

L'INFINI EN MATHEMATIQUES

Une question de l'Académie de Berlin pour l'année 1784

Jean-Pierre FRIEDELMEYER
IREM de Strasbourg

Les dernières décennies ont connu de nombreux changements dans les programmes d'enseignement des mathématiques, à tous les niveaux. Ces changements sont compréhensibles et nécessaires, adaptant l'enseignement aux grandes évolutions de la science et de la société qui ont marqué le monde d'après la seconde guerre mondiale. Ils peuvent cependant révéler aussi d'autres symptômes, liés à des difficultés d'ordre épistémologique ou pédagogique. Exemple de ce point de vue me paraît être l'évolution des programmes d'enseignement qui concernent les premières notions d'analyse en classe de lycée.

Les modifications les plus frappantes à première vue⁽¹⁾ ne sont pas spécifiques à l'analyse mais concernent tout le programme : c'est l'apparition au milieu des années 60 du discours formaliste, sous l'influence du groupe BOURBAKI (aussi appelé "mathématiques modernes"). Celui-ci se limite d'abord timidement à l'introduction de quelques termes de vocabulaire et de notions de logique (1966) pour exploser littéralement en 1970 dans la présentation axiomatique de la géométrie. A la lecture des programmes, l'analyse paraît relativement épargnée ; mais dans la pratique, la plupart des manuels utilisent un langage très formalisé et abstrait pour les notions de différentielle et de limite, avec force quantificateurs, ε et valeurs absolues. Et puis viens le reflux, à partir des années 80, avec le rejet des "maths modernes" remplacé par l'invasion des "nouvelles technologies" : calculatrices et ordinateurs.

Le second phénomène marquant de l'évolution des programmes concerne alors plus spécifiquement l'analyse où l'on voit apparaître à partir de 1982 l'étude des suites numériques et une pratique par inégalités et approximations ou encadrements ; en même temps disparaît le formalisme qui est remplacé par la description, l'expérimentation, l'observation ; la notion de limite est réduite à un **langage des limites**. Tout ceci est bien évidemment lié étroitement à la possibilité d'utiliser en classe des calculatrices de plus en plus performantes.

(1) On trouvera en annexe ces programmes d'analyse pour les années 1945 (où elle est encore qualifiée d'al-gèbre) 1961, 1966, 1970, 1982, 1985

Mais ces deux phénomènes : formalisation et utilisation de calculatrices, pour important qu'ils soient risquent d'occulter d'autres variations dans le libellé des programmes, reflétant une difficulté réelle pour définir le contenu et les méthodes d'un premier enseignement de l'analyse. Plus exactement, ces deux phénomènes ne sont, chacun à sa manière, qu'une tentative de résolution de cette difficulté. Comment comprendre, sinon, les faits caractéristiques suivants :

- jusqu'en 1966 l'analyse (longtemps encore appelée algèbre) se réduit à la notion de dérivée pour le calcul des tangentes ou l'interprétation cinématique
- la continuité apparaît à ce moment là, pour disparaître à nouveau en 1985
- la notion différentielle n'est mentionnée qu'une fois en 1966
- les développements limités (d'ordre 0 ou 1) ont une existence éphémère entre 1982 et 1985
- la notion de limite reçoit les traitements les plus divers pour finir en simple langage :

"Après observation des suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{b^n}$, **on dit** que ces suites tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$). Le **sens** est totalement évacué, et les mathématiques donnent l'impression de devenir une science expérimentale.

Que ce soit comme élève, ou que ce soit comme professeur, j'ai eu l'occasion d'expérimenter tous ces changements. Cela procure un grand sentiment d'inconfort mais aussi un certain sentiment de liberté par rapport aux directives officielles. Inconfort, car comment concilier ces changements de programmes avec l'idée d'une mathématique science exacte par excellence ? Liberté, parce que s'il y a tant de variations au fil des années dans les instructions officielles, c'est que chacune isolément n'a pas ce caractère de vérité absolue et péremptoire, à suivre à la lettre, que l'on voudrait quelquefois leur attribuer. Seulement ces deux sentiments : inconfort et liberté (qui, au fond vont toujours de pair également dans la vie de tous les jours) supposent que l'on mène sa propre réflexion sur la question⁽¹⁾.

Mais comment mener à bien cette réflexion ? M'intéressant à l'histoire des mathématiques, outre la satisfaction d'une curiosité intellectuelle, j'y ai souvent trouvé un support pédagogique pour l'enseignement, en même temps qu'une meilleure compréhension des difficultés de mes élèves. Je me suis donc tourné vers l'histoire du calcul infinitésimal : quelle ne fut pas ma surprise d'y retrouver les mêmes incertitudes, des évolutions comparables, voire le même in-

(1) *N'est-il pas significatif, à cet égard, que le libellé du programme augmente d'année en année en nombre de pages passant de une page et demi en 1945 à plus de dix pages en 1985 (programme plus commentaires) ?*

confort en ce qui concerne les façons d'introduire ce nouveau calcul, d'en définir les bases.

Ainsi LAGRANGE, après avoir passé en revue les diverses manières élaborées par ses prédécesseurs pour fonder le calcul infinitésimal, est amené à dire ceci (Introduction à la “Théorie des fonctions analytiques” 1797). [1]

“Ces variations dans la manière d'établir et de présenter les principes du Calcul différentiel, et même dans la dénomination de ce Calcul, montrent, ce me semble, qu'on n'en avait pas saisi la véritable théorie, quoiqu'on eût trouvé d'abord les règles les plus simples et les plus commodes pour le mécanisme des opérations”.

Et de proposer lui-même de “nouveaux principes” qui hélas se révéleront aussi incertains que les précédents.

Ne peut-on dire de même que les grandes variations dans la manière d'introduire l'enseignement de l'analyse au lycée montrent qu'on n'a pas vraiment trouvé la bonne approche, et que la difficulté à trouver celle-ci tient peut être à la théorie même que l'on veut enseigner ? Autrement dit, cerner les difficultés rencontrées par les mathématiciens du 18^e siècle dans la compréhension et la fondation du calcul différentiel nous aidera peut être

- 1° à mieux cerner les difficultés de nos élèves devant la même question
- 2° à trouver des idées et des approches qui tiennent compte de ces difficultés, puisque les mathématiciens eux, ont réussi en fin de compte à les résoudre.

Quelles sont donc ces difficultés, rencontrées par les mathématiciens du 18^e siècle, au sujet du Calcul Différentiel ? On a dit quelquefois (voir par exemple Moritz CANTOR) [2] que les créateurs du calcul infinitésimal s'étaient plus préoccupés de développer cette nouvelle théorie plutôt que d'en asseoir les fondements. En réalité le souci de rigueur était présent, il suffit pour s'en convaincre de regarder le nombre de textes qui s'en préoccupent et que nous aurons l'occasion d'étudier. Mais ce sont les critères de la rigueur qui étaient inadaptés. La référence, l'idéal de la rigueur était resté ce qu'on appelait alors **le modèle des Anciens**. Or ce modèle, élaboré par EUCLIDE et ARCHIMEDE essentiellement, concernait presque uniquement la géométrie. Et le vocabulaire comme les concepts nouveaux de l'analyse restaient englués d'images et de références géométriques. On parlait de grandeurs (réelles ou imaginaires), de raisons etc... Les mathématiciens eux-mêmes étaient qualifiés de **géomètres**, alors qu'ils ne faisaient plus guère de géométrie⁽¹⁾, et EULER appelait l'analyse : **géométrie sublime**. C'est donc d'abord cette inadéquation entre un nouvel outil scientifique extrêmement performant, et un modèle de rigueur parfait mais étranger à ce nouvel outil qui va se traduire dans une crise des fondements. On y verra s'exprimer des thèses aussi contradictoires que va-

(1) Plus précisément ils faisaient de la géométrie différentielle.

riées concernant le statut de ces nouveaux objets du calcul, tellement efficaces mais tellement insaisissables que sont les infiniment -petits et les infiniment-grands.

Cette crise trouvera son expression ultime dans une question mise à prix en 1784 par l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres : [3]

La classe de Mathématique propose la question pour le Prix qui sera décerné en 1786.

L'utilité qu'on retire des Mathématiques, l'estime qu'on a pour elles, et l'honorable dénomination de *Sciences exactes* par excellence qu'on leur donne à juste titre, sont dues à la clarté de leurs principes, à la rigueur de leurs démonstrations, et à la précision de leurs théorèmes.

Pour assurer à cette belle partie de nos connaissances la continuation de ces précieux avantages, on demande **une théorie claire et précise de ce qu'on appelle Infini en Mathématique.**

On sait que la haute Géométrie fait un usage continuel des infiniment grands et des infiniment petits. Cependant les Géomètres, et mêmes les Analystes anciens, ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini ; et de grands Analystes modernes avouent que les **termes grandeur infinie** sont contradictoires.

L'académie souhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire, et qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être substitué à l'Infini, sans rendre trop difficiles, ou trop longues, les recherches qu'on expédie par ce moyen. On exige que cette matière soit traitée avec toute la généralité, et avec toute la rigueur, la clarté et la simplicité possibles.

Chaque expression, chaque phrase de ce texte mériterait une explication, un développement, tant il résume bien la situation et la problématique. Je vous propose d'étudier plus particulièrement

1. Comment "la haute géométrie" (faisait) un usage continuel des infiniment petits et des infiniment grands" au 18e siècle et les problèmes que cet usage soulevait.
2. Pourquoi et comment "les Analystes anciens ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini".
3. Quelles réponses ont été apportées à cette question et quel "principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique" a-t-on tenté de "substituer à l'Infini" ?

Mais d'abord quelques mots sur le contexte historique et sur l'auteur présumé de cette question. Nous sommes en 1784. Le calcul différentiel avait connu un essor considérable depuis sa création par Newton et Leibniz et il avait soulevé un enthousiasme extraordinaire qui éclate par exemple dans cette "Préface des Elements de la Géométrie de l'Infini" de Fontenelle, dès 1727. [4]

"Dès que le calcul différentiel eut paru, BERNOULLI, le marquis de L'HÔPITAL, VARIGNON, tous les grands géomètres entrèrent avec ardeur dans les routes qui venaient d'être ouvertes, et y marchèrent à pas de géant. L'infini éleva tout à une sublimité, et en même temps amena tout à une facilité, dont on n'eût pas osé auparavant concevoir l'espérance ; et c'est là l'époque d'une révolution presque totale arrivée dans la géométrie".

Pas de géant, dont l'oeuvre d'EULER est le meilleur exemple, chez qui l'on assiste à une véritable boulimie de création et dont l'édition des oeuvres complètes ne comprend pas moins de 70 gros volumes, sans compter la correspondance ! Mais en 1784 EULER est mort depuis un an déjà, ainsi que D'ALEMBERT. GAUSS est encore enfant (1777), CAUCHY n'est pas né (1789). La grande figure mathématique qui domine cette période est LAGRANGE qui se trouvait à Berlin depuis 1766, succédant à EULER, et c'est très certainement lui qui a posé la question de l'Académie.

Dès le début de sa brillante carrière, LAGRANGE s'était préoccupé des fondements du calcul infinitésimal, et il n'abandonnera jamais cet objet de réflexion jusqu'à la fin de sa vie, sans d'ailleurs trouver une solution satisfaisante. Alors qu'il essayait au début de défendre la rigueur du Calcul infinitésimal tel qu'il était pratiqué, il en vint plus tard à l'idée de remplacer ce calcul par un autre, plus algébrique et "dégagé de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limite, de fluxions et réduit à l'analyse algébrique des quantités finies".

Le fait qu'il ait posé la question de l'Académie de Berlin en 1784, prouve assez que sa nouvelle solution ne le satisfaisait guère. Mais aussi, quoique l'Académie ait couronné un des mémoires présentés, la méthode que celui-ci proposait le satisfaisait si peu qu'il est revenu bientôt à son ancienne idée, en publiant en 1797 sa **Théorie des fonctions analytiques**. Voyons donc

**L'usage des infiniment grands et des infiniment petits
dans la haute Géométrie**

Les infiniment petits

Mettons-nous d'emblée dans le bain du calcul infinitésimal naissant en rapportant la façon dont BARROW (1630-1677) calcule la pente de la tangente en un point du folium de DESCARTES d'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$. (cf. [5])

Soit M d'abscisse x , d'ordonnée y

N d'abscisse $x + e$, d'ordonnée $y + a$

Ces nombres vérifient donc

$$\text{en M : } x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

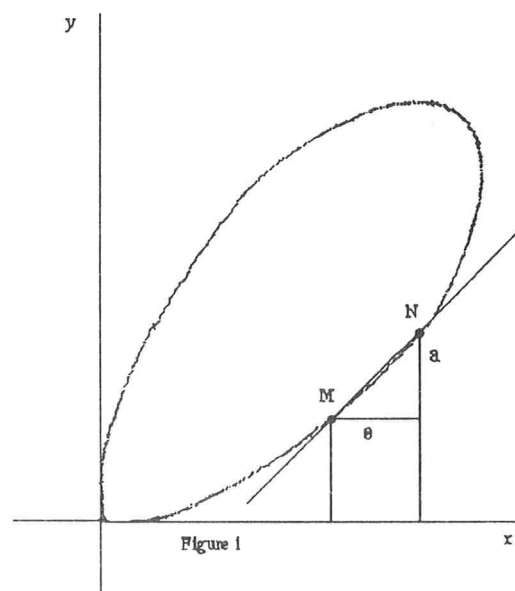
$$\text{en N : } (x + e)^3 + (y + a)^3 - 3(x + e)(y + a) = 0$$

d'où par différence :

$$3x^2e + 3e^2x + 3y^2a + 3ya^2 + a^3 - 3xa - 3ye - 3ae = 0$$

ou encore, en négligeant e^2 "petit" par rapport à e

et pour des raisons analogues les termes en e^3 , a^2 , a^3 , ae



$$3x^2e + 3y^2a - 3xa - 3ye = 0 \quad \text{soit} \quad m = \frac{a}{e} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$$

résultat qui correspond bien à la pente de la tangente en M, comme on peut le vérifier en remarquant que

$$m = \frac{\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{\delta y}} \quad \text{avec} \quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

en notation moderne.

Les savants des 17^e et 18^e siècles seront fascinés par une méthode aussi simple et expéditive. Eduqués aux longues et pénibles méthodes d'EUCLIDE et D'ARCHIMEDE, ils ne pouvaient manquer d'être éblouis par une telle efficacité, là où la géométrie des Anciens n'arrivait à traiter, difficilement, que quelques situations particulières.

“Ce que nous avons des Anciens sur ces matières- dit le marquis de L'Hôpital- principalement d'ARCHIMEDE, est assurément digne d'admiration. Mais outre qu'ils n'ont touché qu'à fort peu de courbes, qu'ils n'y ont même touché que légèrement ; ce ne sont presque partout que propositions particulières et sans ordre, qui ne font apercevoir aucune méthode régulière et suivie”.

sous-entendu : alors que la méthode de BARROW, avec les améliorations apportées par LEIBNIZ s'applique sans difficulté aucune à n'importe quelle courbe

“M. BARROW n'en demeura pas là, il inventa aussi une espèce de calcul propre à cette Méthode ; mais il lui fallait (...) ôter les fractions et faire évanouir tous les signes radicaux pour s'en servir.

Au défaut de ce calcul est survenu celui du célèbre M. LEIBNIZ ; et ce savant Géomètre a commencé où M. BARROW et les autres avaient fini. Son calcul l'a mené dans des pays jusqu'ici inconnus ; et il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles Mathématiciens de l'Europe. Messieurs BERNOULLI ont été les premiers qui se sont aperçus de la beauté de ce calcul : ils l'ont porté à un point qui les a mis en état de surmonter des difficultés qu'on n'aurait jamais osé tenter auparavant”.[6 préface]

Reste que la méthode des Anciens était rigoureusement fondée, alors que ce calcul, pour efficace qu'il soit, laisse planer un doute sur sa légitimité, doute que -il est vrai- le Marquis de L'Hôpital balaye en quelques phrases. Plus précisément, dans la tradition de l'époque il fait deux **demandes ou suppositions**, au début de son Traité :

“Demande ou Supposition

On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par exemple qu'on puisse prendre Ap pour AP , pm pour PM , l'espace Apm pour l'espace APM , le petit espace $MPpm$ pour le petit rectangle $MPpR$, le petit secteur AMm pour le petit triangle AMS , l'angle pAm pour l'angle PAM , et c.

