Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

EXEMPLES DE CALCULS ALGEBRIQUES EN CHINE ANTIQUE ET MÉDIÉVALE

Olivier KELLER
Lycée P. Brossolette - Villeurbanne

Sommaire

I. Mode d'emploi

II. Equations linéaires

III. Equations quadratiques - le triangle rectangle

IV. Extraction de racines cubiques

V. L'algèbre du 13ème siècle

VI. Commentaires

VII. Principaux documents

VIII. Bibliographie

I - MODE D'EMPLOI

On trouvera ici une série de problèmes typiques de l'algèbre chinoise antique et médiévale, dans une forme aussi proche que possible des textes originaux. Tout ce qui est entre guillements provient de la traduction, en langue européenne, du texte original chinois. Les "commentaires" donnent de brefs éclaircissements sur les problèmes et les "principaux documents" indiquent leurs sources.

II - EQUATIONS LINÉAIRES

1. Deux problèmes analogues résolus par des méthodes différentes

Problème 18, Ch. 7 du JZSS

"On a 9 pièces d'or et 11 pièces d'argent ; on les pèse et le poids est le même ; on échange un morceau de chaque et l'or est plus léger de 13 liang.
Question : quel est le poids de chaque ?
Réponse : l'or pèse 2 chin, 3 liang, 18 chu. L'argent pèse 1 chin, 13 liang, 6 chu.

La règle est : en supposant que l'or pèse 3 chin et l'argent 2 5/11 chin, déficit de 49 dans la rangée de droite ; 2 chin l'or et 1 7/11 chin l'argent, excès de 15 dans la rangée de gauche ... Avec l'excès et le déficit multiplier en croix les nombres supposés, ajouter et prendre le résultat comme dividende. Ajouter excès et déficit, c'est le diviseur. Faire la division, tu obtiens le poids de l'or..."

Problème 2, Ch. 8 du JZSS

"7 gerbes d'une bonne récolte sont diminuées de 1 tou ; on ajoute deux gerbes d'une mauvaise récolte, résultat 10 tou. On a 8 gerbes de mauvaise récolte auxquelles on ajoute 1 tou et deux gerbes de bonne récolte, résultat 10 tou.
Question : quel est le produit de chaque gerbe ?
Réponse : le produit d'une gerbe de bonne récolte est 1 18/52 tou. Le produit d'une gerbe de mauvaise récolte est 41/52 tou.

La règle est : Utiliser la méthode Fang Cheng (répartitions en carré). Ce qu'on parle d'enlever, ajoutez le ; ce qu'on parle d'ajouter, enlevez-le. Le 1 tou enlevé s'ajoute au 10 tou ; le 1 tou ajouté s'enlève aux 10 tou".

2. La méthode Fang Cheng (répartitions en carré)

Problème 1, Ch. 8 du JZSS

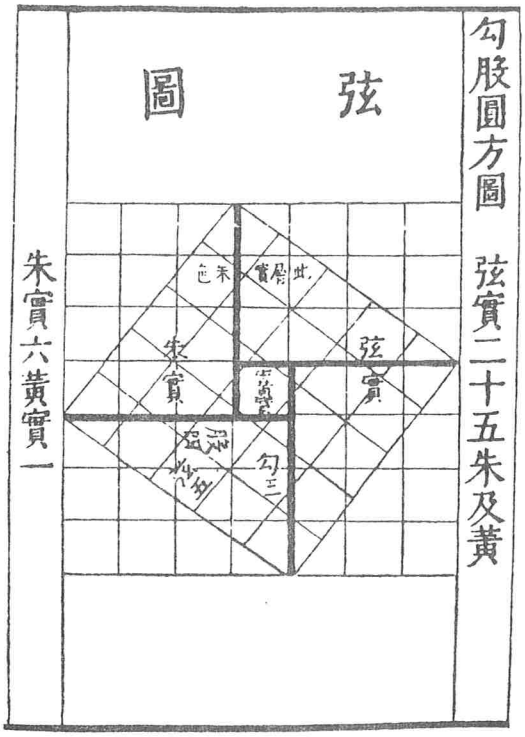
"3 gerbes de bonne récolte, 2 de moyenne récolte et une de mauvaise récolte donnent 39 tou. Deux de bonne, 3 de moyenne, 1 de mauvaise donnent 34 tou. Une de bonne, deux de moyenne et 3 de mauvaise donnent 26 tou.
Question : quel est le produit de chaque type de gerbe ?
Réponse : une bonne gerbe donne 9 1/4 tou ; une moyenne donne 4 1/4 tou ; une mauvaise donne 2 3/4 tou.

La règle est : mettre sur le côté droit 3 gerbes de bonne récolte, deux de moyenne et une mauvaise et leur produit, les 39 tou. Mettre de même, comme sur le côté droit, les récoltes moyennes et mauvaises. Multiplier la colonne du milieu par le nombre de gerbes de bonne récolte de la colonne de droite et prendre le reste l'un de l'autre. De même multiplier le prochain nombre et prendre le reste l'un de l'autre, cependant dans la colonne du milieu la récolte moyenne ne doit pas disparaître.

III - EQUATIONS QUADRATIQUES - LE TRIANGLE RECTANGLE

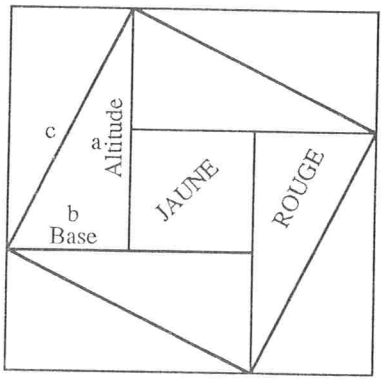
1. Le théorème de Pythagore

La démonstration du Zhoubi suanjing :



"Coupons un rectangle de largeur 3 et de longueur 4 ; la diagonale sera de 5. Après avoir tracé un carré sur sa diagonale, il faut l'entourer de demi-rectangles comme celui qui a été laissé à l'extérieur, de façon à former un carré. Les demi rectangles extérieurs de largeur 3, de longueur 4 et de diagonale 5 font ensemble deux rectangle. Le reste a pour aire 25".

Formulation, démonstration et résultats équivalents par un commentateur du IIIème siècle.
"Base et altitude : multiplier chacune par soi-même ; ajouter pour obtenir résultat hypothénuse. Extraire racine carrée, ainsi hypothénuse".
La démontration est la suivante :



"Du diagramme, multiplier base par altitude pour obtenir deux résultats rouges. Doubler pour obtenir quatre résultats rouges. Mettre la différence altitude base au carré pour obtenir un résultat jaune. Ajouter, même résultat que hypothénuse (au carré)".

Des résultats équivalents donnés par le même auteur se traduiraient par :

$$\frac{b^2}{c-a} = c+a \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{c+a} = c-a$$

Toutes ces "identités" très familières aux auteurs chinois étaient évidemment obtenues par des découpages et des recompositions de rectangles.

