se ramener au cas de deux parallélépipèdes droits.

- Si leurs bases sont égales, on ne peut avoir que des hauteurs égales; si ce n'était pas le cas et si, par exemple h' > h, P' contiendrait strictement un parallélépipède de base B et de hauteur h, égal à P'.

- Si B > B', P et P' ne peuvent avoir la même hauteur: si c'était le cas, on aurait , d'après la proposition 32, $\frac{P'}{P} = \frac{B'}{B}$, donc P > P'. Supposons donc que h' > h . On construit , (fig. 16) à l'intérieur de P' le parallélépipède Q de base B' et de hauteur CT = h .

Par la proposition 32 , $\frac{P}{Q} = \frac{B}{B'}$. Mais P = P' ; donc

$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q} = \frac{\text{base MCRM'}}{\text{base TCRT'}} = \frac{MC}{TC}$ (la dernière égalité découle de la prop. 6, I). On a donc obtenu $\frac{B}{B'} = \frac{MC}{TC} = \frac{h'}{h}$. Si P = P' alors $\frac{B}{B'} = \frac{h'}{h}$.

La réciproque s'obtient en remontant les calculs.

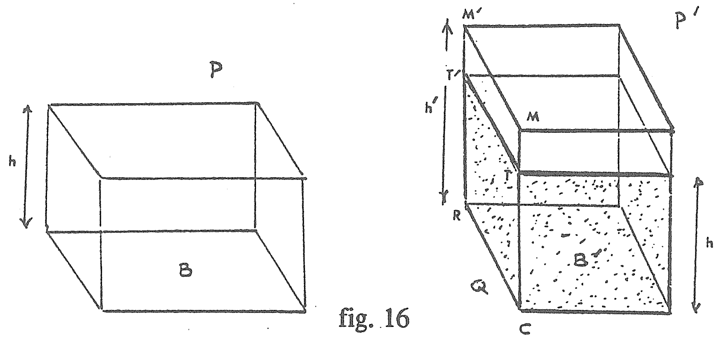


fig. 16

Les méthodes euclidiennes permettent donc de comparer entre elles les figures planes rectilignes et de comparer entre eux certains solides: les parallélépipèdes et les prismes, moitiés de parallélépipèdes. Elles énoncent de plus que deux rectangles sont égaux si et seulement si leurs côtés sont inversement proportionnels et que deux parallélépipèdes sont égaux si et seulement si leurs bases et leurs hauteurs sont inversement proportionnels. Les découpages des figures en pièces égales jouent un rôle dans les démarches de comparaison de figures, mais s'ajoutent également d'autres outils de raisonnement, en particulier la théorie des proportions. On ne trouve pas en particulier de lien systématique établi entre l'égalité des figures et la possibilité de les décomposer à l'aide des mêmes pièces.

3. Figures équidécomposables

Deux figures équidécomposables ont bien sûr la même aire ou le même volume. La réciproque est-elle vraie? Ce n'est qu'à partir du XIX$^{\text{ème}}$ siècle qu'on s'est posé la question.

3.1. Equidécomposabilité de figures polygonales planes

Nous allons démontrer d'une manière moderne le résultat de Bolyai et de Gerwien: deux figures polygonales planes sont équidécomposables. La démonstration s'inspire de celle de Boltianskii. (cf. bibliographie)

1) l'équidécomposabilité est une relation transitive: si deux figures F et H sont équidécomposables avec la figure G alors F et H sont équidécomposables. (propriété et démonstration valables dans le plan ou l'espace) . Une figure "animée" le met en évidence immédiatement. Si on veut la formaliser, on suppose qu'il existe des décompositions

$F = F_1 \cup F_2 \cup .... \cup F_n$ et $G = G_1 \cup G_2 \cup .... \cup G_n$

$G = G'_1 \cup G'_2 \cup .... \cup G'_m$ et $H = H_1 \cup H_2 \cup .... \cup H_m$

et des isométries $f_1, f_2, ... f_n$, $g_1, g_2, ... g_m$., telles que $f_i (F_i) = G_i$, pour $i = 1, 2,...n$ et $g_j (G'_j) = H_j$, pour $j= 1, 2,...m$. On considère les figures P_{ij} , intersections de G_i et G'_j (pour $i = 1, 2,...n$ et $j= 1, 2,...m$) . Soit $F_{ij} = f_i^{-1} (P_{ij})$ et $H_{ij} = g_j (P_{ij})$. Les parties F_{ij} et les parties H_{ij} constituent des décompositions de F et H. Soit $w_{ij} = g_j \circ f_i$. w_{ij} est une isométrie et $w_{ij} (F_{ij}) = H_{ij}$. On a obtenu une décomposition de F et de H dont les éléments sont deux à deux isométriques.

2) Un triangle est équidécomposable avec un rectangle (la hauteur du rectangle est la moitié de celle du triangle): la figure 17 le met en évidence.

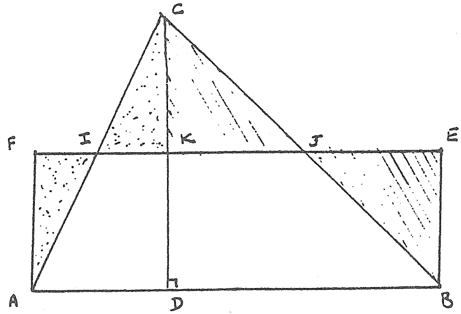


fig. 17

3) Deux rectangles de même aire sont équidécomposables.

- Dans le cas de la figure 18 , les rectangles OABC et OMNP ont même aire, donc d'après la proposition 14, VI des *Eléments*, , $\frac{OC}{OM} = \frac{OP}{OA}$, donc

(AP) est parallèle à (MC). $\frac{OC}{OM} = \frac{OP}{OA} = \frac{OC - OP}{OM - OA} = \frac{PC}{AM} = \frac{DB}{DN}$. Les triangles DBN et OAP sont semblables donc (NB) est parallèle à (AP) et aussi parallèle à (MC). MAPE et MNBF sont des parallélogrammes donc MA= EP et MN= FB donc les triangles MAF et EPC d'une part MNE et FBC d'autre part sont isométriques. on a obtenu les dissections souhaitées:

OABC = OAFEP + FBC + EPC

OMNP = OAFEP + MNE + AMF

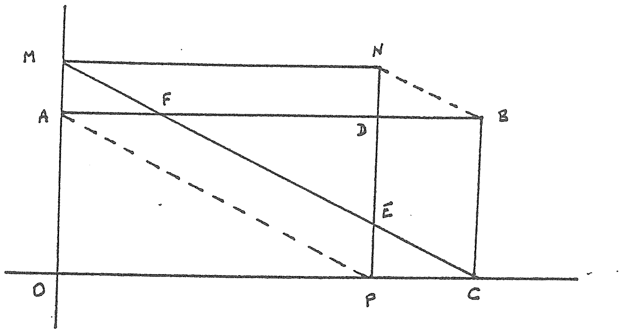


fig. 18

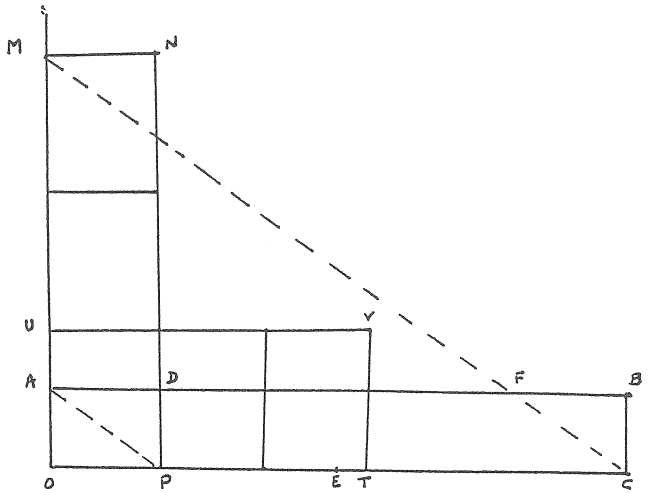


fig. 19

- Dans le cas de la figure 19, on a encore \F(OC,OM) = \F(OP,OA) , donc (MC) est parallèle à (AP). Les triangles OAP et FBC sont égaux , donc
AD = FB . Puisque la droite (MC) ne coupe pas le rectangle OADP, AD + FB < AB ; donc 2 OP < AB . Soit E le milieu de [OC] , et n le plus petit entier tel que nOP > OE. Soit OT= nOP et U tel que nOU= OM . On complète le rectangle OUVT. Les rectangles OUVT et OMNP sont équidécomposables en n rectangles égaux à OUU'P. (n=3 sur la figure 19). De même OUVT et OABC sont équidécomposables, d'après l'étude faite dans le cas de la figure 18. Donc OMNP et OABC sont équidécomposables.