Demande ou Supposition

On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un polygone d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par exemple que la portion de courbe Mm et l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle mSM puisse être censé rectiligne.

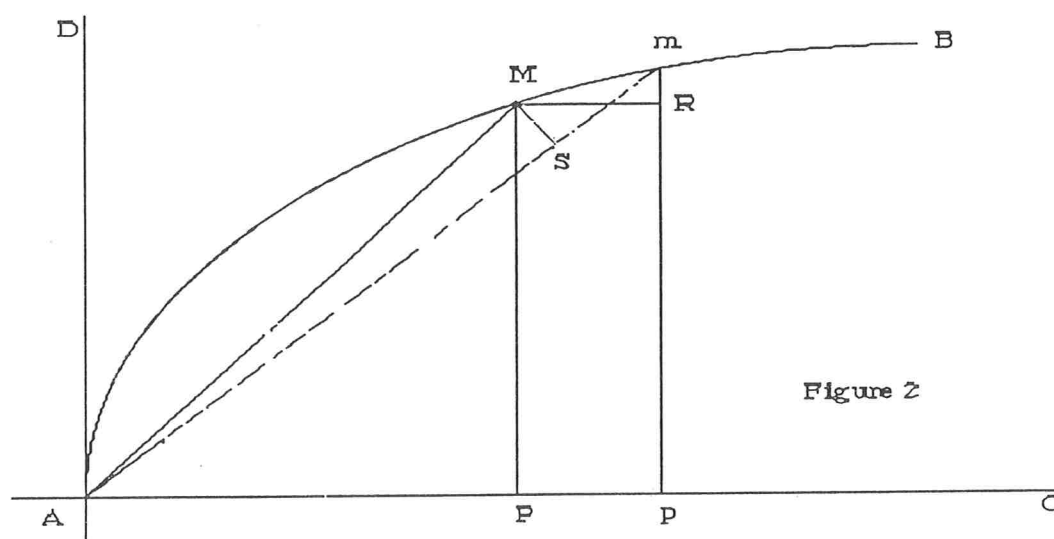


Figure 2

Et de justifier ces demandes :

“D'ailleurs les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commencement de ce Traité, et sur lesquelles seules il est appuyé, me paraissent si évidentes, que je ne crois pas qu'elles puissent laisser aucun doute dans l'esprit des lecteurs attentifs. Je les aurais même pû démontrer facilement à la manière des Anciens, si je ne me fusse proposé d'être court sur les choses qui sont déjà connues, et de m'attacher principalement à celles qui sont nouvelles”.

C'est avec cela que la Marquis de L'HÔPITAL va traiter l'ensemble des problèmes de géométrie différentielle imaginables pour l'époque : "De là naissent une infinité de découvertes surprenantes par rapport aux tangentes tant courbes que droites, aux questions **De maximis et minimis**, aux points d'inflexion et de rebroussement des courbes, aux développées, aux caustiques par réflexion ou par réfraction, etc..." [6, préface]

Les infiniment grands

Voyons de même comment EULER jongle avec les infiniment grands (et petits) dans son "**Introduction à l'analyse infinitésimale**" (1748) [7]

Comme i est un nombre infiniment grand ; il s'ensuit que $\frac{i-1}{i} = 1$; car il est évident que plus le nombre qu'on substituera à i sera grand, plus la valeur de la fraction $\frac{i-1}{i}$ approchera de l'unité ; nombre qu'on substituera à i sera grand, plus la valeur de la fraction $\frac{i-1}{i}$ approchera de l'unité ;

Par une raison semblable ; $\frac{i-2}{i} = 1$; $\frac{i-3}{i} = 1$ & c.

Concluons de là que : $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$; $\frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$; ainsi des autres.

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \cos. n z &= \frac{(\cos. z + \sqrt{-1} \cdot \sin. z)^n + (\cos. z - \sqrt{-1} \cdot \sin. z)^n}{2} \quad \& \\ \sin. n z &= \frac{(\cos. z + \sqrt{-1} \cdot \sin. z)^n - (\cos. z - \sqrt{-1} \cdot \sin. z)^n}{2 \sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Donc en développant ces binômes en séries, nous aurons

$$\begin{aligned} \cos. n z &= (\cos. z)^n - \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} (\cos. z)^{n-2} (\sin z)^2 + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\cos. z)^{n-4} (\sin z)^4 + \\ &\quad \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} (\cos. z)^{n-4} (\sin z)^4 \dots \\ &\quad \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} (\cos. z)^{n-6} (\sin z)^6 + \& c. \\ \& \sin. n z &= \frac{n}{1} (\cos. z)^{n-1} \sin. z - \frac{n \cdot (n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} (\cos. z)^{n-2} \\ &\quad (\sin z)^3 + \frac{n \cdot (n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} (\cos. z)^{n-5} (\sin z)^5 \& c. \end{aligned}$$

Soit z un arc infiniment petit, alors $\sin. z = z$, & $\cos. z = 1$; soit en même temps n un nombre infiniment grand, pour que l'arc nz soit d'une grandeur finie, pour que nz , par exemple, $= v$;

à cause de $\sin. z = z = \frac{v}{n}$, on aura

$$\cos. v = 1 - \frac{v^2}{1 \cdot 2} + \frac{v^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{v^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \& c. \&$$

Soit z un arc infiniment petit, alors $\sin.z = z$, & $\cos. z = 1$; soit en même temps n un nombre infiniment grand, pour que l'arc nz soit d'une grandeur finie, pour que nz , par exemple, $= v$; à cause de

$\sin. z = z = \frac{v}{n}$, on aura :

$$\cos. v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \& c. \&$$

$$\sin. v = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \& c.$$

Ainsi l'arc v étant donné, on pourra, à l'aide de ces séries, trouver son sinus et son cosinus."

Comme pour la notion d'infiniment petit chez L'HOPITAL, on chercherait en vain chez EULER une définition d'un nombre infiniment grand. Pour lui, il n'y a là aucune difficulté, et la meilleure preuve en est les extraordinaires relations numériques qu'il met en évidence, lesquelles sont incontestablement vraies, et représentent donc une sorte de preuve a posteriori de la légitimité de la méthode.

On pourrait multiplier les exemples, mais les deux qui sont présentés ici doivent suffire à illustrer aussi bien les méthodes utilisées, que les concepts sur lesquels elles reposent. En particulier, pour ne pas allonger encore cette étude, nous avons laissé de côté le calcul des fluxions de Newton, qui présente encore une autre approche du Calcul infinitésimal. Cette mise à l'écart de Newton ne devrait pas trop porter à conséquence, car peu à peu, au 18^e siècle, le calcul des fluxions sera rejeté par les mathématiciens du Continent au bénéfice du calcul différentiel de Leibniz, et n'y aura donc guère d'influence sur son évolution.

Les critiques apportées à l'Analyse des infiniment petits et grands

Les premières critiques viendront très vite, presque en même temps que les premières publications. Déjà le 23 février 1697 Philippe LA HIRE avait donné à l'Académie un petit mémoire intitulé : **"Remarque sur l'usage qu'on doit faire de quelques suppositions dans la méthode des infiniment petits"**, critiquant principalement le bien-fondé, dans un cercle, de l'assimilation de la corde et de l'arc. Mais les principales objections seront élevées par Michel ROLLE (1652-1719) dans un écrit **"contre les suppositions fondamentales de la géométrie des infiniment petits"** lu à partir du 17 juillet 1700 à l'Académie royale des Sciences de Paris⁽¹⁾.

(1) L'essentiel de cette partie concernant les critiques apportées au calcul différentiel s'inspire d'un article de Michel BLAY, *Revue d'Histoire des Sciences* n° 39-3 1986 [8].

La critique de ROLLE va s'appuyer sur deux types d'arguments :

- Les uns s'interrogeant sur la cohérence et la validité des principes et suppositions à la base du nouveau calcul.
- Les autres cherchant à montrer que ce calcul conduit à des erreurs.

Le premier type concerne essentiellement les différentes définitions et surtout “**demandes**” que le Marquis de L'HOPITAL a mis comme fondement à son “Analyse des infiniment petits” et que ROLLE regroupe en trois difficultés :

Difficulté 1 : “Si en géométrie il y a des infiniment grands, infinis les uns des autres ; et des infiniment petits, infinis les uns des autres”

Difficulté 2 : “Si une grandeur plus ou moins sa différentielle peut être prise pour égale à cette même grandeur”

Difficulté 3 : “Si les différentielles sont des zéros absolus”.

Car alors, les différentielles secondes sont elles-mêmes infiniment petites en comparaison des différentielles premières, de sorte que voilà des grandeurs : les différentielles, qu'on peut négliger dans des égalités comme si elles étaient assimilées à zéro, alors qu'elles doivent être considérées comme infiniment grandes à l'égard de différentielles d'ordre supérieur.

Sans aller très loin dans son analyse, ROLLE met ici le doigt sur la difficulté véritable du calcul différentiel naissant : l'impossibilité de donner un statut logique et rigoureux à ces objets insaisissables que sont les différentielles, tant qu'on les considèrera dans un cadre et un vocabulaire géométrique, comme “portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement”. De tels objets, dira plus tard CARNOT [9] “comme tout ce qui est extrême, échappe(nt) aux sens et à l'imagination, (et) on n'a jamais pu se former qu'une idée imparfaite de ces éléments, **espèces d'êtres singuliers, qui tantôt jouent le rôle de véritables quantités, tantôt doivent être traités comme absolument nuls, et semblent, par leurs propriétés équivoques, tenir le milieu entre la grandeur et le zéro, entre l'existence et le néant**”.

Plus explicites apparemment seront les exemples que donnera ROLLE pour montrer que le calcul différentiel conduit à des erreurs. Il considère par exemple “la courbe géométrique DD qui se forme par le moyen de l'égalité B sur un axe AP”, (figure 4).

$$(B) : y - b = \frac{(x^2 - 2ax + a^2 - b^2)^{2/3}}{a^{1/3}}$$

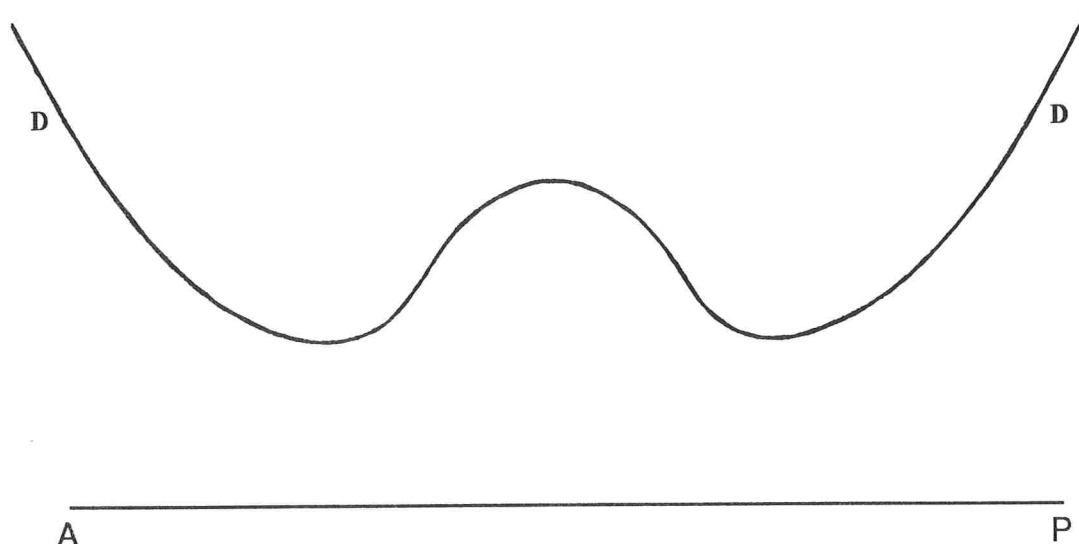


Figure 4

Si l'on veut calculer les maxima et minima de cette courbe par la méthode des infiniment petits,
 "la méthode veut que l'on prenne la différence de l'égalité proposée, et si l'on suit les règles de l'analyse des infiniment petits pour prendre cette différence, on la trouvera de même qu'on la voit en C"

$$(C) \quad dy = \frac{4x dx - 4a dx}{3\sqrt[3]{ax^2 - 2ax + a^2 - ab^2}}$$

"Cela posé, la méthode veut que la valeur de dy soit égale à zéro, et l'on suppose dans cette méthode que cela arriverait toujours si l'on détruisait le numérateur".

Mais en procédant ainsi, on ne trouve qu'une valeur qui est $x = a$, là où des méthodes algébriques ⁽¹⁾ en donnent trois. L'équation (B) peut en effet s'écrire :

(1) *ROLLE fait référence à la méthode de HUDDE, mais pour ne pas trop alourdir ce texte, nous pouvons sans dommage faire l'économie de son étude, l'exemple étant suffisamment simple pour se prêter à un calcul élémentaire.*

$$a(y - b)^3 = (x^2 - 2ax + a^2 - b^2)^2 = [b^2 - (x - a)^2]^2$$

qui donne effectivement un maximum relatif pour $x = a$.

Mais aussi

$$a(y - b)^3 = [x - (a - b)]^2 [x - (a + b)]^2 \geq 0$$

le minimum zéro étant atteint pour deux valeurs de x : $x = a - b$ et $x = a + b$ valeurs que l'on ne trouve pas par la méthode des différences !

VARIGNON répondra à ROLLE sur cet exemple, en expliquant que ce dernier ne prend pas la règle du calcul différentiel en entier.

“L'on aura 1° $x = a$ en faisant $dy = 0$; et 2° $x = a - b$ ou $x = a + b$ en faisant dy infinie par rapport à dx , ou $dx = 0$.(...) Ce qui donne à la courbe cherchée la forme qu'on lui voit ici ... jusqu'aux points d'inflexion δ, δ ; au lieu que Mr. ROLLE la croit faite comme dans la Figure (4)”.

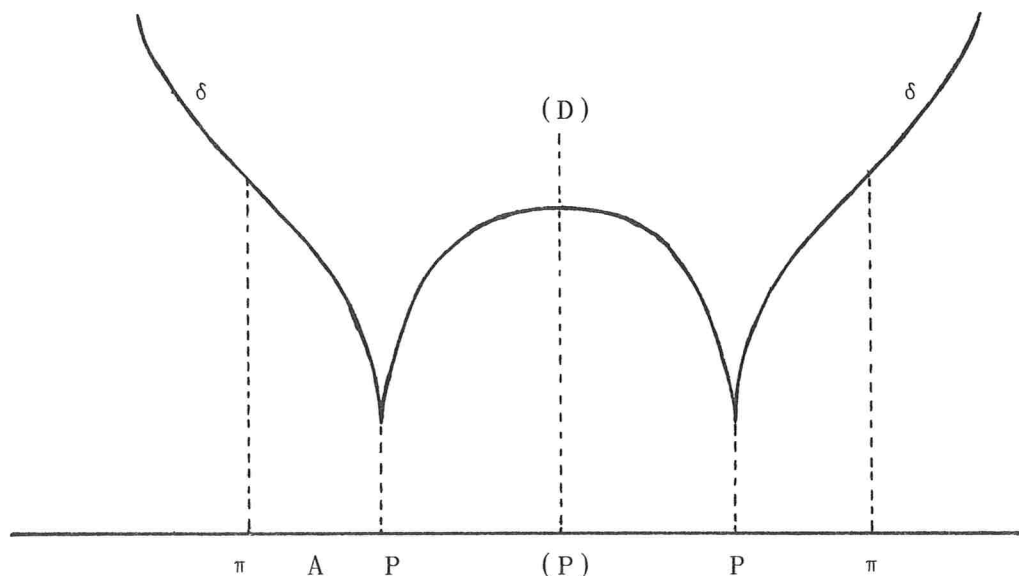


Figure 5

Et VARIGNON d'expliquer que non seulement le nouveau calcul permet bien de trouver tous les extréma, mais qu'il permet également de mieux cerner les propriétés de la courbe.

