Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - **La Rochelle 1988**

GERBERT D'AURILLAC
le savant, le maître, le mathématicien

Jean-Pierre LEVET
Université de Limoges

On se propose de présenter brièvement la vie et l'oeuvre de Gerbert d'Aurillac, le pape Sylvestre II, mort en 1003, qui fut l'un des plus grands savants du Moyen Age.

Par un rappel du contenu de son enseignement et par une étude commentée de certaines de ses **lettres**, on montrera l'étendue de son érudition et de son ambition scientifique et philosophique.

On analysera enfin quelques passages élémentaires des oeuvres d'arithmétique et de géométrie qui figurent dans le **corpus** qui lui est attribué, avec la volonté de donner ainsi une image de ce que pouvaient être, il y a quelque mille ans, les livres d'initiation aux mathématiques ainsi que les talents pédagogiques et l'enthousiasme de leurs auteurs.

Pour conclure, afin de rendre, devant des mathématiciens d'aujourd'hui, à Gerbert un hommage moderne, on énoncera deux programmes informatiques, rédigés l'un en Turbo Pascal (version IV) et l'autre en Basic, concernant la méthode de la division par choix d'une dénomination et d'une différence. Ainsi peut-être des élèves d'aujourd'hui, disposant d'outils qui eussent sans nul doute suscité chez Gerbert joie et admiration, pourront-ils apprendre les méthodes d'autrefois. Souhaitons qu'à cette occasion ils sachent faire preuve de l'enthousiasme qui animait Gerbert lorsqu'il se consacrait à l'étude et à la recherche.

Quelques éléments de bibliographie vous permettront de compléter les informations qui vont vous être données :

A. OLLERIS, **Oeuvres de Gerbert, pape sous le nom de Sylvestre II,** Paris, 1867.
N.M. BUBNOV, **Gerberti Opera Mathematica**, 972-1003, Berlin, 1899.
J. HAVET, **Lettres de GERBERT**, Paris, 1889.
H. PRATT LATTIN, **The Letters of Gerbert, with his papal privileges as Sylvester II**, Columbia U. Press, 1961.
F. PICAVET, **Gerbert, Un Pape Philosophe**, Paris, 1897.
P. RICHE, **Gerbert d'Aurillac, Le Pape de l'An Mil**, Paris, 1987.
Gerberto, Scienza, Storia e Mito, Atti del Gerberti Symposium (Bobbio, 25-27 luglio 1983), **Archivum Bobiense, studia II**, Bobbio, 1985.

Je vous proposerai des traductions que j'ai élaborées après avoir accompli un travail philologique d'établissement du texte.

Certaines d'entre elles feront l'objet d'une publication par les soins du groupe inter I.R.E.M.

Gerbert d'Aurillac fut, au X$^{\text{ème}}$ siècle, un savant universel.

Exceptionnelle fut sa destinée. D'humble origine, il fut appelé à exercer les plus hautes fonctions politiques et religieuses, puisqu'il fit élire roi de France Hugues Capet, dont il fut le secrétaire, et qu'il devint pape en 999 sous le nom de Sylvestre II.

Moine au monastère Saint-Géraud d'Aurillac, il se distingua très jeune par des aptitudes intellectuelles peu communes. Il eut la chance de pouvoir séjourner en Espagne de 967 à 970, avant d'être présenté au pape Jean XIII et à l'empereur Otton Ier, qui, l'un et l'autre, furent frappés par son intelligence, par sa science et par son infatigable ardeur au travail.
A partir de 972, il se consacra à l'enseignement et à la recherche à Reims, dans les fonctions d'écolâtre, sous l'autorité de l'archevêque Adalbéron.

Nommé, en 983, abbé de Bobbio, il ne resta en Italie qu'une année, préférant retrouver bien vite ses charges d'enseignement à Reims.

Mêlé aux innombrables querelles politiques de l'époque, il connut quelques années difficiles après avoir obtenu la succession d'Adalbéron. Avant d'accéder au trône pontifical, il fut nommé, en 998, archevêque de Ravenne.

Devenu Sylvestre II, il conçut, avec Otton III, un projet d'instauration d'une monarchie universelle, qui aurait uni l'Europe tout entière et regroupé l'Occident et l'Orient. Son ambition était d'oeuvrer pour une civilisation entièrement fondée sur les valeurs du Christianisme, de lutter contre la pauvreté, d'assurer la paix et de contribuer au progrès par le développement des sciences.

Mais la politique ne lui apporta pas toutes les satisfactions qu'il en attendait. Il s'en fallut même de beaucoup, car elle fut pour lui la principale cause de ces "tempêtes contre lesquelles l'étude lui fournit toujours un port sûr".

Gerbert fut donc avant tout un homme de foi et un homme de science, un passionné de philosophie, discipline qu'il définissait comme étant **"divinarum et humanarum rerum comprehensio veritatis"**.

La philosophie représente donc pour lui tout le savoir accessible à l'esprit humain. Elle est l'étude par excellence, celle qui fait la synthèse de la spéculation et de la pratique. C'est elle qui donne son prix à la vie en ce monde : "La foi", déclare Gerbert, "fait vivre le juste, mais il faut y adjoindre la science", la science parce qu'elle est le produit de la raison, la cause des plus grandes et des plus authentiques satisfactions, celles de l'esprit, et la source du progrès véritable, lorsqu'elle est associée étroitement au respect des valeurs morales.

Dans sa quête philosophique, Gerbert sut recueillir la meilleure partie de l'héritage antique, tel qu'il pouvait être accessible de son temps, et donner une vive impulsion à la recherche. C'est ainsi qu'il s'efforça de redonner vigueur aux études médicales et qu'il eut l'ambition de rapprocher la physique des mathématiques, de faire de ces dernières l'instrument des sciences de la nature.

Travailleur acharné, Gerbert fut aussi un savant passionné, capable de s'enflammer tout autant devant la beauté d'un vers de Virgile que devant celle d'un théorème ou d'une opération arithmétique.

Ce fut aussi un ardent défenseur de l'unité du savoir, au centre duquel il plaça les mathématiques, qui, pour lui, "viennent de Dieu et conduisent à Dieu".

Dans une telle profession de foi, verrons-nous uniquement un élan platonicien (rappelons que, pour le fondateur de l'Académie, les mathématiques constituent une sorte de propédeutique philosophique) ? La réponse à donner à une telle question me paraît négative. Certes, cette perspective n'est sans doute pas absente de la pensée de Gerbert, mais elle n'en constitue qu'un élément. Pour le philosophe, qui est capable d'un véritable enthousiasme mathématique, le substantif étant pris dans son sens étymologique, les mathématiques sont à considérer à la fois en elles-mêmes et comme un instrument.

Par elles-mêmes, elles développent l'intelligence humaine à laquelle elles apportent des joies extraordinaires. En tant qu'instrument, elles sont une école de logique et un bel outil de compréhension du réel. De telles idées, qui sont aujourd'hui banales, étaient en fait tout à fait neuves du temps de Gerbert. La clairvoyance du philosophe attirera d'ailleurs sur lui les critiques, les soupçons et les calomnies des médiocres et des conformistes, qui ne feront pas l'effort nécessaire pour comprendre les positions d'un homme dont la pensée est en avance sur celle de son temps.

Telle est sans doute la raison pour laquelle les idées les plus originales de Gerbert, à quelques notables exceptions près, sont à chercher dans l'enseignement qu'il dispensa et dans les lettres qu'il adressa à des amis ou à des élèves. Les traités scientifiques qui nous ont été transmis sous son nom ne sont que des manuels élémentaires de géométrie et d'arithmétique. Aussi n'est-ce pas d'après leur seul contenu qu'il convient de porter un jugement sur la stature scientifique de leur auteur.

Nous étudierons quelques extraits de ces oeuvres, mais je voudrais d'abord montrer ce que fut l'enseignement de Gerbert et ce que nous apprennent de son zèle et de son ardeur scientifiques celles de ses **Lettres** qui sont parvenues jusqu'à nous.

Un contemporain de Gerbert, l'historien Richer, nous montre l'étendue des matières brassées par l'écolâtre de Reims.

On commence par la logique héritée de l'Antiquité : l'**Isagogé** de Porphyre d'après la traduction de Marius Victorinus et d'après celle de Boèce, le **Peri Hermeneias** et les **Topiques**, lus à travers des traductions et des commentaires (Cicéron, Boèce), puis les oeuvres originales de Boèce (**Sur les Différences Topiques, Sur Les Syllogismes Catégoriques, Sur les Syllogismes hypothétiques, Sur les Définitions, Sur les Divisions**) constituent la première partie du programme de travail.

On passe ensuite à la rhétorique et aux études littéraires. Gerbert lit et commente de préférence les poètes : Virgile, Stace et Térence, Juvénal, Perse et Horace, Lucain. Les prosateurs, toutefois, comme Cicéron et César, ne sont pas complètement négligés. Lorsque les élèves sont suffisamment familiarisés avec ces auteurs, on les fait passer à l'étude de la rhétorique et de la sophistique, nom donné à l'art des controverses.

On arrive enfin aux mathématiques, qui ne sont plus, comme dans la perspective ancienne, une propédeutique, mais un véritable couronnement des études et une initiation à la recherche. Les quatre branches des mathématiques sont successivement étudiées dans l'ordre suivant : arithmétique, musique, géométrie et astronomie.

Pour enseigner le calcul, Gerbert fit construire un abaque ingénieusement conçu qui permettait d'effectuer très rapidement multiplications et divisions. Nous en reparlerons longuement.