4) Deux polygones de même aire sont équidécomposables.
On décompose les polygones égaux P et P' en triangles. Chaque triangle de P et de P' peut être équidécomposé avec un rectangle de même aire et dont un côté est fixé. En empilant les rectangles on obtient deux rectangles égaux et chacun d'eux est équidécomposable avec P et P'.

3. 2 Equidécomposabilité de deux prismes de même volume.

Dans l'espace on peut obtenir un résultat analogue : deux prismes de même volume sont équidécomposables. On peut démontrer qu'un prisme est équidécomposable avec un cube de même volume. [2]

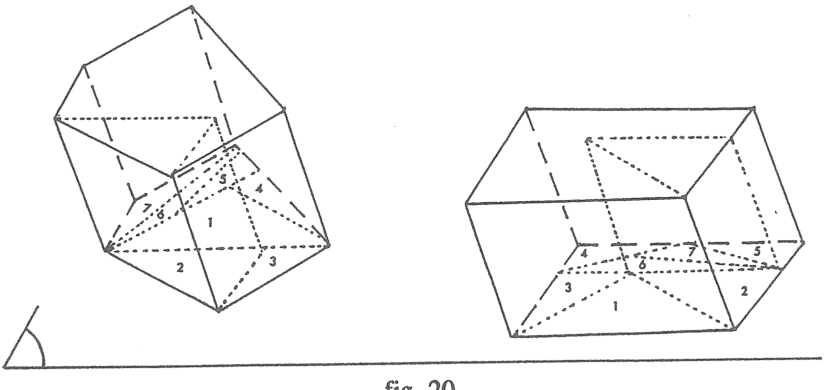


fig. 20

---

2 Nous n'avons pas trouvé cette démonstration dans nos références. Dans sa conférence, *Sur l'équivalence des polyèdres...* , H. Lebesgue démontre ce résultat, en s'appuyant sur le fait que tout parallélogramme est équidécomposable avec un rectangle dont un côté est l'unité - l'autre définissant son aire - et tout prisme équidécomposable avec un parallélipipède dont la base est un carré de côté 1, - la hauteur définit alors son volume- .

- 1) Un prisme P, dont la base est un polygone quelconque est équidécomposable avec un parallélépipède P', de base rectangulaire et dont les arêtes ont même direction et même longueur que celles de P. (cf fig. 20). La base du prisme est équidécomposable avec un rectangle de même aire. Chaque pièce de la décomposition du polygone permet de définir un prisme ayant cette pièce pour base et la même arête génératrice que P ou P'.

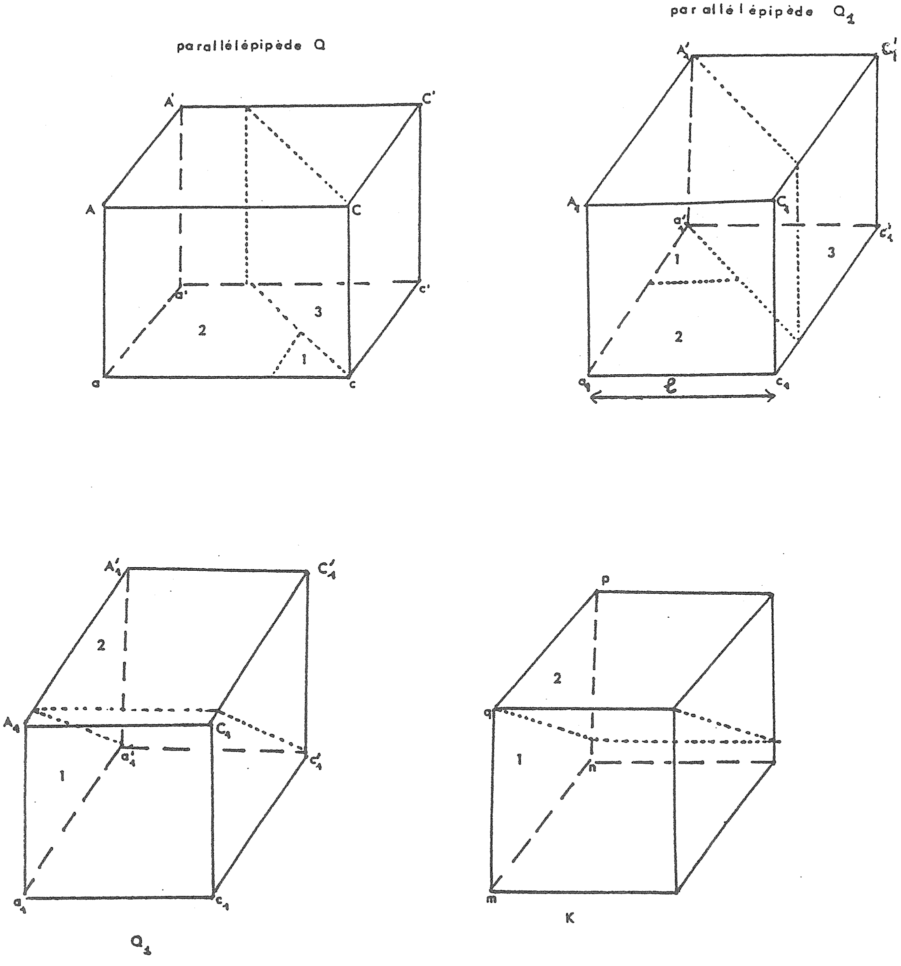
2) Un parallélépipède P' oblique est équidécomposable avec un parallélépipède droit Q. C'est une conséquence des propositions 29 et 30 du Livre XI des *Eléments*. P' est équidécomposable avec P" et P" équidécomposable avec Q (fig. 21)

3) Le parallélépipède droit Q est équidécomposable avec un cube.
Soit K un cube de même volume que Q et L la longueur de son arête. Il faut donc que L soit la racine cubique du nombre qui mesure le volume de Q. Le rectangle acc'a' est équidécomposable avec un rectangle (r) , dont un côté est L. Par le même procédé qu'au 1) le parallélépipède Q est donc équidécomposable avec un parallélépipède Q_1 rectangle de base (r): on le décompose en prismes droits construits sur chaque pièce de la décomposition des bases acc'a' et (r). (cf, fig.21) Construisons un carré (k) de même aire que $a_1A_1A'_1a'_1$, donc équidécomposable avec $a_1A_1A'_1a'_1$ et considérons a_1c_1 comme la hauteur de Q_1 . Le prisme droit S, d'arête de longueur L et de base (k) est par construction équidécomposable avec Q_1. Il a même volume que Q_1 et K. Or S et K ont même hauteur L, ils ont même volume donc ils ont même base (k), carré de côté L. S est donc un cube de côté L.

Deux prismes de même volume sont donc tous les deux équidécomposables avec le même cube ., donc équidécomposables entre eux.

3. 3. Exemples de tétraèdres équidécomposables avec un cube.