Ainsi les arguments de ROLLE ne paraîtront guère convaincants, même si les difficultés qu'il aura soulevées sont réelles. Le calcul différentiel était né, ses succès et ses découvertes incontestables, qu'importe que les fondements n'en soient pas clairs.

-“Malgré tout cela - dira Fontenelle [4] - l'infini a triomphé, et s'est emparé de toutes les hautes spéculations des géomètres. Les infinis ou infiniment petits de tous les ordres sont aujourd'hui également établis ; il n'y a plus deux partis dans l'Académie. (...)

Il faut convenir cependant que toute cette matière est environnée de ténèbres assez épaisses ; et de là vient que quelques-uns de ceux qui embrassent les idées de l'infini, ne les prennent pourtant que pour des idées de pure supposition sans réalité, dont on ne se sert que pour arriver à des solutions difficiles, qu'on abandonne dès qu'on y est arrivé, et qui ressemblent à des échafaudages qu'on abat aussitôt que l'édifice est construit. C'est là une façon de penser mitigée, qui rassure un peu contre la frayeur que l'infini cause toujours.”

C'est pourquoi, dans un second temps, n'attaquera-t-on plus les conclusions et les résultats du calcul infinitésimal, si performant, et qui va tellement plus loin que ne le permettait la méthode des Anciens. On en contestera seulement les principes et la démarche. Tandis que les mathématiciens avancent et explorent avec enthousiasme ce nouveau champ d'activité si fécond, les philosophes vont s'emparer du problème. En 1734 George BERKELEY publie *“l'Analyste ou Dissertation Adressée à un Mathématicien Incrédule”*⁽¹⁾ où l'on examine si l'objet, les principes et les inférences de l'Analyse moderne sont conçus plus distinctement, ou déduits avec plus d'évidence que les Mystères de la Religion et les règles de la Foi.”

Les objectifs de cette Dissertation sont d'abord d'ordre philosophique et théologique, mais ils donneront l'occasion à BERKELEY d'exprimer une vigoureuse et profonde critique des méthodes infinitésimales. Celle-ci concernera essentiellement le calcul de Newton son compatriote, mais elle s'applique aussi bien au calcul différentiel dont la similitude avec le premier ne fait pas de doute, pour le philosophe.

“Je ne discute en rien vos conclusions -dira-t-il- mais seulement votre logique et votre méthode. Comment démontrez-vous ? De quels objets vous occupez-vous et les concevez-vous clairement ? Avec quels principes progressez-vous ? Quelle en est la validité ? Et comment les mettez-vous en oeuvre ? Il faut bien rappeler que je ne m'occupe pas de la vérité de vos théorèmes, mais seulement de la manière d'y parvenir ; est-elle légitime, claire ou obscure, scientifique ou tâtonnante ?”

Reste la question d'expliquer comment, avec une démarche aussi douteuse et des principes si obscurs, on peut néanmoins arriver à des résultats exacts :

“Et comme cela peut paraître un paradoxe inexplicable que les mathématiciens puissent déduire des propositions vraies de principes faux, qu'ils soient corrects dans leurs conclusions et pourtant s'égarent dans les prémisses, j'essaierai avec un soin particulier d'expliquer pourquoi cela peut se produire et de montrer comment l'erreur peut engendrer la vérité, bien qu'elle ne puisse engendrer la science.”

La thèse de BERKELEY pour expliquer cette situation paradoxale est celle de la

(1) Il s'agissait de HALLEY qui aurait traité les dogmes religieux d'incompréhensibles et obscurs

compensation des erreurs : dans un calcul infinitésimal, le mathématicien commet en réalité deux erreurs de sens contraires qui de ce fait s'annulent. L'argumentation du philosophe serait trop longue à développer ici et son intérêt très limité, car développée seulement sur la situation très simple du calcul de la sous- tangente à une parabole. Or comme le dira LAGRANGE dans la préface à la nouvelle édition de sa **théorie des fonctions analytiques** (1813), à propos de la compensation des erreurs : “C'est ce qu'on peut faire voir aisément dans des exemples, mais dont il serait peut -être difficile de donner une démonstration générale”.

Ce thème de la compensation des erreurs aura pourtant une certaine faveur tout au long du 18^e siècle. LAGRANGE lui-même l'adoptera un certain temps, au début de ses travaux sur le calcul différentiel. C'est ainsi qu'il expliquera dans une note parue dans les **Miscellanae Taurinensis** (Tome II 1760-1761) [10].

*“Dans la méthode des infiniment petits (...) le calcul redresse de lui-même les fausses hypothèses que l'on s'y fait. On imagine par exemple qu'une courbe soit un polygone d'une infinité de petits côtés, dont chacun étant prolongé devienne une tangente à la courbe. Cette supposition est réellement fausse ; car le petit côté prolongé ne peut jamais être autre chose qu'une véritable sécante ; mais l'erreur est détruite par une autre erreur qu'on introduit dans le calcul en y négligeant comme nulles des quantités, qui selon la supposition ne sont qu'infiniment petites.”

Une telle explication avait visiblement l'avantage de tranquilliser les esprits de mathématiciens soucieux avant tout d'exploiter les possibilités mirifiques ouvertes par ce nouveau calcul. Elle est cependant significative du fait que, en l'espace de près de 80 ans (le premier texte fondateur du calcul différentiel de LEIBNIZ date de 1684) on a l'impression de n'avoir pratiquement pas avancé d'un pouce quant à la mise en place d'un fondement précis et cohérent de ce calcul.

Inventaire des difficultés

Les choses sont en réalité plus complexes. Certes l'efficacité du calcul infinitésimal est devenue au fil des années plus patente, et la valeur heuristique des notions d'infini qui lui sont liées ne peut être mise en doute. Néanmoins les principes et les méthodes de calcul, au fur et à mesure des progrès réalisés, vont soulever des difficultés variées et redoutables. Suivons J.L. OVAERT et J.J. SANSUC dans **Philosophie et calcul de l'infini** [11] pour en faire l'inventaire.

Difficultés intrascientifiques

- * Le **langage** utilisé dans le calcul infinitésimal est essentiellement **géométrique et mécanique** ; le calcul porte non pas sur des nombres mais sur des grandeurs ou des rapports de grandeurs. En cela il est tributaire de la géométrie des Anciens, alors que son champ d'investigation dépasse très largement cette géométrie.
- * Le **concept de fonction** disponible est trop étroit, limité aux fonctions "analytiques" composées à l'aide des opérations et des fonctions élémentaires. Paradoxalement, cet ensemble réduit de fonctions confèrera une sécurité relative aux calculs, qui sans cela auraient pu se trouver en défaut (comme cela se passera plus tard au 19^e siècle avec la découverte de toutes sortes de fonctions "pathologiques").
- * Les contenus du calcul infinitésimal sont difficiles à **classer et à organiser** - d'ailleurs les domaines de l'algèbre et plus encore ceux de géométrie ne sont guère séparés de celui de l'analyse.
- * La manipulation des **infiniment petits d'ordre supérieur** est peu sûre, et conduit quelquefois même à des erreurs (chez Newton, chez Euler, chez Lagrange) notamment lorsqu'on néglige au cours d'un calcul des infiniment petits du même ordre que celui qu'on veut étudier.

Difficultés d'ordre pédagogique

Tant qu'une science est l'objet de recherches individuelles on peut avancer, poussé par une dynamique créatrice sans se préoccuper beaucoup de la clarté et de la rigueur des principes de bases. Or le 18^e siècle verra se développer quelque chose de nouveau : la nécessité de diffuser la science. Peu encore dans les écoles en ce qui concerne du moins le nouveau

calcul, mais par l'édition de livres de plus en plus nombreux (il suffit de considérer les nombreuses éditions de l'“Analyse des infiniment-petits” de L'HOPITAL chaque fois enrichies de notes supplémentaires), par les échanges entre les Académies de plus en plus fréquents en Europe, par les salons. Pour enseigner une science nouvelle on est obligé d'être clair soi-même, si l'on veut que l'élève comprenne. Cette nécessité nouvelle de diffuser le savoir sera d'ailleurs une des sources majeures d'approfondissement et de résolution de la crise.

Difficultés d'ordre philosophique

L'infini avait été jusque là essentiellement un objet de réflexion philosophique. Or voilà qu'il devient objet de calcul. Il n'était pas facile d'éviter les interférences entre les deux domaines, d'autant moins que les savants n'étaient guère séparés comme aujourd'hui en scientifiques et philosophes - la science étant longtemps considérée comme une pratique du philosophe. D'où la nécessité de bien distinguer le type d'infini intervenant dans chaque domaine spécifique. Dans [10], le Père GERDIL (1718-1802), de l'ordre des Barnabites, essaiera de préciser les choses, en reprenant la distinction aristotélicienne de l'infini en acte (actuel) et l'infini en puissance, dans un article intitulé : “**De l'infini absolu considéré dans la Grandeur**”.

Le mot infini appliqué à la quantité peut être pris en deux sens : tantôt il signifie une propriété essentielle à la grandeur, par laquelle on conçoit qu'elle est susceptible d'augmentation et de diminution sans fin ; tantôt il exprime l'élévation actuelle d'une grandeur à la dernière période, pour ainsi dire, de l'augmentation, dont elle est susceptible, ou son abaissement jusqu'à la dernière période de sa diminution possible. Une quantité infinie dit-on communément, est celle qui a reçu tous les accroissements finis possibles : une quantité infiniment petite, celle qui a reçu tous les décroissements finis possibles.

Locke distingue très nettement ces deux significations. Il désigne la première par le mot d'infinité, qu'il substitue à celui d'infini en puissance, employé par les anciens pour marquer qu'il n'est aucun terme qui borne l'augmentation, ou la diminution possible de la grandeur. Il exprime la seconde par le mot simple d'infini, c'est à dire de l'infini absolu et en acte : et il ajoute que cette sorte d'infini dans la quantité est impossible à concevoir, car dit-il, une répétition à l'infini ne saurait jamais représenter l'infini.

La première idée est très claire. C'est une suite de la notion même de la grandeur ; quelque augmentation que la grandeur ait reçue, on conçoit, qu'elle peut être encore augmentée, et l'esprit ne voit aucune borne à cette suite possible d'augmentation. Mais pour former la notion de l'infini absolu, il faudrait allier ces deux idées, qu'une suite d'augmentation ne peut avoir aucune fin, et que pourtant cette augmentation peut parvenir à son comble. Aussi Chambers raisonnant sur les principes de Locke n'hésite pas de dire, que l'idée d'un nombre actuel infini est un absurdité.

Les anciens géomètres scrupuleusement attachés à la rigueur de la démonstration, et à la clarté des idées, qui en est inséparable, ont heureusement employé la première notion de l'infini dans leurs recherches, et en ont sévèrement écarté l'idée de l'infini absolu, dont les résultats paradoxaux sont plus faits pour étonner une imagination

avide du merveilleux, que pour satisfaire un esprit ami du vrai”.

Encore une fois, la géométrie des Anciens apparaît le modèle de la science mathématique, et ce thème parcourt tout le 18^e siècle, apparaissant peu à peu, au fur et à mesure du développement grandissant du calcul infinitésimal comme une sorte de paradis perdu. Aussi est-il temps de faire un retour en arrière, et de voir quelle est cette méthode des Anciens tant louée. Quelles furent les raisons de son invention et pourquoi avait-elle gardé un tel caractère contraignant de modèle insurpassable pendant deux mille ans ?

La méthode des Anciens ⁽¹⁾

Si peu que nous sachions de PYTHAGORE et de son école, dans le détail, nous pouvons cependant considérer comme certains les faits suivants :

- Ils ont créé les bases de la mathématique grecque en démontrant des propriétés connues empiriquement jusque là. De cette façon, ils ont fait des mathématiques une science **déductive**.
- Cette science originelle était essentiellement *arithmétique* et non géométrique : s'il y a une proposition qui émerge de l'ombre entourant l'école pythagoricienne, c'est bien celle-ci "*Tout est nombre*" ⁽²⁾ Avec ce corollaire : "Si deux objets quelconques se comportent comme deux nombres, alors ils sont eux-mêmes deux nombres cachés. Par exemple, deux sons différents sont définis, en musique, par un rapport de nombres.
- Cette conception d'une arithmétique universelle a été confrontée à une véritable crise tragique, par la découverte de l'incommensurabilité de la diagonale du carré avec le côté. On peut d'ailleurs penser que l'origine de cette découverte se situe également dans la musique. Si l'on cherche une fréquence sonore f_1 comprise entre f_0 et $f_2 = 2f_0$ correspondant à une octave, f vérifie :

$$\frac{f_0}{f_1} = \frac{f_1}{f_2} \text{ ou } f_1^2 = 2f_0^2$$

- On peut imaginer que les pythagoriciens n'ont pas tout de suite capitulé devant cette découverte. Ils ont dû essayer de sauvegarder leur idéal d'une *Arithmétique universelle*, et chercher comment adapter celle-ci à cette nouvelle découverte. On a, en effet, un certain nombre d'indications - datant des années 450-400 av. J.C., pour étayer la conjecture d'une utilisation d'infiniment petits (le sophiste ANTIPHON, ANAXAGORE, DEMOCRITE).

(1) Pour ce paragraphe, je me suis appuyé essentiellement sur l'article de HASSE et SCHOLZ : "*Die Grundlagen Krisis der Griechischen Mathematik*" dans KANT Studien 1928 [12].

(2) Nombre entier naturel bien entendu.

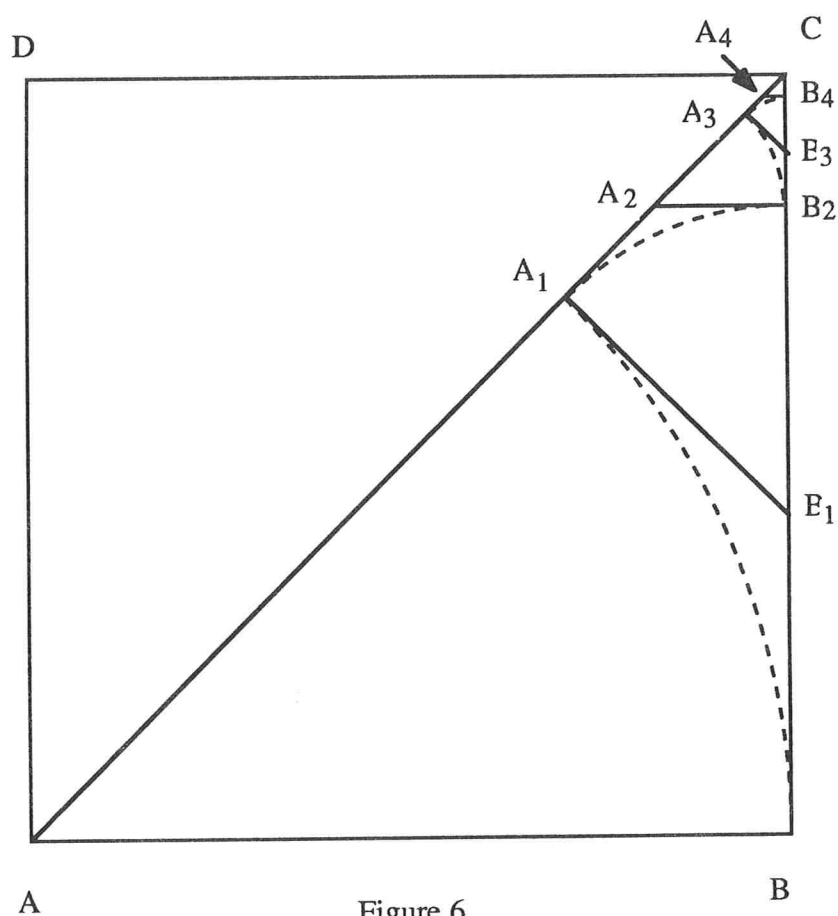


Figure 6

Pour nous limiter à l'exemple de la diagonale du carré, on peut imaginer les pythagoriciens disant : "La proposition de l'incommensurabilité de ces deux longueurs (diagonale et côté) est certes incontestablement vraie, aussi longtemps que l'on opère avec des unités, **de longueurs finies** ; mais elle n'est plus vraie si l'on va jusqu'à des unités de longueur infiniment petite. Et de présenter un processus de mise en évidence de cette commensurabilité : l'**antiphaïrèse**. On trouve deux expressions de ce processus chez EUCLIDE :

. La proposition I du livre VII s'applique aux entiers :

"Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seraient premiers entre eux."

