
MOUVEMENT ET GEOMETRIE DANS L'ANTIQUITE

Joëlle Delattre
IREM de Lille I

Dans les *Eléments* d'Euclide, le mouvement n'est pas un objet géométrique. S'il intervient, ce n'est que comme procédé, par exemple, dans la superposition des figures; mais tout semble au contraire fait par le géomètre pour l'éliminer des démonstrations. Nous allons étudier ici comment les Anciens pratiquaient une telle élimination, d'abord dans le cas de la spirale d'Archimède, puis dans celui de la construction de deux moyennes proportionnelles entre deux longueurs données. Ce dernier problème, très célèbre dans l'antiquité, a donné lieu en effet à l'invention d'une multitude de procédés et de machines intéressantes, que nous proposons aux enseignants de mathématique et de technologie d'essayer de construire avec leurs élèves.

I. LE MOUVEMENT INTERVIENT DANS LA CONSTRUCTION DE LA FIGURE, MAIS IL EST EVACUE DE LA DEMONSTRATION GEOMETRIQUE.

Voici comment Archimède définissait la spirale¹:

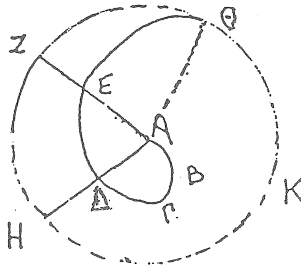
"Si une ligne droite tracée dans un plan se meut uniformément un certain nombre de fois autour d'une extrémité fixe et retourne à sa position de départ, et si en même temps que la droite se meut, un point se meut le long de la droite en partant de l'origine, ce point décrira une spirale (*helica*) dans le plan".

Etudions par exemple comment Archimède démontre une propriété fondamentale de cette courbe:

"Si, de l'origine de la spirale, sont menées deux droites qui coupent le premier tour de spirale et coupent la circonférence du premier cercle, ces

1 Sur les Spirales II 44. 17- 46. 21 (ed. Heiberg)

droites auront l'une avec l'autre le même rapport que les arcs compris entre l'extrémité de la spirale et celles des lignes droites coupant la circonférence, les arcs étant mesurés dans le sens externe à partir de l'extrémité de la spirale.



Soit $AB\Gamma\Delta E\Theta$ le premier tour de spirale, soit le point A l'origine et ΘA la droite de départ.

Soit $\Theta K H$ le premier cercle. Du point A on mène AE et $A\Delta$ (coupant la spirale en Δ et E) et le cercle en H et Z . Il faut montrer que $AE/A\Delta = \text{arc } \Theta K Z / \text{arc } \Theta K H$.

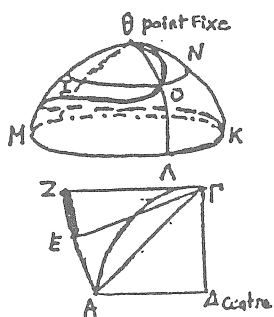
Quand la droite $A\Theta$ tourne, il est clair que le point Θ se meut uniformément sur la circonférence $\Theta K H$ pendant que le point A qui se meut en ligne droite décrit la droite $A\Theta$; le point Θ qui se meut autour de la circonférence du cercle décrit l'arc $\Theta K Z$ pendant que A décrit la droite AE ; et de nouveau, le point A décrit la droite $A\Delta$ en même temps que Θ décrit l'arc $\Theta K H$, chacun se mouvant uniformément. Il est clair alors que $AE/A\Delta = \text{arc } \Theta K Z / \text{arc } \Theta K H$.

Et il en est de même pour le deuxième tour de spirale et, de manière générale, pour le $n^{\text{ième}}$ tour de la spirale.

Pour étudier d'autres propriétés de cette courbe, en particulier les problèmes liés à la construction de tangentes à celle-ci, Archimède recourt à la méthode dont les Arabes lui attribuent la paternité, mais qui en fait correspond à une pratique courante dès le Ve siècle avant

notre ère¹. Il s'agit de la *neusis* ou intercalation. Cette méthode a été critiquée par Pappus et relève, selon lui, d'une "impuissance géométrique", car elle consiste en une "construction mécanique". Mais elle permet, dans l'ignorance des équations du 3^e degré et de degrés encore supérieurs, de construire néanmoins les courbes correspondantes. D'ailleurs, il faut reconnaître avec A. Rey³ le rôle important qu'elle a joué dans la mathématique du XVI^e siècle et les recherches de Viète sur l'équation dite *irréductible*.