M.J.M. Hill, professeur de mathématiques à l'Université de Londres, dans un article de 1895, détermine des familles de tétraèdres dont on peut calculer le volume sans recours à la méthode des limites (on trouvera le résumé de l'article en Annexe I). Les théories ultérieures de Sydler et ses résultats de 1943 permettent d'affirmer que ces tétraèdres sont équidécomposables avec des prismes ou des cubes. Hill montre d'abord (fig. 22), par une autre méthode que celle de Legendre (dans une note de ses Eléments de Géométrie de 1794), que deux tétraèdres symétriques par rapport à un point ou par rapport au plan d'une face sont équidécomposables. Hilbert signale que Gerling, en 1844, a aussi obtenu ce résultat. Hill montre ensuite que si la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre est



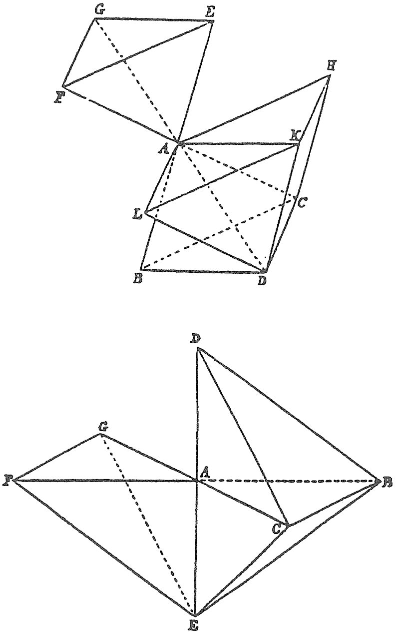
Du parallélépipède droit au cube

Q et Q_1 ont même volume et sont équidécomposables
Aire (acc'a') = Aire ($a_1c_1c'_1a'_1$)
$a_1c_1 = l$ tel que l^3 = volume de Q

Q_1 et K ont même volume et sont équidécomposables
Aire ($a_1c_1c'_1a'_1$) = Aire (mnpq) et mnpq est un carré

fig. 21

perpendiculaire à ces deux arêtes, le tétraèdre peut être décomposé en deux tétraèdres superposables: le plan défini par l'une des deux arêtes considérées et le milieu de l'arête opposée effectue la dissection souhaitée. (cf fig, 23)



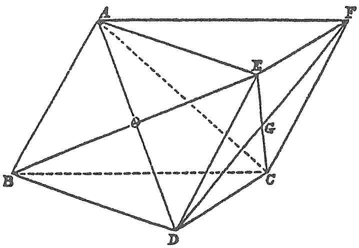


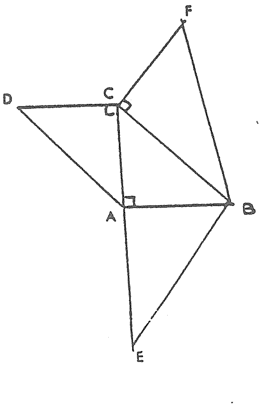
fig. 23

fig. 22

Si dans un prisme BCDEFA à base triangulaire, (cf fig. 23), la diagonale BE de la face ABDE est perpendiculaire au plan ACD , et si la diagonale DF de la face CDEF est perpendiculaire au plan ACE, les trois tétraèdres ABCD, ACDE et ACDE sont deux à deux symétriques et sont égaux. Le tétraèdre ABCD est le tiers du prisme et son volume est calculable sans recours à la méthode des limites (et équidécomposable avec un cube). Hill calcule alors les relations entre les longueurs des arêtes du tétraèdre pour que les deux conditions d'orthogonalité soient vérifiées et il obtient , en fonction de deux paramètres réels positifs r et a, $AD = BC = 2a$

$$AC = a\sqrt{3r^2}$$

$$AB = BD = DC = a\sqrt{1+r^2}$$



AB=AC=CD=CF
fig. 24

Si on prend r = 1 et qu'on pose c = a $\sqrt{2}$, on obtient le tétraèdre de Hill le plus simple, sixième partie d'un cube de côté c dont le patron est donné à la figure 24. Deux de ces patrons repliés dans un sens, le troisième en sens contraire permettent effectivement de reconstituer un prisme, moitié d'un cube. On peut vérifier également sur ce tétraèdre les orthogonalités posées a priori par Hill.

Dans la suite de sa communication, Hill définit deux autres familles de tétraèdres dont le volume peut être calculé de façon analogue à ceux de la première famille.

J. P. Sydler démontrera en 1956 que le tétraèdre de Hill de première espèce de la figure 24 est effectivement équidécomposable avec un cube. Il exhibera une décomposition du tétraèdre en quatre morceaux, qui réarrangés forment un prisme droit à base triangulaire. Ce dernier prisme étant, on l'a vu au § 3. 2., équidécomposable avec un cube, l'équidécomposabilité du tétraèdre de Hill avec un cube est établie. La décomposition est précisée à la figure 25. Le patron des pièces est donné fig. 26 et 27.

