QUADRATURES AVEC CALCULS ... MAIS SANS INTEGRALES

Maryvonne HALLEZ
Marie-Françoise JOZEAU
IREM de Paris VII

Les mathématiciens n'ont pas attendu l'invention des intégrales pour calculer des aires de surfaces non polygonales.

La recherche des quadratures de surfaces était une activité importante chez les mathématiciens grecs, entre autres ; il suffit pour s'en convaincre de lire le témoignage bien connu d'Aristophane qui, dans sa comédie "Les oiseaux" parodie de la société athénienne fait dire au géomètre Méton : "je ferai mes mensurations, par application d'une équerre droite, en sorte que, tu vois, le cercle devienne quadrangulaire ..."[1]. Aristophane met l'accent sur une des plus grandes difficultés rencontrées, la quadrature du cercle. Quarrer un polygone ne demandait à Euclide ni calculs, ni intégrales [2]. Mais il est difficile de quarrer une surface non polygonale sans calculs.

Nous allons parcourir dans l'histoire des quadratures des coniques un chemin discontinu dont voici les étapes :

- une quadrature d'un segment de parabole par Archimède
- une autre méthode pour quarrer un segment de parabole par Thabit-Ibn Qurra
- une quadrature de l'hyperbole par Grégoire de Saint-Vincent
- une quadrature de la "parabole" cubique par John Wallis
- vers une généralisation des quadratures par Isaac Newton

---

1 Aristophane, Les Oiseaux, trad. V.H. Debidow, Gallimard, le livre de poche classique, Paris, 1966, p. 83

2 Cf article de J.P Friedelmeyer "Quadratures sans calculs ni intégrales" pp?.

Le travail fait avec les élèves s'inscrit dans une tendance actuelle de retour à la géométrie allant de pair avec une importance plus grande donnée au calcul d'aires dans les classes de collège. Il répond aux objectifs suivants :
- introduire le calcul intégral en classe de terminale
- maintenir une continuité entre les calculs d'aires effectués au collège et le calcul intégral
- étudier les coniques de manière plus globale

- manipuler des suites classiques comme la somme des puissances des n premiers nombres entiers, les suites arithmétiques et les suites géométriques
- mettre en évidence des liens entre géométrie et analyse

Ce travail est aussi l'occasion d'évoquer avec les élèves un grand problème mathématique dont l'élaboration théorique a demandé plusieurs siècles de recherche et qui est l'objet de nos jours d'une question banale d'un problème de baccalauréat.

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

PAR ARCHIMEDE

I - Le traité "la quadrature de la parabole" d'Archimède commence ainsi :

"Archimède à Dosithée, prospérité ! [...] Mais aucun de nos prédécesseurs n'a encore que je sache, cherché la quadrature d'un segment délimité par une droite et une parabole, chose que nous avons trouvée maintenant [...].
Je t'envoie donc les démonstrations que j'en ai écrites, d'abord telles que je les ai examinées par la mécanique[3], puis telles que je les ai établies par la géométrie".

Dans la méthode qu'il appelle géométrique, Archimède pour déterminer l'aire d'un segment de parabole, utilise une **sommation** d'une progression géométrique de raison 1/4.
Dans la proposition 23, l'utilisation des séries apparaît clairement.

Archimède énonce :
"Si des grandeurs sont disposées en une suite de raison quatre, la somme de ces grandeurs augmentée du tiers de la plus petite sera égale aux quatre tiers de la plus grande".
Soit :

$$A_1 + A_2 + A_3 + \ldots + A_n + 1/3A_n = 4/3A_1$$

Lorsque le nombre de termes de la série augmente, le reste

$$1/3 \times 1/4^{n-1} \times A_1$$

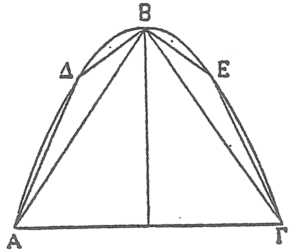
deviendra aussi petit que l'on veut.

Suggestion pour un travail en classe de 1e :
. Lecture de la proposition sans les notes
. Faire refaire le calcul aux élèves
. Faire généraliser à un nombre quelconque de termes (en utilisant les notations, et le cours sur les suites géométriques)

Dans la proposition 24, Archimède démontre que :
"Tout segment délimité par une droite et par une parabole équivaut aux quatre tiers

---

[3] Dans cette méthode, Archimède utilise un levier fictif ayant un point fixe autour duquel sont opérées des pesées fictives de trapèzes et d'aires puis la méthode d'exhaustion.



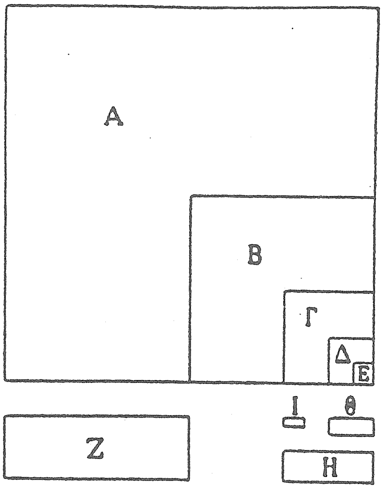
du triangle ayant même base et même hauteur que le segment"

Archimède ne parle pas en terme de limite, il utilise la double réduction à l'absurde.

PROPOSITION XXIII

Lorsque certaines grandeurs sont établies dans une série dont la raison est quatre, la somme de toutes ces grandeurs, augmentée du tiers de la plus petite, vaudra les quatre tiers de la plus grande.

Soient A, B, Γ, Δ, E des grandeurs en nombre quelconque, établies en série, dont chacune est quadruple de la suivante, et soit A la plus grande. D'autre part, soit Z le tiers de B, H le tiers de Γ, Θ le tiers de Δ, et I le tiers de E. Dès lors, puisque Z est la troisième partie de B, tandis que B est la quatrième partie de A, l'ensemble de B, Z sera la troisième partie de A; par conséquent, pour la même raison, l'ensemble de H, Γ, sera la troisième partie de B ; l'ensemble de Θ, Δ, la troisième partie de Γ, et l'ensemble de I, E, la troisième partie de Δ. Il en résulte que l'ensemble de B, Γ, Δ, E, Z, H, Θ, I sera aussi la troisième partie de l'ensemble de A, B, Γ, Δ. Or, l'ensemble de Z,H,Θ est aussi la troisième partie de l'ensemble de B, Γ, Δ ; par conséquent, l'ensemble de B, Γ, Δ, E, I est aussi la troisième partie du reste A. Dès lors, il est évident que l'ensemble de A, B, Γ, Δ, E, augmenté de I, c'est-à-dire augmenté du tiers de E, vaut les quatre tiers de A (1).



