Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

À PROPOS DE QUELQUES ALGORITHMES LIÉS À DES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES [1]

Michel GUILLEMOT
IREM de Toulouse

Aujourd'hui, les professeurs de mathématiques s'interrogent plus particulièrement sur l'enseignement de deux disciplines : la géométrie et l'informatique. Replacé dans un cadre plus vaste ceci revient à examiner en un certain sens[2], quels rôles doivent être dévolus aux démonstrations et aux calculs algorithmiques.

La question n'est pas nouvelle. Déjà les anciens Grecs distinguaient l'arithmétique de la logistique, c'est-à-dire l'approche théorique des nombres des calculs pratiques. Plus près de nous, il y a une cinquantaine d'années, en réponse à une enquête sur les bases de l'enseignement des mathématiques Henri LEBESGUE (1875-1941) opposait les puissants algorithmes à la géométrie en ces termes :

> *"Se méfier d'ailleurs des notations, des puissants algorithmes si utiles aux mathématiciens parce que, comme la machine outil travaille pour l'ouvrier, l'algorithme raisonne à leur place. [...]. Vive donc la géométrie élémentaire où il faut observer, imaginer-avoir de la chance aussi, mais c'est la vie- tout aussi bien que déduire ; où il n'y a pas de "méthode" qu'il suffise d'appliquer automatiquement.*[3]

Il ne saurait être question, ici, de trancher ce vieux débat, ni de le suivre au cours de son histoire. Une telle étude reste à faire et elle dépasse le cadre de notre propos. Dans sa conférence "La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques" Evelyne BARBIN montre quelques points essentiels de la démonstration au cours du temps. Pour notre part, nous nous limiterons ici à l'introduction de certains algorithmes même si ceux-ci se sont d'abord présentés sous la forme de recette, de procédure, voire de méthode, plus ou moins explicitées sans aucune justification théorique. Pour illustrer notre reflexion nous nous bornerons à l'étude de quelques algorithmes liés à des opérations élémentaires : addition, multiplication, division et extraction de racines. Pour une étude plus complète, nous renvoyons aux ouvrages plus généraux.[4]

---

1 - Cette conférence est un témoignage des travaux du groupe Inter-IREM "Algorithme". Nous remercions Evelyne BARBIN, Jacques BOROWCZYK, Jean-Luc CHABERT, Ahmed DJEBBAR, Jean-Claude MARTZLOFF et Anne MICHEL-PAJUS pour leur collaboration.

2 - Il n'y a pas nécessaire adéquation. Voir, par exemple, la conception qu'ont les Chinois de la géométrie.

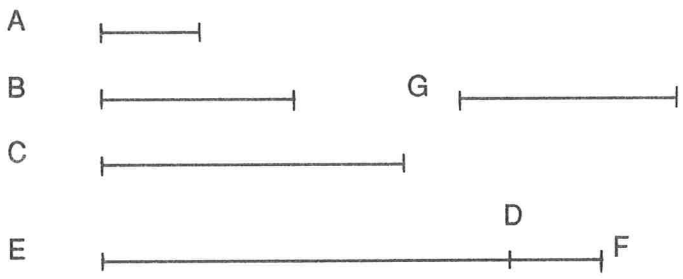
*3 - LEBESGUE, H., Réponse à l'enquête sur les bases de l'enseignement des mathématiques. **L'Enseignement Scientifique** 6 (1933), 290-291. **Oeuvres Scientifiques**, l'Enseignement Mathématique, Genève 1973, tome V, 228-229.*

4 - Nous pouvons citer :

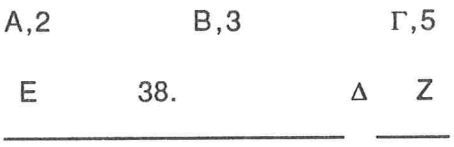
*CAJORI, F., **A history of mathematical notations** (2 tomes), Open Court, Chicago 1952 3ème édition.*
*SMITH, D. E., **History of mathematics** (2 tomes) Dover, New York.*
*TROPFKE, J., **Geschichte der Elementarmathematik** (tome 1) De Gruyter, Berlin 1980 4ème édition.*

1 - Quelques obstacles

Le principal obstacle lié à notre étude tient au fait que les traités arithmétiques originaux que nous possédons ont été écrits ou copiés, pour les plus anciens, il y a à peine un millier d'années. Autant dire que nous devons être très méfiants envers les notations employées par les copistes : elles ne peuvent pas être attribuées de manière certaine aux premiers auteurs. Par exemple, dans les manuscrits relatifs aux Eléments d'EUCLIDE les nombres sont parfois représentés soit par des segments par des segments -ce qui confère une certaine généralité à la démonstration- soit par des expressions particulières. Ainsi nous pouvons trouver comme figure correspondant à la proposition 20 du livre IX -relative à l'infinitude des nombres premiers- ce que Jean ITARD[5] et PEYRARD[6] ont respectivement représenté comme suit :



ITARD



PEYRARD

En ce qui concerne les notations numériques nous pouvons simplement affirmer que les symboles utilisés étaient connus au moment où la copie a été effectuée : d'ailleurs, ils servent parfois à dater les documents. Mais il n'est pas rare de trouver des manuscrits où ils ont été changés ou même laissés en blanc et complétés un ou deux siècles après ![7]

En présence d'un texte les interprétations peuvent être différentes. Ceci est particulièrement sensible lors des traductions. Ainsi, la dernière ligne du **Traité de la mesure du cercle** d'ARCHIMEDE (287-212 avant Jésus-Christ) a pu donner lieu, récemment, à deux traductions différentes. A partir du texte grec :

Ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων
ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ᾗ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ᾗ ι οα'
μειζων.

---

*5 - ITARD, J., **Les livres arithmétiques d'EUCLIDE,** Hermann Paris 1961 p. 186.*

*6 - PEYRARD, F., **Les oeuvres d'EUCLIDE,** reed. Blanchard, Paris 1966 p. 249.*

*7 - WOEPCKE, M. F., Mémoire sur la propagation des chiffres indiens. **Journal Asiatique** 1 (1863) 27-79, 234-290, 442-529, p.485.*

Charles MUGLER[8] a traduit :

> *Le rapport du périmètre au diamètre est donc inférieur à 3 1/7 et supérieur à 3 10/71.*

Alors que Paul VER EECKE[9] considère que ceci peut être retranscrit comme suit :

> *Dès lors, la circonférence du cercle vaut trois fois le diamètre plus une partie inférieure au septième, mais supérieure au $\frac{10}{71}$ au diamètre.*

En termes modernes, ceci correspond à la double inégalité suivante :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

Or, dans le texte grec la seule écriture numérique est ῑ ο α' c'est-à-dire, dans la numérotation alphabétique grecque[10] , ce que nous pourrions traduire par dix soixante et onzièmes. Mais les deux traducteurs n'en introduisent pas moins des fractions qui pourraient laisser croire au lecteur peu averti que les anciens Grecs utilisaient le trait de fraction[11] .

Un autre exemple, peut-être plus significatif, nous est fourni par les deux traductions proposées par Léon RODET des **Leçons de calcul d'ARYABHATA**[12] . Rappelons que ce mathématicien indien vivait vers l'an 500 de notre ère et que ses textes mathématiques étaient écrit en vers. Improprement, en 1879, RODET utilise les nombres pour ce que nous nommerions aujourd'hui le "calcul de Π".

> *"Ajoutez 4 à 100, multipliez par 8, ajoutez encore 62 000, voilà pour un diamètre de deux myriades la valeur approximative de la circonférence du cercle"*[13] .

En 1880, il transcrit les nombres en toutes lettres[14]. Nous nous devons de noter qu'entre temps il a changé d'opinion sur le système de numération employé par ARYABHATA ! En effet, ce texte ne nous renseigne nullement, ni sur le système de numération ni sur l'algorithme qui a pu donner naissance à cette approximation de Π : 3,1416. Toutefois l'algorithme de l'extraction de la racine carrée est plus explicite :

> *"On divisera toujours la "tranche non carrée" par le double de la racine de la "carrée" (qui précède) après avoir retranché de cette " carrée" le carré de la racine : le quotient est la racine à distance d'une place"*[15] .

---

*8 - MUGLER, C., **ARCHIMEDE.** Les Belles Lettres, Paris 1970 tome 1, p. 143.*

*9 - VER EECKE, P., **Les Oeuvres Complètes d'ARCHIMEDE,** réed. Blanchard, Paris 1960 tome 1, p. 134.*

10 - Voir annexe 1

11 - Lors de l'atelier "traduction" notre collègue Jean BOYE nous a proposé une traduction plus littérale qui montre bien la présentation difficile du résultat. "Donc, la circonférence du cercle est le triple du diamètre et est plus grand d'une partie plus petite que la septième partie et est plus grand d'une partie plus grande que 10 71ème".

*12 - RODET, L., Leçons sur le calcul d'ARYABHATA - **Journal asiatique** 13 (1879), p. 393-434, sur la véritable signification de la notation inventée par ARYABHATA, Journal asiatique 16 (1880), 440-485.*

13 - Note 12, p. 399.

14 - Note 12, p. 459.

15 - Note 12, p. 397.

Ceci conduit RODET à pencher pour un système écrit de numération de position.

> *"ARYABHATA opérait sur des nombres écrits* ***en chiffres avec valeur de position et zéro****, mais la pratique de ces sortes d'opérations était déjà familière à l'époque où il écrivait, ce qui suppose qu'elle existait déjà depuis un certain temps"*[16] .

Mais, un an après, il invoque l'utilisation d'un **abaque**

> *"les calculs qu'il enseigne à faire peuvent s'effectuer conformément à sa règle sur un abaque"*[17] .

Fragilité des hypothèses historiques lorsque les faits ne sont pas suffisamment établis ! Pour pallier ces difficultés nous pouvons nous tourner vers d'autres horizons. Les textes économiques ou même littéraires peuvent nous fournir d'utiles renseignements. Ainsi, dans ses **Plaidoyers politiques,** DEMOSTHENE -brillant orateur et homme politique athénien qui vécut de 384 à 322 avant Jésus-Christ- nous rappelle comment les Athéniens calculaient la durée des mois de l'année.

> *"Il faut savoir que les Athéniens ne calculaient pas les mois d'après le cours du soleil, comme nous, mais d'après celui de la lune. D'après le cours du soleil, l'année a trois cent soixante cinq jours, d'où il résulte que le mois a 30 jours 1/3 et 1/2. Car 10 fois 30 font 300, 2 fois 30 font 60. Restent 5. Le tiers de 12 est 4. Reste 1 jour ; et 1 est le douzième de 12.*
> *D'après le cours de la lune, l'année a trois cent cinquante quatre jours. D'où il résulte que le mois a 29 jours et demi. Car 10 fois 20 font 200, 2 fois 20 font 40, 10 fois 9 font 90, 2 fois 9 font 18 et la moitié de 12 est 6. En sorte que le total est 354 jours et qu'il manque, d'après le cours du soleil, 11 jours que les Athéniens groupaient tous les trois ans pour en faire le mois intercalaire de 33 jours"*[18] .

L'algorithme qui paraît présider à ces divisions est celui de la division égyptienne replacé dans le cadre du système alphabétique grec de numération[19] . Rappelons en effet que la méthode de division employé par les anciens Egyptiens consiste à multiplier le diviseur à l'aide de duplications -c'est-à-dire de multiplications par 2- successives de manière à approcher le plus possible le dividende. Pour le reste partiel ils utilisent les inverses puisque seuls sont notés outre les entiers naturels non nuls, les inverses de ces entiers et $\frac{2}{3}$[20] .

---

16 - Note 12, p. 408.

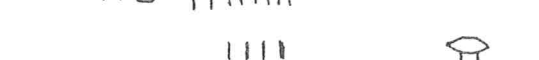
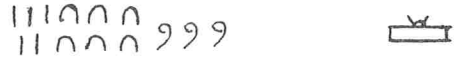
17 - Note 12, p. 443.

18 - NAVARRE, O., ORSINI, P., ***Démosthène, Plaidoyers Politiques tome 1. Contre Antricoton. Contre la loi de Leptine. Contre Timocrate.*** *Les Belles Lettres, Paris 1954, p.12.*

19 - Nous nous opposons ainsi à l'interprétation de Geneviève GUITEL dans son ***Histoire comparée des numérations écrites****. Flammarion, Paris (1975). Elle voit là une multiplication : "le souci qu'à Démosthène de donner la preuve de ce qu'il avance nous vaut donc cette remarquable multiplication de 291/2 par 12", p. 262. Malheureusement, si elle ne "résiste pas au plaisir de transcrire intégralement la suite du discours" elle oublie la première partie qui montre bien l'algorithme de la division.*

20 - Voir annexe 1.