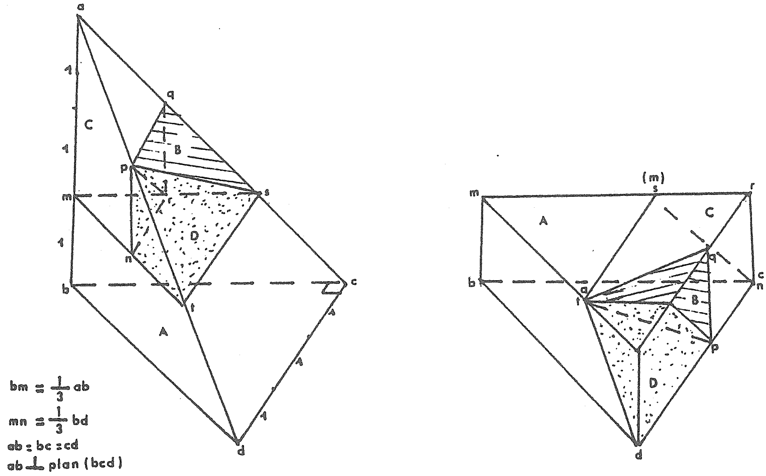


fig. 25

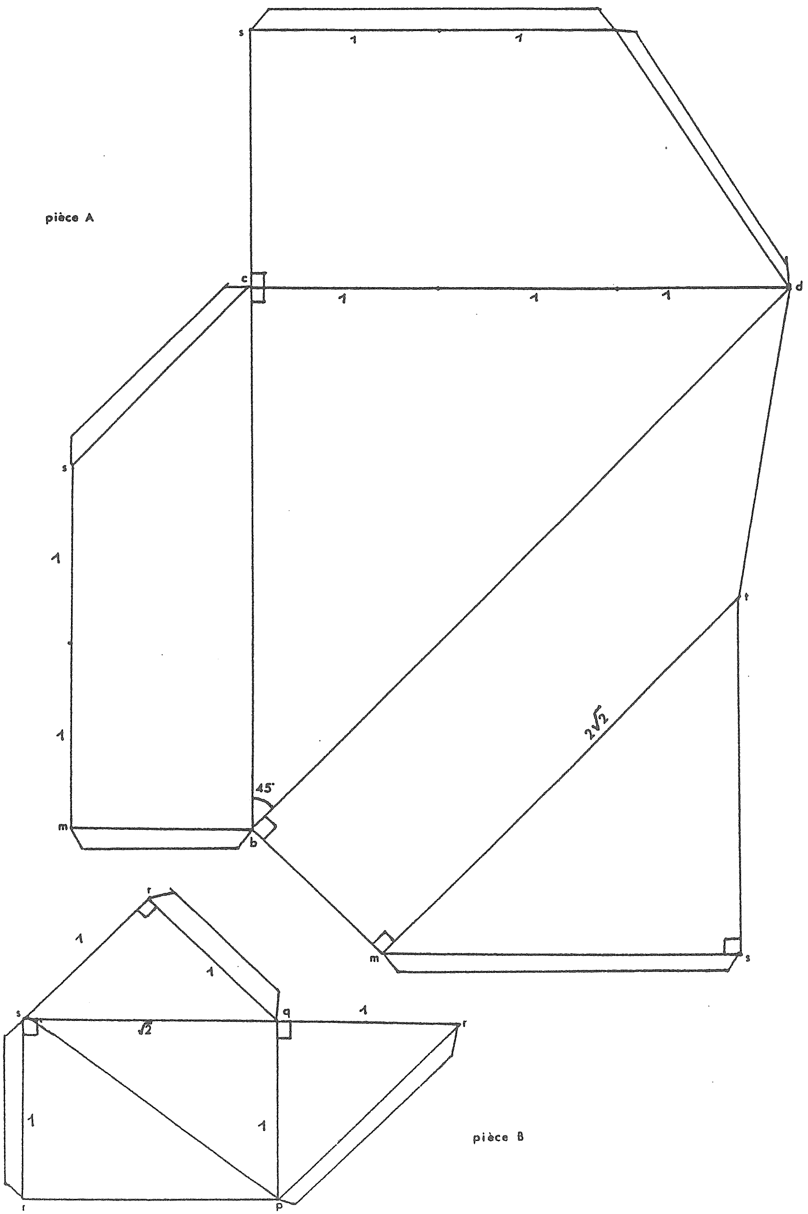


fig. 26

pièce C

pièce D

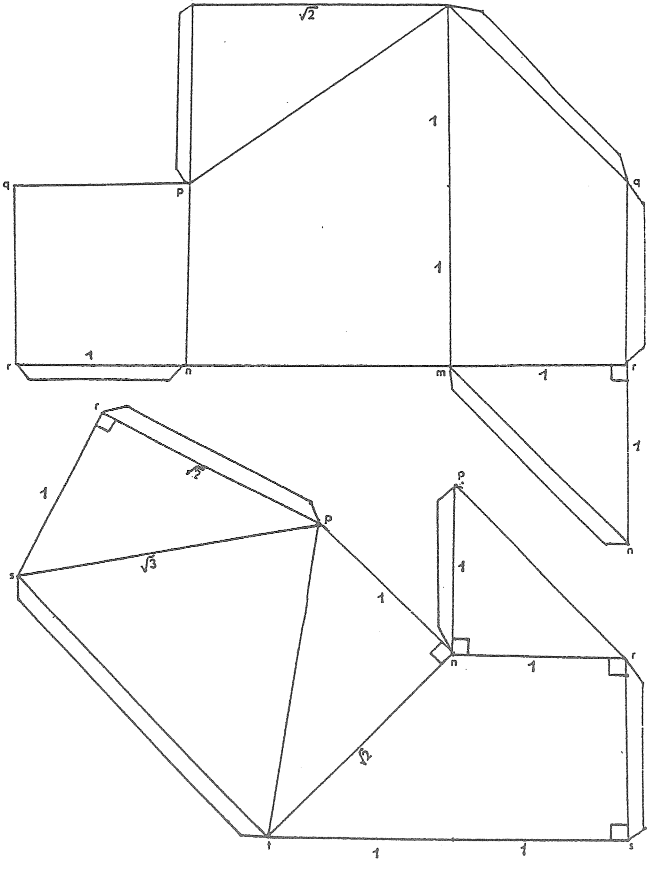


fig. 27

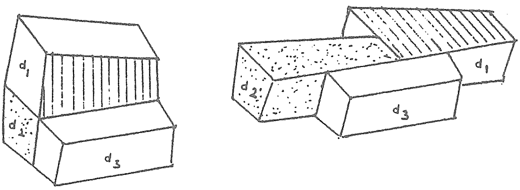


fig. 28

4. Condition d'équidécomposabilité de polyèdres

Les exemples de tétraèdres équidécomposables avec un cube ne sont que des exceptions, comme le pressent Hilbert. Bricard, en 1896, est le premier à s'apercevoir qu'il existe une relation entre les dièdres de deux polyèdres équidécomposables, relation qu'on peut exprimer de façon simplifiée: les angles dièdres des deux polyèdres doivent être commensurables avec π.[3] Sa démonstration, simple, est malheureusement insuffisante. C'est sans doute pour cette raison qu'Hilbert n'en dit rien. Bricard suppose implicitement que la décomposition d'un polyèdre en morceaux polyédriques, $d_1, d_2, ..., d_p$, qui, réarrangés, composent l'autre polyèdre, respecte les arêtes; plus précisément, sa démonstration suppose qu'aucun sommet des polyèdres d_i ne soit élément d'un segment a_j , arête d'un autre polyèdre. Bricard n'envisage pas le type de situation représenté sur la figure 28, dans laquelle une arête "chevauche" plusieurs autres arêtes des autres morceaux :

Si on exclut donc ce type de décomposition, le long de chaque arête du polyèdre P, les dièdres des morceaux utilisés composent un dièdre égal à π, si l'arête est transportée sur une face du polyèdre P', un dièdre égal à 2π, si l'arête est transportée à l'intérieur du polyèdre P', ou un dièdre égal à un dièdre de P', si l'arête considérére est aussi une arête de P'. Il y a donc une relation linéaire à coefficients entiers entre les dièdres de P et de P' et le nombre π Même si la démonstration de Bricard est insuffisante, la condition qu'il a exhibée doit être vérifiée si les deux polyèdres sont équidécomposables. Max Dehn, quelques mois après le congrès de Paris, avant que la communication de Hilbert ne soit publiée, met à jour de façon complète, cette fois, que, pour que deux polyèdres soient équidécomposables, il faut qu'il existe une relation de dépendance linéaire à coefficients entiers entre le réel π et les dièdres d_j et d'_i des deux polyèdres:

$$\sum c_j d_j + \sum c'_i d'_i = 0 \pmod{\pi}$$

Dans cette relation, les entiers c_j et c'_i dépendent des longueurs des arêtes. La démonstration de Dehn consiste à ramener le problème tridimensionnel des décompositions possibles d'un tétraèdre en morceaux tétraédraux à un problème plan: recouvrir un rectangle donné sans lacune ni superposition par des rectangles partiels. Il montre ensuite, comme l'avait déjà remarqué Bricard (cf, Annexe II), que le tétraèdre régulier (dont les dièdres $\sqrt{}$ sont tous égaux et définis par cos $\sqrt{}$ = 1/3), n'est pas équidécomposable avec un cube (dont les dièdres sont tous égaux à π / 2), car $\sqrt{}$ n'est pas commensurable avec π. Dehn montre également que le tétraèdre régulier n'est pas équidécomposable avec un tétraèdre rectangle et isocèle (celui de la figure 24), et même qu'il

3 R. Bricard *Sur question relative aux polyèdres* ,

existe une infinité non dénombrable de paires de polyèdres non équidécomposables.[4]

La démonstration de Dehn est difficile. Elle fut retravaillée par Kagan en 1903, dans l'article _Ueber die Transformation der Polyeder_ [5], puis reprise vers 1950 par le mathématicien suisse Hadwiger[6], qui la traduisit dans un langage algébrique. Il utilisa la notion de fonction additive sur un ensemble de nombres: f est additive sur l'ensemble des nombres $a_1, a_2, \ldots a_k$, si, pour toute relation de dépendance linéaire à coefficients entiers

$n_1 a_1 + n_2 a_2 + \ldots + n_k a_k = 0$, on a: $n_1 f(a_1) + n_2 f(a_2) + \ldots + n_k f(a_k) = 0$

et la notion d'invariant de Dehn d'un polyèdre. Si $a_1, \ldots, a_k$ sont les dièdres d'un polyèdre P , $l_1, l_2, \ldots, l_k$, les longueurs des arêtes correspondantes et si f est une fonction additive quelconque sur l'ensemble des nombres $a_1, \ldots, a_k$, le nombre, noté f(P), avec

$f(P) = l_1 f(a_1) + l_2 f(a_2) + \ldots + l_k f(a_k)$ est un invariant de Dehn du polyèdre P . Il y a autant d'invariants que de fonctions additives f sur $a_1, \ldots, a_k$ Le résultat de Dehn est reformulé par Hadwiger de la manière suivante: Si deux polyèdres P et P' de même volume sont équidécomposables, tout invariant de Dehn f, tel que $f(\pi) = 0$, vérifie $f(P) = f(P')$. Ou , s'il existe, pour deux polyèdres P et P' de même volume, un invariant de Dehn , tel que $f(\pi) = 0$ et f(P) différent de f(P'), alors P et P' ne sont pas équidécomposables.

A l'aide de ce théorème, il est facile de mettre en évidence que deux pyramides de même hauteur et dont les bases sont des triangles de même aire peuvent avoir des invariants de Dehn différents, et donc ne pas être équidécomposables. Par contre, les tétraèdres de Hill ont un invariant de Dehn nul, comme le cube.

Restait le problème réciproque: La condition de Dehn est-elle une condition suffisante pour que deux polyèdres de même volume soient équidécomposables ? Le problème, difficile, fut attaqué à plusieurs reprises par J.P. Sydler et finalement résolu en 1965. La condition de Dehn est effectivement nécessaire et suffisante: pour que deux polyèdres P et P' de

---

4 Lebesgue montre, en 1938, dans l'article déjà cité, que des polyèdres réguliers ne sont pas équidécomposables entre eux.

5 V. F. Kagan *Ueber die Transformation der Polyeder*, Math. Ann. 57, p.421-424

6 Hadwiger 1950, *Zum Problem der Zerlegungsgleichheit der Polyeder*, Math. Arch. 2, p. 441-444,

même volume soient équidécomposables, il faut et il suffit que, pour tout invariant de Dehn f des polyèdres P et P' tel que $f(\pi) = 0$, on ait $f(P) = f(P')$. Une nouvelle démonstration a été donnée par Jensen en 1968.

