Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

UN STAGE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES POUR LA FORMATION CONTINUE DES ENSEIGNANTS DU SECONDAIRE

Michèle GRÉGOIRE
Maryvonne HALLEZ
IREM de Paris VII

1. Présentation.

L'objectif principal du groupe M: A.T.H. (IREM, Paris-7) est de promouvoir l'étude de textes marquants de l'histoire des mathématiques par les professeurs et les élèves du secondaire. Entre autres activités, nous organisons depuis 1984 dans le cadre de la formation continue des stages d'initiation à certains aspects de l'histoire des mathématiques. Nous y présentons des activités consacrées à l'étude de textes, organisées sous forme de séance d'enseignement qui s'intègrent dans le programme, et nous incitons les stagiaires à les expérimenter dans leurs classes. C'est ainsi que s'amorce une initiation à l'histoire des mathématiques. Nous sommes convaincues que, par le biais de cette pratique pédagogique, les professeurs du secondaire, qui n'ont eu que très peu de contact avec l'histoire des mathématiques dans leur formation initiale et qui ont peu de disponibilités pour entreprendre une formation de type universitaire, peuvent s'initier à cette disicpline en même temps (ou presque) que leurs élèves, et mesurer l'intérêt d'une perspective historique dans l'enseignement secondaire des maths.

Le groupe M: A.T.H. (Mathématiques: Approche par les Textes Historiques) est composé de Martine Bühler, Michèle Grégoire, Maryvonne Hallez, Marie-Françoise Jozeau et Catherine Perrineau; il reçoit également la contribution et le soutien important de Jean-Luc Verley (Université de Paris-7).

Nous reprenons, dans cet article, les quatre composantes de l'atelier que nous avons animé durant l'université d'été de La Rochelle:
- le commentaire d'une fiche de travail proposée à des élèves de première: elle porte sur un problème de Diophante "Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit".
- le descriptif du déroulement d'un stage de formation continue.
- la présentation d'un atelier consacré à l'interprétation géométrique des opérations de l'arithmétique par Descartes.
- un exemple d'étude de texte: un extrait du *De quadratura curvarum* de Newton et la discussion sur son utilisation pédagogique.

2. Un exemple de fiche de travail.

Nous présentons d'abord un exemple de fiche de travail élaborée à partir d'un problème court et simple des *Arithmétiques* de Diophante: "Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit" (Livre I. Problème XXVII, trad. P. Ver Eecke, 1926).

La lecture d'un texte ancien étant presque toujours un exercice ardu pour nos élèves, nous la faisons précéder d'une grille d'exercices préparatoires permettant de résoudre les difficultés proprement mathématiques du texte, de rendre plus familier le vocabulaire et les notations de l'époque et, autant que possible, de mettre en évidence l'intérêt de celui-ci. La lecture et l'étude du texte sont souvent suivies de questions permettant de vérifier ce que l'élève a compris ou appris du texte ou d'élargir le point de vue développé.

La fiche ci-dessous s'adresse à des élèves de 1ère S, mais elle peut être adaptée pour des élèves de 1ère ou terminale A, pour des élèves de seconde, et même de 3ème, comme un exemple de résolution de système d'équations. Elle est accompagnée d'une notice historique et d'un commentaire pédagogique qui ne sont pas reproduits ici; ils sont disponibles dans la brochure M: A.T.H. n° 2 de l'IREM Paris-7 (à paraître à l'automne 1989); on trouvera dans M: A.T.H. (brochure n° 61 de l'IREM Paris-7) d'autres exemples de fiches. Les notices historiques présentent la vie et l'oeuvre du mathématicien étudié, l'état des connaissances de l'époque, ce qui permet au professeur de mieux situer le texte. Le commentaire pédagogique décrit l'expérimentation, ses prérequis et les objectifs qu'elle cherche à atteindre. Ces fiches sont conçues comme des séances de T.P. d'application, à préparer éventuellement en partie à la maison, ou de T.P. d'introduction à l'étude d'une notion; elles peuvent aussi constituer l'énoncé d'un problème.

TROUVER DEUX NOMBRES CONNAISSANT
LEUR SOMME ET LEUR PRODUIT

I . Soit S et D deux nombres réels donnés. Montrer qu'il existe un couple unique (u , v) de réels tels que $u + v = S$ et $u - v = D$.

II . Lire le texte ci-après.

Notes :

(α) "excédent des nombres" : différence entre le plus grand et le plus petit des 2 nombres.