2. Problèmes du second degré, sans doute résolus avec des figures (manipulations de rectangles)

Problème 6, Ch. 9 du JZSS

"On a un étang (à base carrée), de côté 1 chang. Un roseau pousse exactement en son milieu ; il dépasse de l'eau de 1 ch'ih. Si l'on tire le roseau jusqu'au bord, le bord est atteint exactement.
Question : quelle est la profondeur de l'eau et la longueur du roseau ?
Réponse : profondeur de l'eau, 1 chang 2 ch'ih. Longueur du roseau, 1 chang 3 ch'ih.

La règle est : multiplier par soi-même la moitié du côté de l'étang ; soustraire la partie hors de l'eau multipliée par elle-même. Diviser le reste par le double de la partie émergée. Tu obtiens alors la profondeur ...".

Problème 12, Ch. 9 du JZSS

"On a une porte, de hauteur et de largeur inconnues ; (les deux) sont plus courtes qu'une tige de bambou de longueur inconnue. Si on la met horizontalement, il manque 4 ch'ih ; si on la met verticalement, il manque 2 ch'ih ; si on la met le long de la diagonale, cela va juste.
Question : quelles sont les dimensions de la hauteur, de la largeur et de la diagonale ?
Réponse : largeur, 6 ch'ih. Hauteur, 8 ch'ih. Diagonale, 1 chang.

La règle est : multiplier ce qui manque horizontalement et verticalement ; doubler et extraire la racine carrée. Si on ajoute ce qui manque verticalement, on obtient la largeur de la porte ; si on ajoute ce qui manque horizontalement, on obtient la hauteur de la porte ; si on ajoute les deux manques, on obtient la diagonale".

3. Problèmes du second degré dont les résolutions sont particulièrement remarquables

Problème 11, Ch. 9 du JZSS

"On a une porte, dont la hauteur dépasse la largeur de 6 ch'ih 8 ts'un ; la distance des deux coins est de 1 chang.
Question : quelles sont les dimensions de la hauteur et de la largeur de la porte ?
Réponse : largeur, 2 ch'ih 8 ts'un. Hauteur, 9 ch'ih 6 ts'un.

La règle est : multiplier 1 chang par lui-même, c'est le 'shih'. Multiplier la moitié de la différence par elle-même. Doubler et soustraire le 'shih' ; diviser la différence par deux et extraire la racine carrée. Soustraire du résultat la moitié de la différence pour obtenir la largeur de la porte. Si on ajoute la moitié de la différence, on obtient la hauteur de la porte".

Problème 14, Ch. 9 du JZSS

"Deux personnes sont au même endroit. La vitesse de A est 7, celle de B est 3. B se dirige vers l'est ; A fait d'abord 10 pas vers le sud, puis tourne vers le nord-est jusqu'à ce qu'il rencontre B.
Question : combien a parcouru chaque personne ?
Réponse : B a parcouru 10 pas et demi vers l'est. A a parcouru obliquement 14 pas et demi.

La règle est : multiplier 7 par lui-même et 3 par lui-même ; additionner et diviser par deux. C'est le coefficient de la trajectoire oblique de A. Soustraire ce coefficient de 7 multiplié par lui-même ; le reste est le coefficient du trajet vers le sud. Multiplier 3 par 7, c'est le coefficient du trajet de B vers l'est. Poser les 10 pas du trajet vers le sud ; multiplier par le coefficient du trajet oblique. Poser à nouveau les 10 pas ; multiplier par le coefficient du trajet

vers l'est. Chacun de ces produits est un dividende ; les diviser par le coefficient du trajet vers le sud. Chaque fois on obtient la longueur du chemin".

4. Problème du second degré faisant formellement, et pour la première fois, référence à une méthode générale issue de l'algorithme d'extraction de racines carrées.

Problème 20 Ch. 9 du JZSS

"On a une ville (à fondations carrées) ; au milieu de chaque côté il y a une porte ouverte. A 20 pas vers le nord, il y a un arbre. Si l'on fait 14 pas vers le sud, puis 1775 pas vers l'ouest, on aperçoit alors l'arbre.
Question : quel est le côté de la ville ?
Réponse : 250 pas

La règle est : multiplier le nombre de pas vers le nord et le nombre de pas vers l'ouest ; doubler, c'est le dividende. Ajouter le nombre de pas vers le nord et vers le sud, c'est le diviseur fixé. Extraire la racine carrée ; c'est le côté de la ville".

5. Extraction de racines carrées (JZSS, Ch. 4) - traduction et commentaire de J-C. MARTZLOFF (Hist. des Maths. chinoises) :

Règle d'extraction de la racine carrée (kai fang shu) :
"Poser l'aire du carré comme dividende (shi). Emprunter une baguette unité (jie yi suan) et "faire marcher" (bu) celle-ci en sautant un rang à chaque fois".

7 1 8 2 4 1	→	7 1 8 2 4 1	→	7 1 8 2 4 1

(cela équivaut à séparer le nombre donné en tranches de deux chiffres).

"Discuter de ce que l'on obtient".

i.e. : déterminer le premier chiffre de la racine. Le texte ne donne pas d'autre précision.

"Multiplier ce premier (chiffre) par la baguette empruntée pour en faire le diviseur (fa) et s'en servir pour effectuer la réduction (chu)"

On peut montrer que la "réduction" consiste ici à calculer 71 824 - 2.20000 (on "réduit" le "dividende"). Comme le texte du JZSS n'indique pas la disposition effective des calculs, plusieurs reconstitutions restent possibles. Nous utiliserons ici celle qui consiste à placer la racine au-dessus du "dividende", le "diviseur" au-dessous du dividende et la "baguette unité" au-dessous du diviseur. C'est en effet ce type de disposition qu'utilisent à quelques variantes près tous les arithméticiens post-Han :

2 7 1 8 2 4 2 1	→ (1)	2 3 1 8 2 4 2 1	(2)	quotient (shang) dividende (shi) diviseur (fa) baguette unité (jie suan)

"La réduction achevée, doubler le diviseur, ce qui fait le diviseur fixé (ding fa)".

Le "diviseur fixé" vaut 2x20 000 = 40 000.

"Puis "briser-réduire" le diviseur vers le bas" et "faire marcher la baguette comme au début".

On fait reculer le diviseur d'un rang et la baguette unité de deux rangs :

2		2	quotient
3 1 8 2 4		3 1 8 2 4	dividende
4		4	diviseur
1		1	baguette unité
	(3)		(4)

"Multiplier la baguette unité par le chiffre de la racine résultant de la nouvelle discussion et ajouter ce que l'on obtient au diviseur fixe".

Le deuxième chiffre de la racine vaut 6. On multiplie la baguette qui vaut maintenant 100 par 6 et on ajoute le résultat à 4000 ; 4000 + 600 + 4600.