L'équivalence entre équidécomposabilité et égalité des aires de polygones a aussi été démontrée pour les géométries non-euclidiennes. La non-équivalence entre ces deux propriétés a été établie, non seulement dans l'espace de dimension 3, mais aussi dans des espaces de dimension 4 ou plus. C'est donc spécialement le passage du plan à l'espace qui oblige les théories de la mesure des figures rectilignes à s'enrichir d'axiomes de continuité, comme les a appelés Hilbert. Pour mesurer les polyèdres, il faut introduire des procédés équivalents à un passage à la limite, dont on peut se passer complètement pour mesurer les polygones.

Annexe I :

Hill M. J. M., *Determination of the volumes of certain species of tetraedra without the employment of the method limits*, Proceedings of the London Mathematical society, 27, 1896, p.39-53

The object of this communication is to prove the existence of certain species of tetrahedra whose volumes are determinable without employment of the method of limits.

Abstract.

Art. 1. It is shown that symmetrical tetrahedra have equal volumes. fig 1

Art. 2. It is shown that tetrahedra which are images of one another with regard to a common face have equal volumes. fig 2

Art. 3. It is shown that a tetrahedron in which the straight line bisecting a pair of opposite edges is perpendicular to those edges can be bisected into two superposable tetrahedra, by drawing a plane through either of these edges and the middle point of the other.

Art. 4. If now (see the figure 3 .) $ABCD$ be a tetrahedron, and DE, CF be drawn equal and parallel to BA, and if EA, AF, FE, EC be joined, then it follows by Art. 2, if BE be perpendicular to the plane ACD, that the tetrahedra $ABCD$, $ACDE$ are equal.

In like manner, if DF be perpendicular to the plane ACE, the tetrahedra $ADCE$, $AECF$ are equal.

Hence the tetrahedron $ABCD$ is a third of the prism $BDCFEA$.

The two conditions (each of which amounts to two restrictions) (1) that BE is perpendicular to the plane ACD and (2) that DF is perpendicular to the plane ACE result in the expression of the lengths of the six edges of the tetrahedron in terms of two positive quantities a, r as follows :—

$$AC = a\sqrt{9-3r^2},$$
$$AD = BC = 2a,$$
$$AB = BD = DC = a\sqrt{1+r^2}.$$

Tetrahedra of this kind will be called tetrahedra of the first type.

Art. 5. It is shown that the tetrahedron $ABCD$ of the first type can be bisected into two superposable tetrahedra by a plane drawn through BD and the middle point J of AC; or by a plane through AC and the middle point K of BD.

Arts. 6, 7. The last article leads to the second and third types of tetrahedra.

The tetrahedron $BDJA$ of the second type has its edges

$$AD = 2a,$$
$$AJ = \tfrac{1}{2}a\sqrt{9-3r^2},$$
$$BA = BD = a\sqrt{1+r^2}.$$
$$JB = JD = \tfrac{1}{2}a\sqrt{1+5r^2}.$$

The tetrahedron $ACKB$ of the third type has its edges

$$AC = a\sqrt{9-3r^2},$$
$$BA = 2BK = a\sqrt{1+r^2},$$
$$BC = 2a,$$
$$KA = KC = \tfrac{1}{2}a\sqrt{9+r^2}.$$

Art. 8. It is shown that the three types of tetrahedra are distinct.

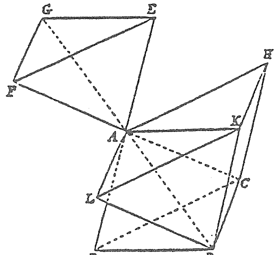


FIG. 1.

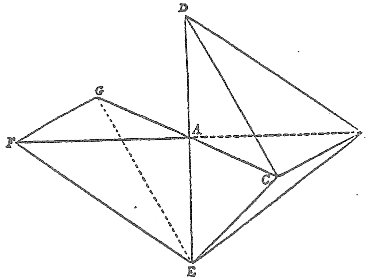


FIG. 2.

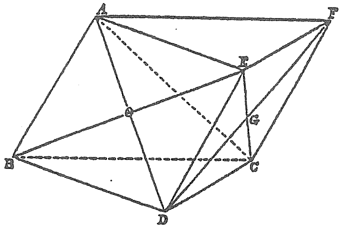


FIG. 3.

Annexe II :

Bricard R. *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres* in Nouvelles Annales de Mathématiques 15, 1896 : p. 331-334

[K14d]

SUR UNE QUESTION DE GÉOMÉTRIE RELATIVE AUX POLYÈDRES;

PAR M. R. BRICARD,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

La mesure de la surface du triangle s'établit, en Géométrie plane, à l'aide de considérations très simples. Il n'en est pas de même pour la question analogue de la Géométrie de l'espace, relative au volume du tétraèdre. On sait en effet que l'on démontre l'équivalence de deux tétraèdres ayant même hauteur et des bases de même surface, en les décomposant en tranches parallèles infiniment minces, équivalentes deux à deux. Cette démonstration ressortit en réalité au Calcul infinitésimal.

On peut se demander si cette décomposition est nécessaire et s'il serait possible de montrer l'équivalence des deux tétraèdres en question par une voie plus élémentaire, ce qui serait intéressant au point de vue de la

doctrine. L'étude de cette dernière question, que nous avons entreprise sur le conseil de notre ami M. Hoffbauer, lieutenant d'Artillerie, mène à cette conclusion qu'il faut se prononcer pour la négative.

Posons-nous le problème général suivant :

Étant donnés deux polyèdres équivalents, peut-on toujours décomposer l'un d'eux en un nombre fini de polyèdres, qui, assemblés d'une manière différente, reconstituent le second polyèdre?

Soit P un polyèdre quelconque, et p_1, p_2, p_3, ... les polyèdres en lesquels on le décompose par un certain nombre de plans arbitrairement tracés.

Les polyèdres p, assemblés différemment, constituent un nouveau polyèdre P'.

Dans le premier mode d'assemblage, ceux des dièdres des polyèdres p qui ont une arête commune ont pour somme un dièdre de P, ou π ou 2π. Dans le deuxième mode, la même somme a pour valeur un dièdre de P', π ou 2π.

En partant de cette remarque, on arrivera facilement à établir la congruence

$$mA + nB + \ldots + m'A' + n'B' + \ldots \equiv 0 \quad (\bmod \pi),$$

A, B, ..., A', B', ... désignant les dièdres des polyèdres P et P', et m, n, ..., m', n', ... des entiers qui ne sont pas tous nuls. Cette conclusion subsiste si, parmi les polyèdres p, quelques-uns sont extérieurs aux polyèdres P et P', de manière que ces derniers soient égaux à leur somme algébrique.

Ainsi, pour que deux polyèdres soient susceptibles d'être transformés l'un en l'autre par une décomposition de chacun en un nombre fini de polyèdres, superposables deux à deux, il faut qu'une certaine fonction li-

néaire de leurs dièdres, à coefficients entiers, soit un multiple de deux angles droits.

Or l'équivalence de deux polyèdres n'entraîne en aucune façon une relation de ce genre. Le fait est à peu près évident; on peut s'en convaincre, si l'on veut, par l'examen d'un cube et d'un tétraèdre régulier équivalents (¹).

La transformation en question sera donc impossible dans le cas général. Il en résulte que l'on ne peut établir l'équivalence de deux tétraèdres ayant même base et même hauteur, et ne satisfaisant pas à d'autre condition particulière, sans avoir recours à la décomposition en éléments infiniment petits.

Le problème analogue relatif à deux polygones équivalents est au contraire toujours possible. C'est un fait connu et dont la démonstration est aisée. Dans ce cas, le succès tient à ce que les sommes des angles de deux polygones diffèrent toujours d'un multiple de deux angles droits.

Pour les polyèdres, la relation que nous avons trouvée est nécessaire, mais elle n'est sans doute pas suffisante. Ce serait un problème intéressant, mais difficile, que de rechercher les conditions précises permettant la transformation qui nous occupe, et le moyen de réaliser cette transformation dans les cas où elle est possible.

Nous terminerons en montrant qu'elle peut se faire dans le cas de deux tétraèdres symétriques et par consé-

(¹) Le dièdre du tétraèdre régulier, dont le cosinus est égal à $\frac{1}{3}$, est en effet incommensurable avec π. S'il en était autrement, il existerait une équation binome ayant une racine égale à $\frac{1}{3} + i\frac{\sqrt{8}}{3}$, et dont le premier membre admettrait comme facteur le polynome $3x^2 - 2x + 3$, ce qui est impossible.

quent dans celui de deux polyèdres symétriques, que l'on peut décomposer en tétraèdres symétriques deux à deux.