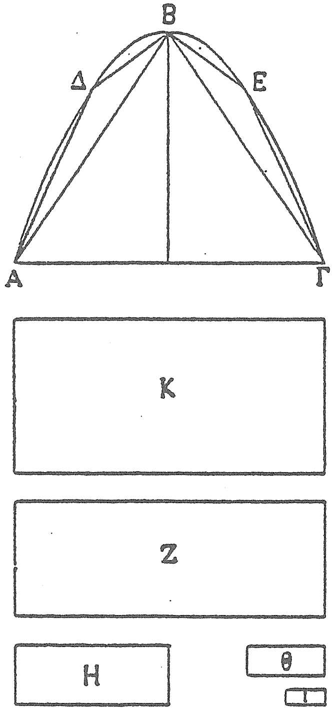
1. Les grandeurs A, B, Γ, Δ, E étant en progression géométrique décroissante dont la raison est $\frac{1}{4}$, on aura : $B = \frac{1}{4}A$. Or, on pose : $Z = \frac{1}{3}B$; donc : $B + Z = (\frac{1}{4} + \frac{1}{12})A = \frac{1}{3}A$. On aura de même : $H + \Gamma = \frac{1}{3}B$, $\Theta + \Delta = \frac{1}{3}\Gamma$, et $I + E = \frac{1}{3}\Delta$; d'où : $B + \Gamma + \Delta + E + Z + H + \Theta + I = \frac{1}{3}(A + B + \Gamma + \Delta)$. Or, on a posé : $Z = \frac{1}{3}B$, $H = \frac{1}{3}\Gamma$, et $\Theta = \frac{1}{3}\Delta$; donc : $Z + H + \Theta = \frac{1}{3}(B + \Gamma + \Delta)$, d'où, substituant dans l'égalité précédente, il vient : $B + \Gamma + \Delta + E + \frac{1}{3}(B + \Gamma + \Delta) + I = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \Gamma + \Delta$, ou $B + \Gamma + \Delta + E + I = \frac{1}{3}A$, d'où, ajoutant A de part et d'autre, et observant que l'on a posé $I = \frac{1}{3}E$, il vient, comme le texte : $A + B + \Gamma + \Delta + E + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}A$.

Algébriquement, la somme d'une progression décroissante par quotient s'obte-

PROPOSITION XXIV

Tout segment délimité par une droite et par une parabole équivaut aux quatre tiers du triangle ayant même base et même hauteur que le segment.

En effet, soit ΑΔΒΕΓ un segment délimité par une droite et par une parabole ; soit ΑΒΓ un triangle ayant même base et même hauteur que le segment, et soit une aire Κ équivalente aux quatre tiers du triangle ΑΒΓ. Il faut démontrer que cette aire est équivalente au segment ΑΔΒΕΓ. En effet, si elle n'est pas équivalente, elle est plus grande ou plus petite. Que le segment ΑΔΒΕΓ soit d'abord plus grand que l'aire Κ, s'il se peut. Dès lors, inscrivons les triangles ΑΔΒ, ΒΕΓ, comme il a été dit (1), et, dans les segments qui restent alentour, inscrivons d'autres triangles ayant même base et même hauteur que ces segments ; enfin, inscrivons, dans les segments successivement obtenus, deux triangles ayant même base et même hauteur que les segments. Il en résulte que les segments abandonnés seront plus petits que l'excédent dont le segment ΑΔΒΕΓ dépasse l'aire Κ (2) ; en



nant en retranchant du premier terme le produit du dernier terme par la raison, et en divisant la différence par l'excès de l'unité sur la raison, on aurait aussitôt : $S = \frac{A - \frac{1}{4}E}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}A - \frac{1}{3}E$, d'où : $S + \frac{1}{3}E = \frac{4}{3}A$.

1. C'est-à-dire, comme il a été dit à la proposition XXI.
2. Voir proposition XX, corollaire.

sorte que le polygone inscrit sera plus grand que l'aire K ; ce qui est impossible. En effet, puisque certaines aires sont disposées dans une série dont la raison est quatre, que le triangle ABΓ est d'abord quadruple des triangles AΔB, BEΓ [1], qu'ensuite ces derniers sont quadruples des triangles inscrits dans les segments suivants, et ainsi continuellement, il est évident que l'ensemble de ces aires est plus petit que les quatre tiers de la plus grande [2]. Or, l'aire K vaut les quatre tiers de la plus grande aire [3] ; par conséquent, le segment AΔBEΓ n'est pas plus grand que l'aire K.

Au reste, qu'il soit plus petit, s'il se peut. Dès lors, disposons une aire Z équivalente au triangle ABΓ, une aire H équivalente au quart de l'aire Z, et, de même, une aire Θ équivalente au quart de l'aire H ; et disposons ainsi successivement des aires jusqu'à l'obtention d'une dernière aire plus petite que l'excédent dont l'aire K dépasse le segment. Soit I cette plus petite aire. Donc, l'ensemble des aires Z, H, Θ, I, augmenté du tiers de l'aire I, vaut les quatre tiers de l'aire Z [4].

Or, l'aire K vaut aussi les quatre tiers de l'aire Z ; par conséquent, l'aire K équivaut à l'ensemble des aires Z, H, Θ, I, augmenté de la troisième partie de l'aire I [5]. Dès lors, puisque l'aire K excède l'ensemble des aires Z, H, Θ, I d'une aire plus petite que l'aire I, et qu'elle excède le segment d'une aire plus grande que l'aire I, il est évident que l'ensemble des aires Z, H, Θ, I est plus grand que le segment ; ce qui est impossible. En effet, il a été démontré que, lorsque des aires en nombre quelconque sont établies dans une série dont la raison est quatre, et que la plus grande est équivalente au triangle inscrit dans le segment, l'ensemble de ces aires sera plus petit que le segment [6]. En conséquence, le segment AΔBEΓ n'est pas plus petit que l'aire K. Or, il a été démontré qu'il n'est pas plus

1. Voir proposition XXI.
2. Voir proposition XXIII et note.
3. Par hypothèse : $K = \frac{4}{3}$ triangle ABΓ, et triangle ABΓ est la plus grande aire.
4. Voir proposition XXIII. On aura : $Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3} I = \frac{4}{3} Z$.
5. On a posé : $K = \frac{4}{3} Z$; donc, en présence de l'égalité de la note précédente, on a, comme le texte : $K = Z + H + \Theta + I + \frac{1}{3} I$.
6. L'égalité de la note précédente donne : $K - (Z + H + \Theta + I) = \frac{1}{3} I < I$. D'autre part, en 2[de] hypothèse, on a : aire $K >$ segt AΔBEΓ, et aire $K -$ segt AΔBEΓ $> I$, d'où, comparant avec la 1[re] inégalité, on a, à fortiori : $K - (Z + H + \Theta + I) < K -$ segment AΔBEΓ, ou, comme le texte : $Z + H + \Theta + I >$ segment AΔBEΓ ; relation impossible. En effet, la proposition XXII a démontré que l'on a : $Z + H + \Theta + I <$ segment AΔBEΓ.

grand ; donc, il est équivalent à l'aire K. Or, l'aire K vaut les quatre tiers du triangle ΑΒΓ ; donc, le segment ΑΔΒΕΓ vaut aussi les quatre tiers du triangle ΑΒΓ.