Ainsi, ils auraient pu présenter de manière hiéroglyphique les calculs comme suit[21] :

1	12			
2	24			
4	48			
8	96			
16	182	il reste	5	
$\frac{2}{3}$	8			
$\frac{1}{3}$	4			
$\frac{1}{12}$	1			
				

Total 365

Dans le cadre du système alphabétique grec de numération[22], la duplication a été abandonnée car elle ne conservait plus son caractère aussi élémentaire et l'utilisation de tables de multiplication[23] a conduit à modifier la pratique égyptienne pour se rapprocher en un certain sens, de notre pratique[24] .

A l'opposé des obstacles et de la prudence qu'ils engendrent, il arrive que, parfois, l'on doive délibéremment aller de l'avant. En effet, certains textes, comme ceux laissés par les scribes égyptiens ou babyloniens ne comportent souvent aucune indication de la mise en oeuvre des méthodes en dehors de quelques données numériques : l'attribution d'une perspective algorithmique est alors laissée à notre initiative. Mieux, nous sommes même amenés à construire divers algorithmes pouvant expliquer les résultats donnés par les scribes. Certes, cela ne va pas sans danger. Mais la confrontation de diverses sources, lorsqu'elles existent, peut permettre d'étayer certaines hypothèses. L'exemple de deux tablettes sumériennes nous paraît être à cet égard, très significatif.

Nous savons que la civilisation sumérienne s'est épanouie d'environ 3 500 à 2 000 avant Jésus-Christ, dans le sud de la Mésopotamie. Elle a adopté un système de numération assez développé, de type additif, avec des signes spécifiques pour 1, 10, 60, 600, 3 600, 36 000, ... Les deux tablettes examinées ont été trouvées à Shuruppak et elles

---

21- Voir GUILLEMOT M., SPIESSER M., Du rouleau de cuir au problème 31 du papyrus Rhind. ***Actes du Colloque Inter-Irem, Histoire et Epistémologie des mathématiques****, Montpellier 1985, p. 179-192.*

22 - Voir Annexe 1.

23 - Le British Museum possède une tablette de cire sur laquelle figure la multiplication des nombres 2 et 3 par les dix premiers nombres entiers (voir GUITEL, note 19, p. 260). Des tables plus complètes ont été publiées par le moine byzantin Nicolas ARTAVAS DE RHABDAS en 1341 ! Voir TANNERY P.. Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas ***Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque*** *Nationale 32 (1886) p. 121-252 -* ***Mémoires scientifiques,*** *Gauthier Villars, 1920, tome 4, p. 61-198.*

24 - Voir Annexe 2.

proviennent d'un même lot[25] . Elles datent approximativement de 2 500 avant Jésus-Christ. Toutes les deux sont relatives au même problème : le partage d'un "grenier de grain" entre des hommes, chacun d'eux recevant la même quantité de grain, 7 "silà" c'est-à-dire environ 7 litres.
Mais les résultats sont différents pour les deux tablettes 164 571 hommes et il reste 3 silà de grain pour la tablette n° 50 et seulement 164 160 hommes sans indication du reste pour la tablette n° 671[26] .

1 grenier de grain	36000 36000 36000 36000
silà 7	3600 3600 3600 3600 3600
chaque homme reçoit	600 600 60 600 600 60
ces hommes sont	10 10 10 10 10 1
	il reste 3 silà de grain

(tablette n° 50)

grain silà 7 grenier
chaque homme reçoit

travailleurs				
36000	36000	36000	36000	
3600	3600	3600	3600	3600
600	600	60	60	60
600		60	60	60

(tablette n° 671 verso)

Certes nous pouvons voir là une différence d'attitude entre des régisseurs plus ou moins scrupuleux. Mais nous pouvons aussi essayer de trouver l'algorithme qui a pu conduire à ces résultats. Des diverses tablettes que nous ont laissé les Sumériens nous pouvons en déduire les correspondances suivantes :

1 grenier = 40 x 60 gur = 2 400 gur
1 gur = 8 x 60 silà = 480 silà,
1 grenier = 2 400 x 480 silà = 1 152 000 silà.

Or nous avons l'égalité :

1 152 000 = 7 x 164 571 + 3

qui correspond aux résultats portés sur la tablette n° 50. Se limitant à cette seule tablette GUITEL peut :

> *"considérer cette tablette avec respect, car il s'agit de la plus ancienne division qui soit parvenue jusqu'à nous ; elle remonte en effet à environ quatremille cinq cent ans. Mention est faite du dividende, du diviseur duquotient et même du reste, mais nous ignorons tout de la technique de l'opération"* [27] .

---

25 - Voir JESTIN R., Tablettes sumériennes de Suruppak au Musée d'Istanbul. ***Mémoires de l'Institut Français d'Archéologie d'Istanbul, III****, Brocard, Paris 1937.*
26 - Voir Annexe 3. (A moins de mettre ici la transcription de HØYRUP).
27 - Voir GUITEL Loc.cit p. 311.

Emportée par son enthousiasme, elle continue :

> *"Plus d'un million de silà d'orge et le scribe signale qu'il reste 3 silà d'orge"*[28] .

En 1976, Martin POWELL[29] compare les deux tablettes. Il fonde son argumentation sur le système positionnel sexagesimal adopté par les Babyloniens successeurs des Sumériens. Il propose pour $\frac{1}{7}$ les valeurs sexagésimales suivantes 0 ; 8, 34, 17, 8 et 0 ; 8, 33 qui permettent d'obtenir les résultats précités. Mais cette histoire à rebours n'explique pas le choix de ces valeurs et Jens HØYRUP[30] propose une autre explication, beaucoup plus réaliste et en tout cas intimement liée au système de numération. Nous savons en effet qu'un grenier correspond à 2 400 gur et que l'on a l'égalité

$$2\,400 = 7 \times 342 + 6.$$

Or, si nous omettons le reste, 6, nous obtenons le seul quotient, 342, qui, multiplié par 480 (puisqu'un "gur" vaut 480 "silà") donne 164 160 c'est-à-dire le résultat de la tablette 671 ! Ainsi la scribe a divisé un petit nombre : 2 400 ! Mais la confrontation des diverses sources a pu permettre, jusqu'à preuve du contraire de lever l'ambiguité qui pouvait présider à l'algorithme de la division sumérienne.

2 - La transposition de la notion d'algorithme

Comme de nombreuses notions, celle d'algorithme s'est modifiée au cours du temps. Mieux même, ici, l'origine en a pu être oubliée durant plusieurs siècles. C'est seulement en 1845 que l'orientaliste Joseph-Toussaint REINAUD (1795-1867) en a retrouvé la véritable étymologie :

> *"Je me permettrai ici une conjecture. Dans les traités latins du moyen âge, le nouveau système de numération est désigné par la dénomination d'Algorismus ou* ***Algorithmus.*** *D'un autre côté, les mots* ***Algorismus*** *et* ***Alkhorismus*** *servent à désigner un écrivain arabe surnommé* ***Al-Kharizmy*** *ou le Kharizmin, du nom du Kharizm sa patrie ; et cet écrivain s'était occupé de la science des nombres. Il me paraît que le nom donné au nouveau système de numération n'est autre que celui du personnage dont les écrits, traduits en latin, avaient répandu la connaissance de ce sytème en Occident"*[31] .

Aujourd'hui cette conjecture ne fait plus aucun doute. Déjà, peu après sa formulation, elle fût confirmée par la découverte d'un Codex de Cambridge (University Library li VI, 5) publié par BONCOMPAGNI en 1857[32] . En effet, ce manuscrit, traditionnellement daté du

---

28 - Voir GUITEL loc cit p. 312. Repris aussi par Georges IFRAH ***Histoire Universelle des chiffres*** *Seghers Paris 1981 p. 196.*

29 - POWELL M., The antecedents of old Babylonian place notation and the early history of mathematics. ***Historia Mathematica*** *3 (1976) 417-439.*

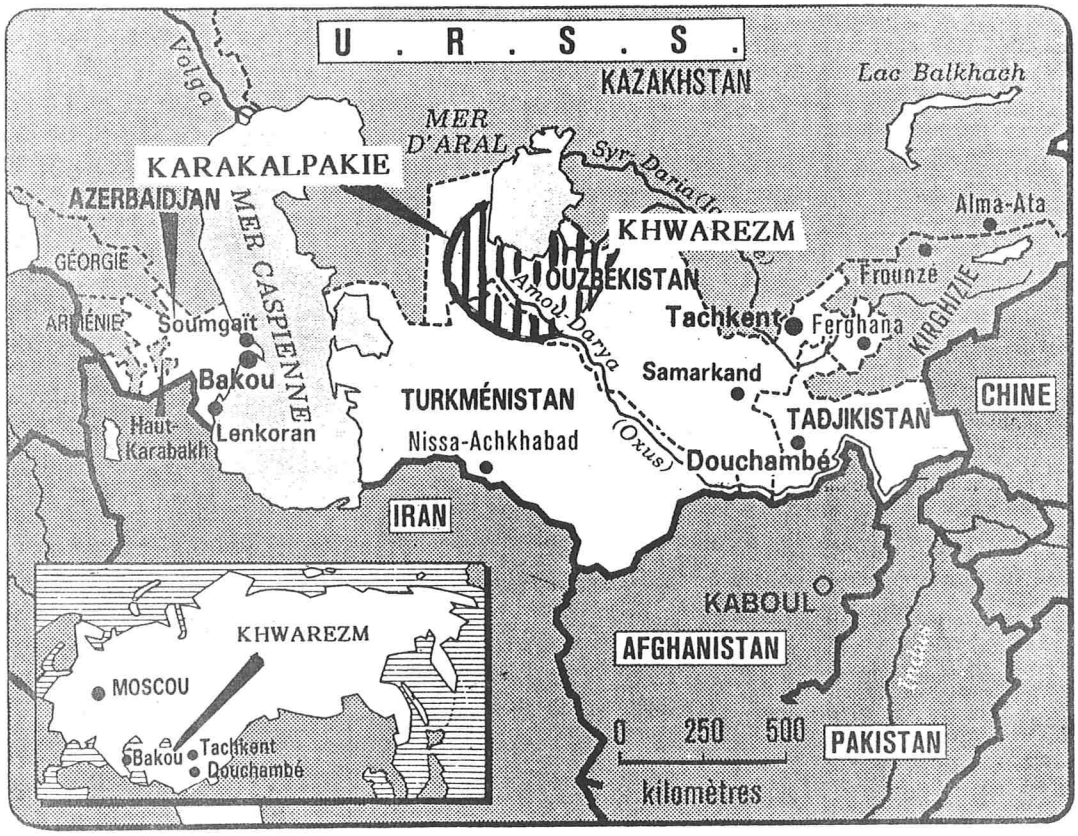
30 - HØYRUP J., Investigations of an early sumeral division problem 25OO B-C. ***Historia mathematica*** *9 (1982) 19-36.*

31 - REINAUD J.T., Mémoire géographique, historique et scientifique sur l'Inde antérieurement au milieu du XIème siècle de l'ère chrétienne, d'après les écrivains arabes, persans et chinois. ***Mémoires de l'Institut National de France, Académie des Inscriptions et Belles Lettres*** *18 (1849) 1-399, p. 303-304.*

32 - BONCOMPAGNI B., ***Trattati d'aritmetica.*** *Algoritmi de numero indorum. Roma (1857).*

treizième siècle mais qui selon de récents travaux de THOMSON[33] , pourrait avoir été copié vers 1150, commence par les mots "Dixit Algorismi" c'est-à-dire "Algorismi a dit". Il s'agit de l'un des nombreux textes latins réflétant différentes versions d'un ouvrage arithmétique d'al-KHWĀRIZMĪ, ouvrage dont l'original arabe ne nous est pas encore parvenu.

Ainsi, l'origine du mot "algorithme" se rattache à Muhammad ibn Musa al-KHWĀRIZMĪ (780-850), soit, littéralement, à Muhammad fils de Musa originaire du Khwarezm. Le Khwarezm est situé en Asie Centrale dans la région de l'Amour Daria en bordure de la mer d'Aral ; les Grecs l'appelaient choresmie et il est partagé de nos jours entre la République autonome de Karakalpakie et les républiques d'Ouzbekistan et du Turkmenistan.