Soient ABCD, A'B'C'D' deux tétraèdres symétriques. Décomposons le premier en 12 tétraèdres, au moyen de droites joignant le centre de la sphère circonscrite aux sommets et aux centres des cercles circonscrits aux faces. Effectuons la même décomposition sur le tétraèdre A'B'C'D'. Deux éléments correspondants de ABCD et A'B'C'D' sont superposables en même temps que symétriques, car ils possèdent un plan de symétrie.

Annexe III :

Euclide *Les Eléments* , traduction Peyrard, réédition Blanchard , Paris, 1966. Extraits des Livres VI et XI.

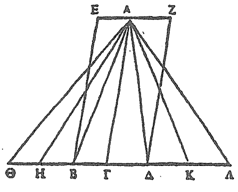
PROPOSITION PREMIÈRE.

Les triangles et les parallélogrammes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

Soient les triangles ABΓ , AΓΔ, et les parallélogrammes EΓ , ΓZ , ayant la même hauteur, savoir, la perpendiculaire menée du point A sur BΔ ; je dis que la base BΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ABΓ est au triangle AΓΔ, et comme le parallélogramme EΓ est au parallélogramme ΓZ.

Prolongeons la droite BΔ de part et d'autre vers les points Θ, Λ; prenons tant de droites qu'on voudra BH, HΘ, égales chacune à la base BΓ, et tant de droites qu'on voudra ΔK, KΛ, égales chacune à la base ΓΔ ; joignons AH, AΘ, AK, AΛ.

Puisque les droites ΓB, BH, HΘ sont égales entr'elles, les triangles AΘH, AHB, ABΓ sont égaux entr'eux (38. 1); donc le triangle AΘΓ est le même multiple du triangle ABΓ que la base ΘΓ l'est de la base BΓ. Par la même raison, le triangle AΛΓ est le même multiple du triangle AΓΔ que la base ΓΛ l'est de la base ΓΔ. Donc si la base ΘΓ est égale à la base ΓΛ, le triangle AΘΓ est égal au triangle AΛΓ; si la base ΘΓ surpasse la base ΓΛ, le triangle AΘΓ surpasse le triangle AΛΓ (38. 1); et si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΛ, le triangle AΘΓ est plus petit que le triangle AΛΓ. Ayant donc quatre grandeurs, les deux bases BΓ, ΓΔ; et les deux triangles ABΓ, AΓΔ, on a pris des équimultiples quelconques de la base BΓ, et du triangle ABΓ, savoir, la base ΘΓ et le triangle AΘΓ ; on a pris aussi d'autres équimultiples quelconques de la base ΓΔ et du triangle AΓΔ, savoir, la base ΓΛ et le triangle AΛΓ ; et l'on a demontré



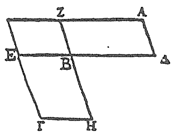
que si la base ΘΓ surpasse la base ΓΛ, le triangle AΘΓ surpasse le triangle AΛΓ; que si la base ΘΓ est égale à la base ΓΛ, le triangle AΘΓ est égal au triangle AΛΓ, et que si la base ΘΓ est plus petite que la base ΓΛ, le triangle AΘΓ est plus petit que le triangle AΛΓ ; donc la base BΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ABΓ est au triangle AΓΔ (déf. 6. 5).

Puisque le parallélogramme EΓ est double du triangle ABΓ, que le parallélogramme ZΓ est double aussi du triangle AΓΔ (prop. 41. 1), et que les parties ont entr'elles la même raison que leurs équimultiples (prop. 15 5)., le triangle ABΓ est au triangle AΓΔ comme le parallélogramme EΓ est au parallélogramme ZΓ. Puisqu'on a démontré que la base BΓ est à la base ΓΔ comme le triangle ABΓ est au triangle AΓΔ, et puisque le triangle ABΓ est au triangle AΓΔ comme le parallélogramme EΓ est au parallélogramme ZΓ, la base BΓ est à la base ΓΔ comme le parallélogramme EΓ est au parallélogramme ZΓ (11. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XIV.

Deux parallélogrammes étant égaux et équiangles, les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels; et les parallélogrammes équiangles dont les côtés autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, sont égaux entr'eux.

Soient AB, BΓ deux parallélogrammes égaux et équiangles, ayant deux angles égaux en B, plaçons BE dans la direction de ΔB, la droite BH sera dans la



direction de ZB (14. 1); je dis que les côtés des parallélogrammes AB, BΓ autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que ΔB est à BE comme HB est à BZ.

Achevons le parallélogramme ZE.

Puisque le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BΓ, et que ZE est un autre parallélogramme, AB est à ZE comme BΓ est à ZE (7. 5). Mais AB est à ZE comme ΔB est à BE (1. 6); et BΓ est à ZE comme HB est à BZ; donc ΔB est à BE comme HB est à BZ (11. 5); donc les côtés des parallélogrammes AB, BΓ autour des angles égaux sont réciproquement proportionnels.

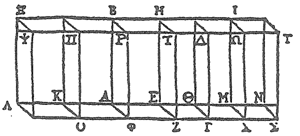
Mais que les côtés adjacents aux angles égaux soient réciproquement proportionnels, c'est-à-dire que ΔB soit à BE comme HB est à BZ; je dis que le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BΓ.

Puisque ΔB est à BE comme HB est à BZ, que ΔB est à BE comme le parallélogramme AB est au parallélogramme ZE (1. 6), et que HB est à BZ comme le parallélogramme BΓ est au parallélogramme ZE, AB est à ZE comme BΓ est à ZE (11. 5); donc le parallélogramme AB est égal au parallélogramme BΓ (9. 5). Donc, etc.

PROPOSITION XXV.

Si un parallélépipède est coupé par un plan parallèle à des plans opposés, la base sera à la base comme un solide est à un solide.

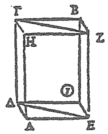
Que le parallélépipède ΑΒΓΔ soit coupé par un plan ΖΗ parallèle aux plans opposés ΡΑ, ΔΘ; je dis que la base ΑΕΖΦ est à la base ΕΘΓΖ comme le solide ΑΒΖΥ est au solide ΕΗΓΔ.



PROPOSITION XXVIII.

Si un parallélépipède est coupé par un plan selon les diagonales de deux plans opposés, le parallélépipède sera coupé en deux parties égales par ce plan.

Que le parallélépipède ΑΒ soit coupé par le plan ΓΔΕΖ selon les diagonales des deux plans opposés ΓΖ, ΔΕ; je dis que le parallélépipède ΑΒ sera coupé en deux parties égales par le plan ΓΔΕΖ.

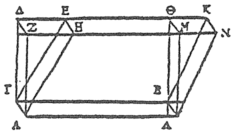


Car puisque le triangle ΓΗΖ est égal au triangle ΓΖΒ (34. 1), et le triangle ΑΔΕ égal au triangle ΔΕΘ, et que de plus le parallélogramme ΓΑ est égal au parallélogramme ΕΒ (24. 11), car ces deux parallélogrammes sont opposés, et que le parallélogramme ΗΕ est aussi égal au parallélogramme ΓΘ, le prisme compris sous les deux triangles ΓΗΖ, ΑΔΕ, et sous les trois parallélogrammes ΗΕ, ΑΓ, ΓΕ, sera égal au prisme compris sous les deux triangles ΓΖΒ, ΔΕΘ, et sous les trois parallélogrammes ΓΘ, ΒΕ, ΓΕ, car ils sont compris sous des plans égaux en nombre et en grandeur (déf. 10. 11); le parallélépipède entier ΑΒ est donc coupé en deux parties égales par le plan ΓΔΕΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION XXIX.

Les parallélépipèdes qui ont la même base et la même hauteur, et dont les côtés sont placés dans les mêmes droites, sont égaux entr'eux.

Que les parallélépipèdes ΓΜ, ΓΝ aient la même base ΑΒ et la même hauteur, et que les côtés ΑΗ, ΑΖ, ΑΜ, ΑΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ soient dans les mêmes droites ΖΝ, ΔΚ; je dis que le parallélépipède ΓΜ est égal au parallélépipède ΓΝ.