(β) "arithme" : du grec αριθμοσ , arithmos, nombre. C'est le terme choisi par le traducteur de Diophante pour désigner l'inconnue du problème, égale à la demi-différence des deux nombres cherchés.

1) Traduire la suite des calculs et les résultats obtenus dans ce texte, en utilisant les notations symboliques modernes ; on désignera par u et v les deux nombres cherchés (avec $u \geq v$) et par x l'arithme.
2) En suivant les calculs de Diophante , vous avez posé $u = 10 + x$ et $v = 10 - x$. Expliquez à l'aide des lignes 10 à 17 comment justifier ce changement d'inconnue.
3) Résoudre, par la méthode exposée par Diophante, les problèmes suivants

P_1 : Trouver deux nombres tels que la somme forme 13 unités et le produit 40 unités.
P_2 : Trouver deux nombres tels que la somme forme 12 unités et le produit 40 unités.

III . Diophante ne s'intéresse qu'aux nombres rationnels positifs. Nous nous proposons de montrer, dans cette partie, que la méthode exposée par Diophante peut s'appliquer en général à la résolution dans R^2 d'un système (S).

$$(S) \quad \begin{cases} u + v = S \\ uv = P \end{cases}$$

S et P désignant des réels quelconques vérifiant seulement une condition (C) qu'on précisera.

$u \geq v$

1) Résoudre le système ($\mathbb{S}$) à l'aide de la méthode utilisée plus haut, et énoncer la condition (C) nécessaire pour que le système ($\mathbb{S}$) ait une solution. Comment cette conditon est-elle exprimée par Diophante, qui ne considère que des rationnels positifs?
Comparez avec les résultats trouvés par la méthode du cours.

2) (Pour les élèves ayant étudié les expressions de la somme et du produit des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$)
Comment ramener l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b , c réels donnés ; $a \neq 0$) à celle d'un système du type ($\mathbb{S}$) ? Résoudre alors le système ; comparer avec les formules du cours.

DIOPHANTE D'ALEXANDRE
XXVII

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés. Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres.(...)
Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités.
Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes. En conséquence, posons que le plus grand nombre est 1 arithme augmenté des 10 unités qui sont la moitié de la somme des nombres ; donc le plus petit nombre sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes.
Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est 100 unités moins 1 carré d'arithme ; ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités. En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités, le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont à la proposition.

Les Arithmétiques - Livre I - Traduction P. Ver Eecke 1926

Commentaires sur l'activité proposée:

Cette activité n'est pas difficile dans une classe de $1^{ère}$ S et s'intègre tout à fait dans le programme.
Ce texte est intéressant à plusieurs titres:
- Diophante y explicite un peu sa démarche heuristique en expliquant pourquoi et comment il définit ce que nous appelons deux inconnues auxilaires.
- les élèves sont généralement surpris qu'on puisse résoudre des équations sans désigner l'inconnue par une lettre, qu'on ait pu faire des calculs et écrire des identités remarquables sans signe d'opération. Ils comprennent alors mieux la fonction du symbolisme.
- avec la présentation de cette résolution des équations du second degré, les élèves mettent en perspective la technique de résolution qu'ils ont apprise en cours et qu'ils appliquent vite machinalement.

- on peut signaler que les Babyloniens, dès le 2° millénaire avant J.C., résolvaient déjà des équations du second degré, à l'aide de méthodes de ce genre. Diophante franchit ici une nouvelle étape en proposant un problème général,bien qu'il ne le résolve que dans un cas numérique particulier.

Ce texte, comme tous, suscite des questions de la part des élèves. Ils ont, par exemple, demandé comment Diophante pouvait connaître ce qui est pour nous la formule $(10 + x)(10 - x) = 100 - x^2$. On peut présenter les démonstrations géométriques des identités remarquables qu'on trouve dans les *Eléments* d'Euclide. Il est intéressant aussi de présenter les résolutions géométriques des équations du second degré euclidiennes ou arabes. Comme à l'occasion de l'étude de tout texte historique, les mathématiques n'apparaissent plus comme un discours figé et immuable.

3. Description du contenu des stages de formation.

Les stages se déroulent sur quatre journées, cinq dès l'année prochaine (les enseignants bénéficiant de cinq journées au maximum par an d'autorisation d'absence pour leur formation).
- deux journées consécutives en octobre pour initier rapidement les stagiaires à nos méthodes de travail et leur faire connaître la brochure M: A.T.H. n° 61 de l' IREM PARIS-7. Nous leur demandons d'y choisir au moins une activité à expérimenter avec leurs élèves et d'en prévoir un rapide compte-rendu pour une séance suivante.
-- une journée en décembre ou janvier,
-- une journée en mars ou avril.
Ces deux dernières journées permettent un suivi des expérimentations des stagiaires et de répondre à leurs demandes au fur et à mesure.