"réduire" au moyen de cela" :

2 6		2 6	
3 1 8 2 4		4 2 2 4	
4 6		4 6	
1		1	
	(5)		(6)

"Avec ce que l'on obtient, briser le "diviseur fixe totalisé" (zong ding fa). Puis "briser-réduire" comme avant :

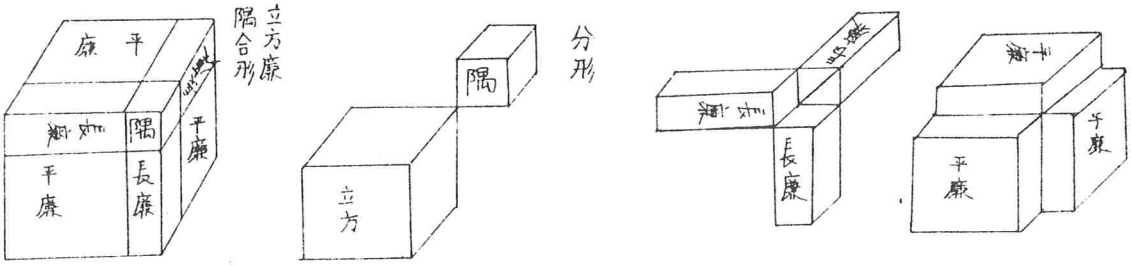
2 6 8	
4 2 2 4	
5 2 8	
1	
	(7)

Il va de soi que le texte de cette règle n'est pas vraiment transparent. Mais peut-il l'être ? Faute de connaître la signification exacte de toutes les expressions techniques d'époque Han, il est difficile de lever certaines obscurités. Mais le lecteur qui désirerait une traduction argumentée jusque dans ses moindres détails et approchant l'original le moins mal possible pourra toujours se reporter à l'article très complet de Wang Ling et de J. Needham qui fait autorité en la matière.
(Fin de l'Extrait de Martzloff : Hist. des maths. chinoises).

IV - EXTRACTION DE RACINES CUBIQUES (JZSS, Ch. 4)

"Poser le volume comme dividende. Prendre une baguette et l'avancer en sautant deux places. Discuter ce que l'on obtient.
Multiplier ce premier (chiffre) en répétant par la baguette ; c'est le diviseur et diviser. Après la division le tripler, ce qui donne le diviseur fixé. Pour la prochaine réduction reculer.
En dessous multiplier le chiffre obtenu par trois et le poser sur la ligne du milieu. Poser à nouveau la baguette sur la ligne du dessous. Les faire reculer, en sautant une place sur la ligne du milieu et deux places sur celle de dessous.
Poser à nouveau le chiffre estimé. Avec lui multiplier le milieu, multiplier le bas en répétant. Ajouter tout cela, c'est le diviseur fixé.
Diviser avec le diviseur fixé. Après la réduction doubler en dessous, ajouter le milieu et ajouter au diviseur fixé.

Pour la prochaine division, reculer. Continuer comme avant ..."



- Visualisation du développement de $(a+b)^3$ -
Extrait de Martzloff : Recherches sur l'oeuvre math. de Mei Wending

V - L'ALGEBRE DU 13ème SIECLE

1. Mise en équation expliquée, résolution non expliquée. Li Zhi (1192-1279)

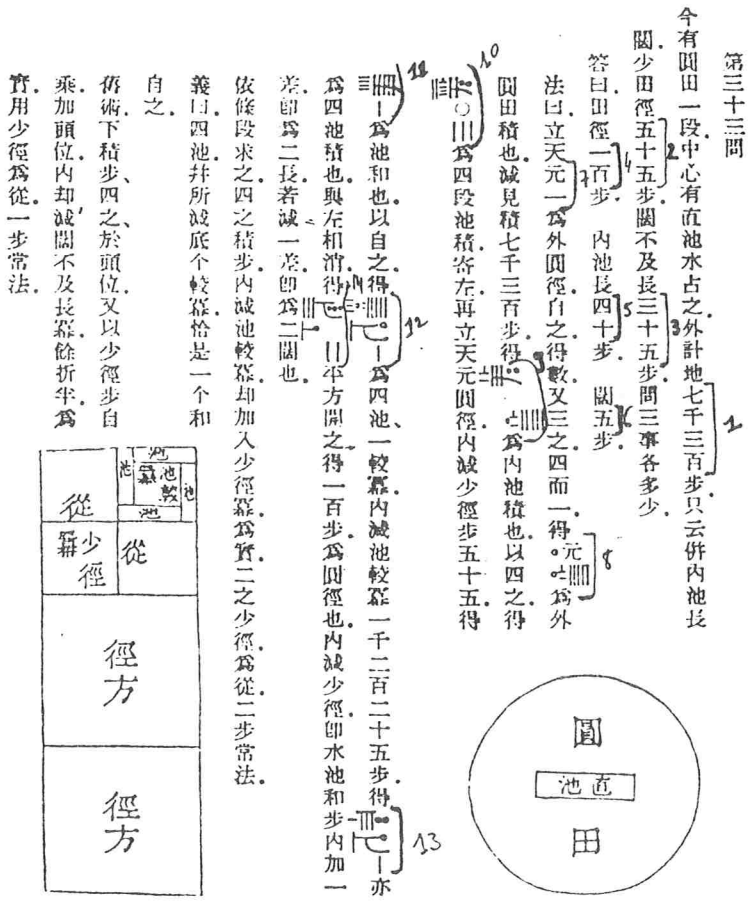
Problème 33 des "Mathématiques anciennes par la méthode des sections".
(suivre avec le texte chinois ci-après)

"Au milieu d'un champ circulaire, une mare rectangulaire. L'aire extérieure à la mare est de 7300 (1). On sait que la somme de la longueur et la largeur de la mare est inférieure de 55 (2) au diamètre du champ, et que la différence entre la longueur et la largeur est de 35 (3). Trouver chacune des trois quantités.
Réponse : le diamètre du champ est de 100 (4), la longueur de la mare est de 40 (5) et la largeur 5 (6).

Méthode : mettre 1 dans la rangée tian yuan (= inconnue céleste, (7)) pour le diamètre du cercle, le carrer, le multiplier par trois et le diviser par quatre pour obtenir (8), qui est l'aire du cercle.
Soustraire 7300 pour obtenir (9), le multiplier par quatre pour obtenir (10) qui est l'aire de quatre mares. Le mettre à gauche.
Prendre à nouveau la représentation tian yuan pour le diamètre et lui enlever 55 pour obtenir (11), qui est la somme de la longueur et de la largeur. Carrer ceci pour obtenir (12), qui est l'aire de quatre mares plus le carré de la différence entre la longueur et la largeur. De ceci enlever le carré de la différence entre la longueur et la largeur qui est 1225 pour obtenir (13), qui est l'aire de quatre mares. Le soustraire de ce qui est à gauche pour obtenir (14).
Quand la racine de l'équation quadratique est extraite, on trouve 100 qui est le diamètre du cercle. Soustraire de ceci la différence entre le diamètre et la somme de la longueur et de la largeur pour obtenir la somme de la longueur et de la largeur ; quand on lui ajoute la différence entre la longueur et la largeur, deux longueurs sont obtenues, et quand on lui soustrait, deux largeurs sont obtenues.