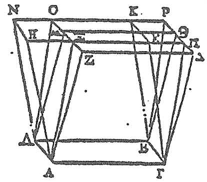


Car puisque chacune des figures ΓΘ, ΓΚ est un parallélogramme, la droite ΓΒ est égale à chacune des droites ΔΘ, ΕΚ (34. 1); la droite ΔΘ est donc égale à la droite ΕΚ. Retranchons la partie commune ΕΘ, la droite restante ΔΕ sera égale à la droite restante ΘΚ; le triangle ΔΕΓ est donc égal au triangle ΘΚΒ (8. 1), et le parallélogramme ΔΗ égal au parallélogramme ΘΝ (36. 1). Par la même raison le triangle ΖΑΗ est égal au triangle ΜΛΝ. Mais le parallélogramme ΓΖ est égal au parallélogramme ΒΜ, et le parallélogramme ΓΗ égal au parallélogramme ΒΝ (24. 11), car ces parallélogrammes sont opposés; le prisme contenu sous les deux triangles ΑΖΗ, ΓΔΕ, et sous les trois parallélogrammes ΑΔ, ΔΗ, ΗΓ est donc égal au prisme contenu sous les deux triangles ΛΜΝ, ΘΒΚ, et sous les trois parallélogrammes ΒΜ, ΘΝ, ΒΝ (déf. 10. 11). Ajoutons le solide commun, dont une des bases est le parallélogramme ΑΒ, et dont la base opposée est le parallélogramme ΗΕΘΜ, le parallélépipède entier ΓΜ sera égal au parallélépipède entier ΓΝ. Donc, etc.

PROPOSITION XXX.

Les parallélépipèdes qui ont la même base et la même hauteur, et dont les côtés ne sont point placés dans les mêmes droites, sont égaux entr'eux.

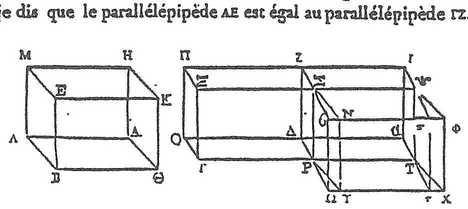
Soient ΓΜ, ΓΝ des parallélépipèdes qui ont la même base ΑΒ et la même hauteur, et dont les côtés ΑΖ, ΑΗ, ΑΜ, ΑΝ, ΓΔ, ΓΕ, ΒΘ, ΒΚ ne sont point placés dans les mêmes droites; je dis que le parallélépipède ΓΜ est égal au parallélépipède ΓΝ.



PROPOSITION XXXI.

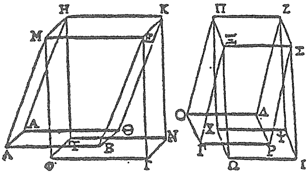
Les parallélépipèdes qui ont des bases égales et la même hauteur, sont égaux entr'eux.

Que les parallélépipèdes ΑΕ, ΓΖ ayent des bases égales ΑΒ, ΓΔ, et la même hauteur; je dis que le parallélépipède ΑΕ est égal au parallélépipède ΓΖ.



Que les côtés ΘΚ, ΒΕ, ΑΗ, ΑΜ, ΟΠ, ΔΖ, ΓΞ, ΡΣ soient d'abord perpendiculaires aux bases ΑΒ, ΓΔ; menons la droite ΡΤ dans la direction de la droite ΓΡ; sur la droite ΡΤ et au point Ρ de cette droite, construisons l'angle ΤΡΥ égal à l'angle ΛΑΒ (23. 1); faisons ΡΤ égal à ΑΛ, et ΡΥ égal à ΑΒ; et achevons la base ΡΧ et le parallélépipède ΨΥ. Puisque les deux droites ΤΡ, ΡΥ sont égales aux deux droites ΑΛ, ΑΒ, et qu'elles comprènent des angles égaux, le parallélogramme ΡΧ sera égal et semblable au parallélogramme ΘΛ. De plus, puisque ΑΛ est égal à ΡΤ et ΑΜ égal à ΡΣ, et que ces droites comprènent des angles droits, le parallélogramme ΡΨ sera égal et semblable au parallélogramme ΑΜ. Le parallélogramme ΛΕ est égal et semblable au parallélogramme ΣΥ, par la même raison; trois parallélogrammes du parallélépipède ΑΕ sont donc égaux et semblables à trois parallélogrammes du parallélépipède ΨΥ. Mais les trois premiers parallélogrammes sont égaux et semblables à trois parallélogrammes opposés, et les trois derniers parallélogrammes sont aussi égaux et semblables aux trois parallélogrammes opposés (24. 11); le parallélépipède entier ΑΕ est donc égal au parallélépipède entier ΨΥ (déf. 10. 11). Prolongeons les droites ΔΡ, ΧΥ, et que ces droites se rencontrent au point Ω; par le point Τ menons la droite Τϛ parallèle à la droite ΔΩ; prolongeons les droites Τϛ, ΟΔ; que ces droites se rencontrent au point ϛ, et achevons les parallélépipèdes ΩΨ, ΡΙ. Le parallélépipède ΨΩ qui a pour base le parallélogramme ΡΨ opposé au parallélogramme Ωϡ sera égal au parallélépipède ΨΥ qui a pour base le parallélogramme ΡΨ opposé au parallélogramme ΥΦ (29. 11), parce que ces deux parallélépipèdes ont la même base ΡΨ et la même hauteur, et que leurs côtés ΡΩ, ΡΥ, Τϛ, ΤΧ, Σϛ, ΣΝ, Ψϡ, ΨΦ sont placés dans les mêmes droites ΑΧ, ϛΦ. Mais le parallélépipède ΨΥ est égal au parallélépipède ΑΕ; le parallélépipède ΨΩ est donc égal au parallélépipède ΑΕ. Mais le parallélogramme ΡΥΧΤ est égal au parallélogramme ΩΤ (35. 1), car ces deux parallélogrammes ont la même base ΡΤ et sont compris entre les mêmes parallèles ΡΤ, ΩΧ, et le parallélogramme ΡΥΧΤ est égal au parallélogramme ΓΔ, parce que le parallélogramme ΡΥΧΤ est égal au parallélogramme ΑΒ; le parallélogramme ΩΤ est donc égal au parallélogramme ΓΔ. Mais ΔΤ est un autre parallélogramme; la base ΓΔ est donc à la base ΔΤ comme la base ΩΤ est à la base ΔΤ (7. 5). Et puisque le parallélépipède ΓΙ est coupé par le plan ΡΖ parallèle aux plans opposés, la base ΓΔ sera à la base ΔΤ comme le parallélépipède ΓΖ est au parallélépipède ΡΙ (25. 11). Par la même raison, la base ΩΤ est à la base ΔΤ comme le parallélépipède ΩΨ est au parallélépipède ΡΙ, parce que le parallélépipède ΩΙ est coupé par le plan ΡΨ parallèle aux plans opposés. Mais la base ΓΔ est à la base ΔΤ comme la base ΩΤ est à la base ΔΤ; le parallélépipède ΓΖ est donc au parallélépipède ΡΙ comme le parallélépipède ΩΨ est au parallélépipède ΡΙ (11. 5); chacun des parallélépipèdes ΓΖ, ΩΨ a donc la même raison avec le parallélépipède ΡΙ; le parallélépipède ΓΖ est donc égal au parallélépipède ΩΨ (9. 5). Mais on a démontré que le parallélépipède ΩΨ est égal au parallélépipède ΑΕ; le parallélépipède ΑΕ est donc égal au parallélépipède ΓΖ. Ce qu'il fallait démontrer.

Mais que les côtés ΑΗ, ΘΚ, ΒΕ, ΛΜ, ΓΞ, ΟΠ, ΔΖ, ΡΣ ne soient point perpendiculaires aux bases ΑΒ, ΓΔ; je dis encore que le parallélépipède ΑΕ est

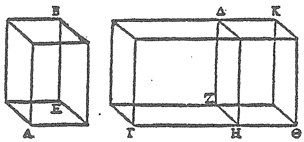


égal au parallélépipède ΓΖ. Car des points Κ, Ε, Η, Μ, Π, Ζ, Ξ, Σ menons au plan inférieur les perpendiculaires ΚΝ, ΕΤ, ΗΥ, ΜΦ, ΠΧ, ΖΨ, ΞΩ, ΣΙ qui rencontrent ces plans aux points Ν, Τ, Υ, Φ, Χ, Ψ, Ω, Ι (11. 11), et joignons ΝΤ, ΤΦ, ΝΥ, ΤΦ, ΧΨ, ΧΩ, ΩΙ, ΨΙ. Le parallélépipède ΚΦ sera égal au parallélépipède ΠΙ (31. 11), parce que ces parallélépipèdes ont des bases égales ΚΜ, ΠΞ, et la même hauteur, et que leurs côtés sont perpendiculaires aux bases. Mais le parallélépipède ΚΦ est égal au parallélépipède ΑΕ (30. 11), et le parallélépipède ΠΙ égal au parallélépipède ΓΖ; parce que ces parallélépipèdes ont la même base et la même hauteur, et que leurs côtés ne sont pas dans les mêmes droites; le parallélépipède ΑΕ est donc égal au parallélépipède ΓΖ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXII.

