
INTRODUCTION A LA MODELISATION GEOMETRIQUE. MODELES DE COURBES POUR LA C.A.O. LES COURBES DE BEZIER.

Didier TROTOUX

I LA REPRESENTATION DES FORMES : DE LA PERSPECTIVE A LA CONCEPTION ASSISTEE PAR ORDINATEUR.

Autrefois la représentation des formes en respectant un certain nombre de contraintes, était le problème des seuls peintres et architectes. A la Renaissance, les artistes ingénieurs dégagent un système de règles géométriques permettant de reproduire l'espace réel dans un plan : ce sont les règles de la perspective mises au point par Brunelleschi, Alberti, Léonard de Vinci et Piero della Francesca. Au début du XVI^{ème} siècle, de nombreux traités de perspective paraissent mais la plupart ne sont que des recueils de préceptes et de règles orientés vers la pratique des artistes.

Du point de vue mathématique, l'idée fondamentale de la perspective est celle de la projection. Girard Desargues (1591-1661) va être à l'origine des méthodes projectives pour améliorer les techniques des artistes, ingénieurs et tailleurs de pierre en les formulant en termes mathématiques concis.

Gaspard Monge (1746-1818) introduit la géométrie descriptive dans les programmes de l'Ecole Normale de l'an III. Dans ses leçons publiées en 1799, il précise les principaux objets de la discipline : "Le premier est de représenter avec exactitude sur des dessins qui n'ont que deux dimensions des objets qui en ont trois et qui sont susceptibles d'une définition rigoureuse. Le second est de déduire de la description exacte des corps tout ce qui suit nécessairement de leurs formes et de leurs positions respectives."

Au XIX^{ème} siècle, avec l'ère industrielle, apparaît le dessin industriel qui utilise des vues sur plusieurs plans, des coupes éventuelles, des représentations en perspective s'appuyant sur la géométrie et la géométrie descriptive.

Enfin, avec l'apparition de l'outil informatique, les besoins en modèles mathématiques pour représenter les formes vont évoluer. Un des principaux objectifs est de pouvoir numériser, à l'aide d'un modèle

mathématique, une forme issue d'un atelier ou d'un bureau de conception dans des domaines variés : automobile, aéronautique, architecture, médecine... Il s'agit de trouver des méthodes destinées à aider aussi bien à la conception qu'à la fabrication de produits divers. Les modèles mathématiques auront donc des usages multiples : ils serviront à mémoriser ou à élaborer une forme puis ils seront utilisés pour représenter cette forme et étudier ses modifications sous contraintes. Enfin ils serviront pour piloter la fabrication (à l'aide de machines à commande numérique).

Auparavant, pour obtenir une forme, l'usage courant était de tracer l'épure à l'échelle 1/1 d'un bateau ou d'un avion dans un bâtiment de dimensions appropriées. Les courbes étaient ensuite tracées à l'aide de gabarits ou de lattes de bois ou de métal guidées par des pions enchassés dans le sol de la salle de traçage. Ces lattes ("spline" en anglais) définissaient des courbes élégantes et optimales d'un point de vue mécanique (car minimisant l'énergie de déformation), mais l'épure encourait le risque d'être endommagée. On dit que le besoin d'une définition numérique des courbes vint pendant la seconde guerre mondiale car un bombardement pouvait détruire la définition de la forme d'un avion. La méthode employée fut le découpage de la courbe en arcs de coniques. Plusieurs ouvrages décrivant ces méthodes furent publiés en 1940, au moment où Isaac Schoenberg introduisait les "splines mathématiques" (fonctions polynomiales par morceaux) pour le lissage de courbes utilisées en actuariat. Vers 1960, on admit dans l'industrie aéronautique, que l'usage des coniques était trop limité, et chez Boeing et British Aircraft Corporation, on introduisit, dans les méthodes de traçage, l'utilisation des splines mathématiques avec des coefficients vectoriels plutôt que scalaires, ce qui était fondamental à un double titre : d'une part la forme des courbes et des surfaces devint invariante par rapport aux changements de référentiel et d'autre part cela permettait d'avoir des courbes définies par plusieurs variables, fermées, avec des points doubles et des tangentes verticales.

