Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

LA RECHERCHE DES TANGENTES A UNE CONIQUE
L'histoire des mathématiques comme outil pédagogique en terminale

Alain LE BOULCH
Lycée Jacques Cartier - SAINT MALO

A un moment où les exigences de rigueur en mathématiques se sont quelque peu déplacées, l'étude d'un texte historique ne pourrait-elle pas tenir lieu de démonstration ? Sans peut-être aller aussi loin, de nombreux textes anciens offrent la possibilité d'approcher une notion de façon plus attrayante pour les élèves.

Cet article présente des expériences faites dans ce sens en classe de Terminale :

- Certains textes de Roberval peuvent, par exemple, permettre d'établir les propriétés des tangentes à une conique de manière parfois moins artificielle que dans le cadre actuel des programmes de Terminale.

- Un texte d'Apollonius et un article de la Grande Encyclopédie complèteront cette approche historique de la notion de tangente.

- D'autres textes de Roberval pourraient aussi être étudiés en classe et donner prétexte à redécouvrir des courbes un peu oubliées aujourd'hui dans l'enseignement (limaçon de Pascal, cycloïde...).

I - UN TEXTE DE ROBERVAL (texte 1) :

1 - Ce texte est extrait des "Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes aux lignes courbes", imprimées dans les Mémoires de l'Académie des sciences en 1693 et professées au Collège royal en 1636.

2 - Roberval (Gilles Personne de, 1602-1675) :

Né dans le village de Roberval, près de Beauvais, il devint titulaire d'une chaire au Collège royal et fut membre fondateur de l'Académie des sciences. Il a développé et utilisé la méthode des indivisibles. Ami de Mersenne, il ne s'entendit jamais avec Descartes.

3 - Quelques repères :

Roberval (1602-1675)	
Descartes (1596-1650)	Mersenne (1588-1648)
Pascal, Etienne (1588-1651)	Fermat (1601-1665)
Pascal, Blaise (1623-1662)	Leibniz (1646-1716)
	Cavalieri (1598-1647)

4 - Quelques éléments pour l'étude de ce texte :

a) Le principe de Roberval (Axiome ou principe d'invention) :

C'est une méthode cinématique de détermination des tangentes à une courbe :

La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

En langage morderne : le vecteur-vitesse est porté par la tangente.

b) Vocabulaire et noms cités :

- Une touchante : une tangente.
- Un rhombe : un losange.
- Le Limaçon de Monsieur Pascal : il s'agit d'Etienne Pascal, le père de Blaise.
- La Roulette de Monsieur Rob. (Roberval) : la cycloïde (aussi appelée trochoïde par Roberval).

On peut ici remarquer l'orthographe et les abréviations utilisées par Roberval.

c) La propriété des tangentes à une parabole :

La parabole considérée a pour foyer A et directrice (BH).

Après avoir expliqué comment construire un point E de cette parabole ($AE = BI$), Roberval expose sa méthode, avant de montrer qu'elle s'accorde avec celle d'Apollonius (voir II).

Pour cela, il montre que le sommet F de la parabole est le milieu de la sous-tangente $[CI]$.

d) Une démonstration moderne de cette propriété :

$$AE = BI = HE.$$
$$\overrightarrow{AE}^2 = \overrightarrow{HE}^2$$
$$\overrightarrow{2AE} \,.\, \overrightarrow{V_E} = \overrightarrow{2HE} \,.\, (\overrightarrow{V_E} - \overrightarrow{V_H})$$
$$\overrightarrow{V_E} \,.\, (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{HE}) = O \text{ , car } \overrightarrow{HE} \perp \overrightarrow{V_H}$$
$$\overrightarrow{VE} \,.\, \overrightarrow{AH} = O$$

On démontre ainsi que la tangente au point E de la parabole est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AEH}$.

d) Conclusion :

Ce texte peut être étudié entièrement ou partiellement en classe de Terminale. Il est très accessible aux élèves, malgré une justification physique de ce principe cinématique assez délicate. Il est d'ailleurs à signaler que les textes de Roberval concernant d'autres courbes (la cycloïde, par exemple) peuvent aussi être étudiés, notamment en parallèle avec une étude paramétrique de ces courbes.