En séance pleinière, nous proposons généralement trois exposés sur l'année, souvent pris en charge par Jean-Luc Verley ou un conférencier invité. Voici quelques uns des sujets traités:
- L'histoire du zéro et des nombres négatifs.
- Présentation des *Eléments de géométrie* d'Euclide
- Les géométries non-euclidiennes.
- L'histoire de la roulette (un parcours à travers les débuts du calcul différentiel au XVIIème siècle).
- L'histoire des logarithmes
- L'histoire des nombres complexes

Nous faisons une présentation commentée d'une chronologie générale des mathématiques et d'une bibliographie d'ouvrages d'initiation à l'histoire et à l'épistémologie, ains que des textes anciens accessibles en réédition ou que nous avons à notre disposition. Cette séance a lieu à la bibliothèque de l'IREM qui possède certaines rééditions ou à l'institut H. Poincaré où la bibliothèque nous a aimablement confié quelques ouvrages en consultation. C'est souvent la première occasion pour les stagiaires d'avoir en main des ouvrages anciens ou originaux.
Il nous est arrivé également de projeter un film vidéo, de présenter une exposition issue d'un PAE à caractère historique, etc. Nous organisons, de plus, une visite de la médiathèque spécialisée de la Cité des Sciences et des Techniques de la Villette et de son fond ancien.
Le nombre des stagiaires, recrutés sur les trois académies de Paris, Créteil et Versailles, varie entre 30 et 45; il nous faut souvent dédoubler le stage et refuser des candidatures. Le fonctionnement et les échanges sont optimaux avec un groupe d'une trentaine de personnes, groupe que nous divisons en général en trois sous-groupes pour les ateliers, ce qui n'est possible évidemment que grâce à un véritable travail d'équipe des animatrices.

L'essentiel du stage est le travail en atelier. Les stagiaires ont le choix entre trois ateliers, ils en suivent 5 au cours du stage. Chaque atelier est consacré à un thème. Il est introduit par un exposé sur le contexte historique et épistémologique du sujet traité.
Le contenu d'un atelier est décrit à titre d'exemple dans la partie 4.
Les principaux ateliers proposés et les niveaux concernés sont les suivants:
- la quadrature du cercle et le volume du cylindre d'après *La divine proportion* de Pacioli ($5^{ème}$)
- les théorèmes de Thalès et de Pythagore d'après les *Eléments* d'Euclide ($4^{ème}$, $3^{ème}$)
- les constructions géométriques élémentaires d'après Euclide et Legendre ($6^{ème}$, $5^{ème}$)
- le planétarium de Huygens (collège)
- les triplets pythagoriciens d'après Diophante ($3^{ème}$)
- *La mesure du cercle* d'Archimède ($3^{ème}$ et terminale)
- les nombres figurés dans l'école pythagoricienne (Nicomaque de Gerase, Theon de Smyrne) (collège ou Terminale A)
- résolution des équations du second degré par les méthodes grecques (Euclide) et arabes (Al Khwarizmi) ($2^{ème}$, $1^{ère}$)
- nombre d'or et pentagone d'après Euclide et Legendre (lycée)
- la résolution des équations du second et du $3^{ème}$ degré par Descartes (lycée)
- recherche d' extremum d'après Fermat et Huygens ($1^{ère}$)
- approximations de racines carrées d'après Euler, Théon de Smyrne, Héron d'Alexandrie, Bombelli ($1^{ère}$ et terminale)
- l'introduction des logarithmes d'après Ozanam (terminales)
- l'histoire des nombres complexes d'après Argand et Tartaglia (terminales)
- le problème des partis de Pacioli à Pascal et Fermat (terminales)
- le calcul du volume de la pyramide d'après les *Eléments de Géométrie* de Legendre ($1^{ère}$)
- la trisection de l'angle d'après Descartes (terminales)

etc...

Le dernier aspect des activités proposées consiste à proposer aux stagiaires des extraits de texte qui nous ont semblé intéressants et qui sont peut-être utilisables en classe, mais que nous n'avons pas encore passé dans notre "moulinette pédagogique". Nous décrivons ce type de travail dans la dernière partie (5).

