AMPERE ET LA DIFFÉRENTIABILITÉ DES FONCTIONS CONTINUES

Klaus VOLKERT
Bexbach - RFA

I - LA SITUATION A LA FIN DU 18è SIECLE

Aujourd'hui la différentiabilité est une qualité en plus des fonctions continues. Quand nous avons défini la différentiabilité, nous démontrons deux choses :

1) Toute fonction différentiable est continue.

2) Il y a des fonctions continues qui ne sont pas différentiables (p.e. la fonction $x \to |x|$. Nous ajoutons sans démonstration qu'il y a des fonctions continues qui ne sont différentiables en aucun point. Les mathématiciens du 18è siècle n'ont pas pensé comme çà. Il n'existait ni une seule notion de continuité (il y en avait trois) ni la notion de différentiabilité. A cette époque on connait trois doctrines sur la nature de la différentiabilité.

a) LA DOCTRINE DES LIMITES OU DES FLUXIONS :

La dérivée $f'(x_0)$ d'une fonction $f(x)$ est définie comme "dernière raison" ou comme "limite" du quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ pour $h \to 0$. C'est la doctrine de NEWTON et de d'ALEMBERT, qui était propagée fortement par LACROIX vers la fin du 18è siècle. L'existence de la dérivée n'est pas discutée dans ce cadre théorique. Peut-être semblait-elle garantie par des idées physiques (vitesse instantanée). Il manquait aussi des contre-exemples intéressants (comme $x \sin\frac{1}{x}$).

b) LA DOCTRINE DES INFINIMENT PETITS :

La dérivée $f'(X_0)$ est le résultat d'une manipulation habile du quotient différentiel $\frac{dy}{dx}$ (où dx et dy sont des infiniment-petits). C'est la doctrine de LEIBNIZ et son école. L. CARNOT était un partisan ardent des infiniment petits (cf. ses "Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal" (1797)). L'existence de la dérivée n'est pas non plus discutée dans la doctrine des infiniment petits. Peut-être son caractère algébrique en est la raison.

c) LA DOCTRINE DES SERIES :

Si on a un développement en série pour chaque fonction, on peut définir la dérivée comme un coefficient spécifique de cette série. C'était l'idée de LAGRANGE. Cette doctrine est formulée dans la "Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés, de toute considération d'infiniment-petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies" (1ère édition 1797). Le problème de l'existence de la dérivée est résolu par le théorème qui dit, qu'on peut développer chaque fonction en série.

Bien sûr on avait rencontré des cas particuliers, où se posaient des problèmes avec la différentiation. Au cours des débats sur la corde vibrante, d' ALEMBERT et EULER ont étudié les courbes, dont "la courbure fait un saut en quelque point" (c'est-à-dire que la dérivée a un saut fini, ce qui n'est pas possible dans notre théorie moderne). Mais l'intérêt pour ces cas était motivé par la physique.

II - LE MEMOIRE D 'AMPERE

En 1806 André-Marie AMPERE, qui était nommé répétiteur à l'école polytechnique en 1804, publiait un mémoire avec le titre "Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration du théorème de Taylor ; et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque". Ce mémoire est devenu célèbre car il a été interprété comme premier essai pour démontrer la différentiabilité des fonctions continues. Cette interprétation date de la fin du 19è siècle (cf. par exemple HANKEL, 1870, GILBERT, 1873, PRINGSHEIM, 1899, PASCH, 1914 et GUITARD, 1986). Je veux montrer que cette interprétation n'est pas correcte (pour les détails de mon argumentation cf. VOLKERT, 1989). Le passage décisif du mémoire ampèrien est le suivant :

"Je me propose d'abord de démontrer que la fonction de x et de i $\frac{f(x+1) - f(x)}{i}$ qui exprime le rapport de la différence de deux valeurs x et x + i d'une variable, et de la différence des deux valeurs correspondantes d'une quelconque de ses fonction f(x), ne peut devenir ni nulle ni infinie pour toutes les valeurs de x, lorsqu'on fait i = 0, . . . ; il résultera nécessairement de cette démonstration que $\frac{f(x + i) - f(x)}{i}$ se réduit, quand i = 0, à une fonction de x . . . nous la représenterons, . . . , par f' (x), et notre premier but sera d'en démontrer l'existence."