Méthode par sections : multiplier l'aire donnée par quatre, moins le carré de la différence entre la longueur et la largeur et ajouter le carré de la différence du diamètre et de la somme de la longueur et de la largeur, ce qui donne le 'shi'. Multiplier par deux la différence du diamètre et de la somme de la longueur et de la largeur, ce qui donne le 'cong', et poser 2 comme 'chang fa'.
Interprétation : quand l'aire de quatre mares est ajoutée au carré de la différence de la longueur et de la largeur, cela donne exactement le carré de la somme de la longueur et de la largeur".

Ancienne méthode : (même chose que la méthode par sections, sauf que le shi, le cong et le chang fa sont moitiés des précédents).



Texte original du problème 33 (page 7)

2. Mise en équation non expliquée, résolution expliquée : Qin Jiushao (1202-1261) donne la méthode dite de Horner.

Qin Jiushao est le premier, parmi les auteurs dont on possède encore les textes, à résoudre des équations de degré supérieur à trois.
Il résoud par exemple l'équation :

$$-x^4 + 763200\, x^2 - 40642560000 = 0$$

Il donne comme solution 840 (il y en a une autre, 240, non donnée). Il serait sans intérêt de reproduire le texte de la solution, qui est exactement (à la disposition près), la méthode dite de Horner. Les coefficients sont disposés en colonnes ; il appelle 'première transformation', 'deuxième transformation', etc, les restes successifs de la division par (x - 800), ce qui donne comme nouvelle équation :

$$-x^4 - 3200\, x^3 - 3076800\, x^2 - 826880000\, x + 38205440000 = 0$$

Le reste de la division par (x - 40) est nul, la résolution est achevée.
Le même auteur résoud aussi une équation du dixième degré :

$$x^{10} + 15\, x^8 + 72\, x^6 - 864\, x^4 - 11644\, x^2 - 34992 = 0$$

3 - Le premier problème du "Miroir de Jade des quatre inconnues" de Zhu Shijie (1303). Extrait du livre de John Hoe.

a. Texte chinois du premier problème

一[1] 气[2] 混[3] 元[4]

今有[5] 黄方[6] 乘[7] 直积[8] 得[9] 二十四[10] 步[11]

只云[12] 股[13] 弦和[14] 九步

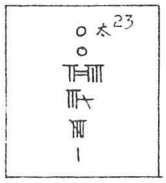
问句几何[15]

答曰[16] 三步

草曰[17] 立[18] 天元一[19] 为句

如积求之[20]

得一百六十二个[21] 黄方乘直积式



以[24] 一百六十二乘原积[25] 相消

得开方式[26]

四乘[27] 方开之

得句三步

b. Traduction en langage semi-symbolique

La force matérielle[2] surgit de l'inconnue[3] primordiale[4]

Si[5] DIAM[6] fois[7] PROD-VERT[8] égale[9] vingt-quatre[10] pas[11], et que[12] ALT[13]-HYP-SOMME[14] égale neuf pas, trouver[15] BASE.

Réponse[16]: Trois pas.

Suggestion[17]: Soit[18] BASE l'INCONNUE[19].

Résoudre par "accumulations égales"[20].

Obtenir EXPR[22] pour cent soixante-deux DIAM fois PROD-VERT:

0 C[23]
0
729
-81
-9
1

Soustraire[24] cent soixante-deux fois PROD-INIT[25].

Obtenir l'équation[26]:

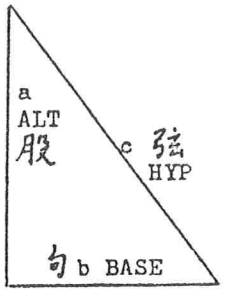
-3888 C
0
729
-81
-9
1

Résoudre l'équation à cinq degrés[27].

Obtenir BASE trois pas.

c. Traduction en langage symbolique moderne

Problème à une inconnue



Soit $d(ab) = 24$,
et $a + c = 9$.
Trouver b.
Réponse : 3

Suggestion : Soit b l'inconnue x.
Appliquer la méthode des "accumulations égales"
Obtenir $162d(ab) = 729x^2 - 81x^3 - 9x^4 + x^5$.
Soustraire $162d(ab)$.
Obtenir $-3888 + 729x^2 - 81x^3 - 9x^4 + x^5 = 0$.
Résoudre l'équation de degré 5.
Obtenir $b = 3$.

Note : d est le diamètre du cercle inscrit dans le triangle $(d = a+b-c)$.

d. Commentaire mathématique sur le premier problème

Pour un élève en mathématiques de nos jours, la solution du premier problème, bien que fastidieuse dans la pratique, ne présente aucune difficulté de principe. Ayant défini préalablement les symboles a, b, c et d, comme on a déjà fait dans la traduction symbolique proposée (pages 36, 95), on obtient la solution par l'élimination successive des inconnues supplémentaires a, c et d des quatre équations suivantes :

$$d(ab) = 24 \qquad \text{(i)}$$
$$a + c = 9 \qquad \text{(ii)}$$
$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{(iii)}$$
$$d = a + b - c \qquad \text{(iv)}$$

En fait, les équations (iii) et (iv) ne sont pas données explicitement dans l'énoncé du problème, mais sont les équations représentant des propriétés du triangle rectangle que l'élève est censé connaître, à savoir, le théorème de Pythagore, et la formule pour le diamètre du cercle inscrit (voir pages 83 - 90). Une méthode de solution possible est la suivante :
Utiliser d'abord la valeur $c = 9-a$ de l'équation (ii) afin d'éliminer l'inconnue c des deux équations (iii) et (iv), ce qui donne :

$$a^2 + b^2 = (9-a)^2 \qquad \text{(v)}$$

$$d = a + b - (9-a) \qquad \text{(vi)}$$

Simplifier l'équation (v) afin d'obtenir :

$$18a = 81 - b^2 \qquad \text{(vii)}$$

Utiliser la valeur $d = 2a + b - 9$ de l'équation (vi), de façon à éliminer l'inconnue d de l'équation (i), ce qui donne :

$$(2a + b - 9)(ab) = 24 \qquad \text{(viii)}$$

L'élimination de l'inconnue a des équations (vii) et (viii), donne l'équation qu'il faut résoudre, à savoir :