Quant à Pappus, au livre IV de ses *Collections mathématiques*⁴, il étudie la spirale sur la sphère.



Soit KAM un grand cercle sur une sphère de pôle Θ (...), et Θ restant fixe, supposons que l'arc ΘNK se meuve vers ΛM et revienne au point de départ.

Soit un point se mouvant de Θ à K , décrira sur la surface une certaine spirale ΘOIK , et si un grand cercle quelconque est tracé à partir de Θ , sa circonférence (égale à celle de KAM sera par rapport à ΛK comme $\Theta \Lambda$ par rapport à ΘO .

Selon une méthode différente de celle d'Archimède, Pappus propose de raisonner sur le quadrant plan $AB\Gamma\Delta$: "décrivant la courbe autour du centre Δ , si on mène la droite de jonction $A\Gamma$, il s'établit que le secteur $AB\Gamma\Delta$ est au segment AB , comme la surface de l'hémisphère est à la surface découpée entre l'hélice ΘOIK et l'arc $KN\Theta$." Voici comment il procède:

2 C'est un témoignage de Simplicius (*Commentaire à la Physique d'Aristote* A2,60, 22-30 in *Les Présocratiques*, p. 483, Paris 1988) citant l'*Histoire de la géométrie* d'Eudème, qui constituerait le plus ancien témoignage d'intercalation selon Ivor Thomas (*Greek mathematical works*, t. I, p. 244, Loeb Class.) à propos de la quadrature de la lunule par Hippocrate de Chio.

3 Cf. *L'Apogée de la science technique grecque. Essor de la mathématique* (Paris 1948), p 112.

4 Cf. *Collections mathématiques* IV 35.

"Menons la droite ΓZ tangente à l'arc, et décrivons autour du centre Γ l'arc AEZ passant par le point A . En conséquence, le secteur $AB\Gamma\Delta$ équivaut au secteur $AEZ\Gamma$ (car l'angle au point Δ est double de l'angle compris sous les droites $A\Gamma$, ΓZ , tandis que le carré de la droite $A\Delta$ est la moitié du carré de la droite $A\Gamma$). Dès lors, je dis que le secteur $AEZ\Gamma$ est au segment AB , comme les surfaces que nous avons dites sont entre elles."

Il poursuit de la manière suivante: "que l'arc KA soit une partie de circonférence entière du cercle, l'arc ZE la même partie de l'arc ZA , et menons la droite de jonction $E\Gamma$. Il s'ensuit que l'arc $B\Gamma$ sera aussi la même partie de l'arc $AB\Gamma$. Mais l'arc KA est une partie de la circonférence entière, l'arc ΘO est la même partie de l'arc $\Theta O\Lambda$, et l'arc $\Theta O\Lambda$ est égal à l'arc $AB\Gamma$; donc l'arc ΘO est aussi égal à l'arc $B\Gamma$. Décrivons, autour du pôle Θ , la circonférence ON , passant par le point O et, autour du centre Γ , l'arc BH passant par le point B . Dès lors, puisque la surface entière de l'hémisphère est à la surface du segment dont l'arc issu du pôle est ΘO , comme la surface sphérique $AK\Theta$ est à la surface sphérique $O\Theta N$, et que le carré de la droite reliant les points Θ , Λ , est au carré de la droite reliant les points Θ , O , ou le carré de la droite $E\Gamma$ au carré de la droite $B\Gamma$, comme la surface de l'hémisphère est à la surface du segment, il s'ensuit que le secteur $EZ\Gamma$ sera au secteur $BH\Gamma$ comme le secteur $KA\Theta$ qui est dans la surface est au secteur $O\Theta N$.

Et la démonstration se poursuit encore pour conclure finalement que "la surface comprise entre l'hélice et la base de l'hémisphère est l'octuple du triangle $A\Gamma D$, ce qui équivaut au carré du diamètre de la sphère".

On voit bien comment toute la démonstration consiste alors, non plus en comparaisons de rapports entre des longueurs parcourues soit en ligne droite soit en ligne courbe, mais en comparaisons de rapports entre surfaces courbes et surfaces planes correspondantes. Ce qu'il s'agit en quelque sorte de faire, c'est d'immobiliser le phénomène mobile en en exprimant la véritable raison géométrique!

