

## LA NAISSANCE DU PROJECTIF

### De la perspective à la géométrie projective

Rudolf BKOUCHE  
*IREM de Lille*

N'oublions jamais qu'un espace,  
c'est à la fois ce qu'un groupe  
humain voit et ce qu'il repré-  
sente.

Pierre Francastel

Il est devenu banal de dire que la géométrie projective est née de la pratique perspective du Quattrocento et l'on peut considérer que la géométrisation de la perspective, c'est-à-dire l'insertion d'icelle dans une théorie mathématique, est à la source de la géométrie projective comme la mesure des grandeurs est à la source de la géométrie grecque. Mais l'apport de la perspective est bien plus large que la simple émergence d'un nouveau chapitre de la géométrie, c'est une redéfinition du paysage géométrique: définition de nouveaux concepts et mise en place de nouvelles méthodes conduisant à de nouveaux modes de démonstration (et par conséquent de nouvelles formes de légitimation de la démonstration), mais aussi, et c'est l'un des aspects essentiels du point de vue projectif, la mise en place de la notion d'espace comme lieu de coordination des phénomènes géométriques et physiques, qui renouvelle la pensée scientifique (et nous citerons ici Pascal et Newton).

Nous nous proposons ici de regarder comment se met en place ce nouveau paysage géométrique depuis la première géométrisation de la perspective de Guido Ubaldo et les considérations théoriques de Desargues jusqu'à l'œuvre visionnaire de Taylor et la géométrie perspective de Lambert.

Le courant projectif, s'il est en partie occulté par le courant analytique au cours des XVII<sup>ème</sup> et XVIII<sup>ème</sup> siècles, est loin d'avoir disparu et nous renvoyons ici à l'article de Denis Lanier et Jean-Pierre Legoff (1); nous reviendrons par ailleurs sur l'opposition entre le courant projectif (celui de la géométrie dite synthétique) et le courant analytique et les raisons d'ordre philosophique et d'ordre idéologique de cette opposition (2).

## 1. Un nouveau concept: le point à l'infini.

Il est souvent dit, dans les ouvrages d'histoire des mathématiques, que la notion de point à l'infini a été introduite pour la première fois par Kepler: en fait nous verrons qu'il s'agit bien plus d'un point infiniment éloigné que du point à l'infini tel qu'il apparaît dans la géométrie projective. Quelques années après Kepler, Desargues définit le point à l'infini comme le point de concours d'une famille de droites parallèles, lui donnant un statut analogue à celui de point à distance finie. Je ne sais si Desargues connaissait et avait lu les textes de Kepler, nous noterons que les deux constructions sont différentes dans leur principe, la première essentiellement dynamique, la seconde s'appuyant sur l'analogie, issue des constructions perspectivistes, entre familles de droites concourantes et familles de droites parallèles.

En 1604, Kepler publie les Paralipomènes à Vitellion (3), première partie d'un traité d'optique Astronomiae Pars Optica (pour une étude de cet ouvrage nous renvoyons à la présentation de Catherine Chevalley).

Pour les besoins de l'optique, Kepler introduit par deux fois, et de deux façons différentes, la notion de point à l'infini, ou plutôt comme je l'ai dit ci-dessus, la notion de point infiniment éloigné.

Au chapitre II, étudiant un problème d'ombre au soleil, Kepler énonce le postulat (que nous citons dans la traduction de Catherine Chevalley)

Deux droites lumineuses issues d'une même source ponctuelle de lumière sont considérées du point de vue de la sensation comme équivalentes à des parallèles si elles sont à une distance immensément grande de la base à laquelle elles sont toutes deux reliées, bien qu'en réalité elles soient concourantes à leur origine.

Ainsi, il s'agit bien plus d'une approximation (justifiée du point de vue de la sensation) permettant de représenter l'ombre lorsque la source est immensément éloignée, que du point de concours de deux droites parallèles.

Par contre, au chapitre IV, Kepler va beaucoup plus loin lorsqu'il considère une parabole comme une section conique dont les foyers sont séparés par une distance infinie. En fait, toujours pour les besoins de l'optique, Kepler veut présenter les propriétés des sections coniques d'une manière mécanique, analogique et populaire.

Considérant cinq espèces de sections coniques: la droite, le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse, Kepler écrit

Entre ces lignes -et pour parler plutôt analytiquement que selon la Géométrie- il y a un ordre,

dépendant de leurs propriétés, qui est le passage de la ligne droite à la parabole par l'intermédiaire d'une infinité d'hyperboles, puis de là au cercle par l'intermédiaire d'une infinité d'ellipses.

La parabole a ainsi une position intermédiaire entre l'hyperbole et l'ellipse, la ligne droite et le cercle étant les courbes extrêmes; Kepler le précise après avoir introduit les foyers.

Les foyers des coniques à centre sont définis au livre III des Coniques d'Apollonius qui les appelait les points issus de l'application (traduction de Ver Eecke (4)), rappelant ainsi leur définition via la méthode d'application des aires. Dans son ouvrage, Apollonius montre que la tangente en un point d'une ellipse ou d'une hyperbole fait des angles égaux avec les droites joignant ce point aux foyers. Apollonius ne parle pas du foyer d'une parabole, la définition par foyer et directrice d'une section conique est énoncée par Pappus au livre VII de sa Collection Mathématique (5), mais cette définition aurait déjà été énoncée par Euclide dans un ouvrage sur les coniques aujourd'hui perdu.