$$-3888 + 729b^2 - 81b^3 - 9b^4 + b^5 = 0 .$$

Dans ce commentaire mathématique du premier problème, nous avons expliqué quelques étapes qu'un lecteur mathématicien trouverait peut-être superflues. Mais nous l'avons fait à dessein, afin de rendre plus aisée la tâche du lecteur qui n'est pas accoutumé à parcourir les textes mathématiques, car il faut remarquer qu'un mathématicien a ,en général, l'habitude de lire ses textes la plume à la main, vérifiant au fur et à mesure qu'il lit les étapes nécessaires qui ont été omises. En conséquence, l'auteur d'articles sur les mathématiques saute souvent les étapes qu'il croît être assez évidentes pour que le lecteur puisse les effectuer lui-même. Malheureusement, le lecteur non mathématicien qui ne connaît pas cette caractéristique du style mathématique risque de croire, quand il ne suit pas immédiatement le raisonnement logique liant deux formules consécutives d'une explications mathématique, que la faute doit être attribuées à ses connaissances limitées en mathématiques plutôt qu'aux omissions de l'auteur et il abandonne en conséquence toute tentative ultérieure pour déchiffrer le texte. C'est pour cette raison que nous avons souvent exposé explicitement plus d'étapes qu'il n'en faut, dans l'espoir que le lecteur non mathématicien sera suffisamment encouragé pour vérifier lui-même les détails des étapes successives du calcul, car ce n'est qu'ainsi qu'il appréciera réellement la simplicité réelle de la méthode. En fait, tout professeur de mathématiques trouve nécessaire de souligner constamment à ses élèves que la compréhension véritable d'un texte mathématique exige la participation active du lecteur. Déjà en 1903, dans la préface du manuel de Zhu Shijié, on lit ce conseil important :

" 明算之君子	Ming suan zhi junzi,
据我言	jù`wo yan,
试为细草	shi wéi xi cao.
然后知诚	Ranhou zhi chéng,
而不妄也	ér bu wàng ye.

"L'homme sage qui veut comprendre les mathématiques, doit, à mon avis, essayer de bâtir des solutions détaillées.
Ce n'est qu'ainsi que ses connaissances seront complètes, et non partielles".

Examinons maintenant, en tenant compte de ce conseil, comment un élève de l'époque de Zhu Shijié aurait trouvé la solution du premier problème même sans aucune connaissance d'une symbolique moderne.

Des données du problème, l'élève sait que :

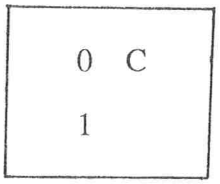
(i) DIAM fois PROD-VERT = 24

et que (ii) ALT-HYP-SOMME = 9,

et on lui demande de trouver BASE. Dans la notation moderne, ceci signifie qu'on lui donne :

(i) $d \times ab = 24$
(ii) $a + c = 9$

et qu'on lui demande de trouver b . L'indication de Zhu Shijié pour la solution lui conseille de prendre pour inconnue BASE, c'est-à-dire b en notation moderne. En d'autres mots, il faut représenter BASE sur l'échiquier par la disposition suivante des bâtonnets :



(iii)

Afin de se servir de l'hypothèse (i), il lui faudra trouver tout d'abord les dispositions sur l'échiquier qui représentent :

(1) DIAM c'est-à-dire d
et (2) PROD-VERT c'est-à-dire ab.

Note : "c" indique la ligne du terme constant.

1. Dérivation de la représentation sur échiquier de l'expression DIAM

Ayant étudié "le classique arithmétique du gnomon et des trajectoires circulaires des cieux" et d'autres livres classiques chinois sur les mathématiques, l'élève sera au courant des diverses propriétés du triangle rectangle qui s'y trouvent. Il saura, en particulier, que :

DIAM = BASE moins ALT-HYP-DIFF

c'est-à-dire $d = b - (c - a)$ (iv)

et que :

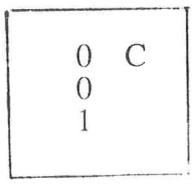
ALT-HYP-DIFF = BASE carrée divisée par ALT-HYP-SOMME

c'est-à-dire $(c - a) = \frac{b^2}{c+a}$

d'où il obtient en sustituant pour ALT-HYP-SOMME la valeur 9 donnée par l'hypothèse (ii) :

9 fois ALT-HYP-DIFF = BASE carrée
$9(c-a) = b^2$.

Il obtient donc la représentation sur l'échiquier de l'expression 9 fois ALT-HYP-DIFF, s'il élève au carré l'expression (iii) représentant BASE, ce qui donne :



(v)

Par la substitution des dispositions de bâtonnets (iii) et (v) dans l'équation (iv), il obtiendra ensuite la représentation sur échiquier de l'expression 9 fois DIAM en effectuant les opérations :

0	C			0 C
9		moins		0
				1

ce qui donne pour la disposition de bâtonnets pour la représentation de 9 fois DIAM :

0 C	
9	(vi)
-1	

2. Dérivation de la représentation sur échiquier de l'expression PROD-VERT

Sachant que :

PROD-VERT = ALT fois BASE (vii)

et que BASE se présente sur l'échiquier par la disposition (iii) des bâtonnets, il ne reste à l'élève que de trouver la représentation sur échiquier de l'expression ALT. Ceci s'avère assez simple, puisqu'il saura de ses études précédentes que :

ALT-HYP-SOMME moins ALT-HYP-DIFF = 2 fois ALT
ou (c + a) - (c - a) = 2a.

S'il multiplie maintenant cette expression par 9, il peut ensuite remplacer 9 fois ALT-HYP-SOMME par 81, d'après l'hypôthèse (ii), et remplacer 9 fois ALT-HYP-DIFF par l'expression (v). Il obtient de cette façon la disposition des bâtonnets sur l'échiquier pour la représentation de 18 fois ALT par l'opération :

81	C			0 C
		moins		0
				1

ce qui donne :

81 C	
0	(viii)
-1	

Ensuite, il obtient la représentation sur échiquier de l'expression 18 fois PROD-VERT par l'application de la formule (vii), c'est-à-dire par la multiplication de la disposition (viii) pour 18 fois ALT par la disposition (iii) pour BASE , ce qui donne :

0 C	
81	(ix)
0	
-1	

Ayant obtenu ainsi la représentation en bâtonnets (vi) pour 9 fois DIAM et la représentation (ix) pour 18 fois PROD-VERT, la multiplication de ces deux représentations donnera la disposition de bâtonnets pour l'expression 9 DIAM fois 18 PROD-VERT, ce qui permettra à l'élève de tenir compte de l'hypothèse (i). Cette multiplication s'effectue par l'opération :

0	C		0	C
9		fois	81	
-1			0	
			-1	

c'est-à-dire :

0	C					
0						
729	+	0				
-81	+	0	+	0		
	+	0	+	-9		
			+	1		

L'élève obtient ainsi pour la représentation sur échiquier de l'expression 162 fois PROD-VERT, la disposition suivante :

0	C	
0		
729		
-81		(x)
-9		
1		

C'est la même représentation que donne Zhu Shijié dans ses indications pour la solution. Mais en multipliant l'hypothèse (i) par 162, on obtient :

162 fois DIAM fois PROD-VERT = 162 x 24
= 3888 . (xi)

L'application de la méthode des "accumulations égale" ou ruji exige que l'élève élimine maintenant 162 fois DIAM fois PROD-VERT des deux expressions (x) et (xi), ce qui donne l'équation finale à résoudre, à savoir :

-3888	C
0	
729	
-81	
-9	
1	

Comme il importe surtout à Zhu Shijié d'enseigner la méthode d'établir cette équation à partir des données, et non pas d'expliquer la méthode de sa résolution, il ne donne aucune indication sur cette résolution, mais se borne à donner la racine 3 de la solution.