Travail possible avec les élèves :
. Après avoir défini le vocabulaire suivant :
segment de parabole
sommet
triangle ayant même base et même hauteur que le segment,
on peut avec les élèves découvrir la suite des aires, qui par passage à la limite, permet de trouver le résultat d'Archimède.

LA QUADRATURE DE LA PARABOLE

PAR THABIT-IBN-QURRA

Dans le monde grec, Archimède n'eut pas de successeur véritable.
Ayant à leur disposition une traduction des 3 livres suivants :
Les Elements d'Euclide
La Mesure du cercle et *De la sphère et du cylindre d'Archimède*,
les mathématiciens arabes dominèrent dès le IXe Siècle la méthode d'exhaustion. Mais dans ces livres, ni Archimède, ni Euclide n'avaient recours aux "sommes intégrales". Les mathématiciens Thabit-Ibn-Qurra et Ibn Al-Haytham s'attaquèrent aux mêmes problèmes et introduisirent des méthodes originales, découvrant des résultats inédits, non rencontrés chez Archimède.

Exemple : Thabit-Ibn-Qurra (836-901) dans son traité sur la mesure de la section conique appelée parabole, fait un calcul équivalent à $\sqrt{x}$ dx. Il utilise un procédé qui revient à diviser l'intervalle d'intégration en éléments formant une progression arithmétique. Il retrouve ainsi le résultat démontré par Archimède, en utilisant les sommes intégrales.
(En effet, comme nous l'avons vu, Archimède avait fait apparaître le segment, comme la somme d'une série géométrique infinie dont les sommes partielles sont des aires de certains polygones inscrits).
Le calcul de l'intégrale ci-dessus en subdivisant l'intervalle [0,a] en n parties égales aurait exigé la sommation de la "série"

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}.$$

Thabit-Ibn-Qurra élimine cette difficulté par une idée ingénieuse :
il subdivise l'intervalle en **n parties inégales** telles que les abscisses des points de subdivision soient proportionnelles à la suite des carrés : $1^2, 2^2, 3^2$ et la somme des n parties égales à a.
Ainsi les valeurs de $\sqrt{x}$ deviennent des nombres entiers et le problème se ramène dans un premier temps à la sommation de quelques séries arithmétiques.

Entre autres résultats, il utilisera :

$$\sum_{k-1}^{n}(2k-1)=n^2$$

$$\sum_{k-1}^{n}(2k-1)^2 + \frac{n}{3} = \frac{2}{3}\left[\sum_{k-1}^{n}(2k-1)\right]2n$$

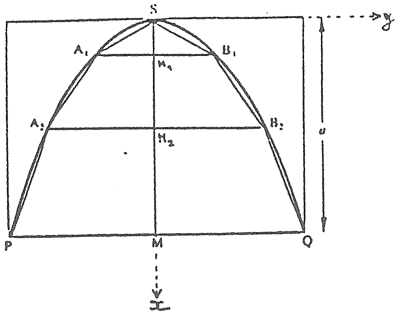
Voici une idée de la démonstration :
Thabit-Ibn-Qurra considère la parabole définie par une propriété correspondant à l'équation $y^2 = px$.
Soit SPMQ le segment de parabole. On divise SM :

"$SH_1 = \frac{a}{n^2}$ $\qquad H_1H_2 = \frac{3a}{n^2}$ $\qquad H_2H_3 = \frac{5a}{n^2}$ etc ...

$$H_{n-1}M = \frac{(2n-1)a}{n^2}$$

puisque $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$

On a posé SM = a



- En notant $f(x) = \sqrt{px}$, les bases des trapèzes sont :

$$A_1B_1 = 2 \times f(\frac{a}{n^2}) = 2\,\frac{\sqrt{ap}}{n}$$

$$A_2B_2 = 2 \times f(\frac{a}{n^2} + \frac{3a}{n^2}) = 4\,\frac{\sqrt{ap}}{n}$$

- L'aire S_n du polygone inscrit dans la parabole peut être évaluée en additionnant l'aire du triangle A_1SB_1 et les aires des trapèzes $A_2A_1B_1\,B_2$,....

$$S_n \quad = \frac{1}{2}A_1B_1 \times SH_1 + \frac{1}{2}(A_1B_1 + A_2B_2)\,H_1H_2 + \ldots$$

$$= \frac{a}{n^2} \times \frac{\sqrt{ap}}{n}\ (1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2)$$

$$= \frac{a}{n^2} \times \frac{\sqrt{ap}}{n} \times \frac{4n^3 - n}{3}$$

par utilisation $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$

- Or l'aire R du rectangle circonscrit à la parabole est :

$R = a \times 2f(a) = a \times 2\sqrt{pa}$ d'où $\frac{2}{3}R - S_n = \frac{a\sqrt{ap}}{3n^2}$, cette différence pouvant être rendue aussi petite que l'on veut.

- par ailleurs l'aire S du segment de parabole est telle que $S - S_n$ puisse être rendue aussi petite que l'on veut.

- Enfin les 2 hypothèses $S > \frac{2}{3} R$ et $S < \frac{2}{3} R$ aboutissent à une contradiction d'où il résulte que $S = \frac{2}{3} R$ (où les $\frac{4}{3}$ de l'aire du triangle SPQ)"[4].

LA QUADRATURE DE L'HYPERBOLE

PAR GREGOIRE DE SAINT-VINCENT

Grégoire de saint-Vincent est né à Bruges le 8 septembre 1584 et est mort à Gand le 27 jnavier 1667. D'abord élève des jésuites, il devient membre de la Compagnie de Jésus en 1613. Il est chargé d'enseigner les mathématiques en raison de ses étonnantes capacités en la matière.De 1617 à 1625 le "bouillant jésuite flamand"[5] s'attaque à un des grands problèmes mathématiques, celui de la quadrature du cercle. Il lui faudra attendre 1647 pour recevoir l'autorisation de publier le résultat de ses recherches, dans un livre de 1226 pages : "Opus geometricum Quadraturae Circuli et Sectionem Coni".[6] Il fait une erreur en s'imaginant avoir résolu l'"impossible" quadrature mais il résout bel et bien la quadrature de l'hyperbole et est l'objet de l'admiration de Leibniz et de Huygens ; on lui doit l'attribution de "méthode d'exhaustion" à la méthode des anciens. Un de ses apports est de généraliser la méthode en plaçant du côté des proportions le double raisonnement par l'absurde, en le rendant indépendant de "la nature des grandeurs en jeu"[7] ; il établit la proposition suivante :

"De deux quantités AB et CD, on peut soustraire AE et CF égales et pas inférieures à la moitié de AB et CD, et des lignes restantes EB et FD on peut soustraire derechef EG et FH, égales et pas inférieures à la moitié des lignes restantes. Si cela peut se faire indéfiniment, les quantités AB et CD seront égales."[8]

---

[4] Découvrir les mathématiques arabes, brochure IREM de rouen, 1988-89, pages 111 et 112.
[5] Bosmans Biographie de l'Ac. des Sciences de Belgique
[6] publié à Anvers
[7] J. Dhombres article à paraître
[8](4) traduction J. Dhombres article à paraître - proposition 116, livre 2 De Progressionnibus de "l'Opus Geometricum"

PROPOSITIO CXVI.