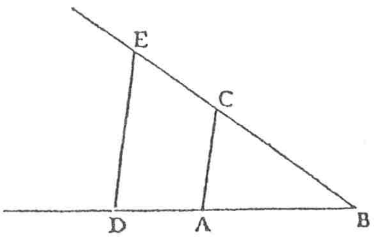
Les stagiaires lisent et étudient le texte en petit groupe; ils discutent des utilisations possibles et certains réussissent à élaborer, dans les semaines qui suivent, une séance de travail ou un problème. Un compte-rendu éventuellement écrit en est fait lors d'une séance suivante.
Nous rassemblons ainsi un certain nombre de nouvelles propositions qui fournissent matière à un petit recueil que nous envoyons en fin d'année à chaque stagiaire et qui enrichit notre recherche de nouvelles pistes.
Il arrive que les stagiaires travaillent à plusieurs sur ces projets ou qu'ils contactent l'une des animatrices pour que nous les aidions à élaborer leur projet; parfois même, nous allons les aider à réaliser l'expérience dans leur classe. Ce suivi est parfois un peu lourd pour nous, il implique un échange de documents, de courrier, de coups de téléphone important, mais il est l'aspect le plus dynamisant de l'entreprise. Cette collaboration incite, chaque année, quelques stagiaires à participer à notre séminaire de travail qui a lieu tous les mois.

Nous présentons dans les deux dernières parties le compte-rendu des deux groupes de travail animés l'un par Maryvonne Hallez et l'autre par Michèle Grégoire.

4. Un exemple d'atelier.

L'atelier proposé à un groupe porte sur l'utilisation d'extraits de *La Géométrie* de Descartes dans une classe de troisième. Ces extraits présentent une construction géométrique des résultats des quatre opérations et de l'extraction de la racine carrée.
L'atelier débute par une présentation de la *Géométrie*, une brève biographie de Descartes, un exposé de son travail mathématique ainsi qu'une petite bibliographie. On trouvera cette présentation dans la brochure à paraître M: A. T. H. n° 2. On peut envisager de ne donner ces indications qu'après l'étude des textes. Nous exposons ensuite les objectifs du livre 1 de *La Géométrie* dont sont extraits les textes donnés aux élèves.
La première fiche de travail concerne les quatre opérations; en voici une présentation:
Nous pouvons fort bien construire à l'aide de la règle et du compas un segment de longueur AB + CD à partir de deux segments donnés [AB] et [CD]; de même nous pouvons construire un segment de longueur CD - AB si CD > AB. Descartes ne fait que mentionner cette posssibilité.
AB x CD est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent AB et CD. Il ne semble pas que nous ayons de représentation géométrique du rapport AB/CD. Descartes propose une construction, à l'aide de cercles et de droites d'un segment de longueur AB x CD et d'un segment de longueur AB/CD en faisant entrer en jeu l'unité: le dessinateur choisit un segment unité "à sa discrétion".
Nous lisons alors les deux textes concernés.

La Multiplication.



Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E est le produit de cete Multiplication.

La Division.

Oubien s'il faut diuiser B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C est le produit de cete diuision.

Le prérequis est le théorème de Thalès.
Et nous discutons des différentes manières de présenter cet extrait aux élèves.
Les textes sont jugés suffisamment simples pour permettre d'emblée une lecture guidée. Certains participants optent pour cette utilisation. D'autres préfèrent donner la fiche avec des exercices préparatoires à la lecture du texte, demandant par exemple de construire un segment de longueur BC x BD à partir d'un segment [AB] unité et de segments [BC] et [BD] de différentes mesures. Il est même proposé d'utiliser ce texte comme activité préparatoire à l'étude du théorème de Thalès en commençant évidemment par des exemples numériques.

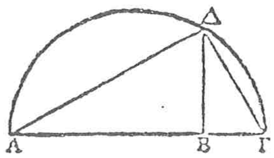
La deuxième fiche est intitulée "moyenne proportionnelle et racine carrée". Le texte de Descartes s'appuie, sans le dire explicitement, sur la construction de la moyenne proportionnelle de la proposition XIII du livre VI des *Eléments* d'Euclide. Nous proposons donc, comme aux élèves, une lecture du texte d'Euclide avant celle du texte de Descartes.

PROPOSITION XIII.

Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle.

Soient AB, BΓ les deux droites données; il faut trouver une moyenne proportionnelle entre AB, BΓ.