. La proposition II du livre X concerne les grandeurs incommensurables :

"Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent, ces grandeurs seront incommensurables."

On aura bien sûr reconnu ce qu'il est convenu d'appeler aujourd'hui l'algorithme d'EUCLIDE. Montrons comment il permet de mettre en évidence l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré (cf SZABO : **les débuts des mathématiques grecques p. 215 [13]** et CAVEING : **Zénon d'Elée, prolégomènes aux doctrines du continu [14]**).

Considérons le carré ABCD de côté $a = AB$, de diagonale $d = AC$ et effectuons l'algorithme d'EUCLIDE, c'est-à-dire retranchons AB de AC qui donne comme reste $A_1C = BB_1$ puis BB_1 de $AB = BC$, puis $B_2C = A_1A_2$ de BB_1 etc... (figure 6) déterminant ainsi une suite de points A_n sur AC et de point B_n sur BC tels que, si l'on pose $A_nB_n = a_n$ on ait, successivement :

$$d = a + a_1 ; a = 2a_1 + a_2 ; a_1 = 2a_2 + a_3 ; a_2 = 2a_3 + a_4 ; \text{ et généralement } a_{n-1} = 2a_n + a_{n+1}.$$

De sorte que, si l'on négligeait à un rang n donné, le reste a_{n+1} , on aurait les approximations suivantes de d :

$$d = a ; d = a \left(1 + \frac{1}{2} \right) ; d = a \left(1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} \right) \text{ etc...}$$

$$d = a \left[1 + \frac{1}{\frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} \right] \text{ avec n traits de fraction}$$

la fraction continue entre crochet convergeant vers $\sqrt{2}$, car le processus engagé par cet algorithme est bien sûr infini.

On a de sérieuses raisons de penser que le processus utilisé ici était certainement connu des Pythagoriciens, mais l'absence à leur époque d'un principe de convergence tel qu'il est formulé par EUCLIDE dans la proposition 1 du livre X les empêche de conclure vraiment : "on avait le commencement d'une démonstration (...) laquelle se perdait dans les sables de la régression à l'infini, comme d'ailleurs les approximations de mesure qu'on pouvait en tirer".[14 - p.122]

Mais EUCLIDE écarte soigneusement toute référence à l'infini et tout calcul sur des infiniment petits. Se pose alors la question : comment se fait-il que ces tentatives n'aient pas été acceptées, mais qu'au contraire elles aient été considérées comme franchement mauvaises et non rigoureuses ; comment se fait-il qu'en deux générations se soit créée une mathématique fondée sur des bases considérées encore aujourd'hui comme parfaitement rigoureuses, mais excluant tout recours à un calcul sur des infiniment-petits ? La réponse est certainement à chercher du côté d'un certain ZENON d'ELEE. Sans entrer dans le détail de l'examen de ses paradoxes qui sont connus, relevons que ceux-ci rendent patente l'impossibilité de penser la grandeur continue. Cette impossibilité est rapportée de la façon suivante par un commentateur d'ARISTOTE, du 5^e siècle après J.C., nommé SIMPLICIUS qui dit ceci :

"En tout cas dans son ouvrage (celui de ZENON) qui contient de nombreux épichérèmes⁽¹⁾, il montre en chacun d'eux que l'affirmation de l'existence de la pluralité conduit à affirmer des conséquences contraires. Parmi ces arguments, il y en a un dans lequel il montre que si les étant sont pluralité, ils sont à la fois grands et petits : grands au point d'être illimités en grandeur, petits au point de ne pas avoir de grandeur du tout."

Ce que HASSE et SCHOLZ interprètent ainsi :

"Si l'on admet qu'un segment est un agrégat composé d'une infinité de segments élémentaires infiniment petits, de deux choses l'une :

- ou bien chaque segment élémentaire a une longueur finie, différente de zéro. Alors le segment obtenu en mettant bout à bout ces segments élémentaires aura une longueur infinie.
- ou bien les segments élémentaires ont une longueur nulle au sens strict du terme. Alors le segment qu'ils engendrent en les mettant bout à bout aura aussi une longueur nulle."

Aussi, convaincus par les arguments de ZENON du caractère contradictoire de la divisibilité à l'infini d'une grandeur, mais en même temps mis en présence de cet infini dans l'existence de grandeurs incommensurables, les mathématiciens grecs n'avaient d'autre ressource que de chercher une autre voie. Selon la belle formule de J.T. DESANTI [15, p. 446].

(1) arguments

"Il faudra, faute de calculer "l'impensable", apprendre à penser "l'incalculable""

Pour cela, ils quitteront l'arithmétique universelle des Pythagoriciens pour se réfugier dans la géométrie. Ils abandonneront le nombre au profit de la *raison* = rapport de grandeur. D'où cette extraordinaire construction du livre V d'EUCLIDE (attribuée à EUDOXE) dont il suffira ici d'en donner la définition 6 :

"Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde et la troisième à la quatrième, lorsque des équi-multiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équi-multiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équi-multiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équi-multiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois".

Ce qu'en termes modernes nous écririons : Si A, B, C, D sont quatre grandeurs alors $A/B = C/D$ si et seulement si pour tout entier m et tout entier n on a les implications :

$$nA > mB \Rightarrow nC > mD$$

$$nA = mB \Rightarrow nC = mD$$

$$nA < mB \Rightarrow nC < mD$$

L'infini est ainsi écarté du calcul. Il est mis dans les quantificateurs : **pour tout entier m et n**, ce qui permet effectivement de penser l'incalculable (par exemple $\sqrt{2}$) comme une sorte de classe d'équivalence de rapports égaux, cette égalité pouvant se définir et se penser par un ensemble d'inégalités portant uniquement sur des entiers. On ne manquera pas de relever les analogies entre cette construction d'EUDOXE et celle de DEDEKIND, vingt siècles plus tard [16]. Cette définition sera parfaitement opératoire chez EUCLIDE et ARCHIMEDE. C'est elle qui permet par exemple de démontrer en toute rigueur que "Les cercles sont entr'eux comme les carrés de leurs diamètres" (EUCLIDE Livre XII proposition II). Ce rapport commun à tous les cercles permet ainsi de parler du nombre π (ce qu'EUCLIDE ne fait pas) de le penser, sans avoir besoin de le calculer.

Pourtant il faut calculer, il faut mesurer : l'aire d'un cercle, d'un segment de parabole ; le volume d'une sphère, d'un cylindre, d'un cône. Mais comment mesurer des grandeurs qui échappent à tout calcul fini, à cause de lignes et de surfaces courbes ? L'outil sera peu à peu mis en place par EUCLIDE et surtout ARCHIMEDE, qui deviendra la fameuse **méthode des Anciens** que GREGOIRE de St VINCENT appellera bien plus tard (vers 1647) la **méthode d'exhaustion**.

Rappelons en le principe. Soit à comparer par exemple l'aire a d'une surface curviligne avec l'aire S d'une surface connue. (N'oublions pas qu'en accord avec l'axiomati-

que du livre V, le calcul se fait toujours sur des **rapports** de grandeurs, et non sur les grandeurs elles-mêmes.) La méthode d'exhaustion consiste alors à construire deux surfaces d'aires U et V encadrant à la fois la surface dont on cherche à déterminer l'aire A et la surface donnée d'aire S , de telle sorte que la différence $U - V$ soit suffisamment petite pour aboutir à une contradiction. On démontre ensuite par une double réduction à l'absurde que A ne peut être ni strictement supérieure ni strictement inférieure à S et donc que $A = S$ (cf. [17] p 131 et [18] p 72) ARCHIMEDE en particulier, utilisera cette méthode si précise et si rigoureuse avec beaucoup d'élégance et de génie. Mais elle a cependant un immense défaut : sa valeur heuristique est quasi nulle. Elle suppose en effet connu le résultat dont elle ne fait qu'administrer la preuve, certes avec une force de conviction infaillible. C'est pourquoi les grandes découvertes d'ARCHIMEDE sont établies en deux temps :

Par des procédés essentiellement mécaniques, en utilisant le principe du levier et en considérant la surface (par exemple) composée de lignes en équilibre avec les lignes d'une autre surface dont on connaît l'aire, il découvre un certain rapport numérique. On connaît cette méthode parce qu'ARCHIMEDE l'a lui-même expliquée dans une lettre à ERATOSTHENE. Signalons que ce procédé de considérer une surface comme composée d'une infinité de lignes sera repris par les mathématiciens de la Renaissance italienne sous le vocable "géométrie des indivisibles" et sera une des étapes vers l'invention du calcul différentiel. Mais pour ARCHIMEDE il n'a aucune valeur démonstrative et est la plupart du temps coupé du deuxième moment, qui reste seul : la démonstration par la méthode d'exhaustion.

On comprend alors la fascination exercée par cette méthode sur l'esprit des mathématiciens de tous temps et singulièrement ceux du 18^e siècle : eux aussi ont mis au point un outil de découverte infiniment plus efficace que celui d'ARCHIMEDE : le calcul infinitésimal, lequel leur permet de mesurer toutes sortes de grandeurs tout à fait inaccessibles aux méthodes des Anciens. Mais leur manque en contrepartie une méthode de démonstration aussi convaincante qu'est la méthode d'exhaustion. D'où cette référence continuelle, comme un leit-motiv, à travers tous les textes du 18^e siècle à cette "méthode des Anciens," qu'aucune théorie, apparemment n'est arrivée jusqu'à présent, à égaler dans sa clarté et sa rigueur.

En 1784, cela fait exactement cent ans que LEIBNIZ a publié son texte fondateur du calcul différentiel ("**Acta Eruditorum**" (1684)) ; un siècle de découvertes et de développements extraordinaires qui pourtant laissent partout et toujours un malaise : celui qui naît du sentiment qu'ils sont fondés sur des notions peu claires, voire contradictoires. Il fallait en finir et proposer enfin :

"Une théorie claire et précise de ce qu'on appelle INFINI en Mathématique."

Les réponses à la question de l'Académie

Bien que les fondements du calcul différentiel ne fussent toujours pas très sûrs, la situation avait tout de même pas mal évolué par rapport aux polémiques du début du siècle. Les contributions immenses d'EULER, D'ALEMBERT et LAGRANGE vont élargir le champ de réflexion, tout en compliquant davantage encore la situation.

La situation avant 1784

EULER adopte une position formaliste où les problèmes sont résolus par le calcul. Celui-ci s'occupe de quantités finies, les différentielles ne sont pas des grandeurs et doivent être interprétées comme des zéros absolus. Voici ce qu'il en dit dans un texte de 1765 : "De l'utilisation des fonctions discontinues en Analyse" [19].

"Alors que pour la plupart des hommes cette notion de différentielle, et de rapport liant ensemble des quantités évanouissantes, semble habituellement au plus haut point suspecte, tous les doutes sont réduits en fumée sur un seul exemple. Que l'on se donne donc une fonction de ce genre, $y = ax^2 + bx + c$. Voyons d'abord quelle augmentation cette fonction reçoit lorsqu'on donne à la quantité x un accroissement quelconque ω . Posons $x + \omega$ à la place de x . Notre fonction devient $a(x + \omega)^2 + b(x + \omega) + c$; elle reçoit donc un accroissement $= 2ax\omega + a\omega^2 + b\omega$ que nous désignons par le signe Δy et, semblablement, nous désignerons également la quantité ω , comme accroissement de x lui-même par le signe suivant Δx .

Donc comme on avait

$$\Delta x = \omega \text{ et } \Delta y = 2ax\omega + a\omega^2 + b\omega,$$

on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2ax\omega + a\omega^2 + b\omega}{\omega} = 2ax + a\omega + b$$

Ainsi nous obtenons le rapport entre les accroissements Δx et Δy , qui est vrai quel que soit l'accroissement que la quantité x prend. Donc le même rapport correspondra à la vérité si nous prenons l'accroissement comme tout à fait évanouissant, et en ce cas les accroissements Δx , Δy sont désignés habituellement par les symboles dx et dy et appelés différentielles. D'où, très évidemment, si l'on pose $\omega = 0$, il vient

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b$$

Ce rapport est vrai, même si les termes entre lesquels il existe sont évanouissants. Ce seul exemple suffit, semble-t-il, à lever tous les doutes que l'on oppose couramment à la notion d'infiniment petit utilisée en Analyse et à mettre ce calcul hors de tout soupçon".

D'ALEMBERT reprend une idée de NEWTON qui avait défini le rapport différentiel

$\frac{dy}{dx}$ (noté chez Newton $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$) comme la "raison ultime", reliant par là le nouveau calcul à la méthode des Anciens. Cette méthode de NEWTON appelée aussi "**méthode des premières et dernières raisons**" devient alors une **méthode des limites**.

C'est pourquoi il dira dans l'article "LIMITE" de l'Encyclopédie [20]

"La théorie des **limites** est la base de la vraie métaphysique du Calcul Différentiel. Voyez DIFFÉRENTIEL, FLUXION, EXHAUSTION, INFINI. A proprement parler, la **limite** ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la **limite** ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra. Le cercle, par exemple, est la **limite** des polygones inscrits et circonscrits ; car il ne se confond jamais rigoureusement avec eux, quoique ceux-ci puissent en approcher à l'infini".

La conception de d'ALEMBERT donnait le sentiment qu'elle était toute proche de la méthode des anciens. Elle calcule non avec des infiniment petits mais avec des rapports de grandeurs non nulles dont on cherche, comme dans la méthode d'exhaustion la "raison ultime". En réalité il y a eu tout de même un glissement de sens. On chercherait en vain chez ARCHIMEDE l'image du cercle comme limite de polygones. Chez lui, ce qui joue ce rôle de limite est toujours un terme "butoir" **extérieur** à la suite qui converge vers lui ; et les démonstrations sont basées sur l'idée d'une différence que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut. Chez NEWTON ou D'ALEMBERT ce terme "butoir" devient un **terme ultime** ("ultima ratio") même s'il est situé à l'infini, et qui fait partie de la suite. De plus les démonstrations de convergence sont la plupart du temps abandonnées.

Ces deux tentatives de fondement : celles d'EULER et D'ALEMBERT restent liées à une problématique de l'infini. LAGRANGE essaiera, quant à lui à sortir de ce piège de l'infini et à créer une théorie du calcul différentiel dégagée "**de toute considération d'infiniment-petits, d'évanouissement, de limites, de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.**"

Une telle théorie reposera essentiellement sur le développement en série entière des fonctions, lequel développement était supposé exister assez généralement pour la conception que l'on avait alors des fonctions. Ce point de vue sera défendu par plusieurs mathématiciens comme par exemple CONDORCET ou ARBOGAST. Empruntons à ce dernier une des définitions les plus claires et les plus fermes qui puissent en être données, dans une lettre à un de ses amis [21] :

"Dans ma théorie dx , dy , d^2y etc... sont de véritables quantités, toujours assignables, jamais évanouissantes, jamais infiniment petites, mais variables ou plutôt variantes : dy/dx est une quantité finie et constante ou **non variante**, et d^2y/dx^2 de même.

Pour éclaircir ce que je viens de dire, soit y une fonction de x , j'aurai Δy de cette forme :

$a\Delta x + b\Delta x^2 + \Delta x^2 F : \Delta x$; $\Delta x^2 F : \Delta x$ exprimant tout ce qui reste après Δx^2 ; ici x est la variable,

Δx la variante, c'est-à-dire que Δx peut recevoir toutes sortes de valeurs, toujours assignables, mais que Δx n'a point de valeur fixe, ainsi que les constantes qui entrent dans a et b . J'aurai : $(\Delta y / \Delta x) = a + b\Delta x + \Delta x F : \Delta x$ où l'on voit que $(\Delta y / \Delta x)$ est composée de deux sortes de quantités, les unes variant avec Δx , que je nomme dépendantes de Δx , l'autre qui ne varie pas avec Δx et qui en est indépendante.

Actuellement, si l'on demande la partie $\Delta y / \Delta x$ qui est indépendante de Δx , je peux représenter cette partie par dy/dx et j'aurai : $dy/dx + \text{une quantité dépendante de } \Delta x = a + b\Delta x + \Delta x F : \Delta x$.

