STRUCTURES GEOMETRIQUES, NIVEAUX D'ANALYSE ET THEOREMES DE COMPARAISON

Gilles FERREOL
Université de Lille I

Après avoir recensé les principales acceptions du terme **géométrie,** nous privilégierons trois niveaux d'analyse (infinitésimal, local, global). A chacun d'entre eux correspond une métrique particulière. Les possibilités d'emboitement posent cependant problème et nécessitent un examen attentif. Le recours aux "théorèmes de comparaison" nous renseignera, à cet effet, sur la nature et les caractéristiques des différentes procédures d'agrégation (recollement, déformation ...). Quelques considérations d'ordre méthodologique clôtureront cet exposé.

I - Qu'est-ce qu'une géométrie ?

Etymologiquement, la géométrie est la science des mesures terrestres ; issue des réflexions des arpenteurs, elle est inséparable de l'idée de nombre (D. Lehmann et R. Bkouche, 1988). Au cours de la seconde moitié du XIX ème siècle, la notion de **groupe** est formulée de manière précise (cf. le programme d'Erlangen) et l'on s'aperçoit que les théorèmes de géométrie ne sont que les formulations en un autre langage de théorèmes d'une théorie plus générale : l'algèbre linéaire. Dès lors, le sens donné au mot "géométrie" est le suivant : étude d'un ensemble et des propriétés invariantes par certaines transformations portant sur cet ensemble. Plusieurs modalités : descriptive, analytique, différentielle... (M. Berger, 1977).

Se donner une géométrie, c'est donc se donner un **espace a priori amorphe** (l'ensemble des points) et une certaine **structure** correspondant à une modélisation spécifique : "données de droites", "espaces de longueurs", "métrique", "groupe d'invariance" (S. Gallot, 1989)

1/ Le point de vue "données de droites"

Quelle soit euclidienne, hyperbolique ou sphérique, une géométrie se définit tout d'abord par la donnée d'un système d'axiomes que doivent vérifier un espace E abstrait (ou "ensemble des points") et un ensemble de parties de E appelées "droites" (ou "grands cercles" dans la perspective elliptique). Chaque formalisation représente une version particulière de l'axiome d'Euclide et donne lieu à de multiples configurations (J. Favard, 1957).

2/ Le point de vue "espace de longueurs"

Un espace de longueurs, rappelons-le, est un espace où la distance entre deux points coïncide avec la longueur du plus court chemin qui les joint. On peut ainsi montrer que si deux espaces ont même géométrie au sens "espaces de longueurs", ils ont également même géométrie au sens "données de droites" : l'image d'une géodésique par une déformation isométrique reste une géodésique (la réciproque étant le plus souvent fausse).

3/ Le point de vue "métrique"

L'espace de référence est l'espace tangent, et la métrique (en tant que structure) peut être envisagée de manière intrinsèque ou extrinsèque. Avantage : des distances usuelles (euclidiennes, par exemple) permettent d'obtenir des géométries plus complexes. On se réfère alors à des mesures locales (calculs infinitésimaux).

4/ Le point de vue "groupe d'invariance"

Une illustration : le groupe d'invariance de la géométrie lobatchevskienne est l'ensemble des transformations de l'espace tridimensionnel préservant la métrique de Lorentz (métrique pour laquelle le carré de la "distance" entre deux points est obtenue par la formule : $x^2_1 + x^2_2 - x^2_3$, où x_1 et x_2 sont les composantes horizontales et x_3 la composante verticale du segment joignant ces deux points). On procède, plus généralement, par déformations, translations, rotations... Elargissement possible à travers des "repères" ou des "systèmes d'axes" (P. Malliavin, 1972).

Récapitulons toutes ces approches à travers le tableau ci-dessous :

Point de vue adopté	Définition associée
Données des droites de l'espace	Données d'un système d'axiomes que doivent vérifier un espace E abstrait et un ensemble de parties de E appelées "droites"
Espace de longueurs	Espace où la distance entre deux points coïncide avec la longueur du plus court chemin qui les joint
Métrique	Espace tangent
Invariance	Groupe des transformations qui laissent globalement invariant l'espace considéré (les distances entre points étant conservées)

Selon la position retenue, les phénomènes physiques seront interprétés différemment.

II. Niveaux d'analyse et théorèmes de classification

Trois niveaux doivent être distingués : infinitésimal, local, global. La prise en compte du couple espace/distance s'avère primordiale. Les résultats obtenus font l'objet de "théorèmes de comparaison". Quelques compléments nous sont ici nécessaires (M. Spivak, 1970) :

- Les espaces de longueurs dont la géométrie infinitésimale est une géométrie euclidienne définissent des **variétés riemanniennes** ;
- L'écart entre géométrie infinitésimale et géométrie locale peut être appréhendé à travers la notion de **courbure** ;

- Soit un point x_0 . Le rayon du plus grand disque centré en ce point est appelé **rayon d'injectivité** si les géodésiques qui lui sont associées ne se recoupent pas ;

- La distance d_0 est de **courbure nulle** lorsque les cercles de maillage sont de longueur égale au rayon multiplié par 2π . Pour obtenir la métrique de **courbure constante** K, on ne modifie pas la longueur des rayons, mais on rétrécit (resp. on allonge) de manière régulière les cercles correspondants lorsque K est positif (resp. négatif).

- **Le point de vue local** est beaucoup plus riche que **le point de vue infinitésimal** mais nous est accessible que par comparaison avec ce dernier.

- Deux espaces ont même **topologie** si on peut les déformer continûment l'un sur l'autre. L'espace de la géométrie globale étant obtenue par recollement de disques déformés, sa forme dépend de la manière dont sont faits ces recollements (travaux de Weyl, Cartan ou Whitney). Plusieurs configurations sont donc admissibles (cf. les espaces de Teichmüller étudiés par Thurston). Cas particulier (propriétés d'isométrie) mis en évidence par Mostow pour les courbures K = -1.