(AMPERE, 1806 ; 148f)

On a lu ce passage dans le sens suivant : AMPERE veut démontrer l'existence de la dérivée, c'est-à-dire l'existence de la limite $\lim_{n \to 8} \frac{f(x + i) - f(x)}{i}$ pour toutes les fonctions continues (il ne parle pas explicitement de la continuité, mais il use de la continuité de temps en temps). A mon avis, il faut être prudent à cet endroit pour deux raisons :

- Ampère n'était pas un partisan de la doctrine des limites. Il était fortement influencé par LAGRANGE (il a étudié les grands ouvrages de LAGRANGE en autodidacte) et adhérait à la doctrine des séries et à l'idée d'une "analyse algébrique" (cf. aussi AMPERE, 1826 et AMPERE, 1827). Mais nous avons déjà vu qu'il n'y a pas de place pour les questions d'existence dans la doctrine des séries.

- Le terme "existence" n'était pas courant à cette époque là. On parlait de l'existence d'un nombre (ou d'une variable) dans le sens que ce nombre (ou cette variable) ne s'avanouit pas. Cela veut dire que le nombre (ou la variable) prend une valeur finie qui n'est pas égale à zéro. Comparez le passage suivant : "Ils [les côtés d'un triangle] se sont approchés différemment de la non existence ; ils se sont évanouis différemment ; mais, une fois évanouis, ils ont tous la même manière de ne pas exister."

(L'HUILIER, 1786 ; 151)

Si on accepte cette interprétation, qui est proposée aussi par GRABINER, 1978, on peut relire le passage décisif de la manière suivante : Ampère veut démontrer que la valeur de f'(x) n'est pas nulle (non infinie). Bien sûr il faut exclure les fonctions constantes. AMPERE le fait en se restreignant aux fonctions strictement monotones par morceaux. L'existence de la dérivée dans le sens moderne est tacitement supposée par AMPERE. (La différentiabilité comme qualité explicite ne se trouve qu'à la fin du 19è siècle). En termes modernes on peut reformuler le "théorème d'Ampère" de la manière suivante :

"Soit $f : [a,k] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et monotone. Alors il existe au moins un point x dans [a, k] avec f'(x) = 0". Ce théorème est pour nous une conséquence simple du théorème des accroissements finis. En analysant la démonstration d' AMPERE on aperçoit qu'elle est "presque" une démonstration pour le théorème des accroissements finis (pour l'histoire de ce théorème cf. GRABINER, 1978).

1. Soit f(a) = A et f(k) = K. Parce que f est strictement monotone, on a $A \neq K$. Maintenant on choisit un point e dans $]a,k[$. On a

$$\frac{K - E}{k - e} \leq \frac{K - A}{k - a} \leq \frac{E - A}{e - a} \quad \text{ou} \quad \frac{E - A}{e - a} \leq \frac{K - A}{k - a} \leq \frac{K - E}{k - e}.$$

On peut vérifier la proposition en calculant les différences

$$\frac{K - E}{k - e} - \frac{K - A}{k - a} \quad \text{et} \quad \frac{K - A}{k - a} - \frac{E - A}{e - a}$$

et en notant qu'elles ont le même signe.

2. On peut itérer ce 1er pas avec des points $a < b < c < d < e < f < g < h < k$:

"On démontra de même que parmi les huit fractions

$$\frac{K - H}{k - h}, \frac{H - G}{h - g}, \frac{G - F}{g - f}, \frac{F - E}{f - e}, \frac{E - D}{e - d}, \frac{D - C}{d - c}, \frac{C - B}{c - b}, \frac{B - A}{b - a}$$

il y en a nécessairement une plus grande et une plus petite que $\frac{K - A}{k - a}$.