C'est donc cette région qui a donné son nom à l'un des premiers et des plus éminents savants de la civilisation arabo-islamique et, à travers lui, au terme algorithme.

Nous avons peu de renseignements sur la vie d'al-KHWĀRIZMĪ. Il vécut de 780 à 850 et il était l'un des membres les plus importants d'un groupe de mathématiciens et d'astronomes qui, sous le règne d'al-MA'MŪN (813-833) travaillèrent à la Maison de la Sagesse à Bagdad. Cinq de ses ouvrages, en partie remaniés, sont encore conservés. Son traité al

---

33 - Pour tout ce qui concerne les études récentes se rapportant aux versions latines du XIIème siècle de l'arithmétique d'AL-KHWĀRIZMĪ, nous nous sommes appuyés sur les documents de André ALLARD publiés ou inédits qu'il a bien voulu nous communiquer. Nous l'en remercions vivement. Nous pouvons citer en particulier : -L'époque d'Adélard (de Bath) et les chiffres arabes dans les manuscrits latins d'arithmétique dans ***Adelard de Bath. An English scientist and arabist of the early twelfth century.*** *Warburg, London (1987) p.37-43 et l'influence des mathématiques arabes dans l'occident médiéval dans La Science Arabe (à paraître).*

Mukhtasar fī Hisāb al Jabr wa l-Muqābala. (L'abrégé du calcul par l'al-jabr et la muqabala) a donné naissance au mot "algèbre". Bien qu'aucun de ses textes arithmétiques ne nous soit encore parvenu, Roshdi RASHED pense qu'il aurait écrit deux livres ayant trait à l'arithmétique[34]. L'un, **le Kitab al-jam' w'al-tafriq** serait celui cité par ABŪ KĀMIL(850-930) dans son **Algèbre.** L'autre serait celui auquel Adolf YOUSCHKEVITCH[35] attribue le titre **Kitab al-gam'wal tafriq bi hisab al-hind** (livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens) dont le Codex de Cambridge précité n'est sans doute pas une traduction fidèle.

Outre ce **Dixit Algorismi** plusieurs textes latins[36] composés entre 1140 et 1150 se situent dans le vaste mouvement qui a conduit à l'introduction des chiffres[37] dit "arabes" dans le monde européen et à se détacher ainsi des comptes digitaux ou sur l'abaque.

> *"Toutes ces versions, sommairement décrites, contiennent un exposé des opérations fondamentales pratiquées sur les nombres entiers (addition, soustraction, duplication, médiation, multiplication, division). Ces chapitres sont suivis d'exposés sur les fractions sexagésimales et les fractions ordinaires, et un dernier chapitre est consacré à l'extraction de racine carrée"*[38] .

Néanmoins, pendant longtemps les comptes sur les doigts et les calculs à l'aide de "tables à poussière" qui permettaient d'éliminer les calculs intermédiaires ont été utilisés même dans la civilisation arabo-islamique[39] · Dans leur conquête, les Arabes ont été amenés à respecter certaines pratiques. Ainsi :

> *"à Damas, le khalife WĀLID qui régna de 705 à 715 défendit de tenir en langue grecque les registres du trésor public et ordonna qu'ils fussent rédigés en langue arabe, mais ils conservèrent la numération alphabétique grecque"*[40].

Dans les textes arabes, cet emploi des lettres grecques durera jusqu'au XIIe siècle mais en général les nombres y étaient écrits en toutes lettres même pour les livres d'arithmétique. C'est par exemple le cas pour le livre d'algèbre d'al-KHWĀRIZMĪ ou pour le **Livre sur l'arithmétique nécessaire aux scribes et aux marchands** composé par ABŪ AL-WAFĀ (940-997). A la multiplicité des pratiques répond une multiplicité d'ouvrages : ABOÛL KÂCIM ALI BEN AHMED l'Antiochen (mort en 987) aurait écrit : **Le grand traité de la table relatif au calcul indien, le traité du calcul effectué sur**

---

*34 - RASHED R., **Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes.** Les Belles Lettres, Paris 1984 p.19-20.*

*35 - YOUSCHKEVITCH A., **Les mathématiques arabes (VIIIème - XVème siècles)** trad. CAZENAVE M., JAOUICHE K., Vrin Paris 1976 p. 16.*

*36 - ALLARD André, cite (note 33) le **Liber ysagogarum Alchorismi in artem astronomicam a magistro A.** compositus dont une copie porte la date de 1143. Le Liber **Algorismi de pratica arismetrice et l'Introductoris liber qui et pulueris dicitur in mathematicam disciplinam.***

37 - Voir annexe 4 pour les chiffres trouvés dans les manuscrits latins du XIIème siècle cités dans la note 36.

*38 - ALLARD A., Le traitement des fractions dans les premiers textes latins du XIIème siècle influencés par l'arithmétique arabe. **Actes du colloque "Histoire des fractions, fractions d'histoire"** Paris 1987 (à paraître).*

*39 - L'objet des traités d'al-KHWĀRIZMĪ est lui-même sujet à contreverses Ahmad SAIDAN affirme qu' "on a appris récemment que l'arithmétique indo-arabe exigeait l'utilisation de l'abaque [.....] . Ce livre d'al-KWĀRIZMĪ était de type compte digital. Il semble que ceux qui suivaient cet ouvrage d'al-KHWĀRIZMĪ étaient appelés les algoristes et ceux qui suivaient ses travaux sur l'arithmétique indienne étaient appelés les algoristes" dans l'article al-BAGHDADI du **Dictionary of scientific biography** Scibner, New York 1981 vol 15, p. 10*

40 - WOEPCKE (note 7) p. 237.

la table sans rien effacer, le traité de l'explication de l'arithmétique, le traité des preuves numériques et le traité du calcul manuel sans table[41] .

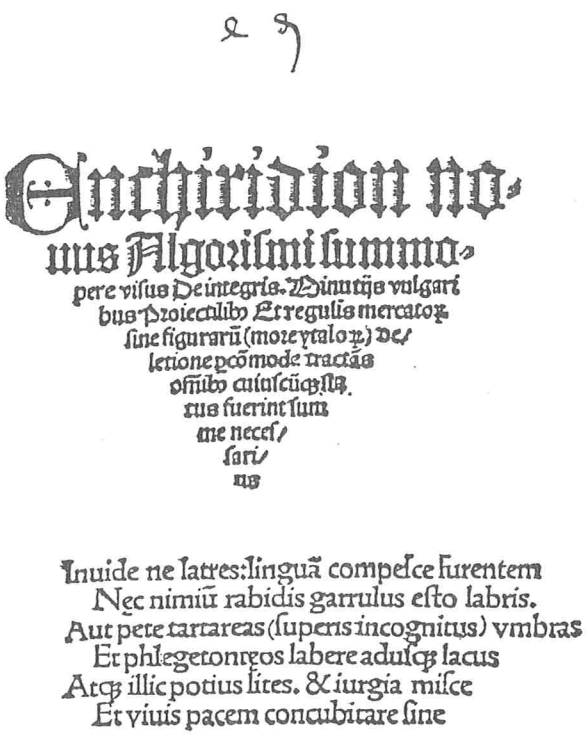
En Europe médiévale, dès le XIIe siècle

> *"les traités d'arithmétique, sauf quelques exceptions, ne portent plus le nom d'Albacus, ils prennent tous celui d'Algorisme"*[42] .

Cette différence d'appellation ne doit pas nous abuser : elle concerne en fait l'introduction des chiffres arabes et non pas les modes de calcul.

> *"Les procédés de calcul utilisant neuf chiffres et le zéro et pratiquant l'effacement de nombres sur une "table de poussière", connurent leur plus grande diffusion grâce à deux oeuvres brèves du début du XIIe siècle :* ***l'Algorismus Vulgaris*** *de Jean de SACROBOSCO (John of Halifax) (+ ca 1256) et le* ***Carmen de algorismo*** *d'Alexandre de VILLEDIEU (Alexander de Villa Dei) (+ ca 1240)*[43] .

Ceci perdura quelques temps puisque, par exemple, tant en Allemagne qu'en Pologne, de nombreux traités dits d'Algorithme sont en fait relatifs à des calculs sur l'abaque : c'est le cas du premier traité d'arithmétique polonais : **l'Algorithmus** de Thomas de KLOS publié en 1538. De même, la première arithmétique imprimée à Cologne, en 1501, **l'Enchiridion algorismi** de Johann HUSWIRT[44] comporte un chapitre sur l'abaque. (Voirci-après



Enchiridion no-
uus Algorismi summa-
pere visus De integris. Minutijs vulgari
bus Proiectilib⁹ Et regulis mercator⁹
sine figurarū (mozeytalo⁹) de/
letione pcō mode tractās
ofīlbo cuiuscūq; ſtā.
tus fuerint ſum
me neceſ/
ſari/
us

Inuide ne latres: linguā compeſce furentem
Nec nimiū rabidis garrulus eſto labris.
Aut pete tartareas (ſuperis incognitus) vmbras
Et phlegetonteos labere aduſq; lacus
Atq; illic potius lites. & iurgia miſce
Et viuis pacem concubitare ſine

---

41 - WOEPCKE (note 7) p. 493.

42 - CHASLES M., Histoire de l'arithmétique. ***Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*** *16 (1843) 156-173, 218-246, p. 162.*

43 - ALLARD note 33.

44 - SMITH D.E., ***Rara Arithmetica*** *chelsea. New York 1970 p. 75.*

En fait, sous des noms divers[45] , l'algorisme a pris la place de la logistique méprisée par les Grecs. Robert RECORDE (1510-1558) ne s'y est pas trompé lorsque dans son **Ground of Artes** publié en 1542 il oppose l'arithmétique grecque et l'algorithme arabe[46] . Il n'en demeure pas moins que le mot algorithme ou un de ses équivalents est intimement associé alors aux opérations élémentaires. C'est ce que veut dire François RABELAIS (1484-1553) lorsqu'il écrit au chapitre XII de **Pantagruel** :

"Ces enfants deviendront grands en algorisme"[47] .

Plus précisément, dans son **Dictionnaire de l'ancienne langue française,** GODEFROY cite un ancien comput

"Quatre parties sont d'augorisme, assembler, abattre, diviser, multiplier"[48] .

Lorsque les mathématiciens quitteront l'arithmétique élémentaire, le mot algorithme prendra une autre signification, ou du moins aura un sens beaucoup plus étendu ; on parlera, par exemple, de l'algorithme du calcul intégral. Ainsi, on s'éloignera du domaine arithmétique pour aborder d'autres types de calcul tout aussi efficaces qui selon LEBESGUE "raisonnement à la place des mathématiques". Ceci est très bien exprimé dans **l'Encyclopédie.**

ALGORITHME, ſ. m. *terme Arabe*, employé par quelques auteurs, & ſingulièrement par les Eſpagnols, pour ſignifier *la pratique de l'Algèbre. Voyez* ALGÈBRE. 49

Il ſe prend auſſi quelquefois pour l'*Arithmétique par chiffres. Voyez* ARITHMÉTIQUE.

L'*algorithme*, ſelon la force du mot, ſignifie proprement l'*art de ſupputer avec juſteſſe & facilité*: il comprend les règles de l'Arithmétique vulgaire. Ainſi, l'on dit l'*algorithme* des entiers, l'*algorithme* des fractions, l'*algorithme* des nombres ſourds, &c.

Le même mot ſe prend, en général, pour déſigner la méthode & la notation de toute eſpèce de calcul. En ce ſens, on dit l'*algorithme du calcul intégral*, l'*algorithme du calcul exponentiel*, l'*algorithme du calcul des ſinus*, &c.

Aujourd'hui, avec l'essor rapide de l'informatique la notion d'algorithme est devenue primitive. L'objet essentiel de cette discipline est en effet le traitement de données au moyen d'algorithmes. Certes, d'autres mots auraient pu suffire à définir ce concept : recette, règle, procédé, méthode... Tous ces mots impliquent en effet l'idée de l'utilisation d'un certain nombre d'instructions pour obtenir un résultat (sortie) spécifique à partir d'une situation initiale (entrée) donnée. Mais les algorithmes obéissent, en fait, à trois

---

45 - Le mot algorithme a subi de nombreuses variations dues principalement aux influences des parlers locaux. Ainsi, en France, al étant souvent changé en au nous trouvons "augrisme" ou "augrime". En Espagne, par contre, al a été abandonné et ceci peut donner "guarisma" ou "guarismo". Ce sont toutes ces différentes appellations qui ont empêché de retrouver l'étymologie d'origine et ceci a pu donner lieu à diverses conjectures : voir SMITH (loc. cit. 3) tome II, p. 9-10.