A E G I B

G F H K O D

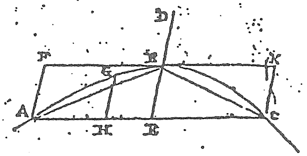
Sint duæ quantitates AB, CD; sitque AB diuisa in E & G, ita vt AE, sit non minor dimidio AB, & EG non minor dimidio EB; eodem modo diuisa sit CD in F & H, sintque AE, EG; CF, FH proportionales: & hoc semper fieri possit.
Dico totam AB esse ad totam CD, vt est AE ad CF.

tiré du livre Problema Austriacum plus Ultra Quadratura circuli de Grégoire de Saint-Vincent

PROPOSITIO CII.

Datæ hyperbolæ terminatæ, triangulum maximum inscribere.

I -
Un segment d'hyperbole étant donné, y inscrire un triangle maximal.



Lisez la proposition C II et expliquez la construction du triangle maximal inscrit dans l'arc d'hyperbole AC.

N.B. Triangle maximal a le sens de triangle d'aire maximun.

II - Lisez ensuite la construction et la démonstration

N.B. . ce que G. de Saint Vincent appelle centre, nous le nommerons plutôt point de rencontre des asymptotes.
. le diamètre correspondant à l'arc d'hyperbole AC est le segment qui joint le centre de l'hyperbole au milieu de la corde [Ac].

Construction et démonstration

Que l'hyperbole dont le centre est D soit limitée par une droite AC ; qu'on la divise en deux [parties égales en E, puis qu'on pose le diamètre DE qui rencontre la section en B. Qu'on joigne AB et BC. Je dis que le triangle ABC est le plus grand de ceux qui peuvent être inscrits dans l'hyperbole ABC. Qu'on trace par B la tangente FB ; elle sera équidistante de la droite AC (proposition 16 de ce livre). Qu'on mène une droite quelconque HG parallèle à BE, rencontrant la section en G. Il est évident que le point G est au-dessous de la ligne FB, et par conséquent que GH est inférieur à BE. D'où il suit que le triangle AGC est inférieur au triangle ABC. Donc le triangle ABC est le triangle maximal. Donc, des hyperboles définies étant données, etc, ce qu'il fallait réaliser.

Que signifie le mot "équidistante" de la ligne 5 ?
Quelle(s) remarque(s) pouvez-vous faire sur les lignes 8, 9 et 10 ?.

III - Lisez l'énoncé de la proposition C III et sa démonstration

N.B. Chez G. de Saint Vincent comme chez les Grecs un parallélogramme est nommé par une de ses diagonales.

PROPOSITIO CIII.

Iisdem positis:
Dico ABC triangulum maius esse dimidio segmenti ABC.

Demonstratio.

Erigantur ex A & C æquidistantes BE, occurrentes FB contingenti in F & K: quoniam igitur tam ABC triangulum, quam FE parallelogrammum duplum est trianguli ABE, æqualia sunt parallelogrammum FE, & triangulum ABC: vnde FC parallelogrammum, duplum est trianguli ABC: sed FC parallelogrammum maius est segmento ABC, (cùm FK contingens tota cadat extra sectionem,) triangulum igitur ABC, dimidium parallelogrammi FC, maius quoque est dimidio segmenti ABC. Quod erat demonstrandum.

Proposition 103 Même figure. Je dis que le triangle ABC est supérieur à la moitié du segment ABC.

Démonstration

On élève de A et C des équidistantes à BE rencontrant la tangente FB en F et K. Puisqu'aussi bien le triangle ABC que le parallélogramme FE sont le double du triangle ABE (Cf. Eléments), le parallélogramme FE et le triangle ABC sont égaux. Il s'ensuit que le parallélogramme FC est le double du triangle ABC ; mais le parallélogramme FC est supérieur au segment ABC puisque la tangente FK se trouve toute entière en dehors de la section. Donc le triangle ABC, moitié du parallélogramme FC est aussi supérieur à la moitié du segment ABC. Cqfd.

a. Que signifie le "segment" ABC ? (ligne 5)
b. En nommant p l'aire du parallélogramme FC, t l'aire du triangle ABC et s l'aire du segment ABC récrivez le raisonnement de G. de Saint Vincent:

IV - Lisez l'énoncé de la proposition C I V

PROPOSITIO CIV.

Hyperbolam ABC, cuius centrum D, subtendat recta AC, diuisa bifariam à diametro D E, iunctisque A B, CB, ac diuisis bifariam in F & G; demittantur D F, D G, occurrentes sectioni in H & I, iunganturque A H, H B, B I, C I.

Dico triangula A H B, B I C, æqualia esse.

Proposition 104 Qu'une droite AC divisée en deux [parties égales par le diamètre DE, sous-tende l'hyperbole ABC dont le centre est D. Qu'on joigne AB et CB en les divisant en deux en F et G. Puis qu'on abaisse DF et DG qui rencontrent la section en H et I, et qu'on joigne AH et HB ; BI et CI. Je dis que les triangles AHB et BIC sont égaux.

a. Réalisez la figure dans un repère orthonormé (D, i, j).
b. Comparez les aires des triangles DBA et OBC à l'aide du précédent travail.
c. Que peut-on dire de la suite formée par les abscisses de H, B et de I ?
Que pouvez-vous en déduire pour les aires des triangles DHB et DBI?.
d. Achevez la démonstration de la proposition C I V

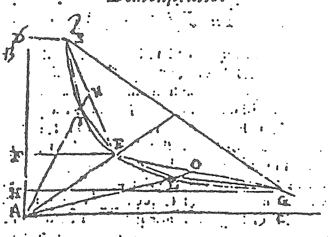
PROPOSITIO CVI.

Sint AB, AC asymptoti hyperbolæ D E G, positaque ad diametrum A E ordinatim D G : ducantur D E, E G.

Dico segmenta conuexa D I E, G L E æquari.

V

Demonstratio.



Diuisis E D, G E bifariam in N & O, ponantur diametri A I N, A L O, iunganturque D I E, G L E : erunt igitur D I E, G L E triangula a maxima, & inter se b æqualia, maioraque dimidijs c segmentorum quibus inscribuntur. similiter si residuis vtrimque segmentis triangula inscribantur maxima, ostendetur triangula maxima segmentorum I D, I E æquari triangulis maximis segmentorum E L, L G; quæ operatio cum sine termino in vtroque segmento continuari possit, vt ablata ex D I E segmento maiora sint dimidijs segmentorum à quibus auferuntur, & æqualia ablatis è segmento G L E, quorum singula maiora quoque sunt dimidijs illorum à quibus auferuntur; segmentum D I E d æquale est segmento G L E. Quod erat demonstrandum.

a 101. huius.
b 105. huius.
c 103. huius.
d 116. de progressionibus.