De l'analyse donnée ci-dessus, on voit clairement qu'un élève chinois de l'époque de Zhu Shijié pouvait résoudre un problème de cette sorte par un raisonnement logique, même sans l'appui d'une symbolique algébrique moderne, et qu'il pouvait le faire, non seulement en raison de la simplicité de la notation et des procédés de calcul sur l'échiquier, mais aussi parce que la nature même de la langue chinoise classique lui permettait de s'exprimer avec une concision presque algébrique même sans symbolique moderne. On soutient souvent qu'à part les Grecs, tous les mathématiciens de l'époque pré-moderne, y compris les Chinois, ignoraient le raisonnement logique, et que la formatrion mathématique de cette période ne consistait en autre chose que la transmission des règles mécaniques traditionnelles, qu'on apprenait par coeur. Mais il est évident que la solution obtenue sur l'échiquier que l'on vient d'expliquer ne pouvait être obtenue en aucune façon par une application aveugle de règles mécaniques. La capacité de suivre un chemin logique est essentielle. Il n'y a aucun doute que le premier souci de Zhu Shijié en écrivant son manuel fut d'enseigner comment dériver les équations à partir de certaines données. Mais ceci signifie ni plus ni moins que le but de son texte est d'apprendre à l'élève comment mettre en langage mathématique les hypothèses exprimées en langage de tous les jours, afin d'obtenir une équation que l'on résoudra ensuite par une méthode classique déjà apprise.

Fin du texte de J. HOE.

VI - COMMENTAIRES

II-1. *Problème 18* : unités :

chin	liang	chu
1	16	384
	1	24

L'équation est $\begin{cases} 9x = 11y \\ 8x+y+13 = 10y+x \end{cases}$. Elle est résolue par la méthode "excès et déficit" ou de double fausse position : si x était égal à 3 chin, $8x + y + \frac{13}{16} = 27\frac{47}{176}$ et $10y + x = 27\frac{47}{176}$ d'où un déficit de $\frac{49}{176}$. Si $x = 2$ chin (donc $y = 1\frac{7}{11}$), excès de $\frac{15}{176}$. On en déduit $x = \frac{3 \times 15 + 2 \times 49}{15 + 49} = 2\frac{15}{64}$ chin.

C'est une méthode d'interpolation linéaire, utilisée pour résoudre des équations plus compliquées linéaires ou non linéaires, comme les problèmes 11, 12, 19 du L7 du JZSS. Mais les chinois, dès cette époque (début de notre ère), savaient parfaitement ramener leurs équations à une forme type et par suite, les résoudre par une méthode générale, comme le prouve la suite.

II-1. *Problème 2* : Equation : $\begin{cases} 7x-1 + 2y = 10 \\ 2x + 8y + 1 = 10 \end{cases}$. La "règle" indique de ramener le système à la <u>forme standard</u> : $\begin{cases} 7x + 2y = 11 \\ 2x + 8y = 9 \end{cases}$, et d'utiliser la méthode type, dite Fang-Cheng.

II-2. *Problème 1* : Donne l'énoncé de la fameuse règle "Fang Cheng" pour un système 3x3 :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Disposition :

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

puis :

1	0	3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

puis :

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

et :

0	0	0
0	5	2
36	1	1
99	24	39

diviseur

dividende de la mauvaise récolte, D_1

Dividende de la récolte moyenne : $\dfrac{36 \times 24 - 99}{5} = D_2$

Dividence de la bonne récolte : $\dfrac{36 \times 39 - D_2 x2 - D_1 x1}{3} = D_3$

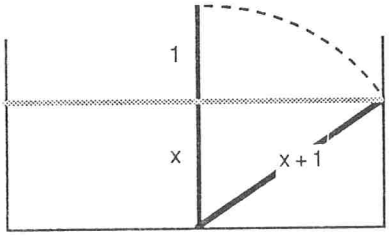
Les résultats sont $\dfrac{D_1}{36}, \dfrac{D_2}{36}, \dfrac{D_3}{36}$.

II - 3. *Problème 8* : Le texte est clair ; là encore, on est ramené à la forme standard.

III - 1. *Pythagore* : Il faut noter qu'on ne s'est jamais préoccupé, en chine antique et médiévale, de la <u>réciproque</u> de ce résultat.

III- 2. *Problème 6* :

Unités :	Chang	ch'ih	ts'un
	1	10	100
		1	10

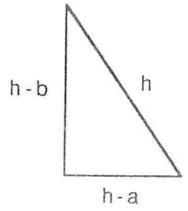


Equation : $(x+1)^2 - x^2 = 25$

soit : $(2x+1)1 = 25$

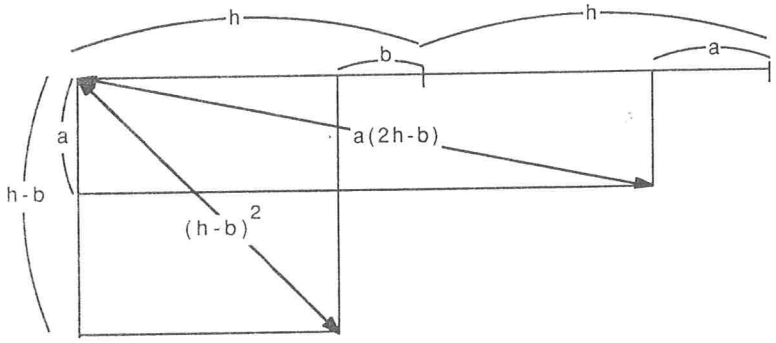
soit : $x = \dfrac{25-1^2}{2x1}$

III - 2. *Problème 12* : Le problème est du type :



(a=4, b=2)

et l'auteur donne directement la solution $h = a + b + \sqrt{2ab}$, qui n'est pas évidente du tout. Je propose les manipulations suivantes : $h^2 = (h-a)^2 + (h-b)^2 \rightarrow (h-b)^2 = h^2 - (h-a)^2$.
Les chinois connaissent la "différence de deux carrés" (voir II-1).
D'où : $(h-b)^2 = a(2h-a)$, puis :



En enlevant la partie commune aux rectangles d'aires $a(2h-a)$ et $(h-b)^2$, les aires restantes sont égales ; on les dispose comme sur la 2ème figure ; les aires restantes sont $(h-b)$ $(h-b-a)$ et $a(h+b-a)$.