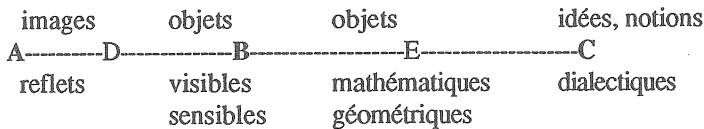
II. LE MOUVEMENT EST MAÎTRISE ET TRANSFORME PAR L'INTELLIGENCE GEOMETRIQUE ET PHILOSOPHIQUE.

Il ne sera pas inutile ici de rappeler le contexte platonicien dans lequel s'est développée et formalisée la géométrie antique. L'objectif en est

très clair: il faut échapper aux contradictions entre les opinions multiples et trompeuses liées à l'inintelligibilité du devenir sensible. C'est bien ce que veut dire Platon au livre VII de *La République*, quand il écrit: "Si la géométrie oblige à contempler l'essence, elle nous convient; si elle s'arrête au devenir, elle ne nous convient pas"⁵.

Les objets mathématiques ont dans l'ordre de la pensée une réalité par rapport à laquelle les objets mouvants et changeants de notre environnement visible ne sont que des images, des ombres ou des reflets. Ce sont les vrais supports de notre activité intellectuelle, leur vérité et leur réalité résultent de leur stabilité et de leur pérennité.

Et Platon de symboliser cette hiérarchie par une ligne géométrique divisée en segments selon un rapport donné, chaque segment étant divisé à son tour selon le même rapport, de la manière suivante: $AB/BC = AD/DB = BE/EC$.



On peut démontrer, par le seul jeu des rapports et leur composition, que les deux segments du milieu sont égaux. Si ces deux segments, correspondant aux objets visibles et sensibles et aux objets mathématiques, sont de longueur égale, cela peut signifier que ces objets sont à la fois mêmes et autres, égaux et inégaux, semblables et dissemblables, un et multiple, en mouvement et en repos, selon les couples de concepts mis en oeuvre par la pensée dialectique platonicienne⁶.

Si nous en restons au couple qui intéresse notre propos, la distinction consistant à dire que les objets visibles et sensibles sont toujours et seulement en mouvement et que les objets mathématiques et géométriques sont toujours et seulement en repos, est une erreur et une caricature de

5 Cf. VII, 526 e, trad. R. Baccou.

6 Cf. par exemple, le *Parménide* de Platon.

l'intention platonicienne. Un certain repos est possible dans le lieu du changement et du devenir, de même qu'un certain mouvement est nécessaire dans le lieu de l'être et du penser.

Dans l'allégorie de la Caverne², célèbre passage de *La République* et sorte de mise en image de la ligne géométrique, destinée à faire comprendre comment le philosophe peut s'élever par étapes depuis les croyances et la vision des ombres et des reflets à la saisie raisonnée et à la contemplation de la vérité, Platon conseille, au sortir de la caverne, de commencer par regarder la surface des eaux et ce qu'elle reflète, puis la lune et le ciel étoilé avant de pouvoir réussir à lever les yeux vers le Soleil, source de vie et de lumière, et symbole de la Vérité et du Bien.

L'eau tranquille n'est-elle pas un exemple de repos sensible? Et quel bel objet de ... réflexion!

Théon de Smyrne⁸ nous transmet une démonstration sans doute d'origine aristotélicienne concernant la forme sphérique de la surface de l'eau tranquille:

"Que la surface de l'eau ait cette forme, on le met en lumière en partant du fait que l'eau s'écoule toujours vers l'endroit le plus creux. Or l'endroit le plus creux est celui qui est le plus proche du centre"⁹... **Voilà une démonstration qui se prétend à la fois physique et mathématique**; considérant un objet sensible et visible, l'eau dormante, on prouve géométriquement que l'impression sensible est fausse: l'eau ne peut pas être plane, sinon elle serait en mouvement!¹⁰

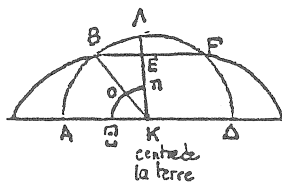
L'argumentation d'Archimède était voisine et peut-être plus physique, car il invoquait la pression de masses d'eau inégales qui entraîneraient un mouvement de l'eau.