*46 - RECORDE, **The grounde of artes**, London 1542 reimp. Da Capo Press Amsterdam (voir Annexe 5).*

*47 - RABELAIS, **Pantagruel**, Livre de Poche n° 1240, p. 175.*

*48 - GODEFROY F., **Dictionnaire de l'ancienne langue française.** Masson Paris 1987. Article algorithme.*

*49 - **Encyclopédie méthodique. Mathématiques**, Panckouche Paris 1784 reimp. A.C.L. Paris 1987, p. 36-37.*

impératifs absolus :
- la non ambiguïté,
- la finitude
- et l'indépendance des données.

Pour Jacques HEBENSTREIT

> *"Un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver, en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat, et cela indépendamment des données*[50].

Bien entendu, dans le cadre élémentaire où nous nous sommes placés, les algorithmes que nous avons déjà présentés ou que nous allons étudier ne répondent pas toujours à tous ces critères. Néanmoins nous allons essayer d'en considérer quelques uns sous l'un de ces trois aspects tout en sachant combien une telle classification est arbitraire.

3. Quelques algorithmes liés à des opérations élémentaires.

Très tôt l'homme a eu besoin de supports quand ce ne sont pas des instruments auxiliaires pour effectuer ses calculs. Le plus connu nous semble être le boulier chinois et il nous a paru utile de commencer notre brève étude par celui-ci.

Un exemple de division sur le boulier chinois.
L'origine des tables à calcul reste inconnue et nous pouvons nous interroger sur le problème de l'origine du boulier chinois.

> *"Malgré de nombreuses recherches sur le sujet, la question est loin d'être résolue. On sait seulement de manière certaine que le boulier n'a été couramment utilisé en Chine qu'à partir de la deuxième moitié du XVIème siècle"*[51].

Il est cependant probable qu'il existait déjà deux siècles plus tôt comme en témoigne un livre d'images destiné à l'apprentissage de la lecture dont l'exemplaire actuellement conservé semble avoir été xylographié en 1337.

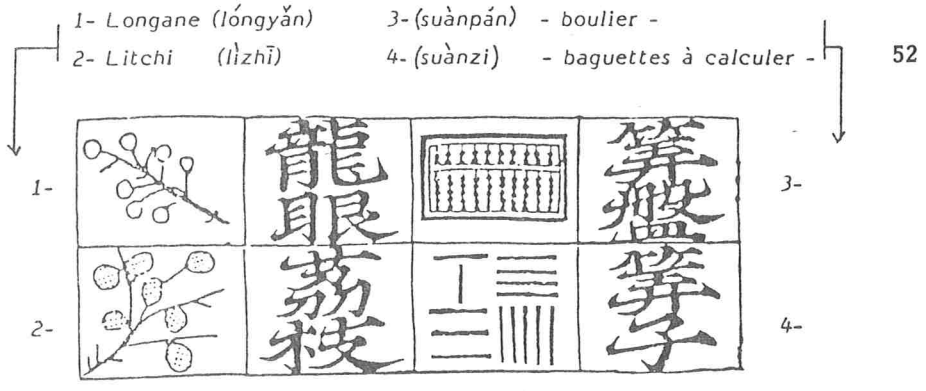
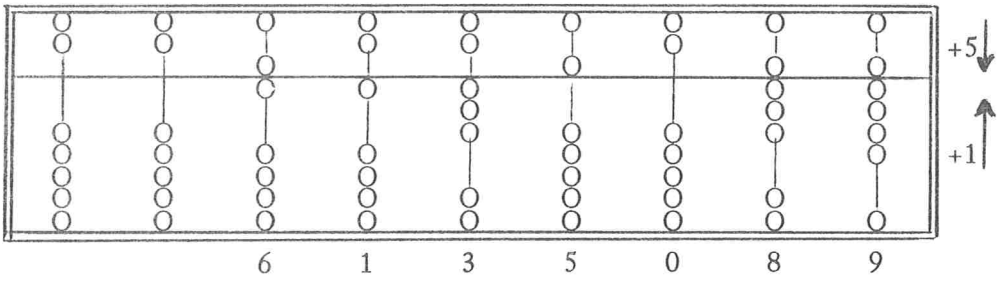


Image d'un boulier figurant dans le livre de lecture intitulé
Duixiang siyan zazi (1337)
(D'après l'édition de ce texte publiée à Tokyo en 1920)

---

50 - HEBENSTREIT J., art. informatique ***Encyclopaedia Universalis*** *1985, t. 9, p. 1144.*
51 - MARTZLOFF J-C., ***Histoire des mathématiques chinoises****. Masson, Paris 1987 p. 199.*

Dans sa version actuelle le boulier chinois se compose d'un nombre de tringles "verticales" serties dans un cadre rectangulaire. Sur chacune de ces tringles deux étages de boules séparées par une barre transversale peuvent coulisser librement. La notation des nombres repose sur le principe de la numération de position. Les deux boules du haut valent chacune cinq et les cinq boules du bas valent chacune 1. Seules comptent les boules situées dans la région transversale[53]. Ainsi 6 135 089 peut être figuré comme suit :



Il existe plusieurs techniques opératoires qui dépendent de la nature du boulier et de la méthode mathématique mise en oeuvre. Nous donnons ici un exemple particulier : celui de la division par 7.
En effet, sur le boulier chinois, la division traditionnelle dépend du diviseur particulier considéré. Ainsi, il existe des règles spéciales de division selon que le diviseur est inférieur à 10 et parfois des règles pour les nombres compris entre 11 et 99 ! Mais il existe aussi des règles plus générales valables pour un diviseur quelconque. Autrement dit, ces diverses règles correspondent, d'une part, à nos tables de division et, d'autre part, à l'algorithme général de la division. Même dans ce cas simple, elles se situent très bien dans le cadre habituel des algorithmes chinois :

> *"Il s'agit plutôt de "stratagèmes d'action" à caractère dogmatique qui, suivis mécaniquement, devraient mener automatiquement au résultat escompté mais qui, dans la pratique, autorisent éventuellement une liberté d'action plus ou moins grande : toutes les étapes des calculs ne sont pas toujours rigoureusement spécifiées comme elles devraient l'être s'il s'agissait de véritables algorithmes"* [54].

L'énoncé de la règle de division par 7 tel que le rapporte LAN CHUNG HIM dans **The principles and practice of the Chinese Abacus** (1958) est, en effet, le suivant :

> *sept-un ? ajouter trois en dessous !*
> *sept-deux ? ajouter six en bas !*
> *sept-trois ? quatre reste deux !*
> *sept-quatre ? cinq reste un !*
> *sept-cinq ? sept reste un !*
> *sept-six ? huit reste quatre !*
> *sept-rencontré ? un monté !*

Les six premières règles correspondent à ce que nous pourrions traduire par l'égalité suivante :

(1) $$\frac{10\ n}{7} = p + \frac{9}{7}.$$

---

53 - Le soroban japonais repose sur le même principe mais il ne comporte que (1+4) boules par tige "verticale" éliminant ainsi les boules "superflues" qui pourraient aider les commerçants dans leurs additions ou autres opérations.
54 - MARTZLOFF J-C., note 51, p. 54.

Certes la première règle qui correspond à

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$$

se situe dans le cadre strict de l'objet opératoire : mathématiquement, on garde le 1 qui signifiait 10 mais on ajoute "en dessous" de la ligne transversale, trois boules à la tige qui se trouve immédiatement après à la droite. Les autres traduisent (1) : par exemple, la sixième correspond à

$$\frac{60}{7} = 8 + \frac{4}{7}$$

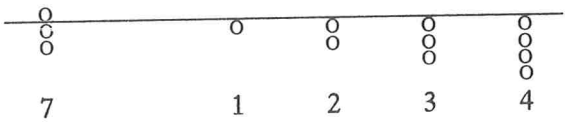
et la règle énonce les chiffres 8 et 4 respectivement du "quotient" et du "reste".
Quant à la dernière règle, elle laisse plus de liberté puisqu'elle couvre le champ des égalités :

$$\frac{7}{7} = 1 \quad ; \quad \frac{8}{7} = 1 + \frac{1}{7} \qquad \text{et} \qquad \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7},$$

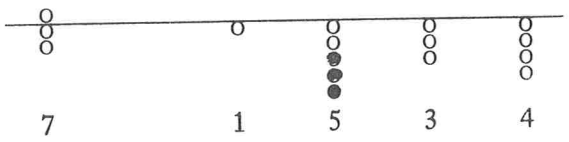
Le reste n'est pas, cette fois, explicité ; seul compte le quotient 1 qui est monté, c'est-à-dire qu'il faut monter une boule des boules situées à la partie inférieure de la tige qui se trouve immédiatement à "gauche".

Expliquons l'application de ces règles sur l'exemple de la division de 1234 par 7. Nous n'indiquons que les boules significatives : celles qui "touchent" la barre transversale et nous avons noirci les nouvelles boules.

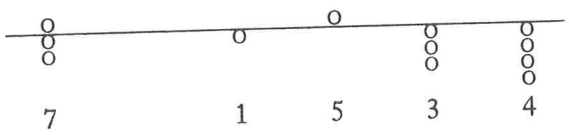
1ère étape. On écrit le dividende et le diviseur.



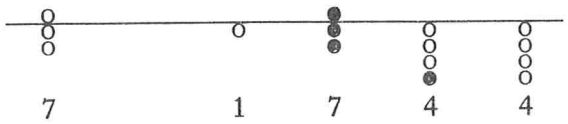
2ème étape. Le premier chiffre du dividende est 1, on applique la première règle



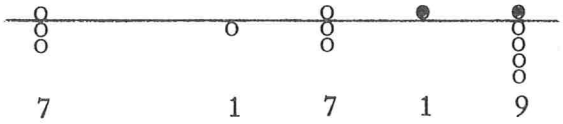
soit après simplification par 5



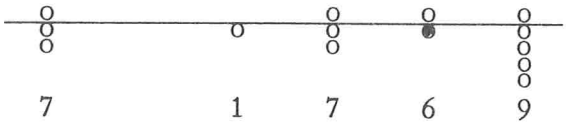
3ème étape. Le deuxième chiffre du nouveau dividende est 5 : on applique la cinquième règle



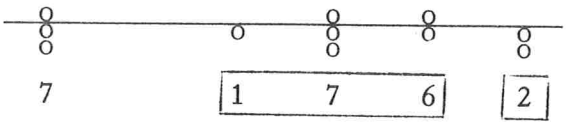
4ème étape. Le troisième chiffre du nouveau dividende est 4 : on applique la quatrième règle



5ème étape. Le quatrième chiffre du nouveau dividende est 9 : on applique la septième règle



6ème étape. On applique la simplification non écrite dans la septième règle c'est-à-dire qu'on enlève les trois boules qui correspondent à 7



qui traduit l'égalité

$$1234 = 7 \times 176 + 2$$

Nous avons ainsi, comme dans l'énoncé de chaque règle, le quotient et le reste. Notons que la preuve de l'opération se fait en appliquant d'autres règles spécifiques valables pour le diviseur 7.

La division par différence sur l'abaque médiéval

Au début du XIIIème siècle, FIBONACCI c'est-à-dire LEONARD DE PISE (1170-1240) indiquait trois manières de compter :

"computatio manibus, algorismus, arcus pictagore" [55]

c'est-à-dire les comptes digitaux, les "calculs indiens" et l'abaque de GERBERT. On attribue en effet à ce moine né à Aurillac vers 94O -qui devint pape en 999 sous le nom de Sylvestre II[56]- l'introduction d'un certain type d'abaque. L'abaque de Gerbert ou arc pythagorique est divisé en trente lignes verticales dont les trois dernières sont réservées aux onces et à ses proportions. Les vingt-sept autres sont groupées aussi trois par trois de manière à bien positionner les chiffres -ou plutôt les apices c'est-à-dire les jetons sur lesquels sont dessinés les symboles numériques- comme nous écrivons, aujourd'hui, les nombres par tranches de trois chiffres. Ce regroupement est marqué par des arcs joignant les colonnes. Pour la conduite des opérations on trace aussi des lignes horizontales de manière à délimiter les cases dans lesquelles on met les apices[57] .

Sur les apices les symboles numériques sont soit ceux des neuf premiers chiffres[58] de la numération alphabétique grecque soit encore des signes particuliers correspondant aux neuf premiers chiffres. Mais, dans les manuscrits, les explications comportent aussi les chiffres romains !