Proposition 106 Soient AB et AC les asymptotes de l'hyperbole DEG et on pose DG en l'ordonnant au diamètre AE : on mène DE et EG. Je dis que les segments convexes DIE et GLE sont égaux.

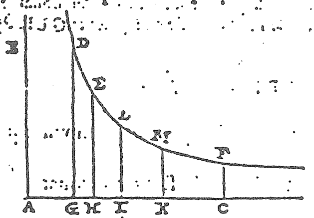
On divise ED et GE en deux [parties égales en N et O. On pose les diamètres AIN et ALO. On joint DIE et GLE. On aura donc les triangles DIE et GLE maximaux (Cf. Proposition 102) et égaux entre eux (Cf Proposition 104), plus grands que les moitiés (Cf proposition 103) des segments dans lesquels ils sont inscrits. De même, si l'on construit les triangles maximaux dans les segments restant de part et d'autre, on voit clairement que les triangles maximaux des segments ID et IE sont égaux aux triangles maximaux des segments EL et LG. Et puisque cette opération peut être continuée indéfiniment dans chacun des deux segments, en sorte que les aires qui sont enlevées au segment DIE sont plus grandes que les moitiés des segments auxquelles elles sont enlevées et égales à celles qui sont enlevées au segment GLE, dont chacune est supérieure aussi aux moitiés des segments auxquelles elles sont enlevés, le segment DIE est égal au segment GLE (Cf Proposition 116 de **progressionibus**). Ce qu'il fallait démontrer.

VI Lisez la proposition C I X

PROPOSITIO CIX.

Sint AB, AC asymptoti hyperbolæ DEF : diuisâque AC, vt AG, AH, AI, AK, AC continuæ sint proportionales, ponantur GD, EH, LI, MK, FC, ipsi AB æquidistantes.

Dico HD, IE, KL, CM segmenta esse æqualia.



Demonstratio.

QVoniam AG, AH, AI, &c. proportionales sunt, DG, EH, LI, &c. eamdem quoque inter se continuant [e] rationem; vnde DH, EI [f] segmenta sunt æqualia. Similiter cùm EH, LI, MK, FC in eadem sint proportione, [g] æqualia quoque sunt segmenta EI, LK, MC. Constat igitur veritas propositionis.

e 78. huius
f 106. huius.
g ibid.

Proposition 109 Soient AB et AC les asymptotes de l'hyperbole DEF. On divise AC de telle façon que AG, AH, AI, AK, AC, soient en proportion continue et l'on pose GD, EH, LI, MK, FC, équidistants de AB. Je dis que HD, IE, KL, CM sont des segments égaux.

Démonstration

Puisque AG, AH, AI, etc ... sont proportionnels, DG, EH, LI, etc, sont entre eux en même raison continue (proposition 78), les segments DH et EI sont égaux (proposition 106). De même puisque EH, LI, MK, FC sont dans la même proportion, les segments EI, LK et MC sont égaux aussi (Proposition 106). La proposition est ainsi démontrée.

VII - 1. Construisez avec soin les points G, H, J, K, C d'abscisses respectives :

$$1, \sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, 9$$

sur l'axe [0x) d'un repère orthormal et D, E, L, M, F les points correspondants de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ dans ce repère.

Utilisez la proposition 109 pour donner une approximation par excès de l'aire curviligne délimitée par l'hyperbole, l'axe [ox) et les droites (DG) et (FC).

2. Pouvez-vous améliorer cette approximation ?

HYPERBOLÆ PARS QVARTA.

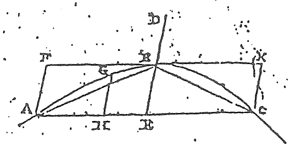
De segmentis hyperbolicis, conuexis & concauis.

PROPOSITIO CII.

Datæ hyperbolæ terminatæ, triangulum maximum inscribere.

Constructio & demonstratio.

Hyperbola ABC, cuius centrum D, terminetur rectâ AC, quâ diuisâ bifariam in E, ponatur diameter DE, occurrens sectioni in B, & iungantur AB, CB, dico triangulum ABC, esse maximum illorum, quæ hyperbolæ ABC inscribi possunt. ponatur per B contingens FB. a æquidistabit illa rectæ AC: ducatur dein quæuis HG, parallela BE, occurrens sectioni in G. patet G punctum esse infra lineam FB, adeoque GH minorem BE. vnde triangulum AGC minus est triangulo ABC: triangulum igitur ABC maximum est. datæ igitur hyperbolæ terminatæ, &c. Quod erat faciendum.



a 1 6. huius.

PROPOSITIO CIII.

Iisdem positis:

Dico ABC triangulum maius esse dimidio segmenti ABC.

Demonstratio.

Erigantur ex A & C æquidistantes BE, occurrentes FB contingenti in F & K: quoniam igitur tam ABC triangulum, quam b FE parallelogrammum duplum est trianguli ABE; æqualia sunt parallelogrammum FE, & triangulum ABC: vnde FC parallelogrammum, duplum est trianguli ABC: sed FC parallelogrammum maius est segmento ABC, (cùm FK contingens tota cadat extra sectionem,) triangulum igitur ABC, dimidium parallelogrammi FC, maius quoque est dimidio segmenti ABC. Quod erat demonstrandum.

b 8 6 Archimedis.

Corollarium.

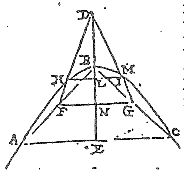
Hinc apparet ratio inscribendi triangulum cuiuis segmento hyperbolico, quod ad maximum triangulum inscriptum, datam habeat rationem minoris inæqualitatis; constituendo scilicet rectam aliquam GH, quæ ad BE, datam rationem obtineat: Si enim ad G deducantur rectæ AG, CG, triangulum AGC ad ABC, est in ratione lineæ GH ad BE: cùm bases sint communes.

PROPOSITIO CIV.

Hyperbolam ABC, cuius centrum D, subtendat recta AC, diuisa bifariam à diametro DE, iunctisque AB, CB, ac diuisis bifariam in F & G; demittantur DF, DG, occurrentes sectioni in H & I, iunganturque AH, HB, BI, CI.

Dico triangula AHB, BIC, æqualia esse.

Demonstratio.



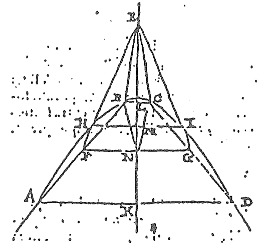
Ponatur ex H ordinatim HL, ad diametrum hyperbolæ DE, occurrens sectioni in M, & DG lineæ in I: quoniam AB, BC in F & G, diuisæ sunt bifariam, FG æquidistabit AC, adeoque & ipsi HI cum HM, & AC ordinatim positæ sint ad diametrum DE: quia verò AC in E diuisa est bifariam, erit & FG in N; adeoque & HM in L bifariam quoque diuisa. Sed & HI in L, bisecta est, quia FG in N bisectæ æquidistat; sunt igitur æquales lineæ HM, HI, & puncta M & I eadem: quare DF, DG diametri in H & M, proportionaliter sunt diuisæ. rursus cùm DFN, DGN triangula, item FBN, GBN æqualia sint; reliqua etiam DFB, DGB triangula inter se æqualia sunt. Vnde cùm DF, DG in H & M, proportionaliter sint diuisæ, æqualia quoque sunt triangula DHB, DIB, adeoque & reliqua FHB, BMG: patet igitur & illorum dupla AHB, BMC triangula, inter se æqualia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CV.