Les leçons de musique et de géométrie n'appellent aucun commentaire particulier. Elles précèdent celles qui concernent l'astronomie. Celle-ci est alors une science réputée "presque inaccessible". Pour la rendre simple et attrayante, Gerbert se dote d'un matériel pédagogique qu'il construit lui-même. Une sphère ronde en bois plein représente la sphère du monde. Gerbert l'incline, avec ses deux pôles, obliquement par rapport à

l'horizon. Il pourvoit le pôle supérieur des constellations septentrionales et le pôle inférieur des constellations australes. Avec le cercle appelé "horizon" par les Grecs et "limitant" par les Latins, il en règle la position, car c'est grâce à lui qu'on distingue et sépare les constellations qui sont visibles de celles qui ne le sont pas. Avec cet instrument, Gerbert enseigne à ses élèves la science de la nature. Ils apprennent à connaître les astres, qu'ils observent la nuit sous la direction de leur maître. Celui-ci leur fait comprendre, avec l'aide d'un mécanisme qu'il a inventé, comment se fait la révolution des planètes. Avec une sphère traversée par un tube servant d'axe et indiquant le pôle céleste, il représente, au moyen d'un réseau de fils de fer et de cuivre, les constellations que l'on peut ainsi aisément reconnaître toutes.
Tous les détails ainsi rapportés par l'historien montrent la maîtrise et l'ingéniosité de Gerbert, sa science et sont talent de pédagogue. Tous les contemporains de l'écolâtre furent, comme Richer, très frappés par la passion avec laquelle il dispensait son enseignement, qui attirait d'année en année des élèves de plus en plus nombreux.

"La renommée", constate Richer, "d'un si grand savant ne se limitait pas seulement aux Gaules ; elle s'étendait aussi en Germanie. Elle franchit les Alpes et se répandit en Italie jusqu'à la mer Tyrrhénienne et à l'Adriatique".

Mais le niveau moyen des étudiants devait demeurer relativement médiocre. Aussi est-ce de la recherche personnelle qu'il menait sans relâche que Gerbert tirait les plus grandes satisfactions intellectuelles.

De cette recherche, de nombreuses lettres se font l'écho. Nous allons lire et commenter quelques-unes d'entre elles.

Lettre 7 (les références proposées sont celles de l'édition qu'a donnée du texte latin J. HAVET). Cette lettre date de la fin de 982 ou du début de 983. Elle est adressée à Airard, moine d'Aurillac, ancien élève de Gerbert et futur abbé de Saint-Thierry, près de Reims.

"Gerbert à son ancien élève et ami Airard, salut.
Nous accédons à tes demandes et nous te recommandons de prendre soin de nos affaires comme si elles étaient les tiennes propres. Il faut que Pline soit corrigé, qu'Eugraphius soit reçu et que soient recopiés complètement les livres qui sont à Orbais et à Saint-Basle. Fais ce que nous te demandons, afin que nous fassions ce que tu nous demandes."

Le savant, qui s'intéresse tout autant aux disciplines littéraires (Eugraphius est un commentateur de Térence) qu'aux matières scientifiques (il est inutile de présenter le naturaliste Pline), a constamment besoin de livres nouveaux, dont il n'est pas toujours facile d'obtenir des copies. La lettre 8 montre, elle aussi, cette quête des ouvrages écrits par les Anciens.

Lettre 8.

Adressée à Adalbéron, cette lettre fut écrite à Bobbio en juin 983. Comme la précédente, elle porte témoignage de l'étendue des champs d'intérêt de Gerbert : histoire, astronomie, géométrie. Une formule ("**non minus admiranda**") révèle l'enthousiasme de Gerbert lecteur de livres savants.

"A Adalbéron, archevêque de Reims.

Je vous expliquerai mieux de vive voix devant vous qu'absent et par mes écrits ce que j'ai fait à Mantoue pour vos affaires. Je n'ai pas su quelles clefs de mes coffres à livres je devais envoyer en raison de l'usage commun de serrures semblables. Faites pour nous l'acquisition de l'Histoire de Jules César auprès du Révérend Adson, abbé de Montierender, pour que le livre soit recopié, afin que vous puissiez avoir les livres que nous possédons chez vous et espérer acquérir ceux que nous avons trouvés ces derniers temps, à savoir huit volumes du **De Astrologia** de Boèce, et aussi de très beaux livres contenant des figures de géométrie et d'autres volumes non moins admirables.

Seule votre absence trouble jour et nuit notre bonheur."

Dans la lettre 24, envoyée au printemps 984 à Lupitus de Barcelone, Gerbert sollicite l'envoi d'un livre d'astronomie traduit de l'arabe. Il espère qu'ultérieurement d'autres échanges de même nature se feront avec son correspondant, archidiacre de la cathédrale de Barcelone.

Lettre 24

"Bien que je n'aie à attendre de toi aucune reconnaissance pour service rendu, ton renom et ta gentillesse me poussent à avoir confiance en toi et à attendre de toi une faveur. Aussi je te demande de m'envoyer le livre d'astronomie que tu as traduit. Par la suite, si tu souhaites obtenir de moi en compensation quelque chose, demande-le moi sans hésiter."

Ecrite à la même époque que la lettre 24, la lettre 17, adressée à Géraud de Saint-Céré, abbé d'Aurillac, en faisant mention d'une traduction élaborée par l'abbé de Saint-Michel de Cuxa, évoque l'importance de la place des savants espagnols dans l'Europe de Xème siècle. Elle nous montre que, malgré les troubles de l'époque, Gerbert n'oublie jamais ses études : "Mon Père Adalbéron, archevêque de Reims, souhaite que vous vous portiez bien. S'il ne s'est pas rendu auprès de vous, c'est à cause du trouble profond qui se manifeste dans les deux royaumes et tout particulièrement de l'agitation qu'entretiennent Héribert de Troyes et le comte Eudes, fils de Thibaut, contre son église... Ce qui lui appartient, considérez-le comme vôtre, et, de peur qu'il ne vous demande une faveur sans rien vous offrir en échange, faites-lui savoir ce qu'il vous plairait d'avoir parmi les biens qu'il possède. Comme preuve de son affection, il vous envoie une couverture de lit en lin, qui a demandé beaucoup de travail, comme jadis il vous en avait envoyé une autre, toute simple celle-là, par l'intermédiaire de votre moine Ayrard.

L'abbé Guarin a laissé en votre possession un petit livre sur la multiplication et la division des nombres écrit par Joseph d'Espagne. C'est une copie de ce livre que nous vous demandons pour nous deux...".

Une autre lettre, antérieure à celle que nous venons de lire, montre que les recherches de Gerbert ne concernent pas seulement les mathématiques. Le médecin dont il souhaite avoir l'ouvrage a vécu au Ier siècle de notre ère. Il avait reçu le beau surnom de Philaléthès, c'est-à-dire d'"ami de la vérité". Voici le contenu de cette lettre, qui porte le numéro 9. Elle date de l'été 983.

Lettre 9

"A l'abbé Gisalbert.

Si vous vous portez bien, nous nous en réjouissons. Vos besoins, nous les considérons aussi comme les nôtres. De quels besoins nous sommes ainsi affectés, nous vous demandons de nous le révéler. Sur les maux des yeux et leurs remèdes, le philosophe Démosthène a publié un livre dont le titre est **Ophtalmicus**. Si vous le possédez, envoyez-nous son début ainsi que la fin du **Pro Rege Dejotaro** de Cicéron. Portez-vous bien".

Ecrite à la fin de 984 ou au début de 985, la lettre 44, dont le destinataire est Ebrard, abbé de Tours, donne une idée précise de ce que fut, pour Gerbert, la philosophie. Nous ne possédons malheureusement pas la liste des livres que recherchait inlassablement l'écolâtre pour son enseignement et ses travaux.

Lettre 44

"Puisque vous vous souvenez souvent de moi entre autres objets d'estime, comme je l'ai appris de plusieurs envoyés, et puisque vous me portez une grande amitié en raison de la parenté qui nous unit, je pense que votre estime me rendra bienheureux si seulement je suis homme à être trouvé digne d'être aimé par le jugement d'un homme aussi grand que vous. Mais comme je ne suis pas des personnes qui, avec Panétius, séparent parfois l'honnête de l'agréable, mais plutôt de celles qui, avec Cicéron, associent l'honnête à toute chose utile, je veux que ces liens honnêtes et sacrés d'amitié ne soient privés d'aucun côté de ce qui est utile à chacun."

Comme la philosophie ne sépare pas la façon dont on se conduit de celle dont on parle, à l'étude du bien vivre j'ai toujours associé celle du bien parler, bien qu'à lui seul le bien vivre soit plus important que ce qu'est le bien dire, et que, pour quelqu'un qui n'a pas à assumer les soucis du pouvoir, l'un soit suffisant sans l'autre.

Mais, pour nous qui nous occupons des affaires publiques, les deux sont nécessaires. En effet, parler comme il faut pour persuader et détourner de leurs élans impétueux par un doux langage les âmes des excités est d'une grande nécessité. Pour cette activité à laquelle il faut s'entraîner, je prépare une bibliothèque assidûment.

Et comme à Rome il y a quelque temps et dans d'autres endroits d'Italie ainsi qu'en Germanie et en Belgique j'ai dépensé beaucoup d'argent pour payer des copistes et des copies d'auteurs, aidé par la bienveillance et le zèle d'amis originaires de la même province, de même permettez que j'obtienne qu'il soit fait de même chez vous et par vous. Les livres que je souhaite voir recopier, j'en donnerai une liste à la fin de ma lettre.

Nous enverrons pour les scribes des parchemins et les fonds nécessaires, conformément à ce que vous demanderez, et nous n'oublierons pas de surcroît votre faveur.

Enfin, de peur d'abuser de la bienséance épistolaire en parlant plus longuement, disons que la cause de tant de travail est le mépris de la mauvaise fortune. Ce mépris, ce n'est pas pour nous comme pour beaucoup la nature seule qui le fait naître, mais une philosophie bien construite.