Nous ne connaissons pas l'origine de la division simple par différence que nous allons maintenant considérer. Peut-être doit-on y voir une survivance du compte digital ? En effet une version latine du Liber Ysagorum[59] contient une formule de multiplication des unités que l'on peut traduire selon les égalités suivantes :

$$ab = 10b - b\,(10 - a) = 10\,a - a\,(10 - b).$$

Dans le cas qui nous occupe la division simple par différence repose sur les deux règles suivantes :

$$(2) \qquad \frac{a10^{n+1}+b}{c} = a10^{n} + \frac{a10^{n}(10-c)+b}{c}$$

$$(3) \qquad \frac{a}{c} = 1 + \frac{a-c}{c} \qquad \text{si} \qquad c \leq a < 10 \ .$$

où a et c sont des entiers naturels non nuls structement inférieurs à 10. Ces deux règles utilisent les différences (10-c) et (a-c) . Afin de montrer cet algorithme explicitons-le sur l'exemple de la division de 905 par 8.[60]

		2
		8
9		5

1ère étape. On inscrit la différence (10-8), c'est à dire 2, sur la première ligne, et le diviseur, 8, sur la deuxième ligne, et le dividende, 905, sur la troisième ligne.

---

55 - Cité par Smith (loc. cit 3) t. II, p. 186.

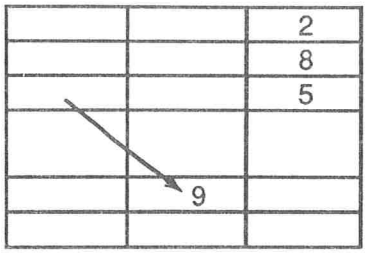
56 - Voir la conférence de Jean Pierre LEVET ***"Gerbert d'Aurillac, le savant, le maître, le mathématicien".***

57 - On doit distinguer l'abaque de GERBERT de l'abaque à lignes horizontales ou chaque ligne horizontale représente les diverses ordres décimaux. C'est ce dernier qui est représenté dans de nombreux ouvrages d'arithmétique circulant encore au XVIème siècle.

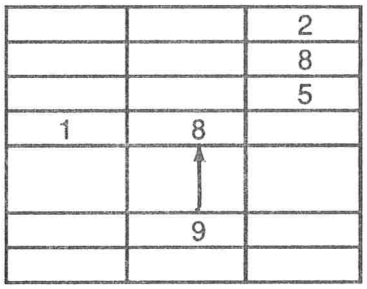
58 - Voir Annexe 6

59 - ALLARD. Notes 33 et 36.

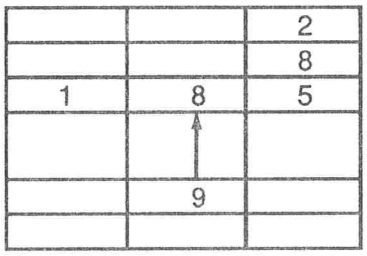
60 - Voir Annexe 6. Pour montrer l'application de la deuxième règle nous avons changé 900 en 905.



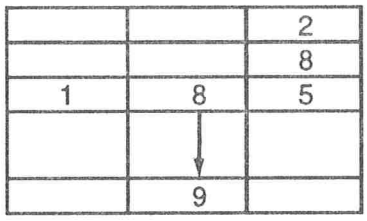
2ème étape. Le nombre 905 étant supérieur à 8, on applique la première règle. Pour écrire ce qui correspond au quotient partiel $a.10^n$, on "pose" le premier chiffre du dividende, a, ici 9, dans la colonne suivante à l'avant dernière ligne.[61]



3ème étape. Le nombre $a10^n(10-c)$ est le produit de $a10^n$ quotient obtenu précédemment par la différence, autrement dit ceci revient à multiplier le chiffre de l'avant-dernière ligne par la différence, c'est-à-dire, ici, 9 par 2. On obtient un nombre, ici 18, que l'on "pose" dans la quatrième ligne, le chiffre des unités étant posé dans la colonne où se trouvait le chiffre de l'avant-dernière ligne.



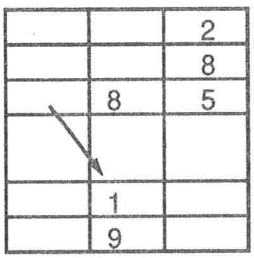
4ème étape. Le nouveau dividende $[a.10^n.(10-c)+b]$ est obtenu en additionnant les chiffres respectifs des troisième et quatrième ligne. On pose le résultat dans la troisième ligne.



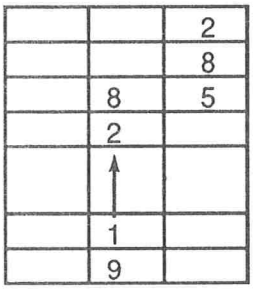
5ème étape. On pose le premier quotient partiel $a10^n$ dans la dernière ligne. Il suffit alors de répéter le procédé ou d'appliquer la deuxième règle. En fait, cette cinquième étape revient, de manière générale, à additionner les quotients partiels comme nous allons pouvoir le constater.

6ème étape. On opère à partir de 185 comme l'on vient d'opérer à partir de 905 et l'on obtient successivement :

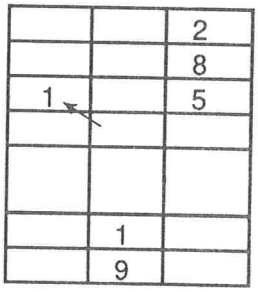
2)



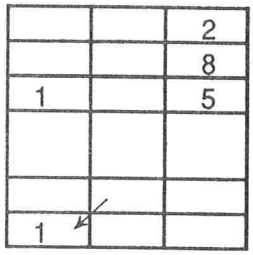
3)



4)



5)

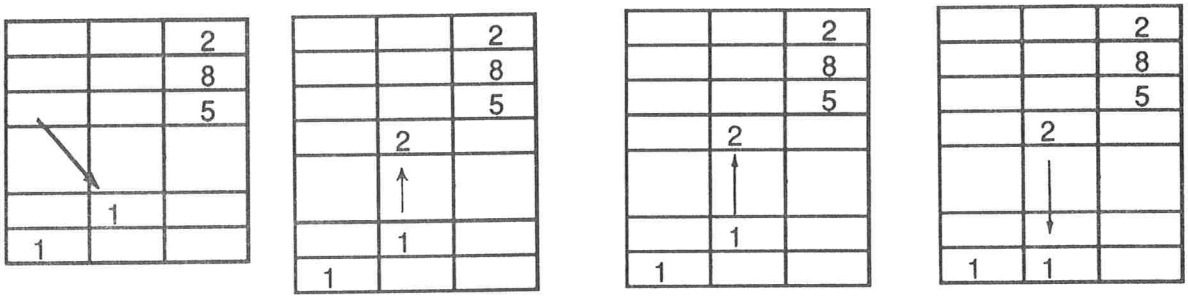


Donc 105 est le nouveau dividende et 100 est le nouveau quotient.

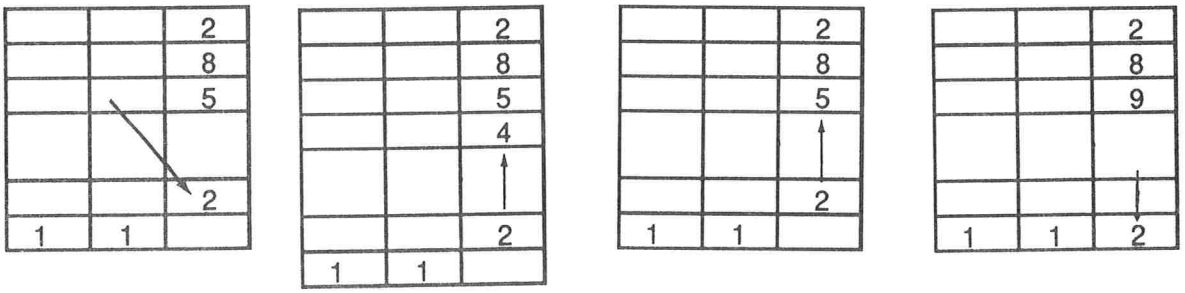
---

61 - Nous avons donné une présentation plus algorithmique permettant une programmation sur un ordinateur.

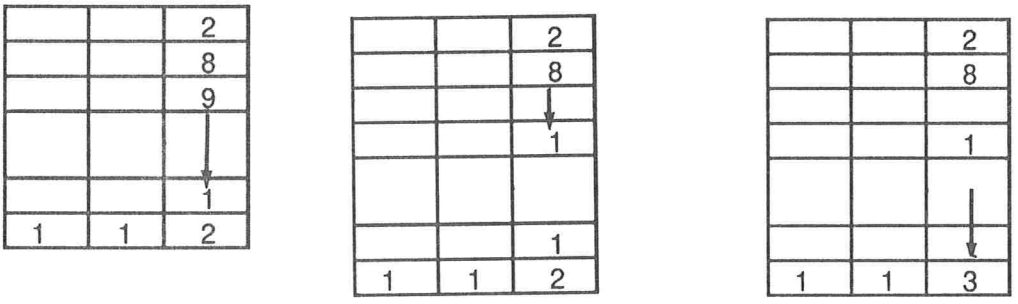
7ème étape. On utilise à nouveau la première règle à partir de 105.



8ème étape. On utilise à nouveau la première règle à partir de 25



9ème étape. On applique cette fois la deuxième règle qui nous donne successivement un quotient partiel égal à 1 puis une différence



Nous avons obtenu ce qui correspond à l'égalité

$$905 = 8 \times 113 + 1.$$

Des approximations babyloniennes ambigues.

Dans le premier chapitre nous avons discuté de la difficulté à percevoir la non-ambiguité de certains algorithmes. Ici, les procédures ne sont sans doute pas ambigues puisqu'elles sont suffisamment explicites. Nous voulons simplement souligner l'ambiguïté qui peut résulter de la confrontation de certaines manières d'opérer. Nous examinerons les problèmes 6 et 7 de la tablette VAT 6598 du Musée de Berlin.[62]

Dans les deux cas, il s'agit de déterminer la diagonale d'une porte dont la hauteur vaut $\frac{40}{60}$ et la largeur $\frac{10}{60}$. Elle est datée de l'ancien âge babylonien, c'est-à-dire du premier tiers du deuxième millénaire avant Jésus-Christ, époque où les Babyloniens utilisaient le système de position sexagésimal et où ils devaient connaître le théorème de PYTHAGORE. Autrement dit, le problème revient à donner une approximation sexagésimale de $\sqrt{(0;40)^2+(0;10)^2}$, c'est-à-dire du nombre irrationnel $\frac{10\sqrt{17}}{60}$. Au lieu de l'approximation 0; 41, 13, 51,[63] le scibe babylonien propose respectivement 0;41, 15, et 0; 42, 13, 20. Si l'on appelle H, L et D respectivement la hauteur, la largeur et la diagonale les procédures indiquées dans les problèmes 7 et 8 peuvent être respectivement traduites par les égalités suivantes :[64]

$$D = H + \frac{1}{2} \times L^2 \qquad\qquad HL = H + 2HL^2$$

Alors que la première égalité correspond à l'approximation bien connue

$$\sqrt{H^2+L^2} \simeq H + \frac{L^2}{2H}$$

la deuxième égalité n'est en un certain sens, valable seulement parceque H et L^2 sont petits. Autrement dit, les deux approximations proposées laissent planer un doute, pour ne pas parler d'ambiguïté, sur la pertinence des méthodes proposées.

La finitude de l'algorithme de l'extraction de la racine carrée selon THEON D'ALEXANDRIE

La finitude d'un algorithme s'inscrit à plusieurs niveaux :

- suite finie de règles
- nombre fini de données
- et nombre fini d'étapes.