Secent hyperbolam ABC, duæ parallelæ AD, BC, iunganturque AB, CD:

Dico triangula maxima illis inscripta, esse inter se æqualia.

Demonstratio.



Ex centro E ducantur diametri EF, EG, diuidentes rectas AB, CD bifariam in F & G, occurrentes hyperbolæ in H & I, & iungantur AH, HB, CI, ID, erunt hæc triangula a maxima segmentis AHB, CID inscripta. ductâ dein diametro EK, quæ bifariam partiatur rectam AD, ponatur FG, erit illa parallela lineæ AD, cùm AB, DC in F & G, diuisæ sint bifariam, constituæque sint inter parallelas AD, BC. ex H igitur ducatur ordinatim HM ad diametrum EK, ostendetur, vt in priore propositione illam productam occurrere communi intersectioni I: adeoque FG, HI æquidistare, & EF, EG diametros in H & I proportionaliter esse diuisas. Iunctis igitur EB, EC, BN, CN: cùm FG, HI, BC æquidistent, & in L, M, N bifariam sint diuisæ, æqualia sunt triangula FBN, NCG, item NEB, NEC: vnde & reliqua FEB, ECG triangula quoque sunt æqualia:

a 102. huius.

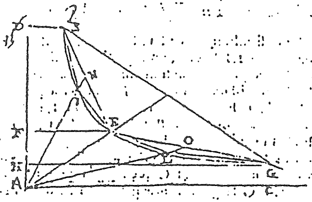
æqualia; quia verò EF, EG in H & I proportionaliter sunt diuisæ, erunt & FHB, CIG; adeoque & illorum dupla AHB, CID triangula inter se æqualia. Quod erat demonstrandum.

PROPOSITIO CVI.

Sint AB, AC asymptoti hyperbolæ DEG, positaque ad diametrum AE ordinatim DG: ducantur DE, EG.

Dico segmenta conuexa DIE, GLE æquari.

Demonstratio.



Diuisis ED, GE bifariam in N & O; ponantur diametri AIN, ALO, iunganturque DIE, GLE: erunt igitur DIE, GLE triangula [a] maxima, & inter se [b] æqualia, maioraque dimidijs [c] segmentorum quibus inscribuntur. similiter si residuis vtrimque segmentis triangula inscribantur maxima, ostenditur triangula maxima segmentorum ID, IE æquari triangulis maximis segmentorum EL, LG; quæ operatio cum sine termino in vtroque segmento continuari possit, vt ablata ex DIE segmento maiora sint dimidijs segmentorum à quibus auferuntur, & æqualia ablatis è segmento GLE, quorum singula maiora quoque sunt dimidijs illorum à quibus auferuntur; segmentum DIE [d] æquale est segmento GLE. Quod erat demonstrandum.

[a] 101. huius.
[b] 103. huius.
[c] 104. huius.
[d] 116. De progressionibus.

PROPOSITIO CVII.

Iisdem positis: ponantur DB, EF, GH asymptotorum vni æquidistantes.

Dico segmenta duo concaua BDFE, GHFE inter se æquari.

Demonstratio.

Quoniam BG ordinatim ponitur ad AE, tres BD, FE, GH proportionales sunt, vnde [e] rectilineum BDFE æquale est rectilineo FEGH. sed per præcedentem, æqualia quoque sunt segmenta conuexa DIE, GLE; residua igitur segmenta BDFE, GHFE inter se æqualia sunt. Quod erat demonstrandum.

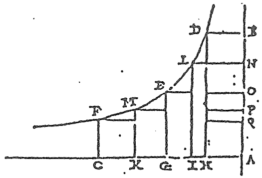
[e] 100. huius.

PROPOSITIO CVIII.

Sint AB, AC asymptoti hyperbolæ DEF, & in continua sint analogia DH, EG, FC asymptoto AB æquidistantes.

Dico segmentum DHGE, æquari segmento EGCF.

Demonstratio.



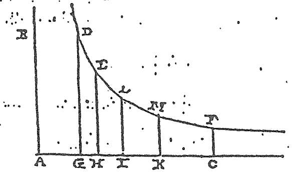
Ponantur LI, MK mediæ proportionales inter HD, EG, FC; ducanturque BD, LN, EO, MP, FQ æquidistantes asymptoto AC: cùm igitur DH, LI, EG, MK, FC eandem continuent rationem, proportionales sunt AH, AI, AG, [a] AK, AC. quia verò HI, IG, GK, &c. differentiæ, sunt in [b] ratione suorum integrorum, vt HI ad IG, sic AI ad AG, id est EG ad LI. quare [c] parallelogramma LH, EI æqualia sunt: similiter quia est GI ad GK, vt MK ad EG, æqualia quoque sunt parallelogramma EI, MG; similiter FK parallelogrammum æquale est parallelogrammo MG, æqualia igitur sunt quatuor parallelogramma LH, EI, MG, FK: igitur duo LH, EI ablata è segmento EGHD, æqualia sunt duobus MG, FK ablatis è segmento FCEG: Rursum si inter DH, LE, EG, item EG, MK, FC, mediæ ponantur proportionales, ostendetur similiter, vt prius, parallelogramma in segmento EGHD, æquari parallelogrammis segmenti FCEG: quod cùm semper fieri possit, sic vt ablata ex DHEG, maiora sint dimidio segmenti DHEG, & æqualia ablatis ex segmento EGFC, quæ maiora quoque sunt dimidio eiusdem segmenti, constat FCEG [d] segmentum æquari segmento EGDH. Quod fuit demonstrandum.

[a] 78. huius.
[b] 1. De progressionibus.
[c] 14. Sexti.
[d] 116. De progressionibus.

PROPOSITIO CIX.

Sint AB, AC asymptoti hyperbolæ DEF: diuisaque AC, vt AG, AH, AI, AK, AC continuæ sint proportionales, ponantur GD, EH, LI, MK, FC, ipsi AB æquidistantes.

Dico HD, IE, KL, CM segmenta esse æqualia.



Demonstratio.

Quoniam AG, AH, AI, &c. proportionales sunt, DG, EH, LI, &c. eandem quoque inter se continuant [e] rationem; vnde DH, EI [f] segmenta sunt æqualia. Similiter cùm EH, LI, MK, FC in eadem sint proportione, [g] æqualia quoque sunt segmenta EI, LK, MC. Constat igitur veritas propositionis.

[e] 78. huius.
[f] 108. huius.
[g] ibid.