Ce sont les ingénieurs de l' industrie automobile et aéronautique qui vont développer des modèles mathématiques nouveaux compte tenu de leurs besoins spécifiques en utilisant les théories existantes concernant par exemple les polynômes d'interpolation ou d'approximation. Parmi eux, Pierre BEZIER, ingénieur à la Régie Renault, a imaginé un modèle original qui a très vite connu une reconnaissance internationale. Il en indiquait

l'origine lors d'une interview en 1990¹ : "Jusqu'au début des années soixante, mon activité au sein de la Régie Renault, était entièrement tournée vers la mécanique. A l'époque, on ne savait travailler de façon précise que des surfaces simples. Plans, cylindres, sphères étaient décrits par leurs caractéristiques géométriques. Ces objets possédaient une cote, une tolérance et une dispersion. Une deuxième catégorie d'objets, au contraire, avaient une forme qualifiée d'expérimentale. Une hélice d'avion, une coque de bateau et, bien sûr une carrosserie de voiture possèdent ainsi une forme déterminée expérimentalement, sans qu'elle puisse être décrite par une formule mathématique. Pour fabriquer cette pièce, il fallait donc une cascade d'opérations : la première ébauche était suivie d'une maquette mise au net qui servait de gabarit pour tracer un plan. Il fallait ensuite réaliser un modèle pour obtenir des moules ajustés à la main. A chaque étape, la dispersion était inévitable du fait de la part laissée à l'interprétation de l'opérateur. Il n'était pas rare qu'à une étape de la chaîne quelqu'un se dise : " si j'arrange ça un peu comme cela, ce sera plus facile à emboutir ou à souder ". On faisait de nouvelles retouches. D'un bout à l'autre de cette suite d'opérations, il n'existait aucune référence indiscutable : c'était le règne de l'imprécision...

Mais un nouvel élément est intervenu et a contribué à modifier les données du problème : le développement des machines à commande numérique. Au début, ces machines étaient programmées de façon relativement simple. Il fallait les alimenter avec des nombres, ce que l'on savait faire pour des déplacements élémentaires comme des droites, des arcs de cercles, à la rigueur pour des ellipses. Mais il n'était pas question de programmer des courbes quelconques tracées à la main faute d'une définition numérique de ces dernières. Quand les machines sont devenues exploitables, cette définition est devenue une préoccupation lancinante. En outre, il fallait un système qui puisse traiter des courbes gauches, car toutes les lignes caractéristiques d'une voiture sont des courbes gauches.

Ces considérations m'ont conduit à définir, de ma propre initiative, un cahier des charges pour le système que je me chargeais de concevoir. Dans la liste de conditions, figurait en bonne place la nécessité d'obtenir une réponse rapide entre le dessin et la création de la surface. Le projeteur met au net une forme faite à la main; le créateur, lui, procède toujours par retouches. Pour être compétitif par rapport à la technique existante, nous devions pouvoir offrir un gain de rapidité notable. Mon ambition était de parvenir à dessiner puis à faire réaliser la pièce

1 P.BEZIER, un inconnu célèbre, Sciences et Vie Micro n° 69, février 1990 .

immédiatement par la machine et à recommencer si quelque chose n'allait pas. Enfin le système devait être facilement assimilable par des techniciens auxquels il était exclu de demander d'apprendre les mathématiques. Il leur fallait une méthode de travail instinctive, aisément compréhensible. Mon objectif était donc, en suivant ce cahier des charges, d'avoir la possibilité de donner une définition numérique d'une courbe tracée à la main afin de fournir à la commande numérique les chiffres dont elle avait besoin. Il s'agit bien d'une définition numérique de la courbe : la finalité est de transmettre des nombres qui nourriront un ordinateur, lequel pilote, par exemple, la fraiseuse..."

II LE MODELE DES COURBES DE BEZIER.