Plaçons ces droites dans la même direction, et sur la droite AΓ décrivons le demi-cercle AΔΓ; du point B menons BΔ perpendiculaire à AΓ, et joignons AΔ, ΔΓ (11. 1).

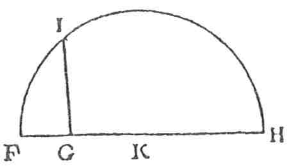


Puisque l'angle AΔΓ est dans un demi-cercle, cet angle est droit (31. 3). Et puisque dans le triangle rectangle AΔΓ on a mené de l'angle droit la droite ΔB perpendiculaire à la base, la droite ΔB est moyenne proportionnelle entre les segments AB, BΓ de la base (cor. 8. 6).

Donc les deux droites AB, BΓ étant données, on a trouvé une moyenne proportionnelle BΔ. Ce qu'il fallait faire.

La proposition d'exercices préparatoires et de questions sur le texte remporte l'adhésion des participants. Nous lisons, ensuite, le texte de Descartes et discutons des exercices d'application.

l'Extraction dela racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de GH, ie luy adiouste en ligne droite FG, qui est l'vnité, & diuisant FH en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire le cercle FIH, puis esleuant du point G vne ligne droite iusques à I, à angles droits sur FH, c'est GI la racine

Vous trouverez en annexe les deux premières pages complètes de *La Géométrie* qui sont toujours relues par les élèves pour conclure ce travail.

Le premier objectif pédagogique de ce travail est de réinvestir les acquis: le théorème de Thalès, les relations métriques dans le triangle rectangle, les théorèmes sur le triangle inscrit dans un demi-cercle; il s'y ajoute le plaisir des élèves qui se découvrent capables d'utiliser ces théorèmes, vue la simplicité du travail demandé. Un deuxième objectif est de montrer une continuité dans les problèmes que se posent les mathématiciens avec les exemples d'Euclide et de Descartes. Un troisième est de donner un exemple de la méthode proposée par Descartes pour tenter de classifier des problèmes mathématiques en partant des plus simples, ici de l'addition à la racine carrée. Nous faisons remarquer la grande originalité de Descartes qui est de résoudre les problèmes géométriques par une utilisation systématique de l'algèbre: un problème géométrique se réduit à la résolution d'une équation. Son apport principal est "la numérisation de la géométrie": par le choix d'une longueur unité qu'il nomme ligne, il peut éviter les exigences de l'homogénéité; le produit de deux longueurs n'est plus nécessairement représenté par l'aire d'un rectangle mais peut être représenté par une longueur. Nous ne résistons pas à l'envie de rapporter le cri du coeur d'un élève de seconde à la lecture du texte de Descartes après celui d'Euclide: "écrire AB = 1, utiliser l'unité, c'est génial !". Cette anecdote permet de signaler que le travail proposé en troisième peut se donner avec profit au début d'une année de seconde.

5. Etude d'un texte.

L' autre groupe a étudié un court extrait du traité *De Quadratura curvarum* de Newton, écrit en 1693 et publié en appendice de son traité d'*Optique* en 1704. Le texte original est en latin, il a été traduit en anglais par J. Stewart en 1745 et nous en proposons une traduction française en essayant de la rendre proche de la langue de Buffon, le traducteur de Newton au XVIII° siècle. Une langue étrangère n'est pas nécessairement un obstacle pour les élèves qui se prennent au jeu et ont plaisir à montrer leurs compétences en anglais, voire en latin.

II.

Recta (Fig. 2.) PB *circa Polum datum* P *revolvens secet aliam Positione datam Rectam* AB : *quæritur Proportio Fluxionum Rectarum illarum* AB *&* PB.

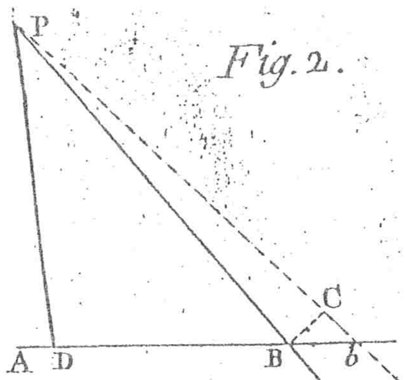
Progrediatur Recta *PB* de loco suo *PB* in locum novum *Pb*. In *Pb* capiatur *PC* ipsi PB æqualis, & ad *AB* ducatur *PD* sic, ut Angulus *bPD* æqualis sit Angulo *bBC*; &, ob similitudinem Triangulorum *bBC*, *bPD*, erit Augmentum *Bb* ad Augmentum *Cb*, ut *Pb* ad *bD*. Redeat jam *Pb* in locum suum priorem *PB*, ut Augmenta illa evanescant, & evanescentium Ratio ultima, id est, Ratio ultima *Pb* ad *Db*, ea erit quæ est *PB* ad *DB*, existente Angulo *PDB* recto; & propterea in hac Ratione est Fluxio ipsius *AB* ad Fluxionem ipsius *PB*.