UNE QUADRATURE DE JOHN WALLIS

Après l'exposé du travail de Grégoire de Saint-Vincent qui garde l'exigence de rigueur posée par les anciens, nous présentons le travail de John Wallis qui nous surprend par son audace.
John Wallis est né à Ashford en 1616 et mort à Oxford en 1703. Il devient professeur à l'Université d'Oxford en 1649. il publie en 1656 son "Arithmetica infinitorum" d'où est tiré le texte suivant, dans lequel nous pouvons admirer son audacieuse utilisation de l'extrapolation. (voir p. 323).

Nous vous proposons une traduction française :

Proposition 39

Etant donnée une série de quantités qui sont les cubes d'une série de nombres augmentant en proportion arthmétique (comme la série des nombres cubiques), qui commence par un point ou zéro (comme O, 1, 8, 27, 64, ...) nous cherchons la raison de cette série à la série des nombres tous égaux au plus grand terme de la première série, en quantité égale au nombre de termes de la première série.

La recherche se fait par la méthode inductive comme auparavant. Nous avons :

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\frac{2}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4};$$

$$\frac{0+1+8}{8+8+8}=\frac{9}{24}=\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+\frac{1}{8};$$

$$\frac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108}=\frac{4}{12}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12};$$

$$\frac{0+1+8+27+64=100}{64+64+64+64+64=320}=\frac{5}{16}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16};$$

$$\frac{0+1+\ldots+125=225}{125+\ldots+125=750}=\frac{6}{20}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20};$$

$$\frac{0+\ldots+125+216=441}{216+\ldots+216=1512}=\frac{7}{24}=\frac{1}{4}+\frac{1}{24};$$

WALLIS

ARITHMETICA INFINITORUM

Johannis Wallisii, SS. Th. D.
GEOMETRIÆ PROFESSORIS
SAVILIANI in Celeberrimâ
Academia OXONIENSI,

ARITHMETICA INFINITORUM,

SIVE

Nova Methodus Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaq; difficiliora Matheseos Problemata.

OXONII,
Typis LEON: LICHFIELD Academiæ Typographi,
Impensis THO. ROBINSON. *Anno* 1656.

PROP. XXXIX.

Lemma.

SI proponatur series quantitatum in *Triplicata* ratione Arithmetice-proportionalium, (sive juxta seriem numerorum Cubicorum,) continue crescentium, à puncto vel o inchoatarum, (puta ut 0, 1, 8, 27, 64, &c.) propositum sit inquirere quam habeat illa rationem ad seriem totidem maximæ æqualium?

Fiat investigatio per modum inductionis (ut in prop. 1. & 19.) Eritque

$$\frac{0+1=1}{1+1=2}=\tfrac{2}{4}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}. \qquad \frac{0+1+8=9}{8+8+8=24}=\tfrac{3}{8}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8}.$$

$$\frac{0+1+8+27=36}{27+27+27+27=108}=\tfrac{4}{12}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{12}. \qquad \frac{0+1+8+27+64=100}{64+64+64+64+64=320}=\tfrac{5}{16}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{16}.$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125=225}{125+125+125+125+125+125=750}=\tfrac{6}{20}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{20}.$$

$$\frac{0+1+8+27+64+125+216=441}{216+216+216+216+216+216+216=1512}=\tfrac{7}{24}=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{24}.$$

Et sic deinceps.

Ratio proveniens est ubique major quam subquadrupla, seu $\frac{1}{4}$. Excessus autem perpetuo decrescit prout numerus terminorum augetur, puta $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{16}, \frac{1}{20}, \frac{1}{24}$, &c. aucto nimirum fractionis denominatore, sive consequente rationis, in singulis locis, numero quaternario, (ut patet;) ut sit rationis provenientis excessus supra subquadruplam, ea quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum post o. Adeoque ——

PROP. XL.

Theorema.

SI proponatur series quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium (sive juxta seriem numerorum cubicorum) continue crescentium, à puncto vel o inchoatarum; ratio, quam habet illa ad seriem totidem maximæ æqualium, subquadruplam superabit; eritque excessus, ea ratio quam habet unitas ad quadruplum numeri terminorum post o; sive, quam habet radix cubica termini primi post o, ad quadruplum radicis cubicæ termini maximi.

Puta $\frac{l+1}{4}l^3 + \frac{l+1}{4l}l^3$ vel $\frac{m}{4}l^3 + \frac{m}{4l}l^3 = \frac{1}{4}ml^3 + \frac{1}{4}ml^2$.

Patet ex præcedente.

Cum autem, crescente numero terminorum, excessus ille supra rationem subquadruplam ita continuo minuatur, ut tandem quolibet assignabili minor evadat, (ut patet;) si in infinitum procedatur, prorsus evaniturus est. Adeoque ——

PROP. XLI.

Theorema.

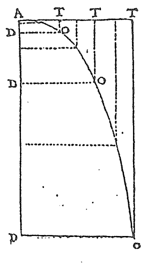
SI proponatur series infinita quantitatum in Triplicata ratione Arithmetice-proportionalium (sive juxta seriem numerorum cubicorum) continue crescentium, à puncto seu o inchoatarum; erit illa ad seriem totidem maximæ æqualium, ut 1, ad 4.

Patet ex præcedente.

PROP. XLII.

Corollarium.

IDeoque, *Complementum semi-paraboloeidis cubicalis, AOT, est ad Parallelogrammum TD (super eadem vel æquali base æque altum,) ut* 1 *ad* 4. (*Et, consequenter, ipsum semiparaboloeides ad idem Parallelogrammum, ut* 3 *ad* 4.)



Esto enim Semiparaboloeidis cubicalis AOD, (cujus diameter AD, ordinatim applicatæ DO, DO, &c.) complementum AOT (cujus diameter AT, ordinatim-applicatæ TO, TO, &c.) Quoniam igitur (per pr. 45. Con. Sect.) rectæ DO, DO, &c. vel ipsis æquales AT, AT, &c. sunt in subtriplicata ratione rectarum AD, AD, &c. vel ipsis æqualium TO, TO, &c. Erunt è contra ipsæ TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Tota igitur figura AOT (constans ex infinitis rectis TO, TO, &c. in triplicata ratione rectarum AT, AT, &c. Arithmetice-proportionalium;) erit ad Parallelogrammum TD, per præced. (constans ex totidem ipsi TO maximæ æqualibus,) ut 1 ad 4. (Quod erat ostendendum.) Et consequenter, Semiparaboloeides AOD (parallelogrammi residuum) ad idem parallelogrammum ut 3 ad 4.

et ainsi de suite.

La raison obtenue est toujours plus grande qu'un quart ou $\frac{1}{4}$. Mais l'excès décroit constamment à mesure que le nombre de termes augmente soit $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{20}$, $\frac{1}{24}$ ... .
Il n'y a aucun doute sur le fait que le dénominateur de la fraction augmente pour chaque rapport d'un multiple de 4 de telle sorte que l'excès de la raison à $\frac{1}{4}$ est 1 : 4 fois le nombre de termes après O,

Puisque les lignes DO, DO etc. ou celles qui leur sont égales AT, AT, etc. sont les racines cubiques de AD, AD, ... ou celles qui leur sont égales TO, TO, ... ces TO, TO seront les cubes des lignes AT, AT, ... Par conséquent la figure entière AOT (constituée d'un nombre infini de lignes TO, TO, ... qui sont les cubes des lignes en progression arithmétique At, AT, ...) sera au parallélogramme ATD (constitue d'autant de lignes toutes égales à la plus grande TO), comme 1 est à 4, selon notre précédent théorème. Et la moitié du segment AOD de la parabole (le résidu du parallélogramme) est au parallélogramme comme 3 est à 4.