7 Cf. *La République* VII.514 a.

8 Cf. *Des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon* (Paris 1892, trad. Dupuis), III Astronomie, p. 205.

9 Cf. Aristote, *Du Ciel* II 4 (traduction P. Moraux, coll. Budé). Il s'agit du 4^e argument par lequel Aristote démontre la sphéricité de l'univers.

10 Voir le texte et la figure, page 6.



En effet, pour développer les conséquences de la non-sphéricité de la surface de l'eau, on suppose par rapport au point B de la surface un autre point E tel que ou bien $EK > BK$ ou bien $EK < BK$. Alors la pression d'eau en OE sera différente de celle exercée en OI et entraînera des remous dans l'eau, qui par hypothèse a été dite "au repos". Donc E et A sont confondus, et la surface de l'eau au repos est sphérique: C.Q.F.D.¹¹.

Quant au ciel étoilé, n'est-il pas par excellence le lieu d'une immobilité mobile ou d'une mobilité immobile? et quel bel objet de contemplation et de divination pour tous les peuples!

Théon de Smyrne¹² exprime très clairement le problème des astronomes anciens: l'anomalie du mouvement des planètes.

"L'aspect varié que présente la révolution des planètes, provient de ce que, fixées à des cercles propres ou à des sphères propres dont elles suivent le mouvement, elles sont emportées à travers le zodiaque, ainsi que Pythagore l'a compris le premier, par une révolution réglée, simple et égale, mais d'où résulte, *par composition*, un mouvement apparent varié et inégal".

Le mouvement désordonné et complexe des astres n'est (comme l'aspect horizontal de l'eau) qu'une apparence. L'exigence du mathématicien est ici encore une fois de retrouver l'élémentaire, c'est à dire la circonférence et la droite, et donc de découvrir un mouvement théorique "simple et égal"; susceptible de rendre compte des apparences, ou, comme on traduit parfois, de "sauver les phénomènes". C'est Eudoxe de Cnide¹³ qui, le premier, aurait proposé un modèle cohérent de sphères homocentriques pour visualiser un mouvement théorique explicatif des déplacements observables. Mais l'exigence n'est pas seulement théorique, elle est aussi métaphysique et religieuse:

11 Cf. Archimède, *Des corps flottants* I prop. 2, trad. latine par Guillaume de Moerbeke (éd. Heiberg II, p. 319 = I. Thomas o. c. II, 244-5).

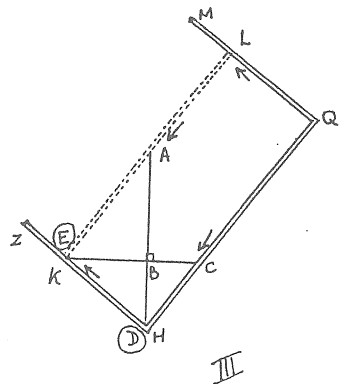
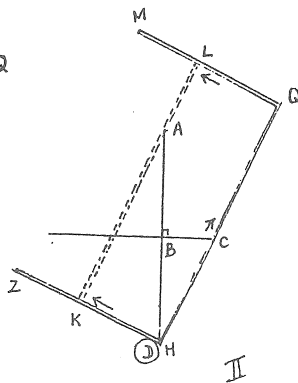
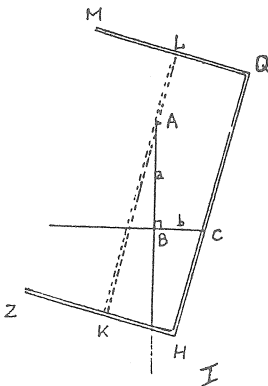
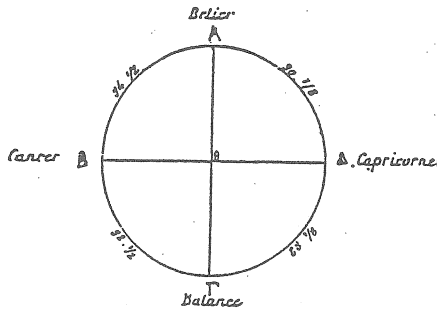
12 O. c., p. 245 et suiv.