Les rectangles $(h-b)$ $(h-b-a)$ et $a(h+b-a)$ ont même aire ; en enlevant le rectangle commun aux deux, il reste $(h-b-a)^2 = 2ab$, d'où le résultat.

III-3. *Problème 11* : L'équation est $(x+68)^2 + x^2 = 100^2$; l'auteur propose *un changement de variable*, en posant en fait $z = x+34$

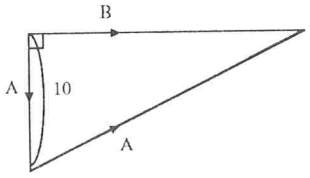
"moitié de la différence".

d'où $(z+34)^2 + (z-34)^2 = 100^2$; par des manipulations de rectangles, on sait ramener cela à :

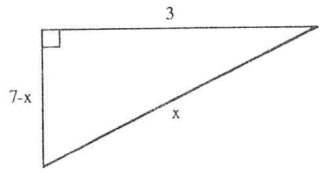
$$2z^2 + 2 \times 34^2 = 100^2$$

d'où la solution.

III-3. *Problème 14* :

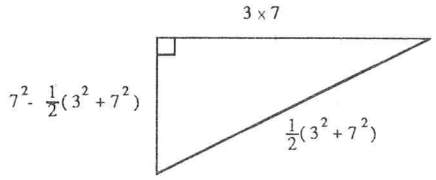


Van der Waerden suggère le raisonnement suivant :
Si le temps de parcours de chacun était de 1, on aurait les distances :



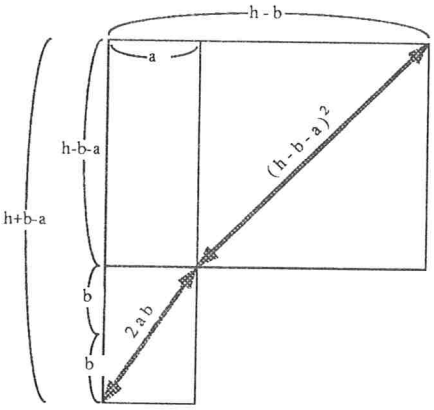
D'où $7(2x-7) = 9$ et $x = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{7}+7\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3^2+7^2}{7}\right)$

En multipliant par 7, on obtient le triangle :



ce sont les "coefficients de trajets" du texte. Comme le triangle réel est semblable au précédent, la solution est donnée par $\dfrac{10}{7^2 - \frac{1}{2}(3^2+7^2)} = \dfrac{y}{3 \times 7} = \dfrac{z}{\frac{1}{2}(3^2+7^2)}$.

III-4. *Problème 20* :



Pour obtenir l'équation : les aires hachurées sont les mêmes, donc :

$20\ (1775 - \frac{x}{2}) = \frac{x}{2}\ (14+x)$ (méthode explicitement donnée par Yang Hui au 13ème siècle).

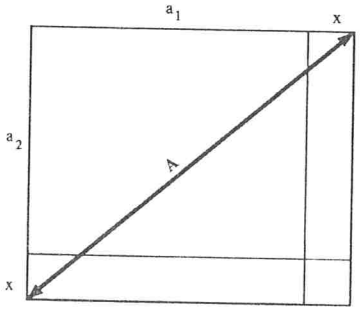
D'où $x^2 + 34x = 20 \times 1775 \times 2$

"diviseur fixé" *"dividende"*

vocabulaire issu de l'algorithme d'extraction de racine carrée (voir plus loin).

III-5. *Extraction de racines carrées*

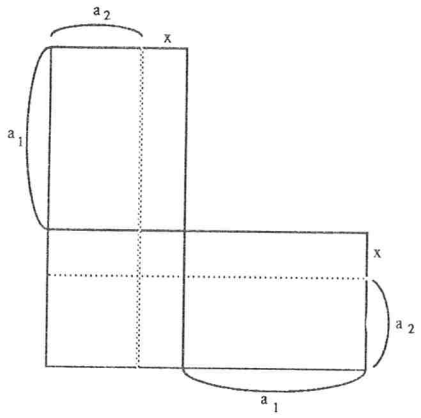
Soit à extraire la racine carrée de A ; si a_1 est la 1ère approximation, l'erreur est x :
$A - a_1^2 = 2a_1x + x^2$, ce qui se voit très bien :



Pour $A = 71824$ $a_1 = 200$, d'où
$31824 = 400x + x^2$

"dividende" *"diviseur fixé"*

Soit a_2 une approximation de l'erreur ; la nouvelle erreur x vérifie :



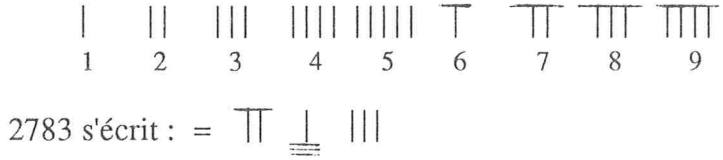
$A - a_1^2 - a_2(2a_1+a_2) = x^2 + 2(a_1+a_2)\,x$, ce qui se voit encore très bien.
$a_2 = 60$, d'où la nouvelle équation
$4224 = x^2 + 520\,x$ qui "tombe juste" : $x = 8$.

IV - *Extraction de racine cubique* : l'utilisation de cubes est attestée dès Liu-Hui (3ème siècle de notre ère). Le texte est obscur, mais témoigne d'une disposition typique de toute l'algèbre chinoise : les équations en colonnes. Si a_1 est la 1ère approximation de la racine cubique de V, on a $V - a_1^3 = 3\,a_1^2\,x + 3\,a_1\,x^2 + x^3$, qui est disposé en :

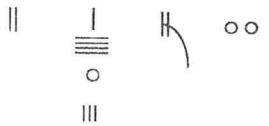
$V - a_1^3$	(dividende)
$3\,a_1^2$	(diviseur fixé)
$3\,a_1$	(ligne du milieu)
1	baguette sur la ligne du dessous .

V - Le "saut" du début de notre ère au 13ème siècle est dû à l'absence de documents importants, mis à part Liu Hui (3ème siècle).

Ecriture des nombres dans les équations :



Ecriture des équations et des polynômes :



représente à la fois le polynôme -29200 (┐pour indiquer le "signe moins") + $3x^2$ et l'équation $-29200 + 3x^2 = 0$.