ISAAC NEWTON ET LES QUADRATURES

Isaac Newton est né à Woolsthorpe en Angleterre en 1642 et est mort à Londres en 1727.
Etudiant à Cambridge, il lit les oeuvres de Descartes, de Galilée et aussi "l'Arithmetica Infinitorum" de Wallis.
La peste qui sévit à Londres l'oblige en 1665 à se retirer à la campagne où il écrit les principes de sa théorie. Ses "Principia mathematica philosophiae naturalis" sont publiés en 1687 et ont une grande audience. Newton y rejette les indivisibles utilisés par Wallis et généralise le calcul d'aires curvilignes par "la méthode des premières et dernières raisons" qu'il met en place à l'aide des lemmes 1 et 2 du livre I du mouvement des corps, première partie des "Principia". Les élèves de Terminale ont eu à lire ces deux lemmes après avoir réalisé, dans l'exercice qui suit, une quadrature de la parabole.

PRINCIPES
MATHÉMATIQUES
DE LA
PHILOSOPHIE NATURELLE,

Par feue Madame la Marquise DU CHASTELLET.

TOME PREMIER.

A PARIS,
Chez { DESAINT & SAILLANT, rue S. Jean de Beauvais,
LAMBERT, Imprimeur-Libraire, rue & à côté
de la Comédie Françoise, au Parnasse.

M. D.CCLIX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILÉGE DU ROI.

DU MOUVEMENT DES CORPS.

LIVRE PREMIER.

SECTION PREMIERE.

De la méthode des premieres & dernieres raisons employée dans tout cet Ouvrage.

LEMME PREMIER.

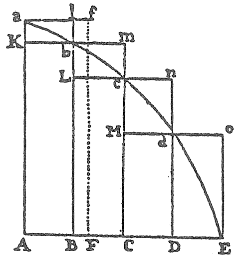
Les quantités & les raisons des quantités qui tendent continuellement à devenir égales pendant un temps fini, & qui avant la fin de ce temps approchent tellement de l'égalité, que leur différence est plus petite qu'aucune différence donnée, deviennent à la fin égales.

Si on le nie, qu'on suppose qu'elles soient à la fin inégales, & que leur derniere différence soit *D*, puisqu'elles ne peuvent pas approcher plus près de l'égalité que de cette différence donnée *D*, leur différence ne sera donc pas plus petite que toute différence donnée, ce qui est contre l'hypothése.

LEMME II.

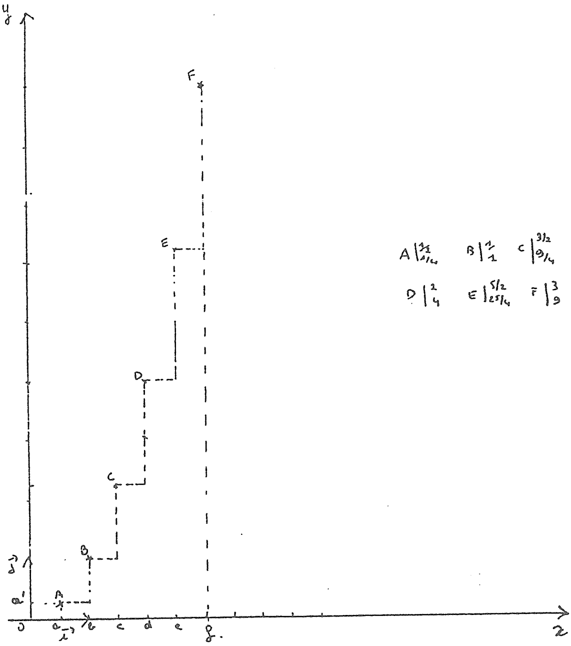
Si dans une figure quelconque AacE, *comprise entre les droites* Aa, AE, *& la courbe* acE, *on inscrit un nombre quelconque de Parallélogrammes* Ab, Bc, Cd, *&c. compris sous les bases égales* AB, BC, CD, *&c. & sous les côtés* Bb, Cc, Dd, *&c. parallèles au côté* Aa *de la figure ; & qu'on achève les parallélogrammes* akbl, bLcm, cMdn, *&c. qu'on diminue ensuite la largeur de ces parallélogrammes, & qu'on augmente leur nombre à l'infini : les dernieres raisons qu'auront entr'elles la figure inscrite* AKbLcMdD, *la circonscrite* AalbmcndoE, *& la curviligne* AabcdE, *seront des raisons d'égalité.*

Car la différence de la figure inscrite & de la figure circonscrite, est la somme des parallélogrammes *Kl*, *Lm*, *Mn*, *Do*, c'est-à-dire (à cause de l'égalité de toutes les bases) que cette différence est égale au rectangle *ABla* fait sur l'une des bases *Kb* & sur la somme *Aa*, de toutes les hauteurs ; mais ce rectangle, à cause que sa largeur diminue à l'infini, deviendra plus petit qu'aucun rectangle donné. Donc (par le Lemme premier) la figure inscrite, la figure circonscrite, & à plus forte raison la figure curviligne intermédiaire seront à la fin égales. *C. Q. F. D.*



Lemmes II et III

Travail avec les TA_1



1. Calculez les aires des rectangles de diagonales respectives AC, Bc, Cd, De, Ef puis l'aire S_1 délimitée par la ligne brisée AF (en pointillé sur le dessin) et les droites (Aa) (af) et (fF).

2. Placez A', B', C', D', E' tels que A', B', C', D', E' aient même abscisses respectives que A, B, C, D, E et pour ordonnées respectives celles de B, C, D, E, F.

Calculez les aires des rectangles A'C, B'c, c'd, D'e, E'f puis l'aire S_2 somme de ces rectangles.

3. A quelle courbe appartiennent les points A, B, C, D, E, F ? Tracez la, pour les points d'abscisses positives. Soit S l'aire délimitée par cette courbe, l'axe (x'x) et la droite (fF). Donnez un encadrement de S.

4. Un intervalle [o, a] de [o,x) est divisé en n parties égales.
Calculez l'aire de la somme S_1 des rectangles situés sous la parabole puis l'aire de la somme S_2 des rectangles qui la surplombent (en utilisant les résultats sur la somme des carrés des n premiers entiers). Donnez un encadrement de l'aire comprise entre la parabole, (x'x) et la parallèle à (y'y) d'équation x = a.

5. Que devient l'encadrement si n devient de plus en plus grand jusqu'à tendre vers l'infini ?.

6. Quelle est la dérivée de $\frac{x^3}{3}$?. magic ?