II - UN TEXTE D'APOLLONIUS (texte 2) :

1 - Ce texte est extrait du traité des Sections Coniques d'Apollonius de Perge (Les coniques d'Apollonius de Perge).

2 - Apollonius de Perge (Vers 262 - vers 180 av. J.C.) :

Un des grands géométres grecs, son oeuvre principale est le traité cité précédemment, on lui doit les noms actuels des coniques : parabole, ellipse et hyperbole.

3 - Etude du texte et démonstration :

a) Premier paragraphe :

Le sommet E de la parabole est le milieu de la sous-tangente $[A\Delta]$.

b) Deuxième paragraphe :

(AB) est l'axe focal de la parabole et $AE = E\Delta$.

Apollonius montre que tout point de la droite $(A\Gamma)$, distinct du point Γ, est extérieur à la parabole, donc que la droite $(A\Gamma)$ est tangente à la parabole.

c) Troisième paragraphe : démonstration par l'absurde :

Soit Z un point de la droite $(A\Gamma)$ intérieur à la parabole.

On a : $BH > ZB$, donc : $\dfrac{BH^2}{\Gamma\Delta^2} > \dfrac{ZB^2}{\Gamma\Delta^2}$.

Or : $\dfrac{BA^2}{A\Delta^2} = \dfrac{ZB^2}{\Gamma\Delta^2}$, en effet : $\dfrac{BA}{A\Delta} = \dfrac{ZB}{\Gamma\Delta}$, car les triangles ABZ et $A\Delta\Gamma$, sont semblables.

De plus : $\dfrac{BE}{\Delta E} = \dfrac{HB^2}{\Gamma\Delta^2}$ (penser à l'équation d'une parabole).

On en déduit : $\dfrac{BE}{\Delta E} > \dfrac{BA^2}{A\Delta^2}$. Or : $\dfrac{4 \times BE \times EA}{4 \times AE \times E\Delta} = \dfrac{BE}{E\Delta}$, donc $\dfrac{4BE \times EA}{4AE \times E\Delta} > \dfrac{BA^2}{A\Delta^2}$

D'où : $\dfrac{4BE \times EA}{AB^2} > \dfrac{4AE \times E\Delta}{A\Delta^2}$

Or : $E\Delta = AE$, $4AE \times E\Delta = 4AE^2 = A\Delta^2$.

Il s'en suivrait que : $\dfrac{4BE \times EA}{AB^2} > 1$

Or : $4BE \times EA < BA^2$, car le point E n'est pas le milieu de $[AB]$.
Contradiction.

Tout point de la droite $(A\Gamma)$, distinct du point Γ, est donc extérieur à la parabole : la droite $(A\Gamma)$ est tangente à la parabole.

Remarque : A titre d'exercice, on peut faire démontrer que : $4AE \times EB < AB^2$

On pose : $AB = l$, $AE = x$. On a : $EB = l - x$ (car $E \in [AB]$).

En étudiant la fonction $f : x \mapsto 4x\,(l-x)$, on montre que $\forall x \neq \frac{l}{2}$, $4x\,(l-x) < l^2$.

III - UN ARTICLE DE LA GRANDE ENCYCLOPEDIE (texte 3) :

Ce texte est l'article "tangente" de l'Encyclopédie Méthodique éditée par le libraire Panckoucke de 1784 à 1789, reprenant les articles mathématiques de la Grande Encyclopédie de Diderot-D'Alembert.

IV - UN EXERCICE PROPOSE EN CLASSE :

Propriété de la tangente à une ellipse :

On utilisera la propriété suivante :

Tout point d'une tangente à une ellipse, distinct du point de contact, est extérieur à l'ellipse.

Remarque : Pour justifier cette propriété, on pourrait la démontrer pour un cercle et considérer qu'une ellipse est l'image de son cercle principal par une affinité orthogonale.