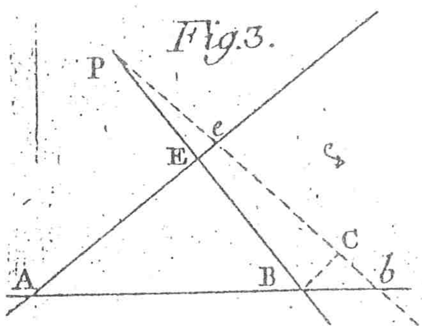
I I.

Recta (Fig. 3.) P B *circa datum Polum* P *revolvens ſecet alias duas Poſitione datas Rectas* A B *&* A E, *in* B *&* E: *quæritur Proportio Fluxionum Rectarum illarum* A B *&* A E.

Progrediatur Recta revolvens PB de loco ſuo PB in locum novum Pb Rectas AB, AE in Punctis b & e ſecantem, & Rectæ AE, Parallela BC ducatur ipſi Pb occurrens in C, & erit Bb ad BC, ut Ab ad Ae; & BC ad Ee, ut PB ad PE; &, conjunctis Rationibus, Bb ad Ee, ut $Ab \times PB$ ad $Ae \times PE$. Redeat jam Linea Pb in locum ſuum priorem PB, & Augmentum evaneſcens Bb erit ad Augmentum evaneſcens Ee, ut $AB \times PB$ ad $AE \times PE$, ideóque in hac Ratione eſt Fluxio Rectæ AB ad Fluxionem Rectæ AE.

Hinc ſi Recta revolvens PB Lineas quaſvis curvas Poſitione datas ſecet in Punctis B, & E, & Rectæ jam mobiles AB, AE, Curvas illas tangant in ſectionum Punctis B, & E; erit Fluxio Curvæ, quam Recta AB tangit, ad Fluxionem Curvæ, quam Recta AE tangit, ut $AB \times PB$ ad $AE \times PE$. Id quod etiam eveniet, ſi Recta PB Curvam aliquam Poſitione datam perpetuò tangat in Puncto mobili P.





I. *Let the right line PB* [Fig. 2], *revolving about the given pole P, cut another right line AB given in position: it is required to find the proportion of the fluxions of these right lines AB and PB.*

Let the line PB move forward from its place PB into the new place Pb. In Pb take PC equal to PB, and draw PD to AB in such manner that the angle bPD may be equal to the angle bBC; and because the triangles bBC, bPD are similar, the augment Bb will be to the augment Cb as Pb to Db. Now let Pb return into its former place PB, that these augments may evanish, then the ultimate ratio of these evanescent augments, that is the ultimate ratio of Pb to Db, shall be the same with that of PB to DB, PDB being then a right angle, and therefore the fluxion of AB is to the fluxion of PB in that same ratio.

II. *Let the right line PB, revolving about the given pole P, cut other two right lines given in position, viz. AB and AE in B and E: the proportion of the fluxions of these right lines AB and AE is sought.*

Let the revolving right line PB [Fig. 3] move forward from its place PB into the new place Pb, so as to cut the lines AB, AE in the points b and e: and draw BC parallel to AE meeting Pb in C, and it will be $Bb:BC::Ab:Ae$, and $BC:Ee::PB:PE$, and by joining the ratios, $Bb:Ee::Ab \times PB:Ae \times PE$.[1] Now let Pb return into its former place PB, and the evanescent augment Bb will be to the evanescent augment Ee as $AB \times PB$ to $AE \times PE$; and therefore the fluxion of the right line AB is to the fluxion of the right line AE in the same ratio.

I .*Une ligne droite tournant autour d'un point donné P coupe une autre ligne droite fixe AB (fig. 2) : on demande de trouver la raison des fluxions de ces lignes droites AB et PB.*

Soit la ligne PB ,avançant de la position PB à la nouvelle position Pb. Sur Pb prenons PC égal à PB et traçons PD vers AB de façon que l'angle bPD soit égal à l'angle bBC; et puisque les triangles bBC et bPD sont semblables, l'augmentation Bb sera à l'augmentation Cb comme Pb est à Db. Que maintenant Pb revienne à sa position précédente PB, de sorte que ces augmentations s'évanouissent, alors la dernière raison de ces augmentations évanouissantes, c'est à dire la dernière raison de Pb à Db sera la même que celle de PB à DB, l'angle PDB étant alors droit, et par conséquent la fluxion de AB est à la fluxion de PB dans cette même raison.