Cette "finitude informatique" peut paraître étrangère à quelques algorithmes "mathématiques". C'est, par exemple, le cas pour certains procédés d'extraction de racine carrée d'un nombre irrationnel. Certes le processus n'aboutira jamais à la valeur exacte. Cependant, on conviendra, à l'avance, de s'arrêter lorsque l'on aura obtenu une valeur avec une précision bien déterminée : ainsi on récupèrera la finitude. Par exemple, THEON D'ALEXANDRIE qui vécut vers 370 après Jésus-Christ[65] explique dans le langage géométrique euclidien l'arrêt de l'approximation sexagesimale aux secondes. En l'absence

---

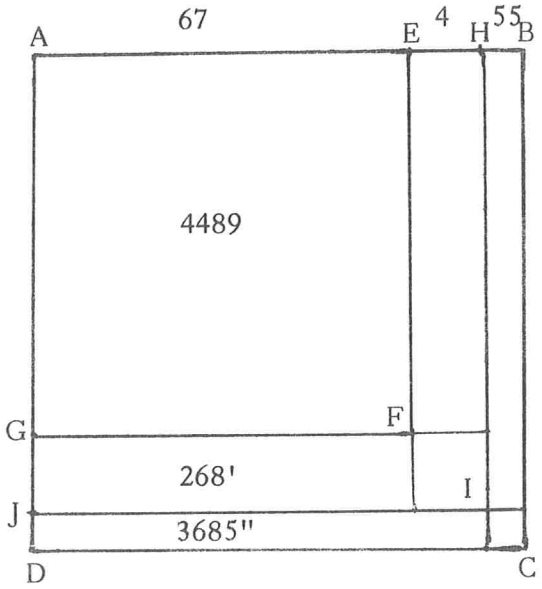
*62 - THUREAU-DANGIN F., **Textes mathématiques babyloniens**, Brill Leiden 1938, p. 130-131.*

63 - Nous avons adopté la notation sexagesimale 0; 41, 13, 51 pour $\frac{41}{61}+\frac{13}{60^2}+\frac{51}{60^3}$

64 - Voir Annexe 7

65 - THEON D'ALEXANDRIE est le père de l'une des premières femmes mathématiciennes HYPATIA.

de traduction du texte grec[66] nous donnons la traduction libre suivante pour le calcul de $\sqrt{4500°}$ puis pour sa généralisation.



"Prendre un carré ABCD contenant 4500 degrés. Le côté du nombre carré le plus près de 4489 est 67°. Prendre AG égal à 67° et AEFG le carré de AG. Le gnomon restant BCD contient 11° ou 660'. Maintenant diviser 660' par 2AG c'es-à-dire 134. Le quotient est 4'. Prendre EH et GJ égaux à 4' et compléter les rectangles HF et FJ. Les rectangles contiennent 536' : il reste 124' soit 7440". De cela nous devons soustraire le carré FI contenant 16". Le gnomon restant BCD contient 7424". Diviser cela par 2AJ soit 134°8'. Le quotient est 55". Le reste est 46"40"', qui est le carré de IC dont le côté est 55"' approximativement. La racine carrée est 67°4' 55"'. [...] . Quand nous cherchons une racine carrée nous prenons d'abord la racine du nombre carré le plus proche. Ensuite nous le doublons et par cela nous divisons le reste réduit en minutes et nous soustrayons le carré du quotient. Ensuite nous réduisons le reste et nous divisons par le double des degrés et des minutes. Nous obtenons ainsi approximativement la racine cherchée.[67]

Si l'on fait exception de la numération sexagesimale nous obtenons le processus classique d'extraction des racines carrées. Comme cela est souvent le cas en astronomie ancienne, la précision est arrêtée aux secondes. Mais le cadre géométrique sert ici seulement de sopport : on ne peut pas apprécier l'approximation sauf à construire une figure très grande : 67°4'55" valant 241495".

La méthode égyptienne des auxiliaires rouges.

L'indépendance des données est intimement liée aux deux autres propriétés caractérisant un algorithme. Nous pouvons dire, qu'en particulier, jointe à la non-ambiguïté, elle permet de préciser le champ de validité de l'algorithme. Nous l'avons souvent constaté, les Anciens n'explicitaient pas le domaine algorithmique dans lequel ils opéraient. Souvent, tant du point de vue historique que mathématique, il est intéressant d'étudier les "limites" de l'algorithme proposé ou supposé.

---

*66 - ROME A., **Commentaires de Pappus et de Theon d'Alexandrie sur l'Almageste.** Biblioteca Apostolica Vaticana, 1936, t. II, pp. 471-472.*

*67 - Voir aussi EELS W., **Greek methods of solving quadratic equations.** The American Mathematical Monthly 18 (1911) 3-14, p. 7.*

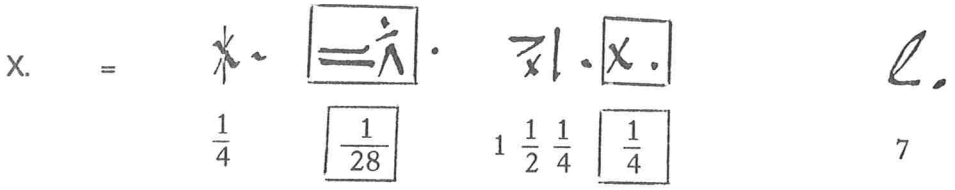
Ici nous avons choisi la méthode des auxiliaires rouges telle qu'elle est pratiquée par les Egyptiens. Disons tout de suite que ce sont les historiens qui dénomment ainsi cette méthode. Elle tire son appellation du fait que dans les papyrus mathématiques les textes qui s'y rapportent sont le plus souvent écrits en rouge.
Nous savons que les scibes égyptiens utilisaient deux sortes d'encre :

> *"L'encre noire était obtenue à partir du noir de fumée, elle servait à écrire la plus grande partie du texte. L'encre rouge était fabriquée avec l'ocre, oxyde de fer tiré de la terre égyptienne. Par contraste avec la noire, elle permettait de distinguer des séries (par exemple dans les premiers documents de comptabilité), d'indiquer des dates, de ponctuer un récit et surtout de marquer les têtes de chapitres, le début des paragraphes et la conclusion d'un long texte. Cette habitude a enrichi notre propre vocabulaire du mot <<rubrique>> (du latin <<ruber>> rouge)".*[68]

Ces dispositions d'écriture sont présentes dans le plus important papyrus mathématique égyptien qui nous soit parvenu : le papyrus RHIND. Il s'agit d'une copie datée de 1650 avant Jésus-Christ d'un texte antérieur de près de deux cents ans. En effet, l'introduction y est écrite en rouge :

> *"Exemple de calcul, afin de sonder les choses et connaître tout ce qui est obscure ainsi que tous les secrets".*[69]

Vaste programme. Mais pour ce qui nous occupe, cette écriture rouge sert aussi pour ce que nous pourrions situer dans le cadre d'une réduction au même dénominateur. Nous savons que les anciens Egyptiens utilisaient en dehors des entiers naturels non nuls et de la fraction $\frac{2}{3}$ les seuls inverses des entiers naturels non nuls que nous appelons quantièmes. Dès lors, l'écriture d'un rationnel devait s'effectuer dans ce cadre. C'est pour celà qu'il était fondamental de connaître certaines relations entre quantièmes et que les papyrus RHIND commence parce que nous appelons "les expressions de 2 à partir de n" pour n compris entre 3 et 101.[70] Ainsi "les expressions de 2 à partir de 7" se présentent comme suit.[71]



---

68 - BENEZATH D., in ***Naissance de l'Ecriture****, Edition de la Renaissance des Musées Nationaux, Paris (1982), p. 343.*

69 - CHOUCHOUD D., ***Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Egypte pharaonique.*** *Thèse 3ème cycle, Lyon II, 1983, p. II.*

70 - Il existe d'autres tables "d'expressions de 2 à partir de n". Voir par exemple GRIFFITH F. ***Hieratic papyri from Kahum and Gurob****. Quaritch, London (1898). Kahum IV 2 pour n variant de 3 à 21, p. 15.*

71 - CHACE A., ***The Rhind mathematical papyrus.*** *The National Council of Teachers of Mathematics 1926, reimp. 1979, planche 2.*

où nous avons encadré ce qui est écrit en rouge. Ceci correspond aux égalités suivantes

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

Ainsi l'écriture impossible $\frac{"2"}{7}$ était remplacée par $(\frac{1}{4} + \frac{1}{28})$. D'une autre manière les scribes devaient réduire les expressions comportant trop de quantièmes et c'est ici que la méthode dite des auxiliaires rouges prend toute sa valeur. Par exemple, le problème 7 du papyrus RHIND peut se traduire comme suite :

Exemple pour rendre complet

72

$1\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{28} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{16} \qquad \frac{1}{112}$

$7 \quad 1 \qquad\qquad 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{56}$ total $\frac{1}{2}$

$3\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$

En l'absence d'autres indications on peut considérer que ceci correspond au calcul de la somme

$$1\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right)$$

soit encore au calcul de la somme

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{56}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{112}\right).$$

dont le résultat est 2 comme il est indiqué.

Certes, l'addition des "quantièmes binaires" $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)$ peut être conservée. Mais les autres quantièmes proviennent par dimidiation, c'est-à-dire par division par 2 , du quantième originel $\frac{1}{28}$. Il est dès lors utile de ramener tout à lui c'est-à-dire de prendre comme dénominateur commun 28 et non pas 112 comme nous opèrerions aujourd'hui. Nous avons en rouge les numérateurs correspondants :

$$\frac{1}{4} = \frac{\boxed{7}}{28}, \quad \frac{1}{28} = \frac{\boxed{1}}{28}, \quad \frac{1}{8} = \frac{\boxed{3+\frac{1}{2}}}{28}, \quad \frac{1}{56} = \frac{\boxed{\frac{1}{2}}}{28}$$

---

72 - CHALE, note 74, planche 39.

$$\frac{1}{16} = \frac{\boxed{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}}{28} \quad \text{et} \quad \frac{1}{112} = \frac{\boxed{\frac{1}{4}}}{28}$$

Le total s'obtient dès lors aisément puisque l'on additionne les nombres écrits en rouge : on obtient 14 d'où le total $\frac{1}{2}$. Autrement dit, la méthode est intimement liée aux données 4 et 28 . La technique de la multiplication ou de la division à l'aide de la duplication ou de la dimidiation assurent la pertinence du choix opéré par le scribe. La méthode des auxiliaires rouges n'est pas indépendante du champ dans lequel travaille le scribe.[73]

L'itération donnée par HERON D'ALEXANDRIE

A la fin du XIXème et au début du XXème siècle, la finitude a beaucoup préoccupé les mathématiciens. Ceci tient au fait que finitude et effectivité sont intimement liées. Dès lors, une querelle a pris corps : elle a opposé les idéalistes et les empiristes et elle a culminé dans les débats engagés à propos de l'acceptation ou du refus de l'axiome du choix.
Dans les années 1930, les logiciens se sont particulièrement intéressés aux "fonctions effectivement calculables". En 1936 Alonzo CHURCH [74] avance la thèse que les fonctions effectivement calculables sont exactement les fonctions récursives. Cette hypothèse mathématique signifie que les fonctions qui peuvent être calculées par un ordinateur sont les fonctions récursives.
A la récursivité sont intimement liées les notions d'itération et de récurrence, notions distinctes qui jouent un rôle fondamental dans le traitement des algorithmes. Jointe à la finitude, l'indépendance des données permet l'itération. Certes cette notion n'apparaît pas dans la définition que nous avons donnée d'un algorithme mais elle est essentielle aux yeux des informaticiens. Dès que l'on tente de formaliser le processus on est amené à écrire des formules de récurrence, et cette récurrence, traditionnellement traitée par l'itération est fréquemment mise en oeuvre aujourd'hui de façon récursive. Cette récursivité est en fait au plus près de la signification de l'algorithme d'EUCLIDE fondé sur le fait que le p.g.c.d. de a et b ($a \geq b$) vaut a lorsque b est nul et sinon est égal au p.g.c.d. de b et r où r désigne le reste de la division de a par b .
En l'absence d'autres documents, le premier à avoir mis l'accent sur une itération ou plutôt sur l'idée qui s'avèra si fructueuse d'approximations successives est HERON d'ALEXANDRIE mathématicien grec qui vécut au premier siècle de notre ère. Le texte qui lui en assure la paternité n'a toutefois été découvert qu'en 1896 ! Preuve, si besoin était, de la fragilité de certaines hypothèses historiques.
Dans ce texte il nous propose l'algorithme bien connu pour approcher une racine carrée d'un nombre irrationnel. Si a est une valeur approchée de $\sqrt{A}$ alors il considère la valeur $\frac{1}{2}(a + \frac{A}{a})$. En l'absence de notations le schéma est proposé sur un exemple, celui de $\sqrt{720}$:

> *"Puisque 720 n'a pas de côté rationnel, nous extrairons le côté avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que 720 est 729 qui a pour côté 27, divise 720 par 27, cela fait 26 et $\frac{2}{3}$, ajoute 27 cela fait $53\frac{2}{3}$; prends-en la moitié, cela fait $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$.*