Soient (T) la tangente en un point M à l'ellipse (E) et F_1 le symétrique du foyer F' par rapport à la tangente (T). Les droites (FF_1) et (T) sont sécantes en un point P.

1) Démonter que : $PF + PF_1 \leq 2a$ (On pourra utiliser l'inégalité triangulaire).
2) Démonter que $PF + PF' = 2a$.
3) En déduire que les points F, M et F_1 sont alignés, puis que la tangente (T) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Théorème :

La tangente en un point M à l'ellipse (E) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$ (angle des rayons vecteurs de ce point).

Texte 1

P R O B L E M E I.

Propoſition cinquiéme.

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mêmes mêlez.

Mais nous ſuppoſons qu'on nous en donne aſſez de proprietez ſpécifiques, qui nous faſſent connoître les mouvemens qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, eſt la touchante de la ligne courbe en chaque poſition de ce point-là.

Le principe eſt aſſez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura conſideré avec un peu d'attention.

Regle

Regle generale.

PAR les proprietez ſpécifiques de la ligne courbe (qui vous ſeront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens compoſez en un ſeul, tirez la ligne de direction du mouvement compoſé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonſtration eſt mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle eſt très-generale, & qu'elle peut ſervir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne ſera point à propos de la répeter.

Vous trouverez dans les exemples ſuivans les touchantes des ſections coniques, celles des autres lignes principales qu'ont connu les anciens, & celles de quelques-unes que l'on a décrit depuis peu, comme du Limaçon de Monſieur Paſchal, de la Roulette de Monſieur Rob. de la Parabole du ſecond genre de Monſieur Deſc. &c.

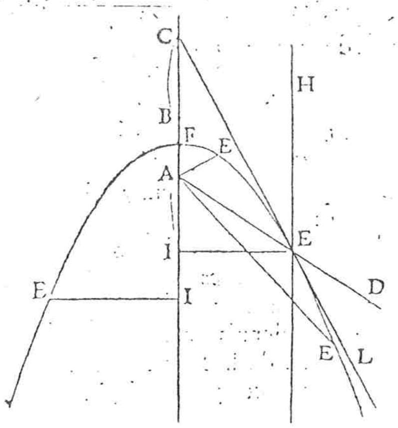
Premier exemple des touchantes de la parabole.

SOIT que l'on nous ait donné la parabole E F E, & le moyen de le décrire par la cinquiéme méthode generale de Monſieur Mydorge livre ſecond, propoſition 25. qui eſt telle.

Le ſommet & le foyer de la parabole étant donnez de poſition, trouver dans le même plan tant de points qu'on voudra par leſquels la parabole eſt décrite.

Soit A le foyer, & F le ſommet: ſoit tirée la ligne A F & prolongée de F vers B, & ſoit F B égale à A F la même ligne B F A ſera l'axe de la parabole. Prenez dans F A autant de points I qu'il vous plaira, tirez par ces points des lignes perpendiculaires à F A; du

centre A & de l'intervale d'entre chaque perpendiculaire, & le point B comme B I, décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en E, la parabole paſſera par les points E.



Cela poſé ſi l'on demande la touchante de la Parabole au point E, ſoit tiré la ligne A E prolongée comme en D, & la ligne E I perpendiculaire à AB, & encore la ligne H E parallele à l'axe FAI, alors il eſt clair par la deſcription ci-deſſus, que le mouvement du point E décrivant la Parabole, eſt compoſé de deux mouvemens droits égaux, dont l'un eſt la ligne A E, & l'autre eſt la ligne H E ſur laquelle il ſe meût de même viteſſe que le point I dans la ligne B A, laquelle viteſſe eſt pareille à celle de la ligne A E par la conſtruction, puiſque A E eſt toûjours égale à B I. Partant puiſque la direction de ces mouvemens égaux eſt connuë, ſçavoir ſuivant les lignes droites A E D, H E données de poſition, ſi vous diviſez l'angle A E H en deux également par la ligne L E C: qui eſt le diamétre d'un rhombe autour de l'angle A E H, (& par conſéquent la direction du mouvement compoſé des deux HE AE,) la ligne L E C ſera la touchante.