C'est pourquoi dans le loisir, dans le travail, nous enseignons ce que nous savons et nous apprenons ce que nous ignorons".

Les mêmes préoccupations se manifestent dans la lettre 130, écrite à Reims au début de l'automne 988. Le destinataire est Rainard de Bobbio.

Lettre 130

"Ne va pas croire, bien cher frère, que c'est de ma faute si depuis si longtemps je suis privé de la présence de mes frères. Depuis que je me suis éloigné de toi, par de nombreux voyages j'ai servi la cause de mon frère Colomban dans la mesure de mes forces. L'ambition des royaumes, des temps cruels et déplorables ont changé le bien en mal. Personne ne voit sa loyauté justement récompensée. Mais moi, puisque je sais que tout dépend de la volonté de Dieu, qui change en même temps les coeurs et les royaumes des fils des hommes, j'attends avec impatience l'issue des affaires. Je t'invite et je t'exhorte, frère, à faire aussi la même chose.

En attendant, je te demande une faveur à laquelle je tiens plus qu'à d'autres ; cela pourra se faire sans danger ni préjudice pour toi et renforcera plus que tout les liens d'amitié qui m'unissent à toi.

Tu sais avec quelle ardeur je cherche à obtenir de partout des copies de livres. Tu sais combien de copistes il y a partout dans les villes et les campagnes d'Italie. Eh bien donc, toi seul étant dans la confidence, fais qu'à tes frais soient copiés pour moi le **De Astrologia** de Manilius, le **De Rhetorica** de Victorinus et l'**Ophtalmicus** de Démosthène.

Je te promets, frère, et tiens pour certain, toi, que ce service qui est une marque de fidélité et que cette louable obéissance bénéficieront de ma part d'un silence sacré, et tout ce que tu demanderas, je te le donnerai parfaitement selon ce que tu m'écriras et au moment où tu l'exigeras. Indique seulement à qui nous devons confier tes présents et nos écrits et fais-nous plus souvent la joie de nous écrire. Ne crains pas que vienne à la connaissance de quiconque ce que tu as placé sous notre foi."
Mais Gerbert n'écrit pas toujours à ses disciples uniquement pour solliciter des copies de livres. Il lui arrive de répondre à des questions précises posées par ses anciens élèves, comme Rémi, moine de Trêves, à qui est destinée la lettre 134, écrite en septembre 988. Rémi n'avait pas bien compris que, selon la définition de Boèce, deux nombres qui mesurent un autre nombre sont des facteurs de ce nombre. Gerbert le lui rappelle et sa lettre lui permet de demander un service en échange d'un bel objet scientifique qu'il fabriquera pour Rémi. Ainsi se font les échanges entre savants dans l'Europe du Xème siècle.

Lettre 134

"Tu as bien compris au sujet du dixième nombre de quelle façon il se mesure lui-même en tant qu'unité des dizaines. Une fois un, en effet, donne un. Mais pour autant tout nombre ne se mesure pas lui-même, comme tu l'as écrit, parce qu'il est égal à lui-même. En effet, ce n'est pas parce qu'une fois 4 égale 4 que 4 mesure 4, mais c'est plutôt 2 qui mesure 4, deux fois 2 font, en effet, 4. D'autre part, le signe I que tu as remarqué noté dans la colonne des dizaines signifie dix unités, qui, séparées en 6 et 4, font un rapport sesquialtère. La même chose peut être observée pour 3 et 2, alors que l'unité constitue la différence.

Nous ne t'envoyons aucune sphère et pour l'instant nous n'en avons aucune. La chose exige un gros travail pour des gens qui s'adonnent aux affaires politiques.

Si donc te préoccupe le souci d'avoir de si grandes choses, envoie-nous encore un volume de l'**Achilléide** de Stace, après l'avoir recopié avec soin, afin que, ne pouvant avoir une sphère gratuitement à cause de la difficulté de sa construction, tu réussisses à l'obtenir par ton présent".

Quelques mois plus tard, Gerbert enverra une autre lettre sur le même sujet à Rémi.

Lettre 148

"Bien cher frère, tes bons sentiments sont écrasés par le travail de l'**Achilléide**, que tu as bien entrepris, mais que tu as abandonné, puisque l'exemplaire copié est incomplet. Aussi, comme savons bien nous souvenir du bienfait que nous avons reçu, nous avons entrepris de confectionner la sphère, qui exige un travail très difficile. Elle est déjà polie au tour et couverte de cuir de cheval. S'il te tarde de l'avoir, simplement teintée d'une couleur rouge naturelle, attends-la aux environs du ler mars, mais si tu souhaites l'avoir sous une forme plus élaborée, avec l'horizon et de jolies couleurs diverses, ne frémis pas à l'idée qu'un travail d'une année est nécessaire. Mais, pour ce qui est de donner et de recevoir, il a été admis de droit que celui qui ne doit rien ne donne rien en échange".

Gerbert, dans sa correspondance, aborde parfois, en ce qui concerne l'astronomie, des questions pratiques. C'est ce que nous montre, par exemple, la lettre 153, adressée, en mars 989, au frère Adam.

Lettre 153

"Mon père Adalbéron ayant pris place parmi les âmes immortelles, j'ai été accablé par le poids de tant de soucis que j'ai presque oublié tous les objets de mes études.
Lorsque j'ai commencé à me souvenir de vous, afin de ne pas me laisser engourdir par le manque d'activités et pour donner satisfaction sur un point à un ami absent, j'ai consigné par écrit et j'ai envoyé en gage d'amitié quelques éléments constitués à partir d'observations astronomiques, à savoir les flux et reflux du soleil, en les réunissant sans suivre l'opinion de ceux qui pensent qu'ils se font de façon égale pour chaque mois, mais en m'attachant au compte de ceux qui les décrivent comme inégaux absolument.

Ainsi Martianus Capella, dans son **Astronomie,** pense-t-il que l'augmentation des heures d'ensoleillement se fait de la manière suivante : "il faut savoir", dit-il, "que les jours croissent à partir du jour le plus court de l'année de la façon suivante : dans le premier mois d'un douzième du temps qui est ajouté en été, le second mois, d'un sixième, le troisième, d'un quart, le quatrième d'un autre quart, le cinquième d'un sixième, le sixième d'un douzième". Ainsi, selon ce mode de calcul, ai-je représenté avec des mesures certaines le tableau horologique de deux régions, en attribuant à chaque mois des heures précises.

L'une de ces régions est celle de l'Hellespont, où le jour le plus long est de 15 heures équinoxiales. L'autre est celle des gens qui ont comme jour le plus long un jour de 18 heures équinoxiales.

D'autre part, j'ai dressé ce tableau de telle façon que vous puissiez composer sur le modèle de ce qui est écrit les tableaux horologiques propres concernant n'importe quelle région, à condition de connaître par des clepsydres la durée des jours solsticiaux.

Cela, en vérité, est facile à faire, si l'eau qui s'échappe durant le temps nocturne et diurne du solstice, recueillie séparément, parvient à former la quantité de toute la somme, qui est faite de 24 parties.
Tableau horologique des régions pour lesquelles la durée maximale du jour est de 18 heures equinoxiales :

Juin et juillet	Jour	18 heures	Nuit	6 heures
Mai et août	Jour	17 heures	Nuit	7 heures
Avril et septembre	Jour	15 heures	Nuit	9 heures
Mars et octobre	Jour	12 heures	Nuit	12 heures
Février et novembre	Jour	9 heures	Nuit	15 heures
Janvier et décembre	Jour	6 heures	Nuit	18 heures

Tableau horologique des régions pour lesquelles la durée maximale du jour est de 15 heures équinoxiales :

Janvier et décembre	Jour	9 heures	Nuit	15 heures
Février et novembre	Jour	10 heures 1/2	Nuit	13 heures 1/2
Mars et octobre	Jour	12 heures	Nuit	12 heures
Avril et septembre	Jour	13 heures 1/2	Nuit	10 heures 1/2
Mai et août	Jour	14 heures 1/2	Nuit	9 heures 1/2
Juin et juillet	Jour	15 heures	Nuit	9 heures

Cette lettre appelle quelques éléments de commentaire.

La théorie du polygraphe Martianus Capella à laquelle fait référence Gerbert se trouve au livre VIII (VIII, 878) des **Noces de Mercure et de la Philologie**. Les Anciens appelaient **hora** la douzième partie du jour, quelle que fut la durée de celui-ci, en sorte que l'heure, selon eux, variait avec les saisons. L'heure dite **hora aequinoctialis,** douzième partie du jour d'équinoxe, était seule égale à une heure au sens moderne du mot. Le parallèle de l'Hellespont ne passe pas en Gaule, comme le croyait Martianus Capella. Il traverse l'Italie méridionale vers Naples et l'Espagne vers Madrid. Mais il est exact que, à la latitude de l'Hellespont, la durée du plus long jour est d'environ quinze heures. A la même latitude, celle du plus court et d'environ neuf heures.

La latitude où le plus long jour est d'environ dix-huit heures est approximativement celle de Stockholm. A Reims et à Paris, les durées maximales et minimales du jour sont de seize et huit heures environ.
La progression définie comme étant celle du premier mois concerne bien évidemment la période qui s'étend du 21 décembre au 20 janvier.

Nous étudierons enfin une lettre adressée par Gerbert en octobre 997 à l'empereur Otton. Elle nous confirmera que le savant s'efforce de maîtriser la possession de l'héritage antique, qu'il s'impose un effort constant de recherche et qu'il fait des mathématiques et de la philosophie morale les deux disciplines les plus nobles et les plus importantes.

Lettre 187

"Au Seigneur et glorieux empereur Otton César Auguste, Gerbert, évêque de Reims par la grâce de Dieu, envoie toutes les salutations dignes d'un tel empereur.