1) PRESENTATION PAR PANTIN VECTORIEL.

L'idée de départ repose sur l'exemple suivant : prenez un cadre carré sur lequel vous tendez des ficelles parallèles et équidistantes. Sur chacune d'elles, vous placez une perle de façon à définir un quart de cercle. Si vous déformez le cadre, les perles vont définir un quart d'ellipse. Si les côtés du cadre sont extensibles, vous pourrez avoir des ellipses petites ou grandes. Les coordonnées des trois sommets A, B et C sont suffisantes pour tracer l'arc d'ellipse (fig.1).

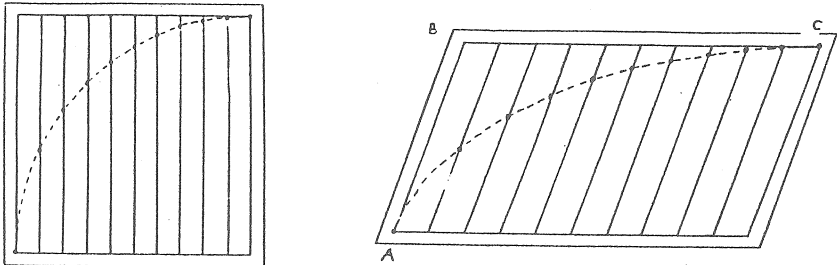
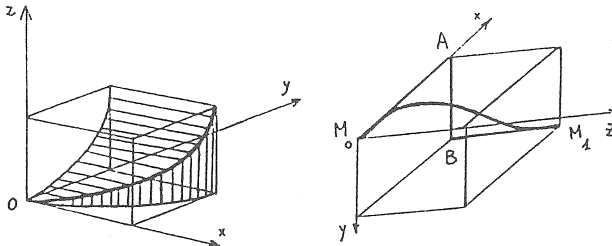


Fig. 1

Dans l'espace, partons de la courbe (C) intersection des cylindres d'équation $x^2 + (y-1)^2 = 1$ et $(z-1)^2 + y^2 = 1$ qui joint les sommets (0,0,0) et (1,1,1) du cube $0 \leq x, y, z \leq 1$. Par transformation linéaire, le cube devient un parallélépipède quelconque, et (C) est transformée en une courbe parfaitement identifiée par la connaissance du repère image. Au dessinateur, on donnera de préférence le pantin vectoriel formé par les trois vecteurs " mis bout à bout " $\xrightarrow{M_0A}$, $\xrightarrow{AB}$ et $\xrightarrow{BM_1}$ car il donne une bonne idée de la forme la courbe (fig. 2).



A : Le cube de départ est dessiné dans un repère orthonormé.

B : Après transformation le référentiel est devenu quelconque

Fig. 2

On peut définir le point générique M d'une telle courbe par un pantin vectoriel dépendant d'un paramètre réel variant entre 0 et 1, et vérifiant un certain nombre de contraintes. On se limitera, dans le cadre de cet article, au cas d'une courbe joignant un point M_0 à un point M_1 , en utilisant 4 vecteurs $\vec{V}_i$ dont le choix permet de modifier la forme de la courbe (fig. 2').

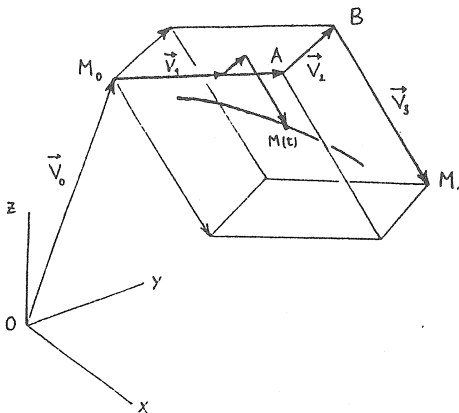


Fig. 2'

Posons ainsi :

$$\overrightarrow{OM}(t) = f_0(t) \overrightarrow{V_0} + f_1(t) \overrightarrow{V_1} + f_2(t) \overrightarrow{V_2} + f_3(t) \overrightarrow{V_3}$$