Avant que de paſſer outre, remarquez deux choſes.

La premiere, que nous n'avons pas voulu conſidérer le point E comme commune ſection de deux lignes, dont lignes, dont l'une A E infinie ſe meut circulairement autour du point A; l'autre I E auſſi infinie deſcend parallement à ſoi-même, aïant toûjours ſon extrémité I dans la ligne B A, puiſqu'il a été plus facile de conſidérer les mouvemens A E, H E du point E en chaque endroit de la ſection de ces lignes. Secondement, nous avons dit que les mouvemens A E, H E ſon égaux l'un à l'autre, ce qui ſera vrai, quelque point de la parabole que nous prenions pour E. Mais il ne s'enſuit pas que tous les mouvemens d'un point E ſoient égaux à tous les mouvemens d'un autre point E de la parabole, chacun d'eux n'en aiant qu'un réciproque de l'autre côté de la parabole & également éloigné du ſommet. Vous entendrez la même choſe en toutes les autres lignes courbes.

Pour montrer que notre façon de trouver les touchantes de la Parabole, s'accorde avec celle d'Apollonius livre 1. propoſition 33, & pour le trouver en quelque façons analitiquement, poſons qu'il ſoit vrai que L E C touche la Parabole en E. Si donc nous abaiſſons l'ordonnée E I, I F ſera égale à F C, & ajoûtant F B à I F, & F A à C F, les toutes C A & I B ſeront égales (car les ajoûtées le ſont par la conſtruction) mais I B eſt égale à A E par notre conſtruction, donc C A & A E ſont égales, & l'angle A C E égal à l'angle A E C; mais par notre conſtruction nous avons diviſé l'angle A E H en deux également, & par conſequent nous avons fait A E C, C E H égaux entr'eux, donc A C E eſt égal à C E H ſon alterne, ce qui eſt vrai, car par la conſtruction E H, eſt paralelle à C I.

Ou ſi vous aimez mieux, puiſque C I, E H ſont paralleles, l'angle A C E eſt égal à C E H; mais par la conſtruction CEH eſt égal à AEC, donc ACE & AEC ſont égaux, & le triangle ACE iſoſcéle, donc CA eſt égale à AE. Mais encore par la conſtruction AE eſt égale à BI, CA eſt donc égale à BI, & en ôtant les égales AF, BF, CF ſera égale à FI, & par conſequent la ligne CE touche la parabole, ce qu'il falloit démontrer.

Que ſi l'on nous eût donné la deſcription de la parabole par un point, comme E ſe promenant le long de la ligne IE du mouvement uniforme, en même temps que la ligne IE deſcend parallelement à ſoi-même, d'un mouvement très-inégal, mais tel que le quarré de IE eſt toûjours égal au rectangle ſous IF, & une ligne donnée nommée P, qui en ce cas eſt le côté droit de la Parabole, il auroit fallu démontrer ce problême.

La premiére (comme P) de trois lignes continuellement proportionnelles nous étant donnée, & un mouvement égal dans la ſeconde IE trouver le mouvement qui ſe fait dans la troiſiéme FI, ce qui eſt un peu plus long, &c.

L'on pourroit encore propoſer le moïen de décrire la Parabole par quelques autres de ſes propriétez, ce qui ſeroit plus difficile.

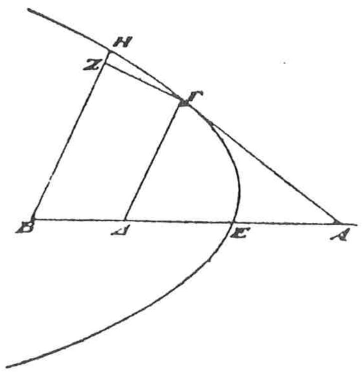
Texte 2

PROPOSITION XXXIII.