V-1. Avec $\pi = 3$, $\frac{3}{4}\,d^2 - L\,l = 7300$, $d - (L+l) = 55$, $L-l = 35$ ce qui donne $2d^2 + 110\,d - 31000 = 0$. Le texte donne le détail de la mise en équation. A noter que les deux autres méthodes proposées donnent $\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$ pour $Cx^2 + bx = a$ (voir plus haut). Les numéros entre parenthèses du texte renvoient au texte chinois que l'on a reproduit, et où le lecteur pourra s'amuser à déchiffrer les équations.

VI - PRINCIPAUX DOCUMENTS

1 - - 1400 à -1100 : textes divinatoires sur des os, avec des nombres écrits selon le système décimal, avec une numération analogue à celle de notre langage parlé, sans zéro.

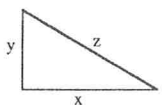
2 - - 4ème siècle : Canon moiste : ébauche, sans lendemain, d'un développement axiomatique des concepts de géométrie.

3 - "Zhoubi suanjing"
ou "Chou-Pei Suan-ching" = "classique arithmétique du gnomon et des trajectoires circulaires des cieux"
Auteur inconnu ; date de la dynastic des Han (-202 à + 220).
Contient une authentique démonstration de la relation de Pythagore.
Connaissance de la relation de Thalès.

4 - "Jiuzhang suanshu"
ou "Chiu-chang Suan-chu" = "Neuf chapitres sur l'art mathématique".
Auteur inconnu ; même époque que le précédent. Livre de base, souvent commenté utlérieurement, noté JZSS.
9 chapitres contenant 246 problèmes.
Thèmes : travaux publics, impôts, partages.
Techniques : calcul de fractions, nombres négatifs, extractions de racines carrées et cubique, système linéaires, problèmes du second degré.

5 - Liu Hui, auteur du 3ème siècle. A écrit un commentaire du Chiu-chang, où les équations quadratiques sont établies à l'aide de figures ;
Et le "Manuel mathématique des iles maritimes", consacré à des calculs de distances, comme nos problèmes de topographie. Il y donne, sans explication, l'équation du problème et sa solution.

6 - "Manuel arithmétique de maître Sun" (4ème siècle ?).
* Première référence explicite à l'usage de l'échiquier et des baguettes, qui donnèrent à l'algèbre chinoise son style propre.
* Explication détaillée de l'extraction d'une racine carrée sur l'échiquier.
* Premier exemple de résolution d'un problème "d'analyse indéterminée" (Résoudre $3x+2 = 5y+3 = 7z+2$ en nombre entiers ; une seule solution donnée).

7 - "Continuation des mathématiques anciennes". Wang H'siao-T'ung (7ème siècle).
Premier problème (autre que l'extraction de racine) conduisant à une équation cubique
(

Trouver les côtés connaissant xy et z-x).

L'auteur donne l'équation sous la forme

a
b
c
d

signifiant $dx^3+cx^2+bx = a$, sans indiquer comment il l'a obtenue.

LA GRANDE FLORAISON DU 13ème SIECLE :

8 - Qin Jiushao
ou Ch'in Chiu-Shao (1201-1261) a écrit le "Traité mathématique des 9 sections", 81 problèmes répartis en 9 chapitres.
Thèmes : astronomie, arpentage, impôts, commerce, ouvrages militaires.
Techniques : - Résolution de problèmes d'analyse indéterminée
- Résolution d'équations polynômes jusqu'au degré 10 par la méthode 12ème siècle

(La méthode de résolution est donnée en détail, mais pas la façon d'obtenir l'équation).

- Ecriture $\begin{array}{|c|}\hline a \\ \hline b \\ \hline c \\ \hline d \\ \hline\end{array}$ pour $a+bx+cx^2+dx^3 = 0$ (17ème siècle en Europe)

- Emploi du zéro.[1]

9 - Li Zhi
ou Li Yeh ($\simeq$1180-1265). Deux ouvrages ont survécu : "Reflets des mesures du cercle sur la mer" et "Mathématiques anciennes par la méthode des sections"
* Il donne *plusieurs méthodes pour obtenir les équations des problèmes*, mais aucune pour les résoudre.
* Première référence connue à "l'élément céleste" qui est l'inconnue.
* Première apparition de la nouvelle notation des négatifs :
||| 0 pour -360 (au lieu de couleurs différentes).

10 - Yang Hui : "Analyse des règles mathématiques des 9 chapitres" (1261) et "Supplément à l'analyse des 9 chapitres". Il y explique comment, *par des procédés géométriques*, on obtient et résoud certaines équations du "chiu-chang".

11 - Zhu Shih
Chu Shih-chieh , le virtuose de l'algèbre sur échiquier.
1299 : "Introduction aux études mathématiques"
1302 : "Le miroir de Jade des quatre inconnues". 284 problèmes répartis en 24 chapitres.
Résolution de *systèmes d'équations polynômes jusqu'à quatre variables*, uniquement à l'aide de manipulations sur l'échiquier. Les quatre inconnues portent les noms de *céleste, terrestre, humaine et matérielle.*

N.B. Ce qui est appelé "résolution d'équations polynômes" n'est pas, comme plus tard en Europe, la recherche du nombre de solutions et de leur expression exacte, mais le calcul, par l'algorithme "de Horner", d'une approximation, chiffre par chiffre, d'une seule solution.

---

1 - Peut être connue en Chine dès le début du 11ème siècle.

VII - BIBLIOGRAPHIE

1 - *Ouvrages contenant des extraits significatifs de textes chinois*

MIKAMI : The development of math. in China and Japon (1910).

LIBBRECHT : Chinese math. in the 13th Century (1973), MIT Press.

HOE, J. : Les systèmes d'équations polynômes dans le "Miroir de Jade des quatre inconnues" (1977). Collège de France, Institut des hautes études chinoisesLAM LAY-YONG : Li Ye anf his "old math. in expanded sections". Article de "Archiv for history of exact sciences".

LAM LAY-YONG : A critical study of the Yang hui suanfa, a 13th century chinese math. treatise (1977). Singapore University Press.

VOGEL K : Chiu chang suan shu, Neun. bücher arithmetischer technik (1968). Friedr. Vieweg und Sohn-Braunschweig. (*Traduction intégrale du JZSS*).

2 - *Autres ouvrages*

Trois livres de référence :

NEEDHAM, J. : Science and civilisation in china

T3 : Math. and the sciences of the heaven and the earth

MARTZLOFF, J-C. : Recherches sur l'oeuvre math. de Mei Wending (1981). Collège de France, Institut des hautes études chinoises.

MARTZLOFF, J-C. : Histoire des math. chinoises (1987), Masson.

Autres :

VAN DER WAERDEN : Geometry and algebra in ancient civilisations.

DHOMBRES, J. : Nombre, mesure et continu (Ch. 7)

CHEMLA, K. : La redécouverte des maths chinoises (Science et Avenir, Mai 1985)

SMITH : History of mathematics, (Dover).