---

73 - Dans le problème 31 du papyrus RHIND pour "résoudre dans E l'équation $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33$ soit et $\frac{97x}{42} = 33$", le scribe adopte le dénominateur 42. (Voir note 21)

*74 - CHURCH A., An unsolvable problem of elementar number theory, **American Journal of mathematics**, 58, (1936), p. 345-363.*

En fait, 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ multiplié par lui-même donne 720 $\frac{1}{36}$; de sorte que la différence (sur les carrés) est $\frac{1}{36}$. Si nous voulons rendre cette différence inférieure encore à $\frac{1}{36}$, nous mettrons 720 $\frac{1}{36}$ trouvé tout à l'heure à la place de 729 et, en procédant de la même façon, nous trouverons que la différence (sur les carrés) est beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$.[75]

Cette approximation se situe dans le cadre des moyennes chères aux pytagoriciens puisque ceci revient à considérer la moyenne arithmétique de deux approximations, l'une par excès et l'autre par défaut. Le cadre numérique est celui des quantièmes et ceci permet d'expliquer la préférence accordée par HERON à cette approximation plutôt qu'à l'approximation dite newtoniene[76]

$$a + \frac{A-a^2}{2a}$$

qui lui est équivalente quant au résultat obtenu puisque l'on a l'égalité

$$a + \frac{A-a^2}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$$

mais qui en diffère du point de vue du calcul : il est difficile de soustraire des quantièmes pour calculer $(A-a^2)$.
L'examen de l'ouvrage d'HERON D'ALEXANDRIE montre qu'il a plus ou moins appliqué son procédé[77] . Nous pouvons y distinguer trois types d'approximation :

- les approximations grossières où il ne semble pas avoir appliqué l'algorithme, citons :

$$\sqrt{58 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} \sim 7 + \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{356} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\sqrt{356 + \frac{1}{18}} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$[78]

- les approximations où il a pu appliquer une fois l'algorithme

---

75 - BOROWCZYK J., Problèmes numériques. ***Actes du Colloque Inter-Irem,*** *Montpellier 1985, 95-111, p. 96.*

76 - Cette approximation semble être connue des Babyloniens et des Egyptiens de la période "grecque" : voir, par exemple PARKER, R. ***Démotic Mathematical Papyri*** *Brown University, Press Providence 1972, p. 69.*

77 - GUNTHER S., Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethode ***Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 4,*** *(1882), p. 1-13. HOFMANN, J. E., überdie Annäherungvon Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 43, (1934), p. 187-210. TANNERY, P., L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie,* ***Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*** *4 (1982) 161-194.*

78 - On peut noter le manque de rigueur dans l'ouvrage puisque $356 < 356 + \frac{1}{18}$ et $\frac{1}{8} > \frac{1}{9}$.

$$\sqrt{63} \sim \frac{1}{2}\left(8 + \frac{63}{8}\right) = 8 - \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{1125} \sim \frac{1}{2}\left(33 + \frac{1125}{33} = 33 + \frac{1}{2} + \frac{1}{22}\right)$$

et les approximations où il a pu appliquer deux fois l'algorithme la première application conduisant à une approximation grossière, citons :

$$\sqrt{135} \sim \frac{1}{2}\left(11 + \frac{135}{11}\right) \sim 11 + \frac{2}{3}$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(11 + \frac{2}{3} + \frac{135}{11 + \frac{2}{3}}\right) = 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$$

$$\sqrt{2460 + \frac{15}{16}} \sim \frac{1}{2}\left(49 + \frac{2460 + \frac{15}{16}}{49}\right) \sim 49 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(49 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{2460 + \frac{15}{16}}{49 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}}\right) = 49 + \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{51} \quad .$$

Une généralisation abusive par AS-SAMAW'AL

Les mathématiciens arabes ont perfectionné les méthodes d'approximation. Au lieu de

$$\sqrt{A} \sim a + \frac{A - a^2}{2a}$$

AL-UQLTDIST propose en 952 l'approximation

$$\sqrt{A} \sim a + \frac{A - a^2}{2a+1}.$$

De nombreux mathématiciens arabes adopteront la généralisation suivante pour les racines nièmes

$$\sqrt[n]{A} \sim a + \frac{A - a^n}{(a+1)^n - a^n};$$

elle est même appelée "approximation conventionnelle" pour les racines cubiques. Sans doute pour pallier les efforts de calcul nécessités par l'itération, AS-SAMAW'AL -qui mourut en 1175- remplace la division à l'aide de l'approximation a de la division à l' aide de la partie entière :

$$[a]^2 \leq A < ([a] + 1)^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{A} \sim a + \frac{A - a^2}{2\,[a]} \quad .$$

"Si tu extrais la racine irrationnelle du nombre < > et si tu veux l'égaliser <<ta'dil>> [améliorer l'approximation] par ce calcul, multiplie le côté < > par lui-même et cherche combien est la différence, <<al-Tafànt>>, entre le produit et la quantité dont on veut approcher la racine. Divise ensuite cette erreur par le double de la partie entière de la racine. Divise ensuite cette erreur par le double de la partie entière de la racine ; ajoute le quotient de la division au côté, si l'erreur est négative et retranche le du côté si l'erreur est positive. Tu trouves ainsi le côté égalisé [amélioré]. Il est toujours plus proche de la vérité que celui qui le précède ".[79]

Moins performant que l'algorithme héronien, cet algorithme est appliqué effectivement par AS-SAMAW'AL pour le calcul de $\sqrt{5}$.
Il considère la suite définie par récurrence par :

$$x_0 = 2 + \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n + \frac{5-x_n^2}{2[\sqrt{5}]} = x_n + \frac{5-x_n^2}{4}$$

Il obtient :

$$x_1 = 2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{56}{25} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{56}{25} - \frac{11}{2500} = \frac{5589}{2500}$$

Notons que :

$$\sqrt{5} \sim 2{,}236 \quad \text{et} \quad \frac{5589}{2500} = 2{,}2356.$$

Pour les racines n-ièmes AS-SAMAW'AL propose une généralisation curieuse que nous pouvons formuler comme suit :

$$\sqrt[n]{A} \sim a + \frac{A-a^n}{2[\sqrt[n]{A}]^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} [\sqrt[n]{A}]^i}$$

soit pour n égal à 3

$$\sqrt[3]{A} \sim a + \frac{A-a^3}{2[\sqrt[3]{A}]^2 + [\sqrt[3]{A}]}$$

Il est aisé de voir que cet algorithme n'est pas toujours valide. Par exemple, appliquons-le pour le calcul de $\sqrt[3]{3}$. Nous avons

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n + \frac{3-x_n^3}{3}.$$

---

*79 - RASHED R., **Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes.** Les Belles Lettres, Paris 1984 p. 118.*

On obtient pour les premiers termes :

$$x_1 = 1 + \frac{2}{3} = 1{,}66 \ldots \quad \text{et} \quad x_2 = 1 + \frac{2}{3} - \frac{44}{81} = \frac{91}{81} \sim 1{,}123$$

Mais la suite (x_n) ne converge pas. On a en effet pour tout entier naturel

$$1 \leq x_{2n} < 1{,}19 < 1{,}628 < x_{2n+1} \leq \frac{5}{3}$$

et $\lim(x_{2n+1}) \sim 1{,}6222943$; $\lim(x_{2n+1}) \sim 1{,}187671$.
Autrement dit la généralisation proposée par AS-SAMAW'AL est abusive. Mais en fait, on peut appliquer l'algorithme pour le calcul de $\sqrt[3]{3000}$ car la suite

$$x_0 = 14 \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{3000 - x_n^3}{406}$$

converge ! On a :

$$x_{10} \sim 14{,}222 \qquad x_{11} \sim 14{,}223 \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{3} \sim 1{,}422\ 496\ .$$

Ceci peut expliquer "l'erreur" d'AS-SAMAW'AL.

4 - CONCLUSION

Même en nous limitant aux algorithmes liés aux opérateurs élémentaires et aux civilisations anciennes notre étude est loin d'être exhaustive. Ce n'était pas notre ambition et nous en avons souligné les limites. Nous nous sommes bornés à expliciter quelques exemples qui nous ont paru significatifs tant du point de vue historique que du point de vue adopté aujourd'hui en informatique.

Dans toutes les civilisations et à toutes les époques les algorithmes jouent un rôle fondamental. Pour mieux les connaître, il est nécessaire de les mettre en situation et de ne pas se limiter à leur énoncé fut-il historique ! Il reste encore beaucoup de travaux à mener, historiques, épistémologique sans oublier le côté didactique. A chacun d'utiliser au mieux ses compétences.

De nombreux textes restent encore à élucider. Nous n'en citerons ici que quelques-uns qui ont déjà donné lieu à une abondante littérature :

- Comment les Babyloniens sont-ils parvenus à l'excellente approximation sexagésimale 1; 24,51,10 de $\sqrt{2}$ donnée dans la tablette YBC 7289 ?

- Existe-t-il un algorithme pour les "expressions égyptiennes de 2 à partir de n ?

- Comment ARCHIMEDE a-t-il trouvé ou connu l'encadrement de $\sqrt{3}$

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

dans son <u>Traité de la mesure du cercle</u> ?

Le cadre mathématique de nombreux algorithmes reste à déterminer. Par exemple, l'étude théorique de l'algorithe d'AS-SAMAW'AL mérite d'être conduite. Dans cette quête les ressources informatiques ne sont pas dénuées d'intérêt et il eut été intéressant de mener à bonne fin des programmes permettant de mieux juger de la pertinence des algorithmes proposés.
Ce n'était qu'un "à propos".

ANNEXE 1

NUMERATION ALPHABETIQUE GRECQUE

UNITÉS				DIZAINES				CENTAINES			
A	α	alpha	1	I	ι	iota	10	P	ρ	rô	100
B	β	bêta	2	K	κ	kappa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gamma	3	Λ	λ	lambda	30	T	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	M	μ	mu	40	Y	υ	upsilon	400
E	ε	epsilon	5	N	ν	nu	50	Φ	φ	phi	500
Ϝ	ϛ	digamma	6	Ξ	ξ	ksi	60	X	χ	khi	600
Z	ζ	dzêta	7	O	ο	omicron	70	Ψ	ψ	psi	700
H	η	êta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	oméga	800
Θ	θ	thêta	9	Ϙ	ϙ	koppa	90	Ϡ	ϡ	san	900

NUMERATION HIEROGLYPHIQUE

	LECTURE DE DROITE A GAUCHE	LECTURE DE GAUCHE A DROITE
1		
10		
100		
1 000		
10 000		
100 000		
1 000 000		

FRACTIONS

élémentaires $\frac{3}{4}$: $\frac{2}{3}$: ou ou $\frac{1}{2}$: ou

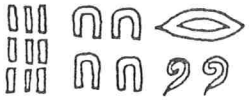
quantièmes

$\frac{1}{3}$

$\frac{1}{5}$

$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{10}$


$\frac{1}{249}$

ANNEXE 2

Traduction des "divisions de Démosthème" dans le système alphabétique grec.

$365 : 12 = 30 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$

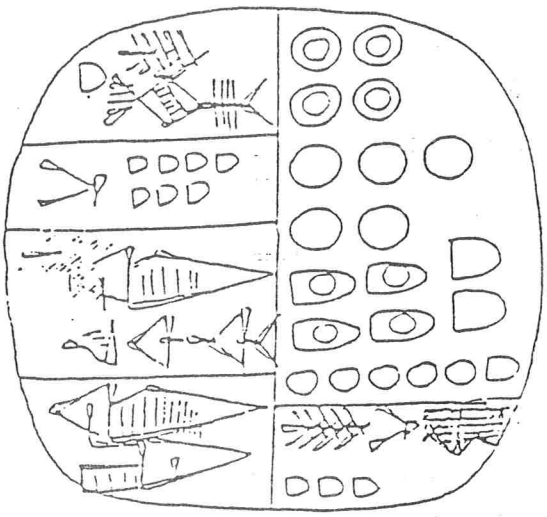
10 x 30 = 300 2 x 30 = 60 < 12 x 30= 360 > *il reste 5* $\frac{1}{3}$ x 12 = 4 < 12 x $(30+\frac{1}{3})$ = 364 > *il reste 1* $\frac{1}{12}$ x 12 = 1 < 12 x $(30 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ = 365 >	τ ξ ε : β= λ γ ι β′ ι x λ = τ β x λ = ξ < ι β x λ = τ ξ > γ′ x ι β = δ < ι β x λ γ′ = τ ξ δ > *il reste* α ι β′ x ι β = α < ι β x λ γ′ β′ = τ ξ ε >
354 : 12 = 29 + $\frac{1}{2}$ 10 x 20 = 200 2 x 20 = 40 < 12 x 20 = 240 > 10 x 9 = 90 2 x 9 = 18 < 12 x 9 = 108 > < 12 x 29 = 348 > $\frac{1}{2}$ x 12 = 6 < 12 x $(29 + \frac{1}{2})$ = 354 >	τ ν δ : ι β = κ θ < ι x κ = σ β x κ = μ < ι β x κ = σ μ > ι x θ = ϟ β x θ = ι η < ι β x θ = ρ η > < ι β x κ θ = τ μ η > < x ι β = ζ < ι β x κ θ < = τ ν δ >

Remarque : Nous avons indiqué entre crochets les totaux dont DEMOSTHENE ne parle pas.