A votre bienveillance éminente, par laquelle perpétuellement nous sommes jugé digne de votre respect, nous pouvons répondre, peut-être en raison de vos voeux, mais non en raison de nos mérites.

Si, en effet, nous sommes enflammés d'une mince étincelle de science, tout cela c'est votre gloire qui l'a créé, la vertu de votre père qui l'a nourri, la magnanimité de votre aïeul qui l'a préparé.

Que dire donc ?

Nous n'apportons pas nos propres trésors pour les joindre aux vôtres, mais nous vous rendons ceux que nous avons reçus.

Ces trésors, pour partie vous les avez déjà obtenus, pour partie vous allez bientôt les recevoir, comme en est le signe votre demande honnête et utile, bien digne de votre majesté.

Si, en effet, vous ne teniez pas pour sûr et certain que l'essence des nombres ou bien contient en elle-même les premiers principes de toutes les choses ou bien les fait sortir d'elle-même, vous ne vous hâteriez pas avec un si grand zèle vers leur pleine et parfaite connaissance, et si vous n'aviez pas saisi la noblesse de la philosophie morale, l'humilité, gardienne de toutes les vertus, ne serait pas ainsi gravée dans vos paroles.

Cependant la finesse d'un esprit qui se connaît bien lui-même n'est pas silencieuse, puisque, pour ainsi dire, vous avez montré une faculté oratoire coulant d'elle-même et d'une source grecque.

Lorsqu'un homme, grec par la race, romain par son état, réclame, comme par droit héréditaire, pour lui-même les trésors de la sagesse grecque et romaine, alors je ne sais quoi de divin est exprimé.

Nous obéissons donc, César, à tes édits impériaux, non seulement sur ce point, mais sur tous ceux que votre Majesté décrétera.

En effet, nous ne pouvons manquer d'obéir, nous qui considérons qu'il n'y a, parmi les affaires humaines, rien de plus doux que votre commandement".
De tels témoignages directs relatifs aux ambitions et à l'activité scientifiques de Gerbert sont par eux-mêmes suffisamment éloquents.

Certains d'entre eux évoquent directement la diffusion des oeuvres mathématiques de Gerbert.

De ces dernières, le **corpus** édité par A. Olleris au siècle dernier comprend une **Regula de abaco computi**, un **Libellus de numerorum divisione**, un **Liber abaci**, une **Geometria**.

Nous allons nous intéresser plus directement à cette dernière oeuvre ainsi qu'aux trois premiers livres du **Liber abaci**.

Un large extrait du Prologue de la **Géométrie** nous montrera quel prix Gerbert attache à l'étude de cette science.

Prologue de la Géométrie.

"Cette discipline -je vais m'exprimer avec des mots simples car je dispense un enseignement à des débutants- tire son nom grec de la mesure de la terre. En grec, en effet, Yῆ veut dire "terre" et μεΤρον "mesure".

Elle fut inventée, dit-on, par les Egyptiens. Bien souvent la crue du Nil causait une inondation telle qu'il devenait impossible de reconnaître les limites des champs. Aussi chercha-t-on à imaginer un art ingénieux dont la pratique permettrait à chacun de déterminer plus facilement l'étendue de son lopin et de distinguer ce dernier des propriétés voisines.

Bien que cet art ait été, à l'origine, inventé pour permettre de mesurer la terre et que la terminologie qu'il utilise lui ait été attribuée en fonction de cette fin qui était la sienne, les savants des générations postérieures développèrent sa méthode et appliquèrent leurs recherches à quelques autres choses, qu'il était utile de connaître ou dont l'étude faisait la joie de l'esprit.

A un tel art ils appliquèrent une définition dont le contenu est le suivant : la géométrie est l'étude de la grandeur et des formes que l'on considère selon la grandeur. On peut aussi, si je ne me trompe, la définir ainsi : la géométrie est la science des grandeurs mesurables ou bien de la dimension démontrable recherchée par le moyen de propositions élaborées pour mesurer.

Pour tous ceux qui recherchent la véritable sagesse, l'utilité de cette science est très grande. Elle constitue, en effet, un moyen particulièrement affiné pour stimuler les forces de l'esprit et de l'intelligence et pour aiguiser l'entendement. Elle est, en outre, une discipline très agréable pour conduire rationnellement à la découverte de connaissances nombreuses et vraies, qui semblent à beaucoup admirables et surprenantes, ainsi qu'à la contemplation des propriétés extraordinaires de la nature et de la puissance, associée à une ineffable sagesse, de son créateur, qui a tout placé dans le nombre, la dimension et le poids.

Avec nos faibles moyens, nous avons emprunté à divers ouvrages et rassemblé quelques-uns des éléments qui concernent la méthode et les règles de cette science.

Choisissons parmi eux, pour rédiger le premier chapitre de notre livre, ceux que l'on appelle "définitions". Nous pourrons ainsi conduire graduellement, selon un plan bien établi, vers des connaissances plus approfondies l'esprit de celui qui aborde l'étude de cette discipline".
A une présentation traditionnelle de l'origine de la géométrie s'ajoute donc l'annonce d'un plan choisi en fonction de critères pédagogiques. Mais ce n'est pas dans ces éléments que se trouve l'essentiel de l'enseignement dispensé par Gerbert dans ces lignes. Ce qui compte le plus, semble-t-il, c'est, outre l'enthousiasme du mathématicien, la définition de la double utilité de la géométrie : elle contribue à la formation de l'esprit de celui qui l'étudie et elle offre une utilité pratique. Non seulement elle constitue une branche des mathématiques et livre des connaissances qui sont de son seul domaine, mais encore elle constitue un instrument au service d'autres disciplines. Gerbert ne nomme pas ces dernières, mais il est facile de comprendre qu'il s'agit de la logique et surtout de la physique, clairement évoquée derrière une citation biblique. Lorsque Gerbert ne s'adressait pas à des débutants, mais à des étudiants ayant acquis un bon niveau de science, il devait orienter son enseignement vers cette connaissance des secrets de la nature, qui constituait une part importante de ses recherches. L'émerveillement du mathématicien devant l'intelligibilité du réel est remarquable. Il se prolonge dans une réflexion métaphysique et théologique.

Beauté, vérité, sagesse, acuité d'esprit, compréhension du réel, élan vers les spéculations les plus hautes, tels sont, pour Gerbert, les fruits des mathématiques. Comment pourrait-on alors en aborder l'étude sans éprouver la passion le plus vive ?
Revenons à des conditions plus simples et découvrons quelques-unes de ces notions élémentaires dont la présentation a été annoncée par Gerbert.
Nous choisissons des extraits des chapitres VI, VII, IX et X, qui n'appelleront que de très brefs commentaires.

Chapitre VI

Du triangle en tant que principe des figures planes :

"Comme Boèce l'a établi d'une manière bien claire dans ses écrits concernant l'arithmétique, le triangle est le principe des figures planes. La raison en est qu'il faut au moins trois lignes droites pour pouvoir comprendre une surface, c'est-à-dire une étendue quelconque. Deux lignes droites seules ne peuvent, en effet, entourer aucune portion d'espace, et donc le triangle, comme il est formé dans son extension ou étendue par trois lignes, est le premier assemblage de lignes qui soit de nature à former des figures pourvues d'angles et planes. Aussi est-ce à bon droit que, parmi ces même figures, il obtiendra une place proéminente, qui le situera au premier rang.

D'autre part, parmi les figures pourvues d'angles, il apparaît également comme un principe et pour ainsi dire comme un élément parce qu'il entre dans la composition de chacune d'entre elles et que toutes peuvent se résoudre en triangles.
Si l'on marque par un point le centre de la surface, c'est-à-dire de l'aire d'un triangle, d'un tétragone, d'un pentagone ou d'un hexagone ou encore de toutes les figures qui suivent avec un nombre d'angles croissant à chaque fois d'une unité et si l'on trace à partir de ce même point des lignes droites joignant le sommet des angles, on remarquera que chacune de ces figures se compose d'autant de triangles et se divise en autant de triangles qu'elle contient elle-même d'angles. En effet, de cette manière, le triangle se divise en trois autres triangles, le tétragone en quatre, le pentagone en cinq et tous les autres polygones qui suivent en un nombre de triangles qui correspond à celui de leurs angles.

Il arrive encore de façon précise, parce que chacune de ces figures se divise en triangles, qu'il soit possible de trouver ainsi, lorsque l'on est attentif, la surface de chacune d'entre elles d'après les règles qui permettent de calculer la superficie des triangles".

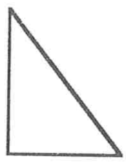
Chapitre VII

"Des espèces du triangle.

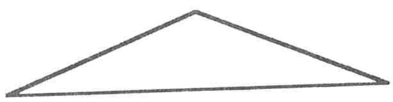
Le triangle, que l'on appelle aussi figure à trois angles (trigone) ou figure à trois côtés (tripleure), est une figure plane délimitée par trois lignes droites ou côtés et par un nombre égal d'angles.

Il en existe trois espèces, l'orthogone (le triangle rectangle), l'ampligone (triangle qui a un angle obtus) et l'oxygone (triangle qui a trois angles aigus).

Un triangle orthogone est un triangle qui a un angle droit et deux angles aigus, comme ceci :

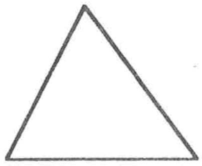


C'est de son angle droit qu'il tire son nom. **Orthos**, en effet, en grec, est l'équivalent de **rectus** en latin et **gonia** veut dire "angle". Ainsi orthogone signifie-t-il "à angle droit".
Un triangle ampligone a un angle obtus et deux angles aigus, comme celui-ci :



Lui aussi, de la même façon, reçoit de son angle obtus le nom qui est le sien.