Les fonctions f_i sont des fonctions polynômiales de degré 3 indépendantes des vecteurs $\overrightarrow{V_i}$ et vérifiant les contraintes suivantes :

$$1) \overrightarrow{OM}(0) = \overrightarrow{OM_0} = \overrightarrow{V_0} \quad M \text{ est en } M_0 \text{ pour } t = 0$$

$$2) \overrightarrow{OM}(1) = \overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{V_0} + \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3} \quad M \text{ est en } M_1 \text{ pour } t = 1$$

$$3) (\overrightarrow{OM})'(0) = f_1'(0) \overrightarrow{V_1}$$

$$4) (\overrightarrow{OM})'(1) = f_3'(1) \overrightarrow{V_3}$$

$$5) (\overrightarrow{OM})''(0) = f_1''(0) \overrightarrow{V_1} + f_2''(0) \overrightarrow{V_2}$$

$$6) (\overrightarrow{OM})''(1) = f_2''(1) \overrightarrow{V_2} + f_3''(1) \overrightarrow{V_3}$$

La contrainte 1) impose $\overrightarrow{V_0} = \overrightarrow{OM_0}$. La courbe est donc déterminée par les vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$ et $\overrightarrow{V_3}$ (pantin vectoriel de référence).

Les contraintes 3) et 4) imposent des conditions sur les tangentes : la dérivée première en M_0 (resp. M_1) est colinéaire à $\overrightarrow{V_1}$ (resp. $\overrightarrow{V_3}$).

Les contraintes 5) et 6) influent sur la concavité. Dans le cas d'une courbe gauche ($\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$ formant un trièdre), cela signifie que la courbe est osculatrice en M_0 au plan (M_0 , $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$) et en M_1 au plan (M_1 , $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$).

On peut jouer sur la forme de la courbe par différents choix des vecteurs $\overrightarrow{V_1}$, $\overrightarrow{V_2}$, $\overrightarrow{V_3}$. Par exemple, on peut fixer $\overrightarrow{V_1}$ (choix de la tangente en M_0) et $\overrightarrow{V_3}$ (choix de la tangente en M_1) et alors, $\overrightarrow{V_2}$ est déterminé car $\overrightarrow{M_0M_1} = \overrightarrow{V_1} + \overrightarrow{V_2} + \overrightarrow{V_3}$.

Détermination des fonctions polynomiales f_i

Ces fonctions sont choisies de manière à ce qu'elles soient indépendantes du système de vecteurs de référence. On traduit les contraintes 1) à 6) et la remarque précédente permet d'obtenir le système linéaire vérifié par les coefficients des fonctions f_i . La résolution de ce système donne :

$$f_0(t) = 1$$

$$f_1(t) = 3t - 3t^2 + t^3$$

$$f_2(t) = 3t^2 - 2t^3$$

$$f_3(t) = t^3$$

On a donc :

$$\vec{OM}(t) = \vec{V}_0 + (3t - 3t^2 + t^3) \vec{V}_1 + (3t^2 - 2t^3) \vec{V}_2 + t^3 \vec{V}_3$$

On obtient des points de la courbe en construisant des pantins vectoriels correspondants à différentes valeurs de t . Ces pantins vectoriels suivent le moule imposé par le pantin vectoriel de référence (fig.3).