Or suivant le **principe dont je vous ai parlé**, il est nécessaire que les quantités dépendantes et les quantités indépendantes de Δx soient égales entre elles séparément, parce qu'il ne peut pas exister de rapport entre des quantités variantes et celles que l'on conserve des valeurs fixes, il faut donc qu'on ait $(dy/dx) = a$, ensuite quantité dépendante de $\Delta x = b\Delta x + \Delta x F : \Delta x$ (...)

Ainsi quelle idée attachera-t-on à l'expression dy/dx .

Je dis que (dy/dx) est la partie indépendante de Δx dans $(\Delta y / \Delta x)$. Qu'est-ce que dy ? L'équation $(dy/dx) = a$ donne $dy = adx$; ainsi **dy est la partie de Δx qui est affectée de la première puissance de Δx .**"

Cette définition présente un avantage immense par rapport aux précédentes : elle fait référence à un calcul purement algébrique sur des quantités finies écartant du coup toute difficulté qui proviendrait soit de la considération d'expressions du type $0/0$ comme chez EULER, soit ferait référence à l'infini par l'intermédiaire du concept de limite comme chez D'ALEMBERT. Seulement comment trouver les coefficients a et b et éventuellement la fonction $F : \Delta x$ de ce développement sans justement utiliser le concept de limite ? Tant que la fonction y est un polynôme, il n'y a pas de difficulté à cela. Mais si y est une fonction irrationnelle, voire transcendante (sans même évoquer une fonction arbitraire -qu'on ne considérerait pas à l'époque comme susceptible d'un calcul) la détermination du développement en série entière de y -même en admettant qu'il existe- nécessite soit la formule du binôme pour des exposants réels quelconques soit des considérations d'ordre géométrique.

Si l'on suppose, comme le fait ARBOGAST, reprenant une idée d'EULER, que toute fonction y peut s'écrire (sauf pour quelques valeurs exceptionnelles de x) sous la forme

$$y = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \dots \text{ etc...}$$

où $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ sont des exposants réels quelconques, alors en donnant à x un accroissement Δx , y aura un accroissement $\Delta y = A(x + \Delta x)^\alpha + B(x + \Delta x)^\beta + \dots - \Delta x^\alpha - Bx^\beta \dots$

Et si on veut alors avoir Δy en série de puissance de Δx il faut savoir calculer le développement en série entière de $(x + \Delta x)^\alpha$, $(x + \Delta x)^\beta$, ... Or le développement de $(x + a)^\alpha$, s'il était connu depuis longtemps, et pour un exposant réel quelconque, n'avait pourtant pas trouvé de démonstration satisfaisante. Une telle démonstration n'interviendra que bien plus tard lorsque CAUCHY et ABEL auront mis en place des méthodes d'analyse rigoureuse intégrant les concepts de fonction continue et de domaine de convergence.

Restent les considérations d'ordre géométriques. Celles-ci, on l'aura remarqué dans les citations d'EULER, de D'ALEMBERT, d'ARBOGAST, semblent avoir disparu, et c'est effectivement une modification qui se produit peu à peu dans la façon d'approcher le calcul infinitésimal.

On a l'impression que les mathématiciens du 18^e siècle se rendent compte peu à peu, que la difficulté de concevoir clairement les notions d'infiniment-petit et d'infiniment-grand, vient d'une approche trop géométrique des problèmes, et que la voie menant à des méthodes rigoureuses passe par une algébrisation de l'analyse. C'est ce que tentent LAGRANGE et tous ceux qui veulent exclure définitivement les considérations d'infiniments petits. Il n'empêche qu'occasionnellement la géométrie resurgit pour fonder des relations purement analytiques. Témoin cet extrait de la **“Théorie des fonctions analytiques”** de LAGRANGE [1].

“Tout se réduit à prouver que dans l'expression de $\sin x$ en série le premier terme doit être simplement x , au lieu que nous l'avons supposé en général Ax . En employant la considération des infiniment petits, cela est évident, car on voit que, dans le cercle, le sinus, à mesure qu'il diminue, s'approche de plus en plus de l'arc, jusqu'à s'y confondre dans l'infiniment petit. Ainsi, en supposant l'arc x infiniment petit, on a $\sin x = x$; par conséquent, $A = 1$.

Mais, comme nous avons cherché à rendre notre analyse indépendante de la considération des infiniment petits, nous devons aussi en affranchir la démonstration du point dont il s'agit.

Pour cela, nous ne supposons que le principe, établi par Archimède, que le sinus, qui est la moitié de la corde de l'arc double, est moindre que l'arc auquel il répond, et que la tangente est plus grande que ce même arc. Nous aurons ainsi

$$\sin x < x \text{ et } \tan x > x.”$$

Cette démarche représente pourtant une avancée considérable, surtout si on la replace dans l'intégralité du texte de LAGRANGE. Pour la première fois l'analyse est traitée par un travail sur des encadrements et des majorations. Le texte de LAGRANGE date de 1797, soit treize ans après sa question posée à la communauté mathématique par l'intermédiaire de l'Académie de BERLIN. Ce qui montre bien qu'il a poursuivi sa propre réflexion amorcée dès son Mémoire **“Sur une nouvelle espèce de calcul”** [22] de 1772, et que les réponses apportées par d'autres mathématiciens ne l'ont pas satisfait.

Vingt trois mémoires furent présentés à l'Académie. Ils étaient anonymes, avec un numéro et une devise pour l'identification de l'auteur

“L'Académie a reçu beaucoup de pièces sur ce sujet. Leurs auteurs ont tous oublié d'expliquer **comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire**, comme l'est celle d'une quantité infinie. Ils se sont tous, plus ou moins, écartés de la **clarté**, de la **simplicité**, et surtout de la **rigueur** qu'on exigeait. La plupart n'ont pas même vu que le principe demandé devait être, non pas borné au calcul infinitésimal, mais étendu à l'Algèbre et à la Géométrie traitée à la manière des Anciens.

Le sentiment de l'Académie est donc que sa demande n'a reçu aucune réponse complète.

Cependant elle a trouvé que celui qui a le plus approché de ses intentions, est l'Auteur de la Pièce française qui a pour devise

L'infini est le gouffre où s'absorbent nos pensées

L'Académie lui a donc adjugé le Prix. L'ouverture du billet a montré que cet Auteur est M. L'HUILIER de Genève, Membre de la Société d'éducation à Varsovie.”[3]

D'après YOUSCHKEVITCH qui a pu avoir connaissance des 23 mémoires (cf.[23]) l'appréciation donnée par l'Académie (en fait LAGRANGE) est justifiée pour l'essentiel, et “parmi ces (autres) mémoires, celui de L'HUILIER se distinguait, sans aucun doute, par ses hautes qualités, bien que son idée fondamentale ne fut guère originale”.

Les mémoires présentés étant, comme on l'a vu, anonymes, on ne connaît pas les autres auteurs. L'un d'eux a cependant pu être identifié car il contient presque mot à mot les “Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal” [9] édité en 1797. Il s'agit donc de Lazare CARNOT. Son mémoire intitulé “**Dissertation sur la théorie de l'Infini en Mathématique** avait pour devise :

“Celui-là seul peut juger sainement des choses qui sait éviter l'abus des mots”

Où l'on retrouve la compensation des erreurs.

Ce qui est étonnant, c'est que encore à la fin du 18^e siècle, 60 ans après BERKELEY, CARNOT lui reprenne sa théorie de la compensation des erreurs, certes en la précisant et en essayant d'en faire un principe général d'explication du calcul infinitésimal. Je propose que nous nous y attardions, non pas tant pour l'intérêt intrinsèque de cette méthode, que pour ce qu'elle peut nous révéler de la façon de concevoir les nombres réels, la notion de variable. On trouvera en annexe la photocopie de quelques pages extraites des “Réflexions...” et présentant sur un exemple, le sens à donner au thème de la compensation des erreurs. Ce qu'il me paraît important de souligner c'est la “métaphysique” sous-jacente. Ainsi cette définition

“J'appelle **quantité infiniment petite**, toute quantité qui est considérée comme continuellement décroissante, tellement qu'elle puisse être rendue aussi petite qu'on le veut, sans qu'on soit obligé pour cela de faire varier celles dont on cherche la relation” [9, p 13].

Ce qui ressort de cette définition c'est

- 1) qu'une quantité (ce que nous appelons “**réel**” aujourd'hui) est toujours **positive**.
- 2) qu'une variable ne peut tendre vers zéro qu'en “**décroissant** continuellement” ce dernier mot n'étant d'ailleurs pas précisé.

De fait, les infinitésimaux sont pour CARNOT des “objets de raison” tout comme les nombres imaginaires, ou même les nombres négatifs. Ils ne sont utilisés que comme intermédiaires de calcul, mais doivent disparaître lorsque le calcul est achevé.

“Avancer qu'une quantité négative isolée est moindre que 0 c'est couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence, d'un nuage impénétrable, et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres les uns que les autres”.

Et il donna ailleurs [cf. 17, p. 111] un exemple d'un tel paradoxe :

“(−3) serait moindre que 2, cependant $(-3)^2$ serait plus grand que $(2)^2$; c'est-à-dire qu'entre ces deux quantités inégales 2 et (−3) le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite et réciproquement, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité.”

On trouve là toute la difficulté de l'articulation entre le sens des objets définis mathématiquement et leur usage formel. Faut-il s'étonner que nos élèves butent sur une telle difficulté lorsque de grands savants ne pouvaient eux-mêmes la surmonter, à une époque donnée ?

On retrouve les mêmes blocages dans le mémoire de L'HUILIER qui a finalement gagné le prix.

L'exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs [24]

Quoique, comme on a pu s'en apercevoir, celui-ci n'ait pas entièrement satisfait le jury, il avait du moins sur ces concurrents l'avantage de la rigueur, se référant d'ailleurs explicitement à celle des Anciens :

“Je me propose de montrer (...) que la **méthode des Anciens**, connue sous le nom de **Méthode d'Exhaustion**, convenablement étendue, suffit pour établir d'une manière certaine les principes des nouveaux calculs”.

Pour cela, L'HUILIER reprendra

“Le développement des idées (que M. D'ALEMBERT n'a fait qu'ébaucher et comme proposer dans l'article "Différentiel" de l'Encyclopédie”)[20 p 22].

Et effectivement il basera l'essentiel de ses “principes” sur l'idée de **limite** démontrant pour la première fois des résultats comme

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$$

Là aussi il est intéressant de constater comment ce concept de limite qui va devenir au 19^e siècle effectivement le concept clef de l'analyse, reste englué dans un vocabulaire géométrique et imagé.

“Première définition : Soit une quantité variable, toujours plus petite ou toujours plus grande qu'une quantité constante proposée ; mais qui puisse différer de cette dernière moins que d'aucune quantité proposée plus petite qu'elle : cette **quantité** constante est dite **limite** en grandeur ou en petitesse de la quantité variable.

Deuxième définition : Soit un rapport variable toujours plus petit qu'un rapport assigné, mais qui puisse être rendu plus grand qu'aucun rapport assigné plus petit que ce dernier : le **rapport** donné est appelé **limite en grandeur** du rapport variable. Item, soit un rapport variable toujours plus grand qu'un rapport donné ; mais qui puisse être rendu plus petit qu'aucun rapport assigné plus grand que ce dernier : le **rapport** donné est appelé la **limite en petitesse** du rapport variable.”

On trouvera en annexe le théorème et sa démonstration que nous énoncerions sous la forme

$$\lim \frac{a}{x} = \frac{a}{\lim x}$$

Signalons à ce propos que c'est L'HUILIER qui a introduit pour la première fois dans un ouvrage imprimé, le signe "**lim**" pour limite.

Pour le reste, il me semble avoir suffisamment montré où en étaient les fondements du calcul infinitésimal. En résumé :

- Des idées, des méthodes nouvelles s'étaient développées mais exprimées dans le langage archaïque de la géométrie.
- Ce langage modèle l'appréhension du concept de nombre (réel) lequel reste une quantité (positive) liée à une grandeur géométrique.
- Ces idées nouvelles et ce langage sont confrontés à un modèle de rigueur : la “méthode

des Anciens” qui pour être parfait n'en est pas moins inadapté au champ de recherche ouvert par le calcul infinitésimal. De même que EUCLIDE avait réussi à juguler l'infini en quittant l'arithmétique pour construire une géométrie basée sur un calcul sur les raisons (rapports de grandeurs) de même DESCARTES le réintroduisait en traitant les problèmes de géométrie par l'algèbre.

“Des malheurs et des paradoxes la méthode d'exhaustion avait sur se garder tant que réservée à la géométrie, garantie contre les absurdités par l'intuition sensible. La révolution cartésienne, en assurant un parallélisme complet entre nombre et étendue, en inaugurant l'étude des variations de fonctions, incorporait le continu à l'algèbre : celle-ci devenue autonome, devait définir par ses propres moyens les objets employés, préciser, étendre elle-même les modes d'emploi. D'où deux sortes de problèmes : donner un fondement purement analytique aux notions et propriétés assurées jusque-là seulement par l'évidence de leur corrélat géométrique, développer les unes et les autres hors des limites arbitraires imposées par l'intuition.”

(CAVAILLES : Philosophie mathématique p 31 [25]).

C'est ce qui commence à se faire avec LAGRANGE et ses disciples chez qui on veut rompre avec la considération d'infiniment -petits ou grands qui véhiculent cette intuition géométrique, et qui tenteront autant que faire se peut de la remplacer par un **calcul algébrique**. Le chemin sera long de CAUCHY à WEIERSTRASS pour éloigner à nouveau le spectre de l'Infini en le canalisant dans des relations d'inégalités, de majorations, d'encadrements, en le contenant dans des “quelque soit” et des expressions comme : “plus petit que ..., plus grand que tout nombre donné à l'avance”, comme l'avait déjà fait EUCLIDE, deux mille ans auparavant dans le livre V de ses Eléments.

En guise de conclusion :
Quelles leçons pouvons-nous tirer de cette excursion
chez les savants du 18^e siècle ?

J'en vois au moins de deux types :

1. Une meilleure compréhension des difficultés des élèves, sur lesquelles des difficultés analogues pour les hommes du 18^e siècle peuvent attirer notre attention.
2. Une meilleure stratégie globale dans l'organisation de notre enseignement, et dans l'utilisation des moyens modernes à notre disposition.

Les difficultés rencontrées par nos élèves

— Elles peuvent venir du langage d'abord.

En effet, les mots utilisés en mathématiques sont aussi et étaient d'abord des mots déjà utilisés dans le langage courant. Ainsi des mots : “limite”, “voisinage”, “continu” etc... Ces mots sont utilisés en un certain sens dans la vie quotidienne, et véhiculent par conséquent chez les élèves des images, des intuitions qui recouvrent rarement le sens précis, univoque qui leur est donné en mathématiques. Ce que dit BACHELARD dans “La formation de l'esprit scientifique” [26] à propos de l'apprentissage de la physique peut très bien être pris en compte également pour l'apprentissage des mathématiques et particulièrement l'analyse :

“Dans l'éducation, la notion d'obstacle pédagogique est également méconnue. Les professeurs de sciences imaginent que l'esprit commence comme une leçon, qu'on peut toujours refaire une culture nonchalante en redoublant une classe, qu'on peut faire comprendre une démonstration en la répétant point par point. Ils n'ont pas réfléchi au fait que l'adolescent arrive dans la classe de physique avec des connaissances empiriques déjà constituées : il s'agit alors non pas d'acquérir une culture expérimentale, mais bien de **changer** de culture expérimentale, de renverser les obstacles déjà amoncelés par la vie quotidienne.”

Les hommes du 18^e siècle étaient en butte au même problème. Leurs recherches s'appuyaient sur une intuition, essentiellement géométrique, qu'ils essayaient de conceptualiser, de formaliser avec le langage dont ils disposaient : leur langage de tous les jours. On pourrait illustrer cela longuement en étudiant le sens du mot “fonction continue” chez EULER (Voir par exemple [19]). Plus rapidement, constatons la difficulté signalée, encore chez CAU-

CHY à propos de cette définition du mot "**limite**" donnée dans son "Analyse algébrique de 1821 [27].

"Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer d'aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres".

Et CAUCHY distingue alors deux notations : **Lim sin x**

"lorsqu'une quantité variable converge vers une limite fixe et $\text{Lim}((\sin \frac{1}{x}))$ qui admet une infinité de valeurs comprise entre les limites -1 et +1".