(AMPERE, 1806; 153)

3. On peut choisir les points a, b, ..., h, k de la forme spéciale $\frac{k - a}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Si on fait $\frac{k - a}{n} = i$, on obtient les fractions

$$\frac{K - f(a+(n-1)i)}{i}, \frac{f(a+(n-1)i) - f(a+(n-2)i)}{i}, \ldots, \frac{f(a+i) - A}{i}.$$

Il s'ensuit du 2è point qu'il y a une telle fraction, qui est plus petite que $\frac{K - A}{k - a}$ et une autre qui en est plus grande.

On peut interpréter les fractions ci-dessus comme des valeurs particulières d'une fonction F(x,i), qui est définie par l'équation

$$F(x,i) = \frac{f(x + i) - f(x)}{i} \quad (i \neq 0)$$

Soit $F(x_0, i)$ une fraction plus petite et $F(x_1, i)$ une fraction plus grande que $\frac{K - A}{k - a}$

(on a $x_0, x_1 \in \{a, a + i, a + 2i, \ldots, a + (n - 1) i, k\}$ et $i = \frac{h - a}{n}$).

Alors on a l'inégalité $F(x_0, i) \leq \frac{K - A}{k - a} \leq F(x_1, i)$

4. $F(x, i)$ est une fonction continue (si $i = 0$) de ses deux variables. A fortiori $F(x, i)$ est une fonction continue de x pour une valeur constante de i. Alors on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. On obtient une valeur x_i entre x_0 et x_1 avec (*) > $F(x_i, i) = \frac{K - A}{k - a}$ ("théorème fini des accroissements finis")

5. AMPERE veut finir sa démonstration d'une manière classique, c'est à dire avec une réduction à l'absurde. Supposons que pour tout x dans $]a,k[$ on ait $f'(x) = 0$. Cela est contradictoire avec 4. L'argument qui expose cette contradiction, n'est pas clair chez AMPERE. Mais l'idée intuitive (non correcte bien entendu) me semble claire : c'est la validité de l'équation (*) pour tout i et par conséquent pour la limite $i = 0$. Bien sûr la démonstration d'AMPERE n'est pas complète. Mais il est remarquable qu'on peut reformuler ses idées dans le cadre de l'analyse non-standard (cf. LUXEMBURG/STOYAN, 1976; 85). CAUCHY, qui connait bien les travaux d'AMPERE (AMPERE était un des professeurs du jeune CAUCHY à l'Ecole Polytechnique), use des méthodes ampériennes dans son "Résumé des leçons sur le calcul différentiel" (1823) pour démontrer le théorème des accroissements finis. L'interprétation, qu'on a donnée au mémoire d'AMPERE, repose donc sur un malentendu concernant le terme "existence". Ce malentendu a commencé peut-être avec le chef d'AMPERE. Je parle de Sylvestre LACROIX, professeur d'analyse à l'Ecole Polytechnique, qui a écrit un fameux "Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" (1797). Comme nous avons vu ci-dessus, LACROIX était un partisan de la doctrine des limites. Dans la deuxième édition de son ouvrage on trouve la phrase suivante : "L'existence de la limite du rapport $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ peut être prouvée immédiatement d'une manière fort simple." (LACROIX, 1810; 241). Cette démonstration fort simple, qui est attribuée par LACROIX à "Mr BINET aîné, professeur de Mathématiques transcendantes au lycée de Rennes" (ibid), est une version simplifiée de la démonstration d'AMPERE. Pendant le 19è siècle on trouve "le théorème d'AMPERE" (qui dit : toute fonction continue est différentiable excepté en des points isolés) dans beaucoup de traités d'analyse (comparez VOLKERT, 1989). La discussion était tranchée définitivement contre LACROIX et ses successeurs (pas contre AMPERE !) par la découverte des fonctions continues non-différentiables (c'est-à-dire différentiables en aucun point) par WEIERSTRAβ (1872) et DARBOUX (1875).