Si l'on prend un point sur une parabole ; si, de ce point, l'on abaisse une droite d'une manière ordonnée sur le diamètre, et si l'on pose une droite égale à celle que cette dernière droite découpe sur le diamètre, dans la direction de celui-ci, et à partir du sommet, la droite de jonction, menée du point ainsi obtenu au point que l'on a pris, sera tangente à la section ([3]).

Soit une parabole dont un diamètre est la droite AB. Abaissons une droite ΓΔ de manière ordonnée ; posons une droite AE égale à la droite EΔ, et menons la droite de jonction AΓ. Je dis que la droite AΓ prolongée tombera à l'extérieur de la section.

En effet, qu'elle tombe à l'intérieur comme la droite ΓZ, et abaissons la droite HB de manière ordonnée. Dès lors, puisque le rapport du carré de BH au carré de ΓΔ est plus grand que celui du carré de ZB au carré de ΓΔ ; mais que le carré de BA est au carré de AΔ comme le carré de ZB est au carré de ΓΔ, et que BE est à ΔE comme le carré de HB est au carré de ΓΔ ([1]), il s'ensuit que le rapport de BE a EΔ est plus grand que celui du carré de BA au carré de AΔ. Or, le quadruple du rectangle délimité sous BE, EA est au quadruple du rectangle délimité sous AE, EΔ comme BE est à EΔ;



donc, le rapport du quadruple du rectangle délimité sous BE, EA au quadruple du rectangle délimité sous AE, EΔ est plus grand que celui du carré de BA au carré de AΔ. Dès lors, par permutation, le rapport du quadruple du rectangle délimité sous BE, EA au carré de AB est plus grand que celui du quadruple du rectangle délimité sous AE, EΔ au carré de AΔ ; ce qui ne peut avoir lieu, car, EΔ étant égal à AE, le quadruple du rectangle délimité sous AE, EΔ équivaut au carré de AΔ, et le quadruple du rectangle délimité sous BE, EA est moindre que le carré de BA, puisque le point E n'est pas le milieu de la droite AB. Dès lors, la droite AΓ ne tombe pas à l'intérieur de la section ; donc elle lui est tangente ([2]).

Texte 3

par les variations qu'on apperçoit dans leur lumière, ſur-tout dans les ſatellites de ſaturne, dont un diſparoît totalement; mais ces *taches* ne peuvent s'obſerver, & les ſatellites ſont trop petits pour qu'on puiſſe y rien diſtinguer, non plus que dans mercure & dans la planète de Herſchel. (*D. L.*)

TAMBOUR, ſ. m. (*Méch.*) Deux roues d'égale grandeur & ayant même arbre, placées à une diſtance l'une de l'autre égale à-peu-près au quart de leur rayon, couvertes par des lattes contiguës, clouées à leur circonférence, forment ce qu'on appelle un *tambour*, dans la méchanique pratique; le *tambour* s'applique très-ſouvent à la grue; un ou plusieurs hommes, introduits dans l'intérieur, le font tourner & monter le poids qu'on doit élever. Pour que l'homme agiſſe avec le plus d'avantage, il ne doit pas éloigner ſon centre de gravité de la verticale qui paſſe par l'axe du *tambour* d'une quantité plus grande que le ſixième du rayon. Il y a des provinces où on emploie des petits chiens, dans les cuiſines, pour faire tourner la broche par ce moyen.

TANGENTE, ſ. f. (*Géométrie*) menez à la courbe MS (*planc. Géom. fig.* 241) une ſécante MmV qui la coupe en M & m; faites tourner cette ſécante autour du point M juſqu'à ce que le point m tombe ſur le point M; la ligne MmV parvenue à ſa dernière poſition MV eſt une *tangente*.

Si la courbe a une inflexion, *fig.* 242, ou un rebrouſſement, *fig.* 243; la ligne MV pourra être en même-tems tangente & ſécante, & après avoir touché la courbe en M, aller la couper en R.