Un triangle oxygone est un triangle qui se caractérise de la manière suivante : tous ses angles sont aigus. En voici un exemple :



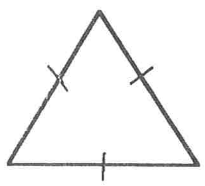
C'est la raison pour laquelle il tire son nom d'"aigu", qui se dit **oxys** en grec.

L'oxygone d'un genre particulier peut avoir ses angles et ses côtés égaux entre eux. De telles égalités sont tout à fait impossibles pour les autres espèces, celles des ampligones et des orthogones, comme il est facile pour tout le monde de le comprendre, et comme on peut bien s'en convaincre en regardant les figures qu'ils constituent.

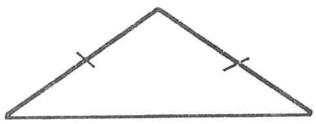
Ajoutons que les mêmes triangles, à savoir les oxygones, ont à leur disposition quelques autres qualificatifs également, qui sont au nombre de trois.

Les uns sont dits équilatéraux, les autres isocèles, les autres enfin scalènes.

Est équilatéral le triangle qui est délimité par trois côtés égaux entre eux. **Isos,** en effet, signifie "égal" et **pleuron** "côté".



Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés égaux, sur lesquels il s'appuie comme sur deux jambes, le troisième étant, lui, d'une longueur différente. C'est la raison pour laquelle on l'appelle isocèle, ce qui signifie, pour ainsi dire, "qui a des jambes égales".



Un triangle scalène, enfin, est un triangle dont tous les côtés sont inégaux. On l'appelle scalenos, ce qui équivaut à **gradatus** (disposé en degrés), parce que c'est comme par degrés que la longueur croît d'un côté par rapport à l'autre.

Ajoutons qu'un triangle ayant ses trois côtés égaux, c'est-à-dire un triangle équilatéral, peut être seulement un triangle oxygone, tandis que les orthogones et les ampligones, tout comme d'ailleurs les oxygones, peuvent être isocèles et scalènes. Quelques-uns, en effet, parmi les triangles ampligones, orthogones et oxygones sont, comme on le constate, formés de deux côtés égaux entre eux, le troisième étant d'une longueur inégale, alors que les autres ont leurs trois côtés inégaux".

Chapitre IX. Comment peut-on distinguer les trois sortes d'angles ?

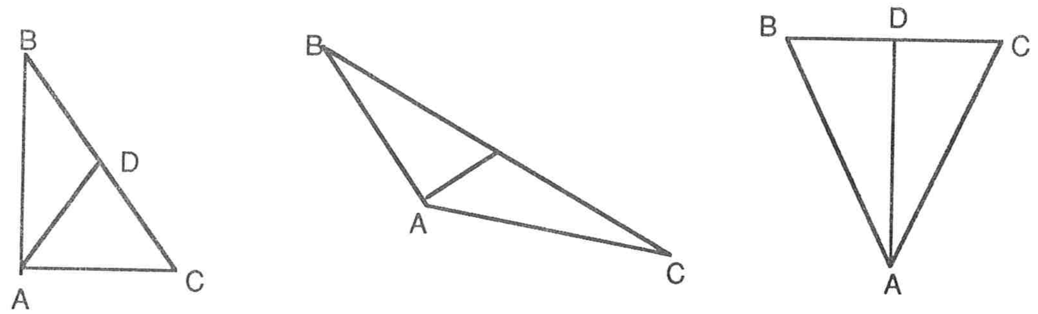
"Si tu veux savoir si un angle dont la mesure fait naître en ton esprit des hésitations est droit, obtus ou aigu, tu pourras utiliser le procédé suivant."

De l'angle pour lequel tu éprouves un doute, sur les deux lignes qui se réunissent à son sommet, marque de chaque côté par des points une mesure de n'importe quelle longueur et trace une ligne joignant ces deux points.

Divise-la en deux parties égales et marque son milieu par un point.

De ce point jusqu'au sommet de l'angle si la distance est la même que celle qui constitue la moitié de la ligne que tu as tracée, l'angle sur lequel tu t'interroges est droit. Si la distance est plus grande et ne peut être atteinte par le dimension de la moitié de la ligne, l'angle sera aigu. Si elle est plus courte et dépassée par cette dimension, l'angle sera obtus.

A titre d'exemple, soit A l'angle sur lequel tu t'interroges ; de ce sommet A, sur les côtés, B et C sont placés à une égale distance. Le point D se trouve placé sur la ligne BC à égale distance de B et de C. Si la distance qui sépare A et D est égale à celle qui sépare D de B et D de C, l'angle est droit. Si AD est plus petit que BD et CD, l'angle est obtus ; si AD est plus grand que BD et CD, l'angle est, à coup sûr, aigu :



Autre méthode, d'après le théorème de Pythagore.

A partir du sommet de l'angle sur lequel tu t'interroges, place sur l'un des côtés trois mesures de longueur égales, par exemple des pieds, et sur l'autre quatre mesures égales . Lorsque cela aura été fait, place des marques avec des points et d'un point à l'autre trace une droite. Si cette droite est égale à cinq pieds, l'angle sur lequel tu t'interroges sera droit ; si elle mesure plus de cinq pieds, l'angle sera obtus, mais si elle fait moins de cinq pieds, il se révèlera aigu.

Exemple : soit une angle de sommet E ; de ce point E jusqu'à F, je compte trois mesures, des pieds. Toujours à partir de E, sur l'autre côté de l'angle, je place quatre mesures jusqu'à G. Si je trouve cinq mesures de la même unité de F à G, l'angle sera certainement parfaitement droit en raison de la nature même des choses.

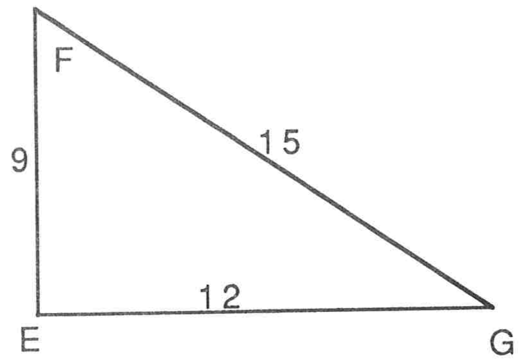
Si je trouve plus de cinq pieds, il sera obtus. Si j'en trouve moins, je tiens pour certain qu'il doit être compté au nombre des angles aigus, comme cela est évident d'après le principe posé".

Chapitre XI. Des triangles rectangles pythagoriciens.

"Parmi tous les triangles dont les côtés ont des longueurs diverses, celui qui a reçu du nom du mathématicien ayant découvert ses propriétés, Pythagore, le qualificatif de "pythagoricien" semble, d'une certaine façon, avoir un privilège et un mérite particuliers.
Pour quelle raison en est-il ainsi ?

On va le voir clairement dans ce qui suit.

Un tel triangle est délimité par des côtés entre lesquels existent les rapports suivants : la base est la sesquitierce du côté perpendiculaire, si bien que l'hypothénuse est la sesquiquarte de la base et qu'elle représente en même temps les cinq tiers du côté perpendiculaire. Le côté perpendiculaire a, par exemple, neuf pieds ou des mesures plus petites ou plus grandes, mais qui entrent toujours avec la base dans le rapport que j'ai indiqué plus haut".



Autres exemples : 18,24,30 ; 15,20,25 ; 3,4,5".

En guise de commentaire, on proposera une brève démonstration du dernier point établi.

Soit a la mesure du côté perpendiculaire et h celle de l'hypoténuse. Par hypothèse, la base mesure $a + \frac{1a}{3}$. D'après le théorème de Pythagore, on peut écrire

$h^2 = a^2 + a^2 + \frac{1a^2}{9} + \frac{2a^2}{3}$, donc $h^2 = 2a^2 + \frac{2a^2}{3} + \frac{1a^2}{9}$, d'où $h^2 = \frac{18a^2+6a^2+a^2}{9}$,

donc $h = a\sqrt{\frac{18+6+1}{9}} = a\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5a}{3}$

Clarté et précision, telles sont donc les caractéristiques principales de ces définitions élémentaires rédigées pour des débutants.

Ce sont également des notions toutes simples que contiennent les trois premiers livres du **Liber abaci.**

Pourtant, en l'absence de zéro, les procédés de calcul que l'on mettait en oeuvre, principalement pour l'accomplissement de la multiplication et de la division, étaient complexes. Aussi, au Xème siècle, seule une élite peu nombreuse pouvait-elle s'initier à l'arithmétique avec l'abaque. Il ne faut donc pas se laisser abuser par le caractère élémentaire des considérations proposées par Gerbert. Son livre apporte, en effet, une importante contribution à des recherches qui devaient aboutir à une évolution considérable de l'arithmétique : "peu à peu", écrit M. G. Beaujouan (**in La Science Antique et Médiévale,** Paris, PUF, 1957, p. 523-524), "comme chez les Arabes, les chiffres seront tracés sur le sable ou la poussière au lieu d'être gravés sur de petits morceaux de corne et les colonnes elles-mêmes disparaîtront : l'abaque aura fait place à l'algorisme. Comparés aux complications de la logistique grecque, les nouveaux procédés de calcul constituent l'un des apports capitaux du Moyen Age à l'outillage intellectuel de la science occidentale....

Etudions d'abord quelques passages du livre 1.

Comment on construit l'abaque.

"... On doit d'abord polir avec le plus grand soin la planche tout entière. Il faut ensuite établire des divisions de sa surface en traçant trente lignes, dont les trois premières seront réservées aux onces et à leurs portions. Les autres, c'est-à-dire 27, seront regroupées par séries de 3...