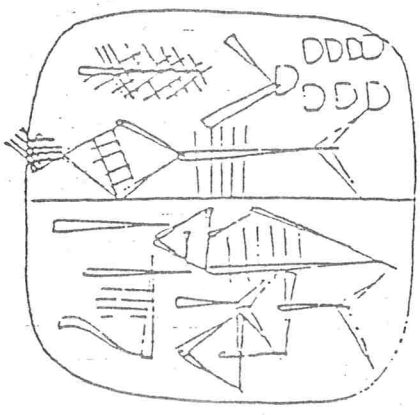
ANNEXE 3

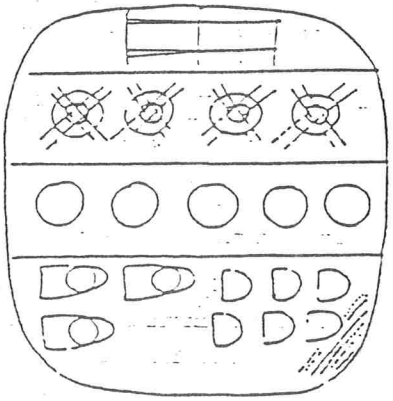
Tablettes sumeriennes[30]

Tablette n° 50



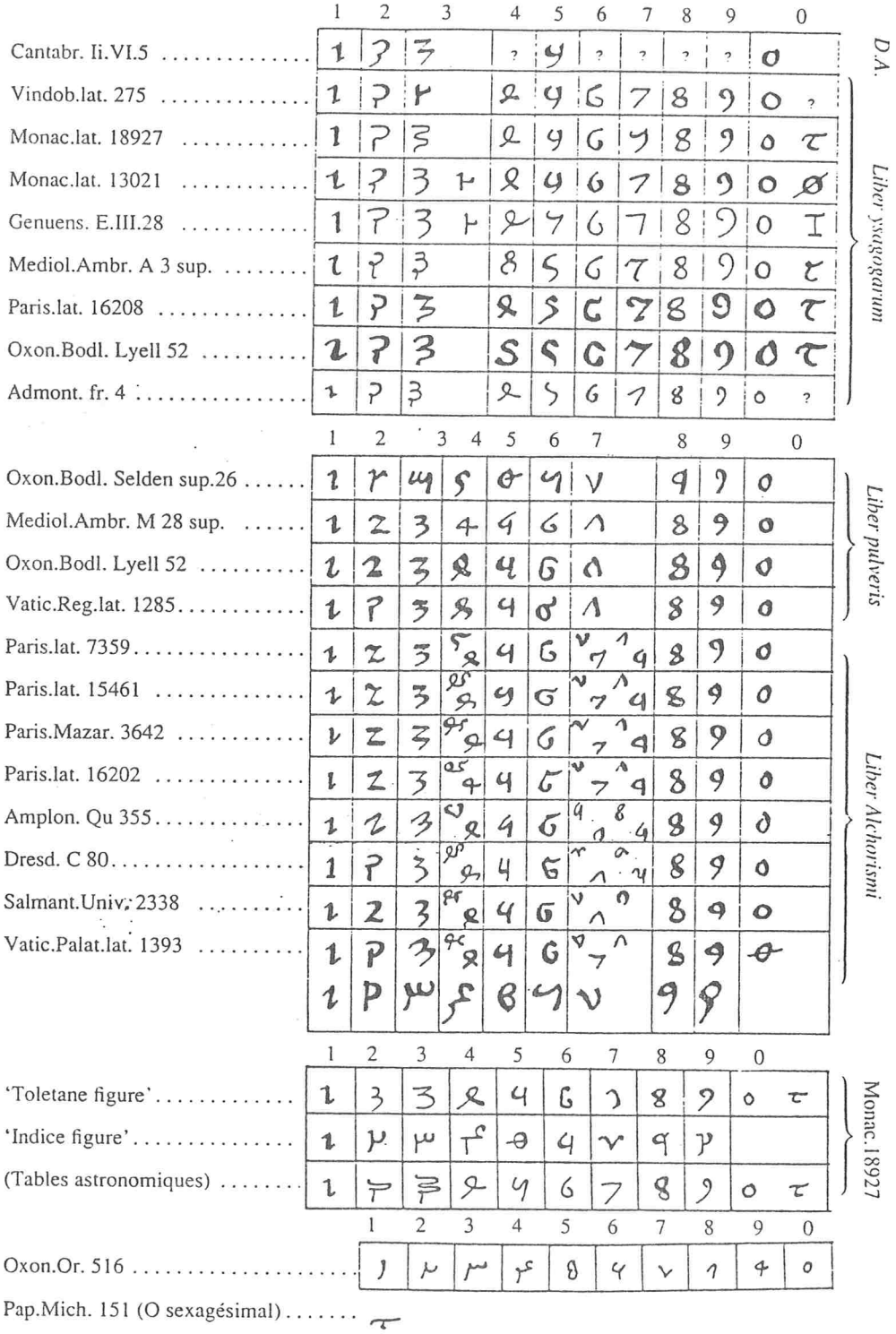
Tablette n° 671





ANNEXE 4

Chiffres trouvés dans certains manuscrits[33]



ANNEXE 5

Recorde The ground of artes [46]

Arithmetik S. Some cal it Arsmetrike, and some Augrime. M. And what dooeth those names betoke? S. That if it please you, of you wold learne, M, Bothe names are corruptely wrytten, Arsmetrike for Arithmetike as the Grekes call it, and Augrym for Algorisme, as Arabians sound it, whiche bothe betoken the science of numbrig, For Arithmos in greke is called numbre, and of it cometh Arithmetike, the arte of numbryng, So that arithmetike is a science or art teachyng the maner and vse of numbryng, and maye bee wrought dyuersely, with penne or counters. But I wil fyrste shewe the woorkyng wythe the penne, and than thother in order, Scho. This I wyll remembre, But how many thinges are to bee learned, to attayn this arte fully? M, There are reckened cõmonly, viii, Numeration, Addicion, Subtraction, Multiplicacion, Diuisiõ, Progression, and Extraction of radicals: to these, some men adde

Ἀριθμητική

Ἀριθμός

S. Certains l'appellent Arsmetrike et d'autres Augrime.
M. Et que signifient ces deux termes ?
S. C'est, si cela vous plait, ce que de vous j'aimerais apprendre.
M. Les deux noms sont écrits incorrectement : Arsmetrike pour Arithmétique comme l'appellent les Grecs et Augrym pour Algorithme telle que les Arabes l'ont découverte et ces deux noms signifient la science du dénombrement car Arithmas désigne en grec le nombre et de là vient Arithmétique l'art du dénombrement...

ANNEXE 6

L'abaque médiéval[42]

I. — *Objet de l'Abacus* (*).

« L'art dont on va parler se nomme *Abacus;* ce nom est arabe et signifie *table,* parce que l'une et l'autre chose ont cela de commun qu'elles sont formées de planches. L'*Abacus* traite de la multiplication et de la division des nombres. En voici l'objet et la méthode. Son utilité est de savoir multiplier et diviser les nombres d'une manière ingénieuse et abrégée. Si l'on ignore comment se fait l'Abacus, on le saura après avoir entendu ce qui va suivre.

II. — *Description du* Tableau à colonnes. *Usage de neuf caractères. Noms et formes de ces caractères. Valeurs de position qu'ils prennent dans les colonnes.*

« On dispose plusieurs espaces, à côté l'un de l'autre, douze ou un plus plus grand nombre, qu'on appelle *arcs* ou colonnes.

« Dans la première colonne, on écrit l'*unité;* dans la deuxième, le nombre qui est décuple de l'unité, c'est-à-dire *dix;* et des autres nombres qui sont écrits dans les autres colonnes, chacun est décuple de celui qui lui est immédiatement inférieur.

« La première colonne, qui contient l'unité, s'appelle elle-même *singularis* (colonne des unités); la deuxième, *decenus* (colonne des dizaines); la troisième, *centenus* (colonne des centaines); la quatrième, *millenus* (colonne des mille), etc.; les suivantes prennent semblablement le nom des nombres qui y sont inscrits.

« Dans ces colonnes, préparées pour multiplier et diviser, on place divers caractères, au nombre de neuf, qui suffisent pour faire toute multiplication et division en nombres entiers. Et ces neuf caractères appartiennent proprement à la première colonne.

« Dans la première colonne on écrit l'unité, dans la deuxième deux, dans la troisième trois, dans la quatrième quatre, dans la cinquième cinq, dans la sixième six, dans la septième sept, dans la huitième huit, dans la neuvième neuf.

« Ces nombres ont la forme et les noms décrits ci-dessous :

Igin	Andras	Ormis	Arbas	Quimas	Calcus	Zenis	Themenias	Celentis
I								

« Après avoir fait connaître les figures et les noms de ces caractères, je dirai qu'on devra mettre I dans la colonne des unités pour exprimer une unité simple; pour deux unités; et en continuant de cette manière on exprimera les autres nombres jusqu'à dix, en posant les autres caractères dans la même colonne.

(*) J'ai marqué les différentes parties de ce Traité par des numéros et des titres qui n'existent pas dans le texte latin, où l'on ne trouve même ni ponctuation ni alinéas, suivant l'état ordinaire des Mss. du XIIe siècle. Ces numéros et ces titres faciliteront la lecture de l'ouvrage et l'intelligence des règles qui y sont décrites; ils tiendront lieu, jusqu'à un certain point, de commentaires.

ANNEXE 7

Problèmes 6 et 7 de la tablette VAT 6598[62]

PROBLEME 6.

Une porte. Hauteur : un demi (ninda) et 2 coudées. Largeur deux coudées	$H = 0;40$ $L = 0;10$
Quel est sa diagonale ? Toi carre 10, la largeur. Tu trouveras 1,40 le sol.	$L^2 = (0;10)^2 = 0;1,40$
Dénoue l'inverse de 40 - coudée - la hauteur	$\frac{1}{4} = \frac{1}{0;40} = 1,30$
Porte à 1,40 le sol, tu trouveras <2>30	$L^2 \times \frac{1}{H} = 0;1,40 \times 1,30 = 0;2,30$
Fractionne en deux 2,30. Tu trouveras 1,15	$\frac{1}{2} L^2 \times \frac{1}{H} = \frac{1}{2} (0;2,30) = 0;1,15$
Ajoute 1,15 à <40 la hauteur>. Tu trouveras 41,15. <La diagonale> est 41,15. C'est la façon d'opérer	$D = \frac{1}{2} L^2 \times \frac{1}{H} + H = 0;40 + 0;1,15$ $= 0;41,15$

PROBLEME 7.

Largeur 2 coudées. Hauteur 40 coudées. Qu'est sa diagonale ?	$H = 0;40$ $D = \sqrt{H^2+L^2}$? $L = 0;10$
Toi carre 10 le front, tu trouveras 1,40	$L^2 = (0;10)^2 = 0;1,40$
Porte 1,40 à 40-coudée-la hauteur, tu trouveras 1, 6, 40	$L^2 \times H = 0;1,40 \times 0;40$ $= 0;1,1,6,40$
Double, tu trouveras 2, 13, 20	$2 L^2 H = 2x0;1,6,40$ $= 0;2,13,20$
Ajoute à 40-coudée-la hauteur du trouveras 42,13,20, la diagonale. C'est la façon d'opérer	$D = H + 2 L^2 H$ $= 0;40 + 0;2,13,20$ $= 0;42,13,20$

Remarque. Conformément aux écritures babyloniennes, nous n'avons pas distingué, dans le texte, les divers ordres sexagésimaux. Par contre, dans le commentaire 0;42,13,20 désigne $(\frac{42}{60} + \frac{13}{60^2} + \frac{20}{60^3})$.

Les parties entre crochets sont des restitutions.