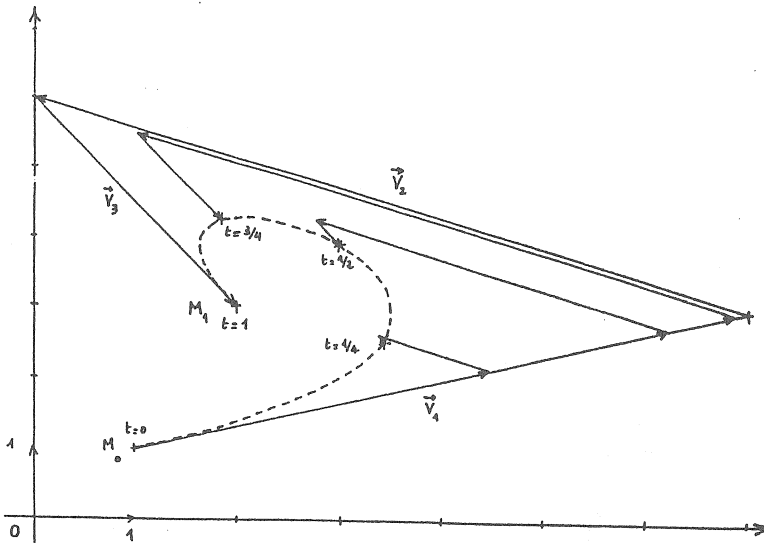


Fig. 3

2) PRESENTATION PAR POINTS DE CONTROLE

C'est la méthode de présentation que l'on rencontre le plus fréquemment dans les ouvrages traitant la question. Au lieu de considérer les vecteurs $\vec{V}_0, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$, on définit les points de contrôle P_0, P_1, P_2 et P_3 par $OP_0 = \vec{V}_0$, $P_0P_1 = \vec{V}_1$, $P_1P_2 = \vec{V}_2$ et $P_2P_3 = \vec{V}_3$. On dit que la courbe est "contrôlée" par le polygône (P_0, P_1, P_2, P_3) .

En introduisant ces points dans la relation vectorielle définissant le point $M(t)$, on obtient :

$$OM(t) = OP_0 + (3t - 3t^2 + t^3)(OP_1 - OP_0) + (3t^2 - 2t^3)(OP_2 - OP_1) + t^3(OP_3 - OP_2)$$

ce qui peut s'écrire :

$$OM(t) = (1-t)^3 OP_0 + 3t(1-t)^2 OP_1 + 3t^2(1-t) OP_2 + t^3 OP_3$$

c'est-à-dire :

$$OM(t) = \sum_{i=0}^3 C_3^i (1-t)^{3-i} t^i OP_i = \sum_{i=0}^3 B_3^i(t) OP_i$$

On reconnaît dans cette formule les polynômes de Bernstein d'ordre 3, et, comme la somme des $B_3^i(t)$, pour i variant de 0 à 3, vaut 1, on peut interpréter le point $M(t)$ comme barycentre des points P_i affectés des masses $B_3^i(t)$, $0 \leq i \leq 3$.

En utilisant ce point de vue, nous pouvons obtenir de nouvelles propriétés de la courbe de Bézier contrôlée par (P_0, P_1, P_2, P_3) .

a) La courbe décrite par $M(t)$ est contenue dans l'enveloppe convexe de (P_0, P_1, P_2, P_3) .

b) L'étude des fonctions $B_3^i(t)$ montre l'influence variable des points P_i suivant les valeurs de t . Celle de P_0 , maximale pour $t=0$, diminue quand t augmente. Celle de P_3 augmente avec t , pour être maximale en $t=1$. Celle de P_1 (resp. P_2) augmente jusqu'à $t=1/3$ (resp. $t=2/3$), puis diminue.

Tout se passe comme si la courbe de Bézier était une ficelle magnétisée, les points P_i jouant le rôle de pôles attracteurs.