13 Eudoxe de Cnide (IV^e siècle avant J. C.), mathématicien de l'Académie de Platon. Voir à ce propos Aristote, *Métaphysique*, [^] 8, 1073 b 16.



On peut démontrer physiquement et mathématiquement que la surface de toute eau tranquille doit être de forme sphérique. L'eau tend, en effet, toujours à couler des parties les plus hautes vers les parties creuses. Or, les parties hautes sont plus éloignées du centre de la terre, les parties creuses le sont moins. La surface de l'eau étant supposée plane, soit $\alpha\beta\gamma$ (une ligne droite de) cette surface. Du centre de la terre, tel que le point x , menons à la base la perpendiculaire $x\beta$ et menons aux extrémités de cette base les droites $x\alpha$, $x\gamma$. Il est évident que ces deux droites $x\alpha$, $x\gamma$, sont toutes les deux plus grandes que $x\beta$ et que les deux points α , γ , sont plus éloignés du centre que le point β et, par conséquent, plus élevés que β . L'eau s'écoulera donc des points α , γ , vers le point β moins élevé jusqu'à ce que ce dernier point, entouré de nouvelle eau, soit autant éloigné du point x que α et γ . Pareillement, tous les points de la surface de l'eau seront à la même distance de x ; donc l'eau offre la forme sphérique et la masse entière de l'eau et de la terre est sphérique.

Théon de Smyrne. (Traduction Dupuis 1892)



"Il est physiquement nécessaire que toutes les créatures divines (les astres) aient un mouvement uniforme et régulier", rappelle Théon. Comment expliquer alors que le Soleil qui se trouve en A au printemps, en B à l'été, en Γ , à l'automne et en D à l'hiver, parcourt en des temps inégaux des arcs égaux pour nous qui regardons du point Θ ? Il est bien évident que la cause de cette apparence (ou anomalie) est un mouvement différent qui ne s'effectue pas autour du centre Θ .

"Le point Θ sera intérieur à la circonférence, ou il sera sur la circonférence elle-même, ou il sera extérieur. Or il est impossible que la circonférence solaire passe par le point Θ , car le Soleil rencontrerait la Terre dont les habitants auraient les uns toujours le jour, les autres toujours la nuit; il n'y aurait ni lever ni coucher et on ne verrait point le Soleil tourner autour de la Terre, ce qui est absurde.

"Il reste donc à supposer le point Θ à l'intérieur ou à l'extérieur du cercle solaire. **A quelque hypothèse que l'on s'arrête, les apparences seront expliquées**, c'est pour cela qu'on peut considérer comme vaines les discussions des mathématiciens qui disent que les planètes ne sont emportées que sur des cercles excentriques, ou sur des épicycles, ou autour du même centre que la sphère étoilée... Si nous supposons que le point Θ est à l'intérieur du cercle solaire, mais non au centre, on dit que le cercle est excentrique; si le point Θ est extérieur, il y a épicycle."

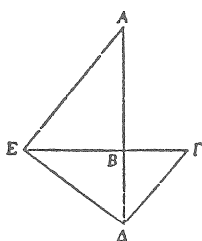
Ainsi la méthode du géomètre l'amène à formuler l'hypothèse d'une décentration des orbes célestes par rapport au centre de l'univers, hypothèse à la fois paradoxale et compatible avec les apparences. Ou bien, selon l'hypothèse des épicycles, on supposera que l'astre se déplace autour d'une petite sphère dont le centre se déplace lui-même autour du centre O; ou bien, selon l'hypothèse des excentriques, on supposera que l'astre se déplace sur un cercle de centre K, distant de O d'une longueur égale au diamètre de l'épicycle. On peut montrer, dit Théon, par projection sur le grand cercle zodiacal des positions de l'astre sur chacun des cercles supposés, que ces deux hypothèses géométriques sont équivalentes et rendent aussi bien compte de ce que nous voyons. **Les apparences sont alors géométriquement sauvées**, mais le mouvement n'est-il pas encore une fois évacué dans toutes ces démonstrations par comparaisons de distances parcourues?

III. LE MOUVEMENT EST INDISPENSABLE A LA CONSTRUCTION DES OBJETS GEOMETRIQUES, C'EST POURQUOI LES GEOMETRES ONT BESOIN DE MACHINES.