Dans les élémens de *Géométrie* on ne s'occupe guères que de la *tangente* au cercle. On y démontre que cette *tangente* eſt perpendiculaire au rayon. Effectivement, ſoit la ligne DE, *fig.* 244 perpendiculaire en M au rayon MC de la circonférence MFG. Ce rayon étant perpendiculaire à DE ſera la plus courte de toutes les lignes qui y aboutiſſent du point C. Si donc on mène les lignes DC & CE, ces lignes étant plus grandes que MC, les points D & E ſeront hors du cercle, & comme on peut dire la même choſe de tout autre point, tous les points de la ligne DM ſont hors du cercle excepté le point M, qui eſt ſur la circonférence même; donc cette ligne eſt *tangente*.

Si d'un même point D on mène une *tangente* MD & une *ſécante* DFG au cercle; la *tangente* eſt moyenne proportionnelle entre la *ſécante* entière & ſa partie extérieure; car ſi on mène les lignes FM & GM; les triangles FDM & DMG ſeront ſemblables, parce que l'angle D eſt commun; de plus les angles DMF & DGM ſont, chacun, meſurés par la moitié de l'arc FM, don $DG : DM = DM : DF$.

La portion ME de la *tangente* au point M extrémité de l'arc MI, compriſe entre ce point M & le rayon prolongé qui paſſe par le point I, autre extrémité de cet arc, s'appelle *tangente* de l'arc MI ou de l'angle MCI meſuré par cet arc. *Voyez* SINUS.

Tangentes des ſections coniques.

Si du point M de la parabole AM, *fig.* 245, on mène deux lignes, l'une FM à ſon foyer, l'autre MV qui rencontre ſa directrice, perpendiculairement en V, ces lignes ſont égales. *Voyez* CONIQUE ET PARABOLE.

Cela poſé, je dis que la ligne MY qui diviſe l'angle VMF en deux parties égales eſt *tangente* à la parabole au point M. Pour le démontrer, il ſuffit de faire voir que tout point de la ligne MYm autre que le point M, m par exemple, eſt hors de la parabole relativement au foyer. Menez de ce point m les lignes mV, mK perpendiculaires ſur la directrice & mF; $mV = mF$; donc mK eſt $< mF$; donc le point m n'eſt pas à la parabole; donc l'interſection de Km avec la parabole eſt de l'autre côté du point m relativement au point K.

Si du point M de l'ellipſe, *fig.* 246, on mène les lignes MF & Mf aux foyers F, f, la ſomme de ces lignes ſera conſtante & égale au grand arc. *Voyez* CONIQUE.

Cela poſé, je dis que la ligne MY qui diviſe en deux parties égales le ſupplément de l'angle FMf eſt *tangente*, je ſupprime la démonſtration, parce qu'elle eſt la même à-peu-près que pour la parabole.

Si du point M de l'hyperbole, *fig.* 247, on mène les lignes MF & Mf, aux foyers F, f, la différence de ces lignes eſt conſtante & égale à l'axe des foyers. *Voyez* CONIQUE.

Cela poſé, je dis que la ligne MY qui diviſe en deux parties égales l'angle FMf eſt *tangente*, même démonſtration que pour l'ellipſe.

Archimède a auſſi déterminé la *tangente* de ſa ſpirale, par des moyens puiſés dans l'ancienne *Géométrie*, ſur quoi *voyez ſes œuvres*, édition de Barrow.

Ces courbes ſont à-peu-près les ſeules dont on puiſſe ainſi trouver les *tangentes*; pour les autres, il faut employer le calcul différentiel ou une méthode analogue, moyennant quoi le problême n'a aucune difficulté, quand l'équation de la courbe eſt donnée d'une manière quelconque. *Voyez l'Analyſe des Infinimens petits* du marquis de l'Hôpital, qui ne laiſſe preſque rien à deſirer ſur cette matière.

Nous parlerons ici de deux cas ſeulement qui ſe rencontrent le plus ſouvent, celui où l'équation de la courbe eſt donnée entre des coordonnées parallèles à deux lignes données, & celui où les