Très nettement, dans cette dernière expression (soulignée par moi) le mot "**limites**" est utilisé dans son sens courant, comme par exemple dans la phrase "Ma patience a des limites dont les bornes marquent la fin !", alors que dans les lignes précédentes, CAUCHY cherche à donner un sens mathématique plus précis, sans ambiguïté, au même mot. Comment l'élève n'aurait-il pas, au début, des difficultés pour écarter spontanément un sens -qu'il est habitué à utiliser- au profit d'un sens nouveau et d'une certaine manière différent ? D'autant plus que nous ne facilitons pas les choses puisque nous écrivons également

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ pour une fonction f qui justement devient infinie et donc n'a pas de limite !

A l'inverse, qui est encore capable aujourd'hui d'expliquer le sens de cet énigmatique "**Théorème des Accroissements finis**", à moins de se référer au vocabulaire du 18e siècle, tel qu'il est utilisé par exemple dans ce texte déjà cité (p. 17) de GERDIL et dont nous reprenons juste cette phrase significative :

"Une quantité infinie (...) est celle qui a reçu tous ses accroissements finis possibles"

La lecture d'un tel texte a l'avantage d'attirer notre attention sur d'autres difficultés, d'ordre conceptuelles cette fois, et qui concernent pour l'essentiel les notions de **nombre** et de **fonction**.

Les difficultés conceptuelles

Nous avons déjà eu l'occasion de signaler qu'une des difficultés essentielles pour penser l'analyse au 18e siècle, venait du fait d'un langage géométrique ou mécanique. Il n'y avait pas de concept de nombre réel. Les mathématiciens travaillaient sur des grandeurs et des rapports de grandeurs (raisons). Tant qu'ils en restaient à l'étude purement géométrique de ces grandeurs, telle que les Anciens l'avaient mise au point, il n'y avait pas de problème. L'intuition sensible garantissait contre les paradoxes et les absurdités. Mais DESCARTES a appris aux

mathématiciens à traiter les problèmes de géométrie par l'algèbre, introduisant du coup le nombre dans la géométrie, avec ses corrélats : le continu et l'infini, qui eux échappent à l'intuition sensible.

De fait c'est toute l'analyse du 19^e siècle, dans son effort d'un fondement purement analytique, qui va construire et étoffer le concept de nombre réel.

La même difficulté se présente pour nos élèves. Ils connaissent l'expression "nombre réel" depuis la quatrième au moins, mais que recouvre ce vocable dans leur esprit ? Comment ce concept se construit-il d'abord chez eux, sinon par l'intermédiaire de la mesure des grandeurs ? Par la comparaison d'une grandeur à une autre grandeur prise pour unité ?

Mais alors, s'il n'y a pas de nombres réels, s'il n'y a que des grandeurs que l'on mesure, pourquoi parlerait-on de grandeur nulle ? Il faut faire attention au fait que visiblement le zéro n'a pas le même statut que pour nous, aujourd'hui, en analyse. Il ne peut être envisagé que comme le stade ultime d'un rapport **évanouissant**, comme une limite, rejoignant du même coup, et sur le même plan l'autre stade ultime, l'infini. C'est pourquoi, dira COUTURAT dans "De l'infini mathématique" [28]

"La grandeur nulle et la grandeur infinie constituent les deux états extrêmes de la grandeur ; ce sont les limites de l'infiniment grand et de l'infiniment petit, et pour ainsi dire les deux pôles entre lesquels la grandeur finie oscille indéfiniment".

Il est significatif à cet égard que le concept **d'existence** est utilisé au 18^e siècle en mathématiques dans le sens "n'est pas nul". Une quantité devient inexistante lorsqu'elle s'évanouit et s'annule.

Par exemple chez L'HUILIER [24] existent les grandeurs qui "sont réellement et actuellement assignées". Et, parlant du triangle caractéristique

"Ils [les côtés du triangle] se sont approchés différemment de non-existence ; ils ont évanoui différemment ; mais une fois évanouis, ils ont tous la même manière de ne pas exister" Et ROLLE utilisera une lettre spéciale θ "pour marquer le rien".[2]

Le concept de fonction

Au 18^e siècle, le concept de fonction reste très étroit, limité au "fonction analytiques" c'est-à-dire composées à l'aide d'opérations sur les fonctions élémentaires. La notion même de variable reste également grossière, comme il apparaît dans le texte de L'HUILIER sur la définition de la limite (voir p.29). L'auteur, comme la plupart de ses contemporains n'envisage pas qu'une variable puisse osciller autour d'une valeur définie. Non : elle reste "toujours plus petite ou toujours plus grande qu'une quantité constante proposée".

En sorte que les propriétés des fonctions que nous considérons comme des “plus”, comme des qualités supplémentaires, telles la continuité, la différentiabilité, étaient constitutives de l'ensemble des fonctions étudiées, sauf éventuellement en des points isolés. Mais cela n'est-il pas le concept que se fait un élève de lycée, d'une fonction ? A-t-il les moyens, l'occasion de penser autre chose ?

Cette courte traversée du 18^e siècle nous aura montré, je l'espère, que les concepts, que les méthodes se construisent à travers la résolution de problèmes ; qu'ils s'affinent dans la controverse, les paradoxes, les nouveaux problèmes qui surgissent de l'application de nouvelles méthodes. Surtout elle nous aura montré que la **question du sens** est à la fois moteur et obstacle du développement mathématique :

- **moteur** car le sens seul permet de donner prise sur les objets mathématiques, lui seul permet l'activité mathématique.
- **obstacle** car le sens est lié à une perception toujours trop intuitive, géométrique ou mécanique, donc imparfaite des objets qu'elle explore et construit. Cette perception est incapable de cerner un champ conceptuel en réalité beaucoup plus riche. La formalisation apparaît alors comme un moment nécessaire pour surmonter cet obstacle ; pour, à la fois, préciser le sens et y lever toute ambiguïté, pour finalement l'enrichir.

La question du signe

Tant que l'infini était rigoureusement écarté de toute étude mathématique, il n'y avait évidemment aucun signe pour le représenter. Il faudra attendre l'irruption du calcul infinitésimal pour qu'un tel signe apparaisse. Ce sera en 1655 avec John WALLIS dans un ouvrage intitulé “De sectionibus conicis” en ces termes : **Esto enim ∞ nota numeri infiniti**. Mais il ne sera vraiment utilisé qu'au début du 18^e siècle avec l'essor du calcul infinitésimal. (cf. CAJORI [29]). Comme souvent le signe deviendra objet lui-même, nombre avec lequel les gens calculeront, oubliant son sens : FONTENNELLE par exemple qui en prendra des puissances fractionnaire $\infty^{1/4}$, $\infty^{3/4}$, et jusqu'à cette surréaliste égalité que n'hésitera pas à écrire WRONSKI [31] encore au début du 19^e siècle :

$$\frac{2}{\sqrt{-1}} \left\{ (1 + \sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1 - \sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} \right\} = \pi \text{ et qui ferait la joie de beaucoup de nos élèves.}$$

Ne sont-ils pas tentés, eux-aussi, d'écrire des égalités du style $\frac{1}{\infty} = 0$; $\frac{1}{0} = \infty$ etc... ?

Où l'histoire des mathématiques peut nous aider.

Deux tentations opposées me paraissent guetter le professeur de mathématique, tentations auxquelles une connaissance de l'histoire l'empêchera de céder.

La première consiste à nier purement et simplement l'histoire : "Du passé faisons table rase". Elle veut faire l'économie des hésitations, des détours, des impasses que celle-ci a fait faire à la science, pour jeter d'emblée l'élève dans l'abstraction des mathématiques d'aujourd'hui. C'est ce qui a été fait avec les programmes de 1970, ou du moins c'est ce que les auteurs de manuels en ont fait. L'échec fut retentissant : on avait oublié que - tout comme les générations de mathématiciens passées - l'élève doit d'abord rencontrer un concept nouveau dans une situation de problèmes, l'expérimenter, se heurter à des difficultés, avant d'être à même de saisir toute la richesse, la subtilité, la puissance d'une définition d'une théorie qui est le fruit de dizaines parfois de centaines d'années de travail de réflexion mathématique. Les hommes du 18^e siècle étaient familiers avec cette idée, surtout ceux qui ont œuvré à la mise en place d'une véritable instruction publique par la Révolution Française, idée qui veut que l'enseignement doit se faire dans une progression qui va du sensible, du concret vers l'abstrait. Écoutons une dernière fois, à ce propos, un homme du 18^e siècle.

Le 12 octobre 1792 le député du département du Bas-Rhin L.F.A. ARBOGAST présentait à la convention un "Rapport et projet de décret sur la composition des livres élémentaires destinés à l'instruction publique" [31]. En voici deux courts extraits :

"La méthode qui nous fait arriver aux découvertes est aussi celle qui est la plus propre à les communiquer aux autres ; car la chaîne d'idées qui conduit l'inventeur peut faire comprendre, même aux esprits d'une capacité médiocre, l'objet inventé, pourvu qu'on le proportionne à l'intelligence de chacun, en développant toutes les idées intermédiaires entre le connu d'où l'on est parti, et l'inconnu où l'on veut atteindre" et plus loin :

"Que par une pente douce, on marche des idées sensibles aux idées abstraites ; qu'on place les jeunes gens dans les mêmes circonstances où nous nous sommes trouvés nous-mêmes, lorsque nous nous sommes formés des idées exactes, et alors les progrès deviendront rapides, parce que le travail, rendu plus facile, sera toujours accompagné de ce plaisir qui, des succès obtenus, porte vers des succès nouveaux".

L'apparition des calculatrices de poche, et maintenant des logiciels didactiques, devraient nous aider beaucoup dans cette voie. D'abord simples instruments de calcul, ils sont devenus des outils d'investigation, d'exploration qui en font des éléments irremplaçables dans la pédagogie des mathématiques. Mais ils représentent un danger qui se traduit par une autre tentation, à l'opposé de la précédente : celle de se cantonner à une sorte de mathématique expé-

rimentale d'observation, où la part de raisonnement est limitée à la portion congrue. Cette tentation est surtout celle de l'élève fasciné par un outil qui lui donne un sentiment extraordinaire de puissance, mais elle peut être plus ou moins favorisée par le professeur. Il me semble alors que le rôle de celui-ci devra être avant tout de démolir les intuitions premières et si faciles qui sortent de la calculatrice, d'en faire sentir à l'élève les insuffisances et de l'amener ainsi à la conviction que le raisonnement abstrait et rigoureux est nécessaire pour contrôler son intuition et structurer son savoir. De même qu'ARCHIMEDE découvrait avec son levier, et démontrait avec la méthode d'exhaustion, l'élève, après avoir observé, pourra conjecturer, mais surtout devra démontrer, sans quoi il n'y aurait plus de mathématiques. Le rôle d'un programme ne serait-il pas alors de mettre l'accent, moins sur un contenu, un ensemble de résultats à savoir, que sur des méthodes : méthodes de recherche et d'investigation en vue de la résolution de problème, méthodes de raisonnement et de démonstration, qui aideraient peut être mieux nos élèves à faire face aux nouvelles exigences d'un monde où le savoir spécialisé et inerte est si vite dépassé et inutile ? Ne devrait-il pas attacher une très grande attention à la question du sens des objets mathématiques, un sens non pas donné une fois pour toutes, mais qui au contraire se construit, s'étoffe, s'enrichit, un sens qui part de l'intuition sensible pour se préciser et se développer dans le raisonnement plus formalisé ?

BIBLIOGRAPHIE

- [1] LAGRANGE. Théorie des Fonctions Analytiques 1797
- [2] CANTOR Moritz. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik - réédition TEUBNER 1965
- [3] Mémoires de l'Académie de BERLIN 1784
- [4] FONTENELLE. Géométrie de l'Infini 1727
- [5] EDWARDS. The Historical Development of the Calculus. 1979, SPRINGER-VERLAG
- [6] L'HOSPITAL. Analyse des infiniment-petits pour l'intelligence des lignes courbes Réédition ACL Editions 1988
- [7] EULER. Introduction à l'Analyse infinitésimale. Réédition ACL Editions 1987
- [8] BLAY. Revue d'Histoire des Sciences n° 39-3 (1986)
- [9] CARNOT. Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal 1797. Réédité chez Blanchard 1970
- [10] MISCELLANAE TAURINENSIS. Tome II 1760-1761
- [11] HOUZEL-OVAERT et RAYMOND-SANSUC. Philosophie et Calcul de l'Infini. Maspero 1976.
- [12] KANT. Studien. 1928. Article de HASSE-SCHOLZ "Die Grundlagen Krisis der Griechischen Mathematik"
- [13] SZABO. Les débuts des mathématiques grecques. VRIN 1977
- [14] CAVEING. Zénon d'Elée, polégomènes aux doctrines du continu. VRIN 1982
- [15] DE SANTI JT : "Une crise de développement exemplaire : La Découverte des nombres irrationnels. Encyclopédie de la PLEIADE Logique et Connaissance Scientifique 1967

- [16] GARDIES. Revue d'Histoire des Sciences n° 37 année 1984 : Eudoxe et Dedekind
- [17] Groupe Inter-Irem d'Histoire des mathématiques : Mathématiques au fil des âges. Gauthiers-Villars 1987
- [18] DHOMBRES. Nombre et Mesure et Continu. Cédic-Fernand Nathan 1978
- [19] EULER. "De l'utilisation des fonctions discontinues en Analyse. Traduction DHOMBRES. Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques 1987
- [20] D'ALEMBERT. Dans l'Encyclopédie 1768 réédition ACL Editions 1988.
- [21] ARBOGAST. Lettre manuscrite. Archives départementales du Bas Rhin.
- [22] LAGRANGE. "Sur une nouvelle espèce de calcul ..." 1772
- [23] GILLISPIE-YOUSCHEKEVITCH. Lazare Carnot Savant. VRIN 1970
- [24] L'HUILIER. Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs 1786
- [25] CAVAILLES. Philosophie Mathématique. HERMANN 1962.
- [26] BACHELARD. La formation de l'esprit scientifique. VRIN 1986
- [27] CAUCHY. Analyse Algébrique 1821
- [28] COUTURAT. De l'infini mathématique. Réédition chez Blanchard 1973
- [29] CAJORI. A history of mathematical notations. Réimp. Open Court La Salle 1974
- [30] WRONSKI. Réfutation de la théorie des fonctions analytiques. 1815
- [31] ARBOGAST. Rapport et projet de décret sur la composition des livres élémentaires destinés à l'instruction publique - publié par ACL Editions avec CONDORCET : Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec sécurité. 1989

P R I X

proposés par l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres
pour l'Année 1786.

La Classe de Belles-Lettres avoit proposé pour le sujet du prix de l'année 1784 la Question suivante :

*Qu'est-ce qui a fait de la Langue françoise la Langue universelle de l'Europe ?
Par où mérite-t-elle cette prérogative ?
Peut-on présumer qu'elle la conserve ?*

Les Pièces envoyées au concours ayant été examinées par Mrs. les Membres de la Classe de Belles-Lettres, l'Académie, en conséquence de leur rapport, a déclaré dans l'Assemblée publique du 3 Juin 1784, que le Prix seroit partagé entre deux Mémoires, l'un en Allemand, ayant pour devise,

Gallis ingenium, Gallis dedit ore rotundo Musca loqui ;

& l'autre en François, avec la devise,

Tu regere eloquio populos, o Gallie, memento.

L'Auteur du premier est M. Jean Christophle Schwab, Professeur de Philosophie à l'Académie Caroline de Stuttgart ; celui du second, M. le Comte de Rivarol, à Paris.

La Classe de Mathématique propose la question pour le Prix qui sera décerné en 1786.

L'utilité qu'on retire des Mathématiques, l'estime qu'on a pour elles, & l'honorable dénomination de *Sciences exactes* par excellence qu'on leur donne à juste titre, sont dues à la clarté de leurs principes, à la rigueur de leurs démonstrations, & à la précision de leurs théorèmes.

Pour affirmer à cette belle partie de nos connoissances la continuation de ces précieux avantages, on demande

Une théorie claire & précise de ce qu'on appelle Infini en Mathématique.