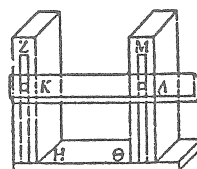
Les astronomes se sont servis très tôt de maquettes complexes pour expliquer aux non-initiés, selon le conseil de Platon, dans le *Timée*¹⁴, le mouvement des astres les uns par rapport aux autres, et surtout comment une combinaison de mouvements de translation et de rotation uniquement pouvaient provoquer une apparence de mouvement en spirale. Certains archéologues¹⁵ pensent même que les plus anciennes de ces machines avaient en même temps une fonction musicale et calendaire!

Nous bornerons notre étude aux seules machines dont Eutocius nous fait la description, dans son *Commentaire sur la sphère et le cylindre d'Archimède*¹⁶. Laissons de côté la magnifique démonstration d'Archytas, pour laquelle nous renvoyons le lecteur curieux à notre précédent travail sur la géométrie antique¹⁷. Comme l'explique Eutocius, nombreuses sont les autres solutions proposées. En particulier, Platon aurait proposé une "machine" dont voici le principe.

Deux règles KA et ΓH dont l'une, mobile parallèlement à l'autre fixe, glisse entre les rainures des deux montants FT' et MH, fixés perpendiculairement. On trace deux droites perpendiculaires AB et BΓ. Soient $AB = a$ et $BΓ = b$, les deux segments entre lesquels on cherche deux moyennes proportionnelles.



PLATON



14 Cf. p. 40 c-d, trad. A. Rivaud (Les Belles Lettres Paris 1963)

15 Cf. E. Mac Clain, "Tonal calendars in ancient civilisation", Colloque d'archéologie musicale de Cambridge, (déc. 1991).

16 Cf. p. 47 à 67 de la traduction de Ch. Mugler (ed. des Belles Lettres)

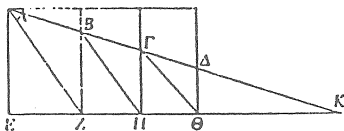
17 "Géométrie ou géométries antiques", *Actes de l'Université d'été d'histoire des mathématiques de Lille* (juil.1989)

On applique l'instrument sur la figure, le bord d'une règle passant par A et le bord de l'autre passant par Γ . On écarte ensuite la règle mobile, en faisant tourner l'instrument pour que, les bords des règles passant toujours par A et Γ , les prolongements des droites passent par les sommets du rectangle formé par l'instrument.

Dans chaque triangle rectangle $A\Delta E$ et $\Gamma\Delta E$, la hauteur est moyenne proportionnelle entre les segments de l'hypoténuse. J. Dupuis¹⁸, traducteur de Théon de Smyrne au siècle dernier, concluait sa note sur la solution mécanique de Platon en ces termes: "Cette solution de Platon est mécanique puisqu'elle exige l'usage d'un instrument autre que la règle et le compas". Et pourtant, quoi de plus "géométrique" que la démarche utilisée?

Héron utilise une règle mobile autour d'un point fixe B, sommet du rectangle de côtés a et b. Philon de Byzance reprend la même technique; Apollonios de Perge, Dioclès, Ménechme, Pappus et Sporus rivalisent d'habileté géométrique, recourant qui à des arcs de cercle qui à des paraboles,¹⁹ etc.

Dans la *Lettre à Ptolémée*, Eratosthène prétend avoir imaginé une méthode instrumentale capable de trouver entre deux segments de droite donnés non seulement deux moyennes, mais autant qu'on en demandera, et donc de permettre de "faire passer toute figure solide d'une forme à une autre en la rendant semblable à une figure donnée, ou de l'amplifier en respectant la similitude, qu'il s'agisse d'autels ou de temples".



ERATOSTHENE

Entre les segments AE et $\Delta\Theta$, on va construire une série de parallélogrammes permettant de comparer, grâce au parallélisme de leurs diagonales, des segments intermédiaires entre AE et $\Delta\Theta$.

"L'instrument construit est une plaquette de bois, d'ivoire ou de bronze comportant trois tablettes égales aussi minces que possible. Celle du

18 O. c., p. 333-4. (Voir figures I II et III page 6).

19 Nous renvoyons sur ce point à l'édition par Ch. Mugler du *Commentaire* d'Eutocius, p. 47 à 62.

milieu est fixe, les autres peuvent être déplacées dans des rainures (...) Pour que les segments de droite soient pris avec plus d'exactitude, il faut veiller avec soin à ce que, dans le déplacement des tablettes, tout reste parallèle et que les différentes pièces soient parfaitement ajustées.²⁰ Si plusieurs moyennes sont à trouver, on met dans l'instrument un plus grand nombre de tablettes, mais la démonstration reste la même.