La discussion des singularités des fonctions continues commença d'une manière systématique dans le célèbre "Cours d'analyse algébrique" (1821) de CAUCHY. Là il examina pour la première fois l'exemple $\sin \frac{1}{x}$. Mais les conséquences tirées par CAUCHY ne sont pas les conséquences modernes : ". . . l' expression . . . lim $((\sin \frac{1}{x}))$ admet une infinité de valeurs comprises entre les limites -1 et +1." (CAUCHY, 1821; 26). Pour CAUCHY le cas de la non-différentiabilité se réduit au cas de la non-continuité (dans ce cas précis, la non-unicité) de la fonction dérivée. Le terme différentiable est défini d'une manière précise pour la première fois dans le mémoire de DU BOIS-REYMOND, 1875.

III - BIBLIOGRAPHIE

AMPERE, J.M. : 1806
Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de TAYLOR, et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque (Journal de l'Ecole Polytechnique 13, (1806); 148 -181).

AMPERE, J.M. : 1826
Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, du calcul aux différences et de l'interpolation des suites, considérés comme dérivant d'une source commune (Annales de mathématiques pures et appliquées 16, (1826); 329 - 349).

AMPERE, J.M. : 1927
Démonstration du théorème de TAYLOR pour les fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes, avec la détermination de l'erreur que l'on commet lorsqu'on arrête la série donnée par ce théorème à l'un quelconque de ses termes (Annales de mathématiques pures et appliquées 17, (1827) ; 317 - 329).

CARNOT, L. : 1797
Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal (Paris) - réimpression : Paris 1970.

CAUCHY, A.L. : 1821
Cours d'analyse de l'école royale polytechnique (Paris) - dans : Oeuvres complètes, 2ème série, tomme III (Paris, 1897).

CAUCHY, A.L. :
Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal dans : Oeuvres complètes, 2ème série, tome IV (Paris, 1899).

DU BOIS-REYMOND, P. : 1875
Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen (Journal für die reine und angewandte Mathematik 79, (1875) ; 21 - 37).

GILBERT, P. 1873
Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues (Mémoires couronnées et autres mémoires publiés par l'académie royale de Belgique. Collection en -8°. 23, (1873) ; I - VI, 1 - 51).

GRABINER, J. : 1978
The Origins of Cauchy's Theory of the Derivative (Historia mathematica 5, (1978) ; 379 - 409).

GUITARD, T. : 1986
La querelle des infiniments petits à l'Ecole Polytechnique au XIXè siècle (Historia scientiarum 30, (1986) ; 1 - 61).

HANKEL, H. : 1870
Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen (Tübingen - cité suivant : Mathematische Annalen 20, (1882) ; 63 - 112).

LACROIX, S. : 1810
Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Tome I, 2ème édition (Paris).

LAGRANGE IX :
Oeuvres de Lagrange. Tome IX. Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toutes considérations d'infiniment petits, d'évanouissements, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies ((Ed.) J.-A. Serret) Paris, 1881).

L' HUILIER, S.A.J. : 1876
Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs qui remporte le prix proposé par l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres pour l'année 1784 (Berlin) - édition en latin : tübingen 1795.

LUXEMBURG/STOYAN : 1976
Introduction to the Theory of Infinite-simals (New York/San Francisco/London).

PASCH, M. : 1914
Veränderliche und Funktion (Leipzig-Berlin).

PRINGSHEIM, A. : 1900
Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes (Bibliotheca mathematica 3. Folge 1, (1900) ; 433 - 479).

VOLKERT, K. : 1987
Die Geschichte der pathologischen Funktionen. Ein Beitrag zur Entstehung der mathematischen Methode (Archive for History of Exact Sciences 37, (1987) ; 193 - 232).

VOLKERT, K. : 1989
Zur Differenzierbarkeit stetiger Funktionen - Ampères Beweis und seine Folgen (Archive for History of Exact Sciences 39 (1989) ; 37 - 112).