II. *Une ligne droite PB tournant autour d'un point donné P coupe deux autres lignes droites AB et AE fixes,respectivement en B et E (fig.3) on cherche la raison des fluxions des lignes droites AB et AE.*

Soit la ligne droite PB avançant de sa position PB à la nouvelle position Pb, de façon à couper les lignes AB et AE aux points b et e: traçons BC parallèle à AE rencontrant Pb en C et on aura Bb:BC::Ab:Ae ,et BC:Ee::PB:PE et en combinant les raisons, Bb:Ee::AbxPB:AexPE .Que maintenant Pb revienne à sa position antérieure PB ,et l'augmentation évanouissante Bb sera à l'augmentation évanouissante Ee comme ABxPB est à AExPE ;et par conséquent la fluxion de la ligne droite AB est à la fluxion de la ligne droite AE dans la même raison.

Bref commentaire du texte.

Les éléments mathématiques (droites, points) considérés par Newton dépendent toujours implicitement du temps, considéré comme un référentiel absolu qui s'écoule uniformément. Une courbe apparait engendrée par le mouvement d'un point, une surface engendrée par le mouvement d'une ligne. La fluxion, est définie en référence à la notion intuitive de vitesse. Il emploie la notion de "raison de fluxions" (rapport de petites variations de quantités dépendant du temps) et le principe de "la première et dernière raison" qu'on peut comprendre comme une des origines de notre notion de limite. Pour lever l'indétermination , Newton emploie une technique que François de Gandt appelle la "méthode des témoins finis ", où le rapport de deux côtés d'un triangle qui tendent vers 0 est remplacé par le rapport de deux côtés d'un triangle semblable dont les dimensions, elles, ne tendent pas vers 0.

On peut rapprocher le problème posé par Newton de divers problèmes se posant en physique: le problème classique de cinématique du "chien qui suit son maître", un problème d'optique déjà posé par Alhazen, etc...

L' étude de cet exemple met à jour certaines difficultés de notre démarche. Le groupe de participants a beaucoup discuté sur le danger de "gauchir" un texte pour l'adapter au niveau de compréhension des élèves, sur les inconvénients que peut présenter le fait de ne lire qu'un extrait très court (c'est une nécessité avec les élèves dont l'attention se relâche vite; mais il est vrai que l'enseignant a souvent besoin d'étudier le contexte). Le groupe a aussi exprimé la crainte d'embrouiller les connaisssances fragiles des élèves sur les notions de limite et de dérivée.
Nous avons proposé alors de regarder le texte de problème ci-dessous, qui donne un exemple d'utilisation pédagogique possible.

On considère un axe Δ un point P extérieur à Δ , A le projeté orthogonal de P sur Δ . On pose $a = d(P, \Delta)$. Une droite mobile passant par P coupe Δ en B . On pose $x = \overline{AB}$, $f(x) = PB$. On se propose de déterminer $f'(x)$.

Question 1 : calculer $f(x)$ en fonction de x et a . Etudier la parité de f . Comment s'explique-t-elle géométriquement ? A quel intervalle peut-on réduire l'étude de f ? Vérifier qu'alors f peut être considérée comme une fonction de la variable AB .
On se propose d'utiliser la définition du nombre dérivé en un point (à rappeler...) et d'emprunter la méthode géométrique exposée par Newton dans le texte joint.

Question 2 : soit b une position voisine du point mobile B sur Δ . On pose $\overline{Bb} = h$. Ecrire $\overline{Ab}$ en fonction de x et h . La figure 2 est-elle la seule possible (jointe au texte anglais) ? h garde t-il un signe constant ?
Ecrire pour chaque cas de figure étudié $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ en fonction des longueurs de la figure.

Question 3 : soit D le point Δ tel que $(\overrightarrow{Pb},\overrightarrow{PD}) = (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{Bb}) = \alpha$.
Montrer que les triangles bBC et bPD sont semblables. En déduire que $\dfrac{Cb}{Bb} = \dfrac{Db}{Pb}$.
Comparer $\widehat{PBC}$ et $\widehat{PDt}$ (on note [Dt) la demi droite [DA)) .