Il sera bien clair qu'il convient de veiller attentivement à marquer clairement l'ordre des degrés, unité, dizaine, centaine, et séries formées d'unités, dizaines et centaines... Tout nombre ou bien se réduit à ces séries simples ou bien progresse par de nouvelles séries au fur et à mesure qu'il s'étend pour occuper des lignes supplémentaires... De même que c'est par la multiplication de l'unité première qu'apparaît par accroissement l'unité seconde, c'est-à-dire la dizaine, de même c'est par la multiplication de cette même unité seconde que se dégage l'unité troisième, c'est-à-dire la centaine, puis, d'une certaine façon, l'on revient à l'unité première, je ne dis pas en réalité, mais dans la représentation. En effet, tout comme la première unité est représentée par le signe I, le premier millier est représenté par le même signe, le nom de la série, symbolisé par un tiret placé au-dessus du signe, étant simplement ajouté... Toutes les lignes de l'abaque représentent une quantité dix fois inférieure et dix fois supérieure à celles de ses deux voisines et la quantité de la troisième ligne d'un groupe de trois équivaut à cent fois celle de la première... Après avoir indiqué toutes ces quantités, traçons horizontalement, de la première à la vingt-septième ligne, quatre lignes séparées les unes des autres par un espace égal. La première sera appelé premier trait horizontal, la dernière quatrième trait horizontal... La présentation de ces éléments étant achevée, entreprenons rapidement d'ajouter des compléments relatifs aux chiffres et aux signes par lesquels ils sont représentés. L'unité se représente ainsi -I- ou encore par la lettre grecque A, alpha, deux est symbolisé par τ ou encore par la lettre grecque B, trois par ou par la lettre grecque Γ gamma, quatre par ou par la lettre grecque Δ delta, cinq par ou par la lettre grecque he E, six par ou par la lettre grecque , sept par ou par la lettre grecque Z, huit par 8 soit par la lettre grecque heta H, 9, quant à lui, est représenté ainsi ou par la lettre grecque θ.

Si donc on multiplie ces chiffres des unités de façon à obtenir le produit de chacun d'entre eux par chacun des autres, on obtiendra 36 multiplications en les mettant ainsi en présence les uns des autres. La connaissance du résultat de ces multiplications facilitera les calculs ultérieurs, sans nuire, bien au contraire, à l'éminente utilité de l'abaque... Puisque tout calcul sur l'abaque se fait en usant des inscriptions placées au-dessus des lignes verticales, il faut bien se rappeler que toutes ces lignes de l'abaque indiquent les unes par rapport aux autres des quantités dix fois supérieures ou inférieures. Telle est la raison pour laquelle je les considère les unes par rapport aux autres comme des doigts ou comme des mains. Au sujet de ces lignes, voici un principe général qu'il faut toujours appliquer : quelle que soit la quantité que multiplie un nombre de la série des unités, il faut placer le doigt sur la ligne de la série multipliée et la main sur la ligne qui la suit : quel que soit le nombre multiplié par une dizaine, il faut placer le doigt sur la ligne de la série qui suit et la main sur la ligne de la série qui suit le doigt ; quel que soit le nombre multiplié par une centaine, il faut placer le doigt non pas sur la ligne qui suit, mais sur celle qui vient après, et la main sur celle qui la suit... Pour que, grâce à un exemple, la règle de la multiplication paraisse plus facile à comprendre, proposons un problème concernant un nombre quelconque. Que ce problème soit donc le suivant : soit un palais contenant seulement XII pièces. Dans chacune d'entre elles, il y a XII tapis. Sur chacun de ces tapis ont pris place XII hommes. Chacun de ces hommes est accompagné d'un nombre égal de femmes, c'est-à-dire XII, et chacune de ces femmes allaite XII enfants. On demande à quel total on parvient en additionnant les nombres de tous ces éléments... Voici comment il faut faire. A l'intersection du quatrième trait horizontal et de la ligne des dizaines, je pose X... je pose également II, de la même façon, à l'intersection du quatrième trait horizontal et de la ligne des unités. Cela étant posé, un autre nombre XII est placé sur le premier trait horizontal, à l'intersection de la ligne des dizaines et des unités pour être multiplié... On procède alors de la manière suivante : II fois II font IIII, j'écris IIII sur le second trait horizontal, à l'intersection de la ligne des unités... Deux fois I font II. On écrit II sur le second trait horizontal, à l'intersection de la ligne des dizaines. Une fois II, II, on place encore II au même endroit. Une fois I, I, à placer dans la colonne qui suit celle des dizaines. Donc le nombre de pièces, douze, multiplié par lui-même, donne un produit de CXLIIII, qui est le nombre des tapis (voir abaque, figure I). Si l'on transfère ce nombre du second trait horizontal au premier pour qu'il soit multiplié de la même manière, on aura, par ce produit, le nombre des hommes. Ayant de la même manière déplacé ce nombre et l'ayant multiplié de la même façon, on obtiendra le nombre des femmes. Ce nombre ayant été déplacé de la même manière, apparaîtra, par multiplication, le nombre des enfants. Si l'on additionne le nombre de palais, de pièces du palais, celui des tapis, celui des hommes, celui des femmes et encore celui des enfants, on parvient au total de CCLXXI CCCCLIII...".

Simples jusque là, les choses deviennent plus délicates avec la division, étudiée tout au long des livres II et III.

Gerbert rappelle tout d'abord que chacune des lignes de l'abaque équivaut au décuple de celle qui la précède, tout en étant du décuple inférieure à celle qui la suit, et que, dans la plupart des cas, le nombre que l'on cherche dans ces lignes n'est ni supérieur ni inférieur du décuple, mais du double, du triple ou d'une autre proportion plus élevée.

Le mathématicien énonce ensuite la règle élémentaire de vérification : on multiplie le quotient par le diviseur et l'on ajoute le reste. On propose de grandes définitions : dividende, diviseur, différence, dénomination : deux fois quatre font huit, deux est une dénomination, c'est-à-dire un nombre par lequel on peut diviser un autre nombre en parties entières.

Dans certains cas, on dispose de deux manières d'agir, avec ou sans dénomination. Le choix de la dénomination est libre, un seul principe devant être respecté : elle doit être supérieure au diviseur. On peut même, afin de procéder plus commodément, changer de dénomination, une ou plusieurs fois, au cours de la même opération.
Voici un premier exemple de division effectuée d'abord sans, puis avec dénomination.

On divise par 6 668.

La division directe est simple : en 6, combien de fois 6, une fois, on place 1 dans la colonne des centaines, dans le quatrième emplacement, on procède de la même façon avec les dizaines puis avec les unités, pour constater qu'il reste, en ce qui concerne ces dernières, 2, nombre inférieur au diviseur, donc reste de la division.

Lorsque l'on utilise la méthode de la dénomination, on procède ainsi :

dividende : 668
diviseur : 6
dénomination : 10
différence (dénomination - diviseur) : 4

On divise 600 par 10, on obtient un premier quotient, 60 ; on multiplie ce quotient par la différence, 60 x 4 = 240, on ajoute à ce produit 68 (différence entre 668 et 600), on obtient 308. Choisissons une nouvelle dénomination, 15, ce qui nous donne une nouvelle différence, 9. Divisons 300 par 15 = 20, qui constitue un second quotient ; multiplions ce quotient par la différence, 20 x 9 =180, ajoutons les 8 unités qui ont été laissées de côté (308-300), cela nous donne 188. Prenons pour dénomination 9, qui nous donnera une différence de 3 ; divisons 180 par 9 ; le quotient est 20 ; multiplions-le par la différence, 20 x 3, cela fait 60, nombre auquel nous ajouterons les 8 unités que nous avons laissées de côté (188-180), 68 ; prenons 6 comme dénomination et divisons 60 par 6, le quotient est 10 ; il nous reste 8 unités (68-60) ; divisons 8 par le diviseur, le quotient est 1, avec un reste de 2, inférieur au diviseur, ce reste sera celui de la division, dont le quotient est fait de la somme de tous les quotients partiels, à savoir 60, 20, 20, 10 et 1, soit 111.

Les éléments qui permettent de construire un tel exemple ayant été donnés, on passe ensuite, dans les autres paragraphes du livre II, à l'étude des divisions simples effectuées sans choix d'une dénomination.

Gerbert propose d'abord la division de 666 par 6. L'opération est évidemment élémentaire (voir abaque figure 2). On divise ensuite 888 par 5. En 8, combien de fois 5 ? Une fois, il reste 3, que l'on convertit en 30 dizaines (unités de la colonne inférieure) ; en 30, combien de fois 5 ? 6 fois : en 8, combien de fois 5 ? Une fois, il reste 3, que l'on convertit en 30 unités ; en 30 combien de fois 5 ? 6 fois ; en 8 combien de fois 5 ? Une fois et il reste 3. Il convient d'additionner les résultats obtenus, 1, 6 + 1 = 7, 6 + 1 = 7, reste 3 : le quotient est 177, le reste 3 (voir abaque figure 3).

L'exemple suivant est la division de 333 par 6.

On place d'abord le diviseur sous le dividende dans la colonne des dizaines. En 33, combien de fois 6 ? 5 fois et il reste 3, que l'on convertit en 30 unités. On place le diviseur sous le nouveau dividende, dans la colonne des unités. En 33, combien de fois 6 ? 5 fois et il reste 3. Inscrits dans le quatrième espace, les quotients des opérations effectuées donnent le résultat recherché, 55, le reste étant 3 (voir abaque figure 4).

Cela ayant été montré, Gerbert indique la façon de procéder lorsqu'un intervalle demeure vide. Si, dans cette hypothèse, une difficulté particulière apparaît, c'est en raison de l'absence de représentation de zéro.
L'exemple choisi est le suivant : 1 098 divisé par 20.