On fait que la haute Géométrie fait un usage continuel des *infinitement grands* & des *infinitement petits*. Cependant les Géomètres, & même les Analystes anciens, ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini ; & de grands Analystes modernes avouent que les termes *grandeur infinie* sont contradictoires.

L'Académie souhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire, & qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être substitué à l'*Infini*, sans rendre trop diffi-

DES SCIENCES ET BELLES-LETTRES.

13

ciées, ou trop longues, les recherches qu'on expédie par ce moyen. On exige que cette matière soit traitée avec toute la généralité, & avec toute la rigueur, la clarté & la simplicité possibles.

On invite les Savants de tout pays, excepté les Membres ordinaires de l'Académie, à travailler sur cette Question. Le Prix, qui consiste en une Médaille d'or du poids de cinquante Ducats, sera donné à celui qui, au jugement de l'Académie, aura le mieux réussi. Les Pièces, écrites d'un caractère lisible, seront adressées franches de port à Mr. le Conseiller privé *Formey*, Secrétaire perpétuel de l'Académie.

Le terme pour les recevoir est fixé jusqu'au 1. de Janvier 1786 ; après quoi on n'en recevra absolument aucune, quelque raison de retardement qui puisse être alléguée en sa faveur.

On prie les Auteurs de ne point se nommer, mais de mettre simplement une Devise, à laquelle ils joindront un Billet cacheté, qui contiendra, avec la Devise, leur nom & leur demeure.

On a été averti par le Programme de l'année précédente, que la Classe de Philosophie expérimentale avoit proposé pour le prix de 1785 la Question suivante :

Etablir par des expériences exactes, dérivées avec clarté & précision, la théorie de la fermentation, de la décomposition qu'elle fait éprouver aux corps qui la subissent, & de la nouvelle composition des principes qui en résultent dans ses différents périodes.

Le terme pour recevoir les Pièces est fixé jusqu'au 1. de Janvier 1785.

La Classe de Philosophie spéculative avoit proposé pour le sujet du Prix de l'année 1783 la Question suivante.

On demande :

Quelle est la meilleure manière de rappeler à la raison les nations tant sauvages que policées, qui sont livrées à l'erreur & aux superstitions de tout genre ?

Ce Prix a été renvoyé à l'année 1785 : les Pièces seront reçues jusqu'au 1 Janvier de ladite année.

On trouvera dans le Programme susdit les Observations qui concernent la manière de traiter ces deux dernières Questions.

La Classe de Philosophie expérimentale a proposé pour l'année 1785 une nouvelle Question relative au prix fondé par feu M. *Eller*. En voici l'énoncé.

A proprement parler, il n'y a point de mauvaises herbes ou d'ivroie dans la nature, c'est à dire, qu'il n'y a point de végétal qui soit tout à fait inutile, ni à tous égards nuisible. Cependant

On demande :

1. *Ce qu'on entend par ivroie en général, & surtout en fait d'agriculture, pour les champs, jardins, prairies, pâturages & forêts ?*

b 3

PROGRAMMES DU 2 MAI 1961 : ALGÈBRE, TRIGONOMÉTRIE ET NOTIONS D'ANALYSE

Evolution des programmes d'analyse en Première C ou scientifique depuis 1945

PROGRAMMES DU 15 SEPTEMBRE 1945

Classes de 1^{re} C et Moderne

Algèbre

I. Etude de l'équation et du trinôme du second degré ; existence et calcul des racines ; signe des racines. Inéquation du second degré.

Recherche de deux nombres dont on donne la somme et le produit.

II. Variation du trinôme du second degré. Représentation graphique.

Variation de la fonction homographique. Représentation graphique.

III. Définition et signification de la dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable.

Application à la détermination des tangentes aux courbes représentatives du trinôme du second degré et de la fonction homographique.

(L'étude du sens de variation d'une fonction au moyen du signe de la dérivée n'est pas au programme)

Equation horaire d'un mouvement rectiligne. Mouvement rectiligne uniforme ; valeur algébrique de la vitesse. Mouvement rectiligne uniformément varié défini par une équation horaire ; valeur algébrique de la vitesse à un instant donné.

Diagrammes de ces mouvements.

IV. Problèmes conduisant à la résolution d'une équation du premier ou du second degré ou d'un système de deux équations du premier degré.

1. — Polynôme du second degré et fonction homographique.

1^o Révision de l'étude, faite dans la classe de Seconde, du polynôme du second degré, de l'équation et de l'inéquation du second degré, de la fonction : $y = ax^2 + bx + c$ et de sa représentation graphique. Comparaison d'un nombre aux racines d'une équation du second degré.

2^o Transformation de la fraction rationnelle $\frac{ax+b}{cx+d}$ conduisant à la forme $\frac{a}{c} + \frac{b}{cx+d} - \frac{a}{c}$.

Fonction (homographique) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ de la variable x : existence, sens de variation, étude lorsque x tend vers l'infini ou vers $-\frac{d}{c}$; représentation graphique dans un système de coordonnées cartésiennes (non nécessairement normale), symétries de la courbe représentative.

II. — Dérivées

En ce qui concerne la notion de limite, déjà rencontrée dans l'étude des fonctions précédentes, on se bornera à donner les définitions indispensables, ainsi que l'énoncé des propriétés utiles ; la démonstration de ces propriétés est en dehors du programme.

1^o Dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable ; fonction dérivée.

Dérivée d'une fonction constante ; d'une somme de fonctions dérivables ; du produit et du quotient de deux fonctions dérivables ; dérivée d'un polynôme.

2^o Interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction dont la courbe représentative est rapportée à un repère cartésien (non nécessairement normal) ; équation de la tangente en un point de cette courbe.

3^o Énoncé, sans démonstration, du théorème permettant de déduire le sens de variation d'une fonction sur un intervalle du signe de sa dérivée.

Application aux fonctions $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ déjà étudiées.

Étude, uniquement sur des exemples numériques, de fonctions de la forme :

$$y = x^2 + px + q \text{ et } y = ax^4 + bx^2 + c;$$

courbes représentatives (repère orthonormé).

4^o Définition de la dérivée seconde (en vue de l'étude des mouvements rectilignes).

III. — Fonctions circulaires.

1^o Extension de la notion d'arc de cercle. Arc orienté. Mesure algébrique d'un arc orienté sur un cercle orienté.

2^o Extension de la notion d'angle de deux demi-droites (ou de deux vecteurs) dans un plan. Angle orienté de deux demi-droites. Mesure algébrique d'un angle orienté de deux demi-droites dans un plan orienté.

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES classe de 1^{re} C

Arrêté du 8 juin 1966

NOTIONS GÉNÉRALES

Un certain nombre des notions qui suivent auront été, bien entendu, dégagées peu à peu au cours des années précédentes ; la présente énumération fixe le bilan de ce qui doit être définitivement acquis à la fin de l'année de Première C.

Ensembles ; sous-ensemble vide ; inclusion, intersection, réunion ; sous-ensembles complémentaires ; algèbre des parties d'un ensemble fini. Produit cartésien de deux ensembles.

Relation binaire entre éléments de deux ensembles ; relation d'équivalence entre éléments d'un ensemble ; d'équivalence, ensemble-quotient ; relation d'ordre entre éléments d'un ensemble.

Application d'un ensemble dans un ensemble ; application injective, surjective ; application bijective ; application réciproque ; composition de deux applications.

Alcoolisme de la logique ; implication, équivalence logique, réciproque. Signification des quantificateurs « quel que soit » et « il existe ».

ALGÈBRE ET NOTIONS D'ANALYSE

I. — Généralités sur les fonctions numériques d'une variable réelle.

Ensemble d'existence ; fonction croissante sur un intervalle, fonction décroissante, fonction constante.

Représentation graphique d'une fonction.

Continuité d'une fonction en un point ; notion de limite (on admettra sans démonstration tous les théorèmes utiles).

Dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable ; différentielle. Fonction dérivée. Calcul de la dérivée d'une fonction constante, de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions dérivables (le théorème sur la dérivée d'une fonction composée est hors du programme).

Interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction dont la courbe représentative est rapportée à un repère cartésien (non nécessairement normal) ; équation de la tangente.

Définition de la dérivée seconde.

Énoncé sans démonstration du théorème permettant de déduire le sens de variation d'une fonction, sur un intervalle, du signe de sa dérivée.

II. — Fonctions polynômes, fonctions rationnelles.

(coefficients réels et variables réelles).

1^o Fonctions polynômes : forme réduite, degré.

Identité (on pourra admettre que l'égalité numérique pour toutes les valeurs des variables entraîne l'égalité des coefficients des formes réduites). Polynôme nul.

2^o Polynômes à une variable x ; division par $x - a$; application aux polynômes $x^n \pm a^n$.

3^o Fonction rationnelle définie comme fonction quotient d'un polynôme par un autre ; domaine d'existence.

4^o Étude et représentation graphique des fonctions définies par

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y = x^2 + px + q, \quad y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

$$y = ax^4 + bx^2 + c, \quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{x^2 + 1} \quad (a' \neq 0 \text{ et } a' = 0),$$

uniquement sur des exemples numériques.

III. — Fonctions circulaires.

1^o Extension de la notion d'arc de cercle. Arc orienté, somme de deux arcs orientés. Mesure algébrique d'un arc orienté sur un cercle orienté.

Extension de la notion d'angle de deux demi-droites (ou de deux vecteurs) dans un plan. Angle orienté de deux demi-droites. Mesure algébrique d'un angle orienté de deux demi-droites dans le plan orienté.

Formule de Chasles pour les arcs de cercle orientés et pour les angles orientés de deux demi-droites. Arcs (ou angles) opposés, supplémentaires, complémentaires.

2^o Fonctions circulaires. Sinus, cosinus, tangente, cotangente d'un arc (ou d'un angle de demi-droites) orienté.

3^o Fonctions circulaires inverses. Définition, existence, périodicité.

Relations entre $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$: relations entre les fonctions circulaires de

$$x, \quad -x, \quad \pi \pm x, \quad \frac{\pi}{2} \pm x.$$

3^o Equations $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\tan x = a$, $\cot x = a$.

MATHEMATIQUE/CLASSES DE PREMIERE C, D, E

1970 (extrait)

Horaire hebdomadaire :

section C : 6 heures,
section D : 5 heures,
section E : 6 heures.

Programme :

Arrêté du 19 mars 1970.

SECTION C

I. — Notions générales.

1. Applications injectives, surjectives, bijectives ; composition des applications.
2. En vue de la statistique et du calcul des probabilités : ensemble des parties d'un ensemble (cf. chap. VII).
3. Application d'un ensemble fini vers un ensemble fini ; cas des applications injectives et bijectives, leur dénombrement ; parties à p éléments d'un ensemble fini, leur dénombrement.

II. — Fonctions numériques d'une variable réelle.

1. Continuité « en un point » d'une fonction. Limite d'une fonction.
(On se bornera aux définitions indispensables, illustrées d'exemples et de contre-exemples ; à l'énoncé, sans démonstration, des théorèmes relatifs aux limites de somme, produit, quotient de fonctions.)
2. Fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée ; dérivée en ce point.
Fonction dérivée ; calcul de la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables.
Interprétation géométrique de la dérivée (repère cartésien) ; équation de la tangente.
Interprétation cinématique de la dérivée : mouvement rectiligne du point ; définition de la vitesse et de l'accélération.
3. Applications.
En s'appuyant sur le théorème énoncé sans démonstration, permettant de déduire, du signe de la dérivée d'une fonction dans un intervalle, le sens de variation de cette fonction sur cet intervalle :
a) étude, uniquement sur des exemples, de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles. Représentation graphique. On pourra faire constater aux élèves, à propos d'exemples numériques, l'existence d'asymptotes obliques ; aucune méthode de recherche n'est au programme ;
b) étude de mouvements rectilignes : mouvement rectiligne uniforme, uniformément varié, vibratoire simple.

III. — Équations et inéquations.

1. Sur des exemples : étude d'équations et d'inéquations du premier et du second degré ; étude de systèmes d'équations à plusieurs inconnues.
Étude de problèmes dont la résolution conduit à des équations ou des inéquations du premier et du second degré.
2. Usage de tables numériques, de la règle à calcul et de machines à calculer.

IV. — Géométrie vectorielle et géométrie affine.

1. Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$; définition et exemples (révision). Sous-espace vectoriel. Vecteurs linéairement dépendants, indépendants. Base.
2. Coordonnées d'un vecteur dans une base donnée ; coordonnées d'une somme de vecteurs, du produit d'un vecteur par un nombre réel.
Condition de dépendance de deux vecteurs.
3. Si un espace vectoriel admet une base de n éléments, toute autre base possède n éléments ; dimension d'un espace vectoriel, plan vectoriel.
Dimension d'un sous-espace vectoriel ; intersection de deux sous-espaces vectoriels. (On se bornera à $n = 1, 2$, ou 3 .)
4. Matrice, dans une base donnée, d'une application linéaire d'un plan vectoriel dans lui-même. Composition de ces applications linéaires et multiplication des matrices 2×2 ; déterminant d'une matrice 2×2 .
5. Espace affine de dimension 2 ou 3. Translations.
Droites et plans affines, intersections, parallélisme.
Repère cartésien ; changement d'origine ; représentations paramétriques de droites et de plans. Équation cartésienne du plan.

V. — Produit scalaire et fonctions circulaires.

1. Produit scalaire (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 ou 3). Norme d'un vecteur : inégalité de Cauchy-Schwarz ; inégalité triangulaire.
Orthogonalité de deux droites vectorielles, d'une droite et d'un plan vectoriels.
Bases orthonormées ; existence. Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs définis par leurs coordonnées dans une telle base.
2. Applications linéaires du plan vectoriel dans lui-même conservant le produit scalaire. Leurs matrices dans une base orthonormée sont du type : (1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou (2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Les matrices du type (1) forment un groupe commutatif ; a et b ne dépendent que de l'application et non du choix de la base : groupe des rotations vectorielles. Étant donné deux vecteurs unitaires $\vec{x}$ et $\vec{y}$, il existe une rotation vectorielle unique φ telle que $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$.
3. Bases orthonormées donnant la même valeur au coefficient b de la matrice d'une rotation vectorielle φ . Orientation du plan vectoriel euclidien. Le plan vectoriel euclidien étant orienté, cosinus et sinus d'une rotation vectorielle ; notations $\cos \varphi$ et $\sin \varphi$. Cosinus et sinus de la composée de deux rotations vectorielles.
4. Angle de deux demi-droites vectorielles D, D' (unique rotation vectorielle amenant D sur D') dans le plan vectoriel euclidien. Angle de deux vecteurs. Calcul du cosinus et du sinus de l'angle de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées (base orthonormée, plan vectoriel euclidien orienté). Rotations vectorielles et angles remarquables. Formules d'addition, le groupe des angles étant noté additivement.
5. Cercle trigonométrique U . Définition. Bijection du groupe

I. SUITES NUMÉRIQUES

a) Exemples de suites définies par des procédés divers : valeurs d'une fonction; méthodes itératives; faisant intervenir la différence; ou le rapport de deux termes consécutifs.

Suites monotones. Suites périodiques.

Exemples de suites tendant vers l'infini : cas de la suite $(n \cdot a)$, $a \in \mathbb{R} \neq 0$ donné. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p \leq x < (p+1) \cdot a$$

b) Suites arithmétiques. Suites géométriques :

Sur les exemples types $n \mapsto n$, $n \mapsto a^n$, on calculera les sommes de rang n , en vue d'applications numériques.

c) Convergence d'une suite vers 0 : définition ; les suites qui convergent vers 0 sont bornées ; stabilité de la convergence vers 0 pour l'addition et pour la multiplication par une suite bornée (énoncés admis).

Convergence d'une suite : on dira que l est limite de la suite (u_n) si $\lim (u_n - l) = 0$. La limite d'une suite convergente de réels positifs est positive.

Justification d'une convergence vers 0 à l'aide d'une majoration ; des

exemples simples, tels que $|u_n| \leq \frac{1}{n}$ ou $|u_n| \leq \frac{1}{10^n}$ permettront d'apprécier la rapidité de diverses convergences.

Thèmes (à titre indicatif) :

Exemples d'encadrements d'un nombre réel exprimant une mesure (aire, volume...).

Exemples d'approximation (notamment par des suites adjacentes) d'un nombre réel solution d'une équation.