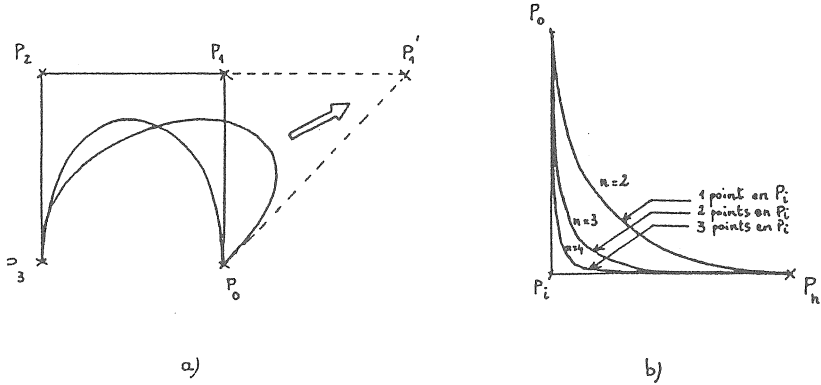


Fig. 4

La figure 4 montre la facilité à modifier la forme d'une courbe de Bézier. La fig. 4 a) montre comment la modification d'un point de contrôle (P_1 étant remplacé par P_1') "tire" la courbe vers ce nouveau point. Dans la figure 4 b), on peut observer que, si l'on a un point de contrôle multiple, la courbe est d'autant plus attirée vers ce point que l'ordre de multiplicité est élevé. On peut donc modifier la courbe sans changer de polygone de contrôle, en ajoutant des points confondus avec les points de contrôle. Mais l'inconvénient de cette méthode est l'augmentation du degré des polynômes définissant la courbe.

En effet, la courbe de Bézier guidée par $(P_0, P_1, \dots, P_n)$ est définie paramétriquement par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^n C_n^i (1-t)^{n-i} t^i \overrightarrow{OP_i} = \sum_{i=0}^n B_n^i(t) \overrightarrow{OP_i}$$

Algorithme de construction géométrique de $M(t)$

Cet algorithme est basé sur la relation de récurrence vérifiée par les coefficients binomiaux.

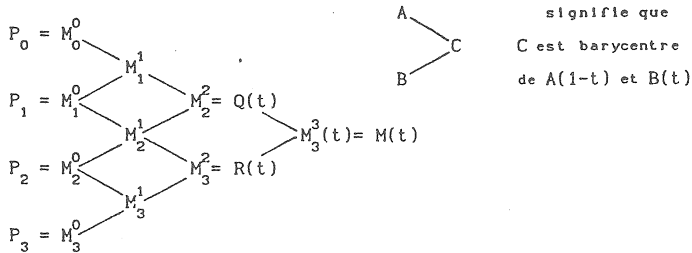
$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM}(t) &= (1-t)^3 \overrightarrow{OP_0} + 3t(1-t)^2 \overrightarrow{OP_1} + 3t^2(1-t) \overrightarrow{OP_2} + t^3 \overrightarrow{OP_3} \\ \overrightarrow{OM}(t) &= (1-t) \left[(1-t)^2 \overrightarrow{OP_0} + 2t(1-t) \overrightarrow{OP_1} + t^2 \overrightarrow{OP_2} \right] + \\ &\quad t \left[(1-t)^2 \overrightarrow{OP_1} + 2t(1-t) \overrightarrow{OP_2} + t^2 \overrightarrow{OP_3} \right] \end{aligned}$$

Soit :

$$\overrightarrow{OM(t)} = (1-t) \overrightarrow{OQ(t)} + t \overrightarrow{OR(t)}$$

où $Q(t)$ est le point de la courbe de Bézier de (P_0, P_1, P_2) et $R(t)$ est le point de la courbe de Bézier de (P_1, P_2, P_3) .

On en déduit que $M(t)$ est le point divisant le segment $[Q(t), R(t)]$ dans le rapport t . Pour construire $Q(t)$ et $R(t)$, on procède de la même manière, en se ramenant à la construction d'un point divisant un segment dans le rapport t . On peut représenter l'algorithme de construction de $M(t)$ sous forme itérative à l'aide du graphe suivant :



La figure 5 montre la construction géométrique de $M(t)$ pour quelques valeurs de t .

Algorithme de calcul des points de la courbe de Bézier.

L'algorithme précédent peut être exploité facilement à l'aide de l'outil informatique pour un nombre quelconque de points de contrôle. A chaque itération, on note R_i les anciens points de contrôle et Q_i les nouveaux.

1. Pour t variant de 0 à 1 avec un pas de Δt , faire :

Début.

2. Pour i variant de 0 à n , $R_i := P_i$.

3. $m := n$.

4. Tant que $m > 0$ faire :

Début.