Les parallélépipèdes qui ont la même hauteur sont entr'eux comme leurs bases.

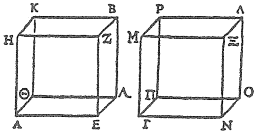
Soient ΑΒ, ΓΔ des parallélépipèdes qui ayent la même hauteur; je dis que ces parallélépipèdes sont entr'eux comme leurs bases, c'est-à-dire que la base ΑΕ est à la base ΓΖ comme le parallélépipède ΑΒ est au parallélépipède ΓΔ.



Car appliquons à ΖΗ un parallélogramme ΖΘ qui soit égal au parallélogramme ΑΕ (45. 1), et sur la base ΖΘ construisons le parallélépipède ΗΚ de même hauteur que le parallélépipède ΓΔ. Le parallélépipède ΑΒ sera égal au parallélépipède ΗΚ (31. 11), car ces parallélépipèdes ont des bases égales ΑΕ, ΖΘ et la même hauteur. Et puisque le parallélépipède ΓΚ est coupé par un plan ΔΗ parallèle aux plans opposés, la base ΘΖ est à la base ΓΖ comme le parallélépipède ΘΔ est au parallélépipède ΔΓ (25. 11). Mais la base ΘΖ est égale à la base ΑΕ, et le parallélépipède ΗΚ égal au parallélépipède ΑΒ; la base ΑΕ est donc à la base ΓΖ comme le parallélépipède ΑΒ est au parallélépipède ΓΔ. Donc, etc.

PROPOSITION XXXIV.

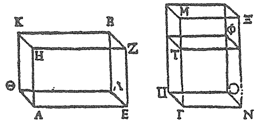
Les bases des parallélépipèdes égaux sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs; et les parallélépipèdes dont les bases sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs sont égaux entr'eux.



Soient les parallélépipèdes égaux AB, ΓΔ; je dis que leurs bases sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs; c'est-à-dire que la base EΘ est à la base NΠ comme la hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélépipède AB.

Que les côtés AH, EZ, AB, ΘK, ΓM, NΞ, OΔ, ΠP soient d'abord perpendiculaires aux bases; je dis que la base EΘ est à la base NΠ comme ΓM est à AH. Si donc la base EΘ est égale à la base NΠ, et le parallélépipède AB égal au parallélépipède ΓΔ, la hauteur ΓM sera égale à la hauteur AH; parce que les parallélépipèdes de même hauteur étant entr'eux comme leurs bases, si les bases EΘ, NΠ étant égales, les hauteurs AH, ΓM n'étaient pas égales, le parallélépipède AB ne serait point égal au parallélépipède ΓΔ (31. 11); mais ces parallélépipèdes sont supposés égaux; les hauteurs ΓM, AH ne sont donc pas inégales; elles sont donc égales; la base EΘ est donc à la base NΠ comme ΓM est à AH; il est donc évident que les bases des parallélépipèdes AB, ΓΔ sont réciproquement proportionnelles aux hauteurs.

Que la base EΘ ne soit pas égale à la base NΠ, et que la base EΘ soit la plus grande. Puisque le parallélépipède AB est égal au parallélépipède ΓΔ, la hauteur ΓM sera plus grande que la hauteur AH; car si cela n'était point, les parallélépipèdes AB, ΓΔ ne seraient pas égaux (31. 11); mais ils sont supposés égaux. Faisons ΓT égal à AH, et sur la base NΠ construisons un parallélépipède ΦΓ dont la hauteur soit ΓT. Puisque le parallélépipède AB est égal au parallélépipède ΓΔ, que ΓΦ est un autre parallélépipède, et que des grandeurs égales ont la même raison avec la même grandeur (7. 5), le parallélépipède AB sera au parallélépipède ΓΦ comme le parallélépipède ΓΔ est au parallélépipède ΓΦ. Mais le parallélépipède AB est au parallélépipède ΓΦ comme la base EΘ est à la base NΠ (32. 11), car les parallélépipèdes AB, ΓΦ sont égaux en hauteur, et le parallélépipède ΓΔ est au parallélépipède ΓΦ comme la base MΠ est à la base ΠT (25. 11), et comme MΓ est à ΓT (1. 6); la base EΘ est donc à la base NΠ comme MΓ est à ΓT. Mais ΓT est égal à AH; la base EΘ est donc à la base NΠ comme MΓ est à AH; les bases des parallélépipèdes AB, ΓΔ sont donc réciproquement proportionnelles aux hauteurs.



Que les bases des parallélépipèdes AB, ΓΔ soient réciproquement proportionnelles aux hauteurs, c'est-à-dire que la base EΘ soit à la base NΠ comme la hauteur du parallélépipède ΓΔ est à la hauteur du parallélépipède AB; je dis que le parallélépipède AB est égal au parallélépipède ΓΔ.

BIBLIOGRAPHIE

Boltianskii V. G. *Equivalent and equidecomposable figures* (trad. par A.K. Henn et C. E. Watts), D. C. Heath and co , Boston , 1963

Boltianskii V. G. *Hilbert's third problem,* traduit par R.A. Silverman, Winston and Sons, Washington, 1978

Euclide *Les Eléments* , traduction Peyrard, réedition Blanchard , Paris, 1966

Euclid *The 13 books of the Elements* , traduits et commentés par Sir Thomas L. Heath , New-York, édition Dover , 1956

Textes cités ou permettant d'aller plus loin:

Bricard R. *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres* in Nouvelles Annales de Mathématiques 15, 1896 : p. 331-334

Cartier P., *Décomposition des polyèdres: Le point sur le troisième problème de Hilbert,* Séminaire Bourbaki, 1984-85, n° 646, p. 646-o1à 646-28

Dehn, M. *Ueber raumgleiche Polyeder,* Nachr. Akad. Wiss., Gottingen, Math. phys. Kl. 1900, p. 345-354 *Ueber den Rauminhalt,* Math. Ann. 55 1902, p.465-478

Gerwien, *Zershneidung jeder beliebigen Anzahl von gleichen geradlinigen Figuren in dieselben Stücke* Journal für die reine und angewaandte Mathematk (Journal de Crelle) 1833, p. 228-234

Hilbert D. *Les fondements de la géométrie,* traduits par Rossier, Edit. du C.N.R.S.

Hilbert D. Sur les problèmes futurs des mathématiques Traduction A. Laugel in *Compte Rendu du Deuxième congrès international des Mathématiciens tenu à Paris du 6 au 12 Aout 1900* , par E. Duporcq Paris, Gauthier-Villars, 1902

Hill M. J. M., *Determination of the volumes of certain species of tetraedra without the employment of the method limits,* Proc. London Math. soc. 27, 1896, p.39-53

Lebesgue, H. *Sur l'équivalence des polyèdres, en particulier des polyèdres réguliers, et sur la dissection des polyèdres réguliers en polyèdres réguliers,* Annales de la Soc. polonaise de Math. 17 ,1938, p.193-226

Martzloff J.C. *Histoire des Mathématiques chinoises,* Paris, Masson, 1988

Sydler J.P. *Sur la décomposition des polyèdres,* Comment. math. Helvetica 16 , 1943-1944, p.266-273

Sydler J.P. *Sur les tétraèdres équivalents à un cube,* Element. math. 11, 1956, p.78-81

Sydler J.P. *Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions,* Comment. math. Helvetica, 40, 1965 p. 43-80

Wagner D.B. *An early derivation of the volume of a pyramid : Lui Hui, third century A.D.* , Historia Mathematica, Toronto, 1979, vol 6, p.164- 188

Wagner D.B. *Proof in ancient Chinese Mathematics, Lui Hui on the volumes on rectilinear solids,* thèse inédite, Copenhague, 1975