Développements décimaux ; un développement décimal périodique caractérise un rationnel.

II. FONCTIONS NUMÉRIQUES

Les premiers éléments de l'étude d'une fonction (majorations, minorations, monotonie; sens de variation) ont été mis en place en Seconde; on fera ressortir toute l'importance de l'étude numérique, et de la représentation graphique.

On illustrera l'étude des propriétés qui vont suivre au moyen des fonctions déjà étudiées en Seconde, et d'exemples numériques de fonctions affines par morceaux, de fonctions polynômes ou encore de fonctions telles que $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$.

a) Applications définies sur un intervalle ; opérations sur ces applications.

Notation $f \geq 0$, $f \geq g$: applications bornées.

Notion d'application bijective (liée à la discussion d'une équation $f(x) = y$, où x est l'inconnue).

b) Exemples d'étude conjointe de deux fonctions : l'une d'elles étant f , l'autre est par exemple : $|f|$, $\lambda \cdot f$, $x \mapsto f(x - \lambda)$, $x \mapsto f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

Fonctions composées.

c) Limite d'une fonction en un point : on commencera par le cas de la limite au point 0 ; on définira $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ par $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = 0$; on dira que l est limite de la fonction f au point a si $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - l) = 0$; on admettra des énoncés analogues à ceux qui ont été cités en I c).

Continuité en un point (développement limité d'ordre zéro) ; continuité sur un intervalle. Toute étude systématique de la continuité est hors du programme.

d) Développement limité d'ordre n , un nombre, dérivé, interprétations cinématique (vitesse) et géométrique (tangente) ; fonction dérivable sur un intervalle.

Règles de dérivation de la somme, du produit de deux fonctions, de l'inverse d'une fonction (cette dernière règle pourra être admise).

Dérivée de $x \mapsto f(ax + b)$.

Applications des dérivées à l'étude du sens de variation d'une fonction, à la recherche d'extremums, à la résolution d'équations et inéquations. On s'appuiera sur les trois propositions suivantes, qu'à ce niveau il est hors de propos de démontrer :

Si f est dérivable sur l'intervalle I et si sa dérivée f' est nulle sur I , alors f est constante sur I ;

Si f est dérivable sur I et si f' est positive sur I , alors f est croissante sur I .

Si f est dérivable sur $[a, b]$ ($a < b$) et si f' est à valeurs strictement positives sur $]a, b[$, alors f établit une bijection strictement croissante de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.

Primitives d'une fonction continue : on admettra qu'une fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I , et on démontrera que chacune d'elles est déterminée par sa valeur en un point de I .

Cette notion de primitive permettra d'introduire la fonction logarithme népérien dès le début de la classe Terminale.

f) Etude des fonctions sinus et cosinus : périodicité, parité, dérivées et primitives, représentations graphiques.

Thèmes (à titre indicatif) :

Problèmes simples d'optimisation se ramenant à la recherche d'extremums de fonctions d'une variable.

Recherche de limites de suites ou de fonctions à l'aide de développements limités d'ordre un.

Programme	Commentaire	Programme	Commentaire
b) Majorations ; encadrements Terminologie concernant les approximations d'un nombre réel a : Un encadrement de a est un couple (b, c) tel que $b \leq a \leq c$; On dit que a' est une valeur approchée de a à la précision 10^{-p} lorsque $a' - a \leq 10^{-p}$; Ecriture de a en notation scientifique : $a = \alpha \cdot 10^k$, où $1 \leq \alpha < 10$. Positions relatives des nombres $x, x^2, x^3, \sqrt{x}$ selon que $x \geq 1$ ou $0 \leq x \leq 1$ (en relation avec la représentation des fonctions). <i>Travaux pratiques</i> Exemples de majorations, d'encadrements et d'approximations portant sur des nombres, des suites ou des fonctions sur un intervalle donné.	Pour les équations linéaires, il convient de se limiter à des systèmes de taille très modeste. La méthode du pivot de Gauss est à pratiquer sur des exemples, mais sa description générale n'est pas au programme. Ces notions ne sont pas des objets d'étude en soi : elles interviennent dans les problèmes d'approximation. On pourra évaluer, sur des exemples, la précision obtenue pour une somme ou un produit ; mais toute étude générale du calcul des approximations est exclue et aucun énoncé de résultats à ce propos n'est exigible des élèves.	Suites arithmétiques et géométriques, définies respectivement par $u_{n+1} = u_n + a$ et $u_{n+1} = bu_n$. Calcul de $1 + 2 + \dots + n$ et de $1 + b + b^2 + \dots + b^n$. b) Étude d'une suite pour les grandes valeurs de n, langage des limites α) Après [observation] des suites de terme général $n, n^2, n^3, \sqrt{n}, b^n$, où b est un entier strictement supérieur à 1, on dit que ces suites tendent vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Lorsqu'on a établi une minoration de la forme $u^n \geq \lambda \cdot a^n$ à partir d'un certain rang, où (a^n) désigne une des suites de référence ci-dessus et λ un réel strictement positif, on dit que la suite (u^n) tend vers $+\infty$, ce qu'on note $\lim u^n = +\infty$. β) Après [observation] des suites de terme général $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{b^n}$, on dit que ces suites tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Si on a établi une majoration de la forme $u^n \leq \lambda \cdot a^n$ à partir d'un certain rang, où (a^n) désigne l'une des suites de référence convergeant vers zéro, on dit que la suite (u^n) converge vers 0, ce qu'on note $\lim u^n = 0$. (l'unicité de la limite est admise). <i>Travaux pratiques</i> Exemples d'étude de problèmes conduisant à des suites arithmétiques ou géométriques. Exemples d'étude du comportement de suites de la forme $u^n = f(n)$ [encadrements, monotonie, limite].	L'étude des opérations sur les suites est en dehors du programme. Aucune connaissance n'est exigible sur les suites récurrentes. En dehors du cas des suites arithmétiques et géométriques, tout exemple de suite définie par additions ou multiplications répétées, telles que $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ou $u_n = n!$, est exclu. La définition des limites par (A, N) ou (ε, N) est en dehors du programme, ainsi que le théorème de convergence des suites croissantes majorées. Il est important que les élèves sachent classer entre elles les suites de référence, mais aucune démonstration n'est exigible à ce sujet. Les élèves n'ont pas à connaître l'étude du comportement asymptotique des suites géométriques (b^n) lorsque b est positif. Dans les problèmes de limites, les seules capacités exigibles des élèves portent sur l'étude de suites $u^n = f(n)$ pour lesquelles une des minoration ou majorations indiquées dans le programme permet de conclure et est facile à obtenir.
II. SUITES ET FONCTIONS NUMÉRIQUES 1. Suites numériques L'objectif principal est de familiariser les élèves avec la description de situations discrètes simples à l'aide de suites, de mettre ainsi en évidence quelques modes de génération de suites et quelques résultats sur le comportement global et asymptotique des suites.	Un élève doit savoir : Dans une suite $u_n = f(n)$, exprimer des termes tels que u_{n+1}, u_{n+3}, u_{2n} en fonction de n ; Dans une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et la valeur initiale u_0, calculer les premiers termes.	Programme a) Exemples de modes de génération de suites Suite des valeurs $f(n)$ d'une fonction ; Suite définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et la valeur initiale u_0. Suites croissantes, suites décroissantes.	Commentaire Un élève doit savoir : Dans une suite $u_n = f(n)$, exprimer des termes tels que u_{n+1}, u_{n+3}, u_{2n} en fonction de n ; Dans une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et la valeur initiale u_0, calculer les premiers termes.

DU CALCUL INFINITÉSIMAL

comme un vrai polygone, quel que puisse être le nombre de ses côtés, il a dû résulter de cette hypothèse une erreur quelconque dans l'équation

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}.$$

et que le résultat $TP = \frac{y^2}{a-x}$ étant néanmoins certainement exact, comme on le prouve par la comparaison des deux triangles CPM, MPT, on a pu négliger MO et NO dans la première équation, et même on a dû le faire pour rectifier le calcul, et détruire l'erreur à laquelle avait donné lieu la fausse hypothèse d'où l'on était parti. Négliger les quantités de cette nature est donc non seulement permis en pareil cas, mais il le faut, et c'est la seule manière d'exprimer exactement les conditions du problème.

9. Le résultat exact $TP = \frac{y^2}{a-x}$ n'a donc été obtenu que par une compensation d'erreurs, et cette compensation peut être rendue plus sensible encore, en traitant l'exemple rapporté ci-dessus d'une manière un peu différente, c'est-à-dire en considérant le cercle comme une véritable courbe, et non pas comme un polygone.

Pour cela, par un point R, pris arbitrairement à une distance quelconque du point M, soit menée la ligne RS parallèle à MP, et par les points R et M soit tirée la sécante RT; nous aurons évidemment TP : MP :: MZ : RZ, et partant TP, ou

$$TP + TT = MP \frac{MZ}{RZ}.$$

Cela posé, si nous imaginons que RS se meuve parallèlement à elle-même en s'approchant continuellement de MP, il est visible que le point T s'approchera en même temps de plus en plus du point T, et qu'on pourra par conséquent rendre la ligne TT aussi petite qu'on voudra, sans que la proportion établie ci-dessus cesse d'avoir lieu. Si donc je néglige cette quantité TT dans l'équation que je viens de trouver, il en résultera à la vérité une erreur dans l'équation $TP = MP \frac{MZ}{RZ}$, à laquelle la première sera alors réduite; mais cette erreur pourra être atténuée autant qu'on

CARNOT. MÉTAPHYSIQUE

6. Quelque vagues et peu précises que puissent donc paraître ces deux expressions de *très grand* et de *très petit*, ou autres équivalentes, on voit, par les deux exemples précédents, que ce n'est pas sans utilité qu'on les emploie dans les combinaisons mathématiques, et que leur usage peut être d'un grand secours pour faciliter la solution des diverses questions qui peuvent être proposées; car leur notion une fois admise, toutes les courbes pourront aussi bien que le cercle être considérées comme des polygones d'un grand nombre de côtés, toutes les surfaces pourront être partagées en une multitude de bandes ou zones, tous les corps en corpuscules, toutes les quantités, en un mot, pourront être décomposées en particules de même espèce qu'elles. De là naissent beaucoup de nouveaux rapports et de nouvelles combinaisons, et l'on peut juger aisément, par les exemples cités plus haut, des ressources que doit fournir au calcul l'introduction de ces quantités élémentaires.

7. Mais l'avantage qu'elles procurent est bien plus considérable encore qu'on n'avait d'abord eu lieu de l'espérer, car il suit des exemples rapportés que ce qui n'avait été regardé en premier lieu que comme une simple méthode d'approximation conduit, au moins en certains cas, à des résultats parfaitement exacts. Il serait donc intéressant de savoir distinguer ceux où cela arrive, d'y ramener les autres autant qu'il est possible, et de changer, ainsi cette méthode d'approximation en un calcul parfaitement exact et rigoureux. Or, tel est l'objet de l'analyse infinitésimale.

8. Voyons donc d'abord comment dans l'équation

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}$$

trouvée (3) il a pu se faire que, en négligeant MO et NO, on n'ait point altéré la justesse du résultat, ou plutôt comment ce résultat est devenu exact par la suppression de ces quantités, et pourquoi il ne l'était pas auparavant.

Or, on peut rendre fort simplement raison de ce qui est arrivé dans la solution du problème traité ci-dessus, en remarquant que l'hypothèse d'où l'on est parti étant fausse, puisqu'il est absolument impossible qu'un cercle puisse être jamais considéré

CARNOT. MÉTAPHYSIQUE

le voudra, en faisant approcher autant qu'il sera nécessaire R de MP, c'est-à-dire que le rapport des deux membres de cette équation différera aussi peu qu'on voudra du rapport d'égalité.

Pareillement nous avons $\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ}$, et cette équation est parfaitement exacte, quelle que soit la position du point R, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de MZ et de RZ. Mais plus RS approchera de MP, plus ces lignes MZ et RZ seront petites, et partant, si on les néglige dans le second membre de cette équation, l'erreur qui en résultera dans l'équation

$$\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x},$$

à laquelle elle sera réduite alors, pourra, comme la première, être rendue aussi petite qu'on le jugera à propos.

Cela étant, sans avoir égard à des erreurs que je serai toujours maître d'atténuer autant que je le voudrai, je traite les deux équations

$$TP = MP \frac{MZ}{RZ} \text{ et } \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$$

que je viens de trouver comme si elles étaient parfaitement exactes l'une et l'autre; substituant donc dans la dernière la valeur de $\frac{MZ}{RZ}$ tirée de l'autre, j'ai pour résultat $TP = \frac{y^2}{a-x}$ comme ci-dessus.

Ce résultat est parfaitement juste, puisqu'il est conforme à celui qu'on a obtenu par la comparaison des triangles CPM, MPT; et cependant les équations $TP = y \frac{MZ}{RZ}$ et $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$, d'où il a été tiré, sont certainement fausses toutes deux, puisque la distance de RS à MP n'a point été supposée nulle, ni même très petite, mais bien égale à une ligne quelconque arbitraire. Il faut par conséquent de toute nécessité que les erreurs se soient compensées mutuellement par la comparaison des deux équations erronées.

Exposition élémentaire des principes supérieurs

§. I.

1^{re} Définition. Soit une quantité variable, toujours plus petite ou toujours plus grande qu'une quantité constante proposée; mais qui puisse différer de cette dernière moins que d'aucune quantité proposée plus petite qu'elle: cette quantité constante est dite la *limite* en grandeur ou en petitesse de la quantité variable.

2^{de} Définition. Soit un rapport variable toujours plus petit qu'un rapport donné, mais qui puisse être rendu plus grand qu'un rapport assigné plus petit que ce donné: le rapport donné est appelé la *limite* en petitesse du rapport variable. Item; soit un rapport variable toujours plus grand qu'un rapport donné; mais qui puisse être rendu plus petit qu'un rapport assigné plus grand que ce donné: le rapport donné est appelé la *limite* en petitesse du rapport variable.

§. II.

Théorème 1^{er}. Soit une quantité constante; & soit une quantité variable toujours plus petite ou toujours plus grande que la première, mais qui puisse en différer moins que d'aucune quantité assignée plus petite qu'elle. Le rapport d'égalité est la limite en petitesse ou en grandeur du rapport de la quantité constante à la quantité variable. Et réciproquement, si le rapport d'égalité est la limite, soit en grandeur soit en petitesse, des rapports d'une quantité constante à une quantité variable plus grande ou plus petite qu'elle, la quantité variable peut différer de la quantité constante moins que d'aucune quantité assignée.

Soit a une quantité constante; soit x une quantité variable, toujours plus petite ou toujours plus grande que a ; mais qui puisse en différer moins que d'aucune quantité assignée. Je dis que le rapport de a à x peut approcher du rapport d'égalité plus près que s'en approche aucun rapport assigné de plus grande ou plus petite inégalité. Et réciproquement, si le rapport de a à x s'en approche plus près que s'en approche aucun rapport assigné, je dis que la quantité x peut différer de la quantité a moins que d'aucune quantité assignée.

Pour la Démonstration. Soit changé le rapport assigné dans le rapport de a à $a + v$; & soit faire x plus grande que $a - v$ dans le premier cas, & plus petite que $a + v$ dans le second cas: ce qui est possible (par supposition).

Dans le 1^{er} cas; puisque $x > a - v$; $a : x < a : a - v$: donc le rapport de a à x approche du rapport d'égalité plus près que s'en approche le rapport assigné de a à $a - v$ de plus grande inégalité.

Dans le 2^o cas; puisque $x < a + v$; $a : x > a : a + v$: donc le rapport de a à x approche du rapport d'égalité plus près que s'en approche le rapport assigné de a à $a + v$ de plus petite inégalité.

Pour l'Inverse. Que la quantité assignée soit v .

Dans le 1^{er} cas; par supposition le rapport de a à x peut être fait plus petit que le rapport de a à $a - v$; en sorte qu'on ait $a : x < a : a - v$; & par conséquent $x > a - v$; ou $a - x < v$.

Dans le 2^o cas; par supposition le rapport de a à x peut être fait plus grand que le rapport de a à $a + v$; en sorte qu'on ait $a : x > a : a + v$; & par conséquent $x < a + v$; ou $x - a < v$.