La question est alors la suivante : à quelles conditions peut-on (avec une erreur fixée **a priori**) comparer une géométrie globale à un nombre fini de modèles de référence ? (Centre belge de recherches mathématiques, 1959). Dès l'instant où l'on raisonne en termes de graphes (et donc de sommets et d'arêtes), le problème est d'ordre combinatoire. Comme l'ont notamment montré Cheeger et Ebin, en fixant des bornes à la dimension, à la courbure (Berger/Klingenberg), au diamètre (Gromov) et à la petitesse du rayon d'injectivité, on ne conserve qu'un nombre fini de types géométriques (Cheeger et Ebin, 1975). La théorie des caustiques en optique ondulatoire répond aux mêmes préoccupations : dans une perspective hamiltonienne, toute tentative de "géométrisation" se réduit à l'examen des contours apparents de variétés lagrangiennes, dont les singularités structurellement stables ne sont rien d'autre que des catastrophes élémentaires de codimension inférieure ou égale à trois, issues du théorème de classification de Thom (J. Petitot, 1978).

III. Examen critique de l'opérateur de globalisation

Du local au global, l'inférence n'est jamais assurée mais toujours problématique. Illustrons cette dernière proposition en prenant appui sur certaines contributions de M. Serres :

-L'éthique du **Jardin** (qui se veut, pour l'essentiel, une éthique de la localité) ne se laisse pas facilement prolonger ou globaliser par cet ouvert sur le monde que constitue le **Portique** du sage stoïcien ;

-Dès la naissance des temps modernes, néanmoins, tout s'est passé comme si cette question fondamentale d'inférence avait déjà été résolue, et résolue par l'affirmative, sans jamais toutefois avoir été véritablement thématisée ; la mathématique du 18ème siècle est, à cet égard, une mathématique de séries, où le principe de calcul intégral présuppose un passage toujours possible du local au global. Que ce soit sous la forme de réseaux leibniziens, de lois unitaires ou de chaînes cartésiennes, l'ordre des raisons s'est toujours présenté comme un **opérateur de globalisation** prolongeant à la totalité son empire départemental. L'espace, le temps ou le monde sont alors considérés comme suffisamment homogènes ou isotropes pour modeler une forme globale du savoir par intégration sur un cycle de localités singulières;

-Le projet encyclopédique ne va cependant pas de soi ; la méthode est en effet un chemin à obstacles et catastrophes, où le "ici" et le "maintenant" ne sont pas forcément porteurs de toutes les potentialités créatrices. Le prolongement dialectique connaît par suite des déchirements locaux, et l'histoire elle-même n'est plus ce discours unitaire du rassemblement ou de la linéarité. Le cadre général de la mécanique des solides cède ainsi la place à une "canonique de la fluence";

-Cette substitution a été décrite par M. Serres : "Il était une fois l'âge d'or. Où et quand, je l'ignore. Après lui, dit-on, vinrent l'âge de bronze et le siècle de fer. Mythes et histoires, toujours des métaux. Des métaux ou bien de la pierre : polie, taillée, néolithique ou paléolithique. Nous ne savons parler que des solides, nous ne savons écrire que sur des solides. Pourquoi ? En raison de leur ordre et de leur liaison. Cohésion, rigueur et rigidité, la molécule cristalline est ici la même, à peu près, que celle de là-bas ; elle prolonge son identité, sa monotonie, sous contrainte forte. Ainsi écrit-on l'histoire où le local revient au global sous la répétition d'une loi homogène. Le discours n'est pas différent de la manière dure sur quoi il est écrit. Voici maintenant les eaux, cataractes et flux, fleuves et turbulences de la physique épicurienne.

Le local, cette fois, roule sa viscosité faible, sans affecter beaucoup le volume global. Les contrariétés s'évanouissent non loin de son voisinage. Il y a, comme on dit, bien des degrés de liberté. Le tourbillon se forme et se défait dans l'incertitude, mais partout ailleurs la plaine est tranquille, selon et selon. Espace ensemencé de circonstances. Inventer l'histoire liquide et les "âges d'eaux" (M. Serres, 1977, p. 237).

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

BERGER M. (1977), **Cours de géométrie** (5 volumes), Paris, Cedic-Nathan.

CENTRE BELGE DE RECHERCHES MATHEMATIQUES (1959), **Colloque de géométrie différentielle globale** (Bruxelles, 19-22 décembre 1958), Paris/Louvain, Gauthier-Villars/ Librairie Universitaire.

CHEEGER J., EBIN D. (1975), **Comparisons theorems in Riemannian geometry**, Amsterdam, North-Holland.

FAVARD J. (1957), **Cours de géométrie différentielle locale**, Paris, Gauthier-Villars.

GALLOT S. (1989), "Géométries", in **Encyclopédie philosophique universelle**. I : L'univers philosophique (volume dirigé par A. Jacob), Paris, P.U.F., pp. 996-1026.

LEHMANN D. et BKOUCHE R. (1988), **Initiation à la géométrie**, Paris, P.U.F.

MALLIAVIN P. (1972), **Géométrie différentielle intrinsèque**, Paris, Hermann.

PETITOT J. (1978), "Caustique et catastrophes", **Mathématiques et sciences humaines**, n°64, pp. 9-26.

SERRES M. (1977), **La naissance de la physique dans le texte de Lucrèce. Fleuves et turbulences**, Paris, Minuit.

SPIVAK M. (1970), **A comprehensive introduction to differential geometry** (5 vols), Waltham (Mass.), Publish or Perish Press.