Dividende et diviseur ayant été figurés sur l'abaque, on décale le diviseur d'une colonne vers la gauche et on le place sous le dividende. En 10, combien de fois 2 ? 5 fois, on inscrit 5 dans la colonne des dizaines du quatrième espace : on place le diviseur sous la colonne des dizaines. En 9, combien de fois 2 ? 4 fois et il reste 1, on écrit 4 dans la colonne des unités du quatrième espace ; ces deux opérations ayant été effectuées, il reste 18, nombre inférieur au diviseur. Le résultat de la division est donc acquis : avec un reste de 18, le quotient est 54 (voir abaque figure 5).

Au livre III, Gerbert revient de manière plus approfondie sur la division avec dénomination.

M. G. Beaujouan (**op. cit.**, p. 523) propose comme exemple 4019 : 87 (voir abaque figure 6). On pose le dividende, le diviseur et la différence -13-, la dénomination choisie étant 100. On divise 4 000 par 100 = 40, on multiplie 40 par la différence, 40 x 13 = 520 ; à 520, on ajoute les 19 unités laissées de côté, 539 ; on divise 500 par la dénomination, on obtient 5, que l'on multiplie par la différence, 5 x 13 = 65, on ajoute les 39 laissés de côté = 104 ; on divise 100 par la dénomination, le résultat est 1, que l'on multiplie par la différence, soit 13 ; à ce nombre on ajoute les 4 unités laissées de côté, ce qui donne 17, nombre inférieur au diviseur. Le résultat de l'opération complète est donc maintenant connu : le reste est 17, le quotient 40 + 5 + 1 = 46.

Le premier exemple exposé par Gerbert est le suivant : 77 068 : 6 807. La dénomination choisie étant 7 000, la différence est 193. On divise 70 000 par 7 000 = 10 ; on multiplie ce quotient par la différence : 193 x 10 = 1 930 ; on ajoute à ce produit 7 068, ce qui correspond à 77 068 - 70 000, on obtient ainsi 8 998. On divise alors 8 000 par 7 000 = 1 ; on multiplie 1 par la différence = 193 ; à 193 on ajoute 998 et le reste de la dernière division effectuée, soit 1 000. Cela donne 2 191, nombre qui est inférieur au diviseur posé à l'origine. Le résultat de l'opération complète est donc le suivant :

quotient : 10 + 1 = 11
reste : 2 191.

La disposition des nombres sur la planche est la même que celle qui est illustrée par la figure 6.

Un second exemple est proposé, 60 121 : 344.

On écrit :

- dividende : 60 121
- diviseur : 344
- différence : 56 (la dénomination est donc 400).

On divise 60 000 par 400 = 150 ; on multiplie 150 par 56, ce qui donne 8 400, nombre auquel on ajoute 121 = 8 521. On divise alors 8 000 par la dénomination : 8 000 : 400 = 20 ; on multiplie 20 par la différence et l'on ajoute à ce produit 521 : 20 x 56 = 1 120 ; 1 120 + 521 = 1 641 ; on divise 1 600 par la dénomination 1 600 : 400, on obtient 4, que l'on multiplie par la différence : 4 x 56 = 224 ; à ce nombre on ajoute ce qui a été laissé de côté à l'occasion de l'opération précédente, soit 41 : 224 + 41 = 265, nombre qui est inférieur au diviseur. Le résultat de l'opération est alors connu :

- reste : 265
- quotient : 150 + 20 + 4 = 174.

La disposition des nombres sur l'abaque n'appelle aucun commentaire nouveau, la méthode d'écriture étant celle qui est illustrée par les planches 5 et 6.

Une autre façon de procéder est possible. On ne pose aucune différence (donc on ne choisit aucune dénomination arbitraire). Gerbert donne trois exemples de divisions de cette nature. En voici un. On veut diviser 908 046 par 9 604. On pose le diviseur et le dividende. On déplace d'une ligne vers la gauche le diviseur. Combien de fois 9 en 90 ? Dix, mais on ne retient que 9 à cause des autres composantes du diviseur (il est évident que si l'on multipliait par 100 ce diviseur, on obtiendrait un nombre supérieur au dividende). On place donc 9 dans la colonne des dizaines du quatrième espace. On reporte 8 dans le troisième espace et l'on multiplie 9 par 6 = 54, que l'on retire de 90 = 36, que l'on pose dans le troisième espace, le 6 avec le 8 dans la colonne des milliers. On multiplie 9 par 4 = 36, que l'on retire soit de 3 000 soit de 600 (notés en fait 30 000 et 6 000 en raison du décalage primitivement opéré). Si la soustraction porte sur 30 000, on pose 29 640 ; si elle porte sur 600, on pose 564. On additionne alors les restes, qui vont constituer le nouveau dividende : 8 000 + 30 000 + 2 964 + 6 (=nombre d'unités au départ) = 43 686. On redécale le diviseur vers la droite. Combien de fois 9 en 40 ? Quatre, que l'on place dans la colonne des unités du quatrième espace ; 4 x 9 = 36 ; 40 - 36 = 4 ; on pose 4 dans le troisième espace ; 4 x 6 = 24, que l'on enlève de 40 : 40 - 24 = 16, il reste 16, que l'on pose ; 4 fois 4 = 16, que l'on retire de 600, il reste 584. On additionne les restes : 1 000 + 584 + 3 686 = 5 270, que l'on place de façon à en faire le nouveau dividende. Ce nombre est inférieur au diviseur. Il constitue donc le reste de l'opération, dont le résultat complet est désormais connu, puisque le quotient figure dans le quatrième espace : 94.

Le détail des calculs effectué est représenté sur la planche d'abaque 7.

Les deux méthodes proposées par Gerbert, celle qui fait intervenir une dénomination et une différence et celle qui s'accomplit sans elles, appellent des commentaires mathématiques.

Etudions d'abord la division avec dénomination et différence.

L'intérêt de la méthode, globalement défini, est de diminuer à chaque opération accomplie le dividende.

La démonstration concernant le procédé mis en oeuvre s'appuie sur le théorème de la division euclidienne : a et b étant deux entiers naturels, il existe un couple unique (q,r) tel que a = bq +r.

On part donc de a = bq + r. On cherche q et r.

On décompose $a = A + \alpha$
$b = d - \Delta$ (dénomination - différence).

L'habileté de l'opération consiste à bien choisir A et d, de sorte que l'on puisse facilement diviser A par d.

On écrit $A + \alpha = (d - \Delta)\ q + r$.

La division euclidienne de A par d donne $A = dX + Y$ (où X et Y sont quotient et reste). En reportant, on obtient $dX + Y + \alpha = dq - \Delta q + r$. On pose alors $q' = q - X$. De ce qui a été écrit précédemment, on tire $Y + \alpha = dq' - \Delta(q' + X) + r$, soit encore $Y + \alpha + \Delta X = (d - \Delta)q' + r$. Or $d - \Delta = b$, donc $Y + \alpha + \Delta X = bq' + r$. Par hypothèse, on a choisi $d > \Delta$, donc $Y + \alpha + \Delta X < y + \alpha + dX$, ce qui vaut a. On a bien un nouveau dividende plus petit, si bien que l'on a effectivement progressé.
Proposons maintenant une application numérique commentée.

Divisons 7 212 par 334, en retenant comme dénomination 700, ce qui fait une différence de 366.

On écrit 7 212 = 334 q + r ; 7 212 = 7 000 + 212 = q (700 - 366) + r;
je pose $q = q_1 + 10$ (quotient de la division de 7 000 par 700) ;
$212 = 700\ q - 7\ 000 - 366\ q + r$;
$212 = 700\ (q - 10) - 366\ (q_1 + 10) + r$;
$212 = 700\ q_1 - 366\ q_1 - 3\ 660 + r$;
$3\ 660 + 212 = 334\ q_1 + r$; $3\ 872 = 334\ q_1 + r$.

On passe alors à une seconde étape :

$3\ 872 = 3\ 000 + 872 = q_1\ (700 - 366) + r$;
je remplace 3 000 par 4 fois 700 + 200 (je divise 3 000 par la dénomination 700) ;
je peux écrire $200 + 872 = 700\ q_1 - (4 \times 700) - 366\ q_1 + r$;
je pose alors $q_2 = q_1 - 4$.
Il s'ensuit que $200 + 872 = 700\ q_2 - 366\ (q_2 + 4) + r$;
d'où $200 + 872 + (4 \times 366) = 334\ q_2 + r$; $1\ 072 + 1\ 464 = 334\ q_2 + r$;
donc $2\ 536 = 334\ q_2 + r$.

Nous arrivons alors à la troisième étape :

$2\ 536 = 2\ 000 + 536 = (700 - 366)\ q_2 + r$;

je divise 2 000 par 700, le quotient est 2 avec un reste s'élevant à 600.

J'écris $(2 \times 700) + 600 + 536 = 700\ q_2 - 366\ q_2 + r$.

Je pose $q_3 = q_2 - 2$; $600 + 536 = 700\ q_3 - 366\ (q_3 + 2) + r$;

$600 + 536 + (2 \times 366) = 334\ q_3 + r$;

$1\ 868 = 334\ q_3 + r$;

$1\ 000 + 868 = q_3\ (700 - 366) + r$; $700 + 300 + 868 = 700\ q_3 - 366\ q_3 + r$;

je pose alors $q_4 = q_3 - 1$; $300 + 868 = 700\ q_4 - 366\ (q_4+1)+r$;

$366 + 300 + 868 = 334\ q_4 + r$;

$1\ 000 + 534 = (700 - 366)\ q_4 + r$;

$700 + 300 + 534 = 700\ q_4 - 366\ q_4 + r$;

je pose $q_5 = q_4 - 1$; $300 + 534 = 700\ q_5 - 366\ q_5 - 366 + r$; $1\ 200 = 344\ q_5 + r$;

$1\ 000 + 200 = 344\ q_5 + r$; $300 + 700 + 200 = 700\ q_5 - 366\ q_5 + r$;

je pose $q_6 = q_5 - 1$;

$300 + 200 + 366 = 344\ q_6 + r$;

$866 = 344\ q_6 + r$;

$100 + 700 + 66 = 700\ q_6 - 366\ q_6 + r$;

je pose $q_7 = q_6 - 1$;

$100 + 66 + 366 = 334\ q_7 + r$;

$532 = 334\ q_7 + r$;

je pose $q_8 = q_7 - 1$;

$532 = 334\ q_8 + 334 + r$;

$198 = 334\ q_8 + r$,

or $q_8 = 0$, puisque 198 : 334 a pour quotient 0 .