Et Eutocius, par la voix d'Eratosthène, de décrire l'offrande votive en bronze scellée de plomb sur la stèle funéraire du roi Ptolémée, ainsi que la figure, le résumé de démonstration et l'épigramme "publicitaire" d'Eratosthène qui l'accompagnent:

"... Renonce à chercher au moyen du dispositif laborieux des cylindres d'Archytas, ou des trois lignes de Ménechme obtenues par des sections coniques, ou de la construction de lignes courbes inventées par le divin Eudoxe. En te servant de nos tablettes, tu pourras produire facilement des milliers de moyennes proportionnelles à partir d'un petit noyau ..."

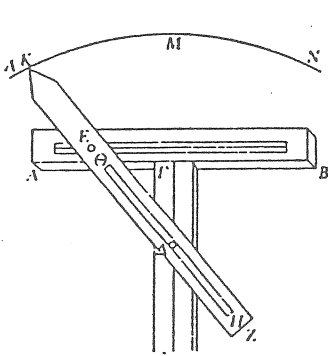
Ce témoignage est important, car il affirme le caractère théorique et "laborieux" des solutions des Ve et IVe siècles. Et il propose, au IIIe siècle, des procédés plus simples et élégants mécaniquement, plus "modernes" en un mot. Certes Diogène Laërce²¹ dit bien qu'Archytas fut le premier à introduire des mouvements d'instruments dans une figure géométrique, mais il ne dit nullement qu'il aurait essayé de réaliser mécaniquement sa construction. Car, comme l'écrit P. Tannery, il aurait trouvé là "le procédé manuel le plus impraticable qu'il fût possible d'imaginer". Aujourd'hui, cette construction complexe qu'est l'intersection d'un cylindre, d'un tore et d'un cône peut se réaliser à l'aide d'un bon logiciel de dessin industriel, cependant on a peine à imaginer quel a pu être la support mécanique d'Archytas!

Mais écoutons plutôt la solution moderne de Nicomède, qu'Eutocius propose de comparer à celle d'Eratosthène:

20 Cf. Eutocius, o. c., p. 67.

21 Cf. *Vies* VIII 83 in *Les Présocratiques*, Archytas A I, p. 518. *Les Ecoles présocratiques*, p. 274.

"Il faut imaginer deux règles, reliées entre elles à angle droit de manière ainsi AB et $\Gamma\Delta$, dans AB, une rainure en forme de hache, où puisse glisser un



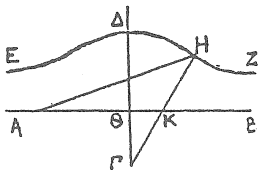
NICOMEDE

chélonion²² ; dans la règle $\Gamma\Delta$ du côté de Δ et sur la droite qui divise la largeur de la règle en deux parties égales, un petit cylindre attaché à la règle et émergeant légèrement de sa surface supérieure; une autre règle EZ, ayant à partir d'une petite distance de Z une entaille $H\Theta$ où puisse s'engager le petit cylindre attaché en Δ , et au point E un trou rond où puisse passer le petit axe solidaire du chélonion parcourant la rainure dans la règle AB ..."

Si nous imaginons un point K, tel que EK situé au-delà de la rainure reste toujours de longueur constante, un stylet touchant le sol, le déplacement de la règle décrira une courbe appelée par Nicomède "première ligne conchoïde", de rayon EK et de pôle Δ (le petit cylindre fixé sur $\Gamma\Delta$).

Nicomède montre que cette ligne a la propriété de s'approcher de plus en plus de la règle AB sans jamais l'atteindre, et que toute droite menée entre la ligne et la règle AB coupe la ligne.

Comment alors trouver les moyennes proportionnelles à partir de là? Voici la démonstration rapportée par Eutocios:

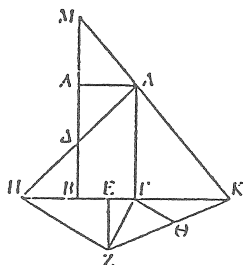


"Etant donné de nouveau un angle A et un point Γ extérieur, soit à mener la droite ΓH de manière que le segment KH (intercepté par l'angle) soit égal à un segment de droite donné.