5. Pour i variant de 0 à $m-1$, $Q_i := (1-t) R_i + t R_{i+1}$.

6. $m := m - 1$.

7. Pour i variant de 0 à m , $R_i := Q_i$.

Fin.

8. $M(t) := R_0$.

Fin.

9. Fin de l'algorithme.

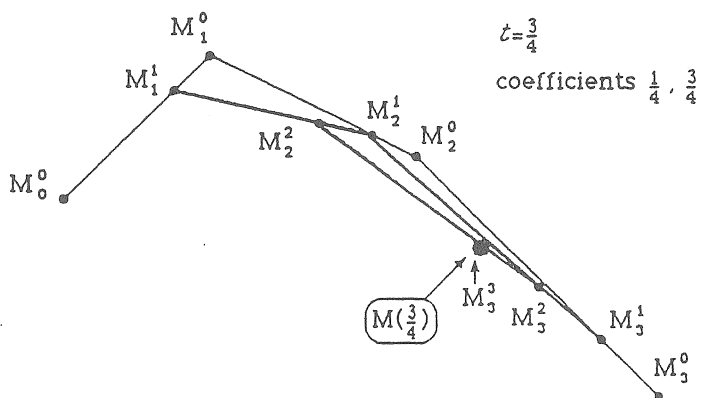
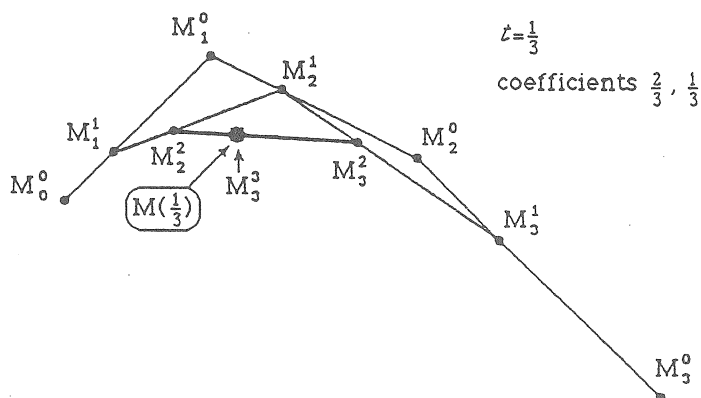
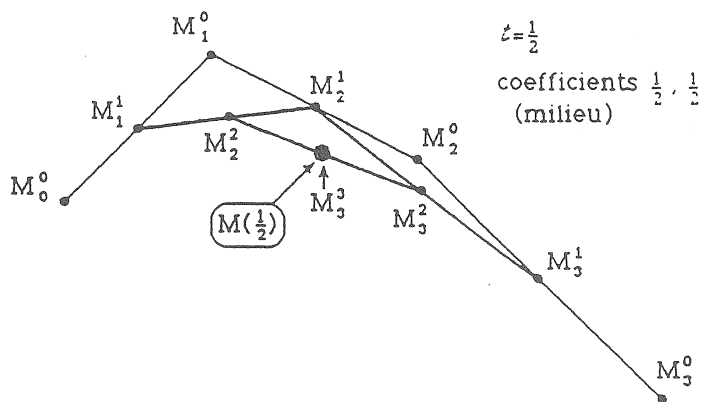


Fig. 5 CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE.

III PROLONGEMENTS

1) COMMENT LUTTER CONTRE L'ASPECT GLOBAL DE CE MODELE

Dans le modèle de Bézier, la forme de l'ensemble de la courbe est modifiée lorsque l'on déplace un des points de contrôle, ce qui peut être gênant, quand on ne souhaite en modifier qu'une partie seulement. On peut éviter ce phénomène de deux façons :

a) en raccordant des courbes de Bézier de degré peu élevé, l'extrémité du polygône de contrôle de la première courbe étant confondu avec l'origine de celui de la deuxième et le vecteur d'arrivée de la première étant colinéaire avec le vecteur de départ de la seconde (cas d'un raccord respectant la tangente).

b) en se servant d'un modèle vectoriel utilisant une base de fonctions polynômiales qui ont seulement une influence locale car elles n'affectent que quelques points voisins du polygône de contrôle. W. GORDON et R. RIESENFELD ont développé dans les années 70, un tel modèle appelé B-Spline. Ce modèle représente une généralisation du modèle de Bézier et le degré des fonctions polynômiales utilisées ne dépend plus du nombre de sommets du polygône de contrôle.