Donc $r = 198$;

$q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7 = 10 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 21$.

Passons à la division accomplie sans choix d'une dénomination (et donc sans différence). L'étude sera illustrée par l'exemple de Gerbert, à savoir 908 046 : 9 604.

J'écris $908\ 046 = 9\ 604\ q + r$.

Gerbert procède d'abord à un décalage : $q_0 = q / 10$; $900\ 000 + 8\ 046 = 96\ 040\ q + r$.

Gerbert décompose encore : $900\ 000 + 8\ 046 = 90\ 000\ q_0 + 6\ 040\ q_0 + r$.

En 90, combien de fois 9 ? Réponse 10 fois, mais on ne prend que 9, pour tenir compte des autres chiffres du diviseur.

Je pose $q_0 = 9 + q_1$. Je place 9 dans la colonne des dizaines.

On écrit $900\ 000 + 8\ 046 = 90\ 000\ (9 + q_1) + 6\ 040\ (9 + q_1)+r$;

$900\ 000 + 8\ 046 = 810\ 000 + 90\ 000\ q_1 + (9 \times 6\ 040) + 6\ 040\ q_1 + r$;

d'où $90\ 000 + 8\ 046 = 96\ 040\ q_1 + 54\ 000 + 360 + r$.

Gerbert retire les 54 000 des 90 000, ce qui donne :

$30\ 000 + 6\ 000 + 8\ 046 = 96\ 040\ q_1 + 360 + r$.

Deux façons de procéder se présentent alors :

A) on retire les 360 de 30 000 ;

B) on les retire de 6 000. Le choix est libre. Gerbert ne développe que le procédé *A)*

Donc $6\ 000 + 29\ 640 + 8\ 046 = 96\ 040\ q_1 + r$;

$43\ 686 = 96\ 040\ q_1 + r$.

Il convient de bien remarquer que, puisque $q_1 = q_0 - 9$ et que $q_0 = 9/10$, et que par conséquent $q_1 = 9/10 - 9$, q_1 n'est pas un entier. On ne peut donc pas appliquer ici le théorème de la division euclidienne.

La première étape de l'opération est alors achevée.

Gerbert redécale le diviseur dans l'autre sens, ce qui revient à dire $q_2 = 10\ q_1$;

$43\ 686 = 9\ 604\ q_2 + r$;

on écrit $43\ 686 = 9\ 604\ q_2 + r$;

$40\ 000 + 3\ 686 = 9\ 000\ q_2 + 604\ q_2 + r$.

En 40, combien de fois 9 ? Réponse : 4 fois.

On pose 4 dans la colonne des unités du quatrième espace.

On pose alors $q_2 = q_3 + 4$.

En reportant, on obtient $40\ 000 + 3\ 686 = 9\ 000\ q_3 + 36\ 000 + 604\ (q_3 + 4) + 2$;

$4\ 000 + 3\ 686 = 9\ 604\ q_3 + (4 \times 604) + 2$;

$4\ 000 + 3\ 000 + 686 = 9\ 604\ q_3 + 2\ 400 + 16 + 2$;

$1\ 600 + 3\ 000 + 686 = 9\ 604\ q_3 + 16 + r$;

$5\ 270 = 9\ 604\ q_3 + r$;

$5\ 270 = 9\ 604\ q_3 + r$, donc $q_3 = 0$ et $r = 5\ 270$.

Le résultat complet de l'opération est alors connu.

Les explications que l'on vient de fournir ne permettent pas de saisir l'un des enseignements du texte latin de Gerbert : la joie, l'enthousiasme du maître et du mathématicien. Pour les montrer clairement, il faudrait construire une analyse philologique du texte, qui permettrait de rendre pleinement hommage à son auteur.

Comme il n'est pas question de la proposer ici, j'ai cherché comment, en guise de conclusion, on pourrait rendre, devant des mathématiciens, d'une autre manière, à Gerbert, cet hommage auquel il a bien droit. Aussi vais-je, comme je l'ai annoncé dans mon introduction, vous proposer une informatisation de la division par différence, sous la forme d'un programme GERBERT en turbo pascal (version IV) et en Basic. Nous célèbrerons ainsi les noces de la philologie, non pas avec Mercure, mais avec les Mathématiques et l'Informatique.

```
program Gerbert_division_par_la_methode_des_differences;

var
  dividende, diviseur, denomination, difference : longint;
  p, a, alpha, x, y, reste, quotient            : longint;

begin
  quotient := 0;
  write('dividende ? '); readLn(dividende);
  write('diviseur  ? '); readLn(diviseur);
  while dividende >= diviseur do
    begin
      repeat
      write('denomination ? ( >',diviseur,' )  '); readLn(denomination);
      until denomination > diviseur ;
      difference := denomination - diviseur;
      writeLn('          La différence est :  ', difference);
      {-------------------------------------------------------------}
      p := 1;
      while dividende/p > 10 do
            begin
              p := 10*p     {  decomposition du dividende en A + alpha }
            end;
      a :=  (dividende div p)*p;
      alpha := dividende - a;
     {--------------------------------------------------------------}
      x := a div denomination;        { Ces opérations sont simples et  }
      y := a mod denomination;        { peuvent être effectuées de tête }
     {--------------------------------------------------------------}
     if x=0         { Cas où le dividende est plus petit que la dénomination }
        then
          begin
            writeLn('            Je pose 1 ');
            quotient := quotient + 1;
            y := y - diviseur ;
        end;
      {-----------------------------------------------------}
      if x<>0 then writeLn('          Je pose ', x);
      quotient := quotient + x;
      dividende := y + alpha + difference*x;
      writeLn('          Le nouveau dividende est ', dividende);
      end;
    reste := dividende;
    writeLn;
    writeLn('      quotient ', quotient);
    writeLn('      reste ', reste);
    readLn;
  end.
```

Premier exemple

```
dividende ? 668
diviseur  ?  34
denomination ? ( >34 ) 40
          La différence est :  6
          Je pose 15
          Le nouveau dividende est 158
denomination ? ( >34 ) 50
          La différence est :  16
          Je pose 2
          Le nouveau dividende est 90
denomination ? ( >34 ) 40
          La différence est :  6
          Je pose 2
          Le nouveau dividende est 22

      quotient 19
      reste 22
```

Deuxième exemple

```
dividende ? 5197269
diviseur  ?  413422
denomination ? ( >413422 )  1000000
          La différence est :  586578
          Je pose 5
          Le nouveau dividende est 3130159
denomination ? ( >413422 )   500000
          La différence est :  86578
          Je pose 6
          Le nouveau dividende est 649627
denomination ? ( >413422 )   5000000
          La différence est :  86578
          Je pose 1
          Le nouveau dividende est 236205

      quotient 12
      reste 236205
```

```
10 quotient=0
20 input "Dividende ";dividende
30 input "Diviseur ";diviseur
40 input "Denomination";denomination
50 difference=denomination-diviseur
60 print "            La difference est : ";difference
70 p=1
80 if dividende/p>10 then p=10*p:goto 80
90 a=int(dividende/p)*p
100 alpha=dividende-a
110 x=int(a/denomination)
120 y=a-x*denomination
130 IF x=0 then print "          Je pose 1":quotient=quotient+1:y=y-diviseur
140 IF x<>0 then print "          Je pose ";x
150 quotient=quotient+x
160 dividende=y+alpha+difference*x
170 print "            Le nouveau dividende est ";dividende
180 IF dividende >= diviseur THEN goto 40
190 reste=dividende
200 print "            Quotient : ";quotient
210 print "            Reste    : ";reste
```

ABAQUE : Figure n° 1

M	C	X	S
		I	II
	I	IIII	IIII
		I	II

Les figures suivantes contiennent des chiffres arabes, qui doivent en faciliter l'interprétation

ABAQUE : Figure n° 2

M	C	X	S
			6
	6 6	6 6	6 6
	1	1	1

ABAQUE : Figure n° 3

M	C	X	S
			5
	8 5	8 3 5 5	8 3 5
	1	6 1	6 1
	1	7	7

ABAQUE : Figure n° 4

M	C	X	S
			6
	3	3 6	3 3 6 3
		5	5

ABAQUE : Figure n° 5

M	C	X	S
		2	
	1 2	9 2 1 2 1	8 8
		5	4

ABAQUE : Figure n° 6

CM	XM	M	C	X	S
				1 8	3 7
		4	5	1 2	9
			5 1	3 6 1	9 5 4 3
				1	7
				4 4	1 5 6

Les nombres "en gras" placés à droite de l'abaque indiquent l'ordre des opérations qui sont effectuées.

ABAQUE : Figure n° 7

CM	XM	M	C	X	S	
		9	6		4	**9**
	9	6		4		**3**
		9	6		4	**2**
		5	2	7		**14**
	4	3	6	8	6	**8**
9		8		4	6	**1**
		8				**5**
	3	6				**6**
	2	9	6	4		**7a**
		5	6	4		**7b**
		4				**11**
		1	6			**12**
			5	8	4	**13**
				9		**4**
					4	**10**