Question 4 : lire le paragraphe I du texte joint en s'aidant éventuellement des remarques suivantes :

* le mot ligne droite désigne parfois la droite parfois la longueur.

* "a est à b comme c à d" se lit $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ $\left(\text{ou } \dfrac{b}{a} = \dfrac{d}{c}\right)$.

* Newton cherche ici à déterminer le rapport des "fluxions" de PB et AB qui peut apparaître pour nous comme la dérivée de la longueur PB par rapport à la longueur AB (donc la dérivée de la fonction f définie dans ce problème).

* La "dernière raison des augmentations évanouissantes" est à peu près notre notion de limite du taux de variation $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ quand h tend vers 0 .

On se propose d'étudier de près la dernière phrase du paragraphe I . D'après Newton, quand b tend vers B , quelle est la "position limite" du point D et la limite du rapport $\dfrac{Cb}{Bb}$? Le résultat vous paraît-il convaincant ? démontré ?

Question 5 : sur quelle courbe se déplace le point C quand b tend vers B ? Quelle est la "position limite" de la droite (BC) ? Vers quelle valeur tend l'angle $\widehat{PDt}$? Quelle est donc la "position limite" du point D ? Et que vaut f'(x) ?

Question 6 : Lire le paragraphe II .
Bb:Bc: :Ab:Ae doit se lire $\frac{Bb}{Bc}=\frac{Ab}{Ae}$.
Si on considère la fonction g : AB → AE , quelle est sa fonction dérivée g' ? (on ne cherchera pas à expliciter l'expression de g(AB)).

Ce problème a été posé dans une classe de 1ère S, après l'étude complète du chapitre sur les dérivées, en travaux dirigés, préparés un peu à la maison. Les élèves de 1ère n'ont pas à leur disposition de formule de dérivation de la fonction $(x \to \sqrt{x^2 + a^2})$. Ce texte suggère une détermination purement géométrique d'une dérivée. Il présente, à ce titre l'intérêt de montrer aux élèves une continuité entre le domaine de l'analyse assez nouveau pour eux et celui de la géométrie. Cette activité a suscité l'intérêt des élèves et beaucoup de questions, amenant la classe à réfléchir sur la définition du nombre dérivé. Une espèce de lumière s'est faite dans leur esprit quand ils ont pu se représenter de façon plus imagée la limite d'un rapport se présentant sous la forme 0/0.
J'ai constaté une meilleure maîtrise de ces notions dans la classe qui avait étudié ce texte que dans une autre classe de 1ère S avec qui je travaillais en parallèle cette année-là et qui n'a pas fait cette activité. J'ai pu comparer leurs résultats en particulier sur un autre exercice demandant également de calculer une dérivée à partir de la définition, pour déterminer l'aire sous une parabole.
Nous avons fait le choix de la variable x = AB, ce qui s'éloigne de l'esprit de Newton pour qui la variable est le temps, mais il serait plus compliqué de faire étudier aux élèves le rapport de deux dérivées. On a proposé de prendre pour variable l'angle APB, ce qui amènerait à des dérivées de fonctions trigonométriques.

Conclusion.

Les bilans de nos stages sont le plus souvent positifs et encourageants: Les stagiaires mettent en pratique nos propositions; ils sont souvent étonnés du plaisir qu'ils y prennent et qu'ils partagent avec leurs élèves. C'est pour eux une incitation à recommencer d'autres expérimentations et à approfondir leurs connaissances. Nous nous proposons actuellement d'effectuer une évaluation de ces activités tant au plan pédagogique qu'au plan de la formation.

Annexe.

L A

GEOMETRIE.

LIVRE PREMIER.

Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

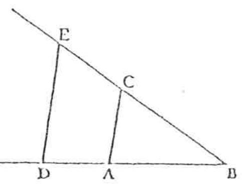
Comment le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'at'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité

Pp est

est a l'autre, ce qui est le mesme que la Diuision; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne; ce qui est le mesme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

La Multiplication.

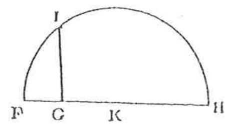


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E est le produit de cete Multiplication.

La Diuision.

Oubien s'il faut diuiser B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C est le produit de cete diuision.

l'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouste en ligne droite F G, qui est l'vnité, & diuisant F H en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis esleuant du point G vne ligne droite iusques à I, à angles droits sur F H, c'est G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cause que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Commét on peut

Mais souuent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces ligne