2) UTILISATION POUR LA COMMANDE NUMERIQUE

Nous n'avons abordé ci-dessus que l'utilisation du modèle pour l'aide à la conception de formes. Dans un processus de fabrication, les machines pilotées par des courbes de Bézier doivent être aussi capables de tracer ou d'usiner des formes usuelles (des arcs de cercle par ex.). Ainsi se pose le problème de la détermination du polygône de contrôle d' une courbe donnée. A titre d'exemple, le lecteur pourra vérifier que la courbe guidée par le polygône A(-3;0), B(-3;4), C(3;4), D(3;0) est une approximation du demi-cercle supérieur de diamètre [A;D] (précision de l'ordre du centième).

3) EXTENSION AUX SURFACES

Une surface peut être définie comme le lieu d'une courbe génératrice qui se déplace en se déformant. On peut alors considérer que chaque sommet du polygône de contrôle de la génératrice parcourt une trajectoire, elle-même définie par un polygône de contrôle. On peut définir le point courant du carreau de Bézier contrôlé par le réseau $(A_{i,j})$ $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$, par:

$$(u,v) \in [0;1]^2, \quad \overrightarrow{OM(u,v)} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_n^i(u) B_m^j(v) \cdot \overrightarrow{OA_{i,j}}$$

où $B_n^i(t) = C_n^i (1-t)^{n-i} t^i$.

La figure 6 montre un exemple de polyèdre de contrôle avec la surface correspondante.

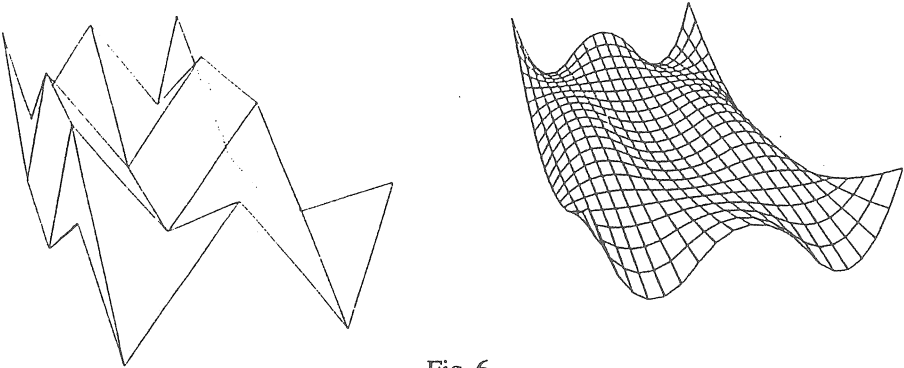


Fig. 6

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.H. BARTELS, J.C. BEATTY et B.A. BARSKY : B-Splines, Mathématiques et CAO tome 6, Hermès, 1988.
- [2] P. BEZIER : Courbes et Surfaces, Mathématiques et CAO tome 4, Hermès, 1987.
- [3] F. LEGROS, C. PANNIER et J.P. POUGET : Courbes de Bézier et B-Splines, Brochure 47 du Groupe Inter-IREM "Lycées Techniques", 1990.
- [4] J.C. LEON : Modélisation et construction de surfaces pour la CFAO, Hermès, 1991.
- [5] T. LIEBLING et H.ROTHLISBERGER : Infographie et applications, Masson, 1988.
- [6] J. MARION : Introduction à quelques méthodes mathématiques de modélisation des courbes et des surfaces, IREM d'Aix-Marseille, 1987.
- [7] M.E. MORTENSON : Geometric Modeling, John Wiley, 1985.