Abaissons du point Γ sur la droite AB la perpendiculaire $\Gamma\Theta$, portons sur son prolongement le segment $\Delta\Theta$ égal au segment donné, et décrivons la première conchoïde EAZ en prenant pour pôle le point Γ , pour rayon le segment donné $\Delta\Theta$ et pour règle AB; cette ligne rencontre donc la droite AH;

22 C'est une cheville taillée dans une écaille de tortue.

soit H le point de rencontre, menons la droite ΓH ; le segment KH est égal au segment donné."



"Ceci démontré, poursuit Eutocius, soient donnés deux segments de droite $\Gamma\Lambda$ et $\Lambda\Lambda$ perpendiculaires l'un à l'autre, entre lesquels il faut trouver deux moyennes proportionnelles en proportion continue; complétons le parallélogramme $AB\Gamma\Lambda$; divisons chacun des côtés AB et $B\Gamma$ en deux parties égales par les points Δ et E ;

menons la droite $\Delta\Lambda$; soit H le point de rencontre entre le prolongement de $\Delta\Lambda$ et le prolongement de ΓB ; menons EZ perpendiculairement à $B\Gamma$ et joignons Γ à un point Z tel que ΓZ soit égal à $\Delta\Lambda$; menons ZH et la parallèle $\Gamma\Theta$ à ZH; l'angle $K\Gamma\Theta$ étant ainsi donné, menons du point donné Z la droite $Z\Theta K$ de manière que le segment (intercepté) ΘK devienne égal à $\Delta\Lambda$ ou à ΓZ ; on a montré en effet par la conchoïde que ceci est possible; soit M le point de rencontre entre le prolongement de AB. Je dis que $\Gamma\Lambda$ est à $K\Lambda$ comme $K\Gamma$ est à MA et comme MA est à $\Lambda\Lambda$."

Nous incitons vivement les bricoleurs à **construire la machine de Platon ou bien celles d'Eratosthène ou de Nicomède**, puis à déterminer avec leur aide des moyennes proportionnelles entre deux segments donnés²³.

BIBLIOGRAPHIE

TEXTES ANCIENS

ARCHIMÈDE, *Des corps flottants* (éd. Heiberg)
Sur les spirales (éd. Heiberg)

ARISTOTE, *Du ciel* (trad. P. Moraux, (Les Belles Lettres, Paris 1965)
Métaphysique (trad. Tricot, Paris 1966)

23 Le procédé de Nicomède nous a été transmis aussi par Pappus dans ses *Collections mathématiques* III 24 et 42 (sous forme de deux raisonnements différents).

EUCLIDE, *Eléments* (trad. F. Peyrard, rééd. Paris 1966)

EUTOCIUS, *Commentaire sur la sphère et le cylindre d'Archimède* (trad. Ch. Mugler, tome IV des Oeuvres complètes d'Archimède, Paris 1972)
Greek mathematical works (fragments établis et traduits par I. Thomas, Loeb classical Library, Londres 1941, rééd. 1980)

PAPPUS, *Collections mathématiques* (trad. Ver Eecke, Bruges 1949, rééd. Paris 1982).

PLATON, *Parménide* (trad. A. Diès, Les Belles Lettres, Paris 1965)
République, (trad. R. Baccou, Paris 1963)

PRESOCRATIQUES, (*Archytas, Hippias...*) in Bibliothèque de la Pléiade
 (trad. J.-P. Dumont, J. L. Poirier et D. Delattre, Paris 1988). Voir
Les Ecoles présocratiques (coll. Folio, Paris 1991)

SIMPLICIUS, *Commentaire à la Physique d'Aristote*, in *Les Présocratiques*,
 citant l'*Histoire de la géométrie* d'Eudème.

THEON DE SMYRNE, *Des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon* III. Astronomie (trad. J. Dupuis, Paris 1892)

OUVRAGES GENERAUX

R. BACCOU, *Histoire de la science grecque* (Paris 1951)

P. DUHEM, *Le système du monde* (rééd. Paris 1979)

A. REY, *L'Apogée de la science technique grecque. Essor de la mathématique*
 (Paris 1948)