C'est Kepler qui a donné leur nom moderne aux foyers (focus) en référence aux propriétés optiques d'iceux. Ces propriétés optiques étaient connues des Grecs, Apollonius aurait même écrit un ouvrage sur les miroirs ardents, ouvrage perdu qui nous est connu par un texte tardif attribué à Anthemius de Tralles, l'architecte de Sainte-Sophie, qui vivait au VIème siècle (6).

Kepler, comparant la position des foyers dans les cinq espèces de coniques, remarque que le cercle possède un foyer unique situé en son centre, que l'ellipse possède deux foyers situés à l'intérieur d'icelle, également éloignés du centre; la parabole quant à elle, possède un foyer situé à l'intérieur et un autre foyer doit être imaginé sur l'axe, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur, éloigné du premier foyer par une distance infinie, enfin l'hyperbole possède deux foyers, l'un intérieur, l'autre extérieur. Pour être complet, Kepler remarque que, par analogie, pour la ligne droite les deux foyers coïncident avec la droite elle-même et qu'ils sont un seul et même point.

On obtient ainsi les différentes espèces de sections coniques en faisant varier la distance entre les foyers; pour plus de détails, nous renvoyons à l'ouvrage de Kepler.

Ainsi la notion képlérienne de point à l'infini est liée, soit à une approximation (des droites concourant en un point immensément éloigné pouvant être considérées, du point de vue de la sensation, comme parallèles), soit au mouvement (le point à l'infini comme point infiniment éloigné): ce n'est pas encore le point à l'infini de la géométrie projective, point de concours d'une famille de droites parallèles, point inconcevable pour Kepler partisan d'un monde fini et pour lequel la distance infinie dont il parle

dans les Paralipomènes à Vitellion relève de l'infini en puissance et non de l'infini en acte.

Pour une discussion de la position de Kepler et des arguments qu'il développe contre les partisans d'un monde infini, nous renvoyons à l'ouvrage de Koyré Du monde clos à l'univers infini (7).

Nous nous contenterons ici de reprendre un texte de Kepler, cité par Koyré, texte qui montre la difficulté que posait à Kepler la notion d'un point à distance infinie.

A la question

Mais n'est-il pas possible qu'une étoile visible soit à distance infinie de nous?

Kepler répond

Non: car ce qui est vu est vu par ses extrémités. Ainsi une étoile visible a un pourtour qui la limite. Si l'étoile s'éloignait à une distance réellement infinie, ces limites aussi seraient à distance mutuelle infinie, car elles participeraient de l'infinité comme en participe le corps entier de l'étoile; aussi l'angle de vision demeurant ce qu'il est, le diamètre de l'étoile, qui est le segment de droite tiré entre les limites, serait-il agrandi proportionnellement à son éloignement; de sorte que, de même que le diamètre d'une étoile deux fois plus éloigné sera deux fois plus grand que celui de l'étoile plus proche, de même le diamètre d'une étoile située à distance finie, sera lui-même fini, tandis que celui d'un corps dont on rendrait l'éloignement infini grandirait infiniment.

Ceci conduit Kepler, après avoir montré l'impossibilité pour une étoile, corps fini, d'être infiniment éloignée et remarqué que le nombre d'étoiles est fini (conformément aux conceptions aristotéliciennes), à conclure à l'impossibilité d'un espace infini, balayant l'idée d'un monde fini plongé dans un espace infini:

S'il s'agit de l'espace vide, c'est-à-dire de ce qui est néant, n'a pas été créé, n'existe pas, ni ne peut résister à rien qui est supposé s'y trouver, la question change, car ce qui est évidemment un néant n'a pas d'existence en acte. Si au contraire l'espace existe du fait de corps qui y ont leurs lieux, alors il a été précédemment démontré qu'aucun corps susceptible de localisation ne comporte d'infinité en acte; et que des corps de dimension finie ne peuvent exister en nombre infini. Il n'est donc nullement nécessaire que l'espace soit infini du fait des corps qui doivent s'y trouver. Il ne peut non plus y avoir entre deux corps de segment de droite infini en acte. Car il est derechef contradictoire d'être infini en acte et de se terminer en deux corps ou points qui constituent les extrémités du segment

Toute autre est la démarche de Desargues. Celui-ci publie en 1639 le Brouillon Project d'une Atteinte aux

Evénemens des Rencontres du Cône avec un Plan (8), après avoir précisé

Icy toute ligne droite est entendue alongée au besoin à l'infiny d'une part et de l'autre,

Desargues définit ce qu'il appelle une ordonnance de droites,

Pour donner à entendre de plusieurs lignes droictes, qu'elles sont toutes entre elles ou bien parallèles, ou bien inclinées à mesme poinct, il est icy dit, que toutes ces droictes sont d'une mesme ordonnance entre elles, par où l'on concevra de ces plusieurs droictes, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de position, elles tendent comme toutes à un mesme endroict.

L'endroict auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs droictes en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de position, est icy nommé, but de l'ordonnance de ces droictes.

Desargues précise alors que si les droites sont parallèles, le but est dit à distance infinie, si les droites sont concourantes, le but est dit à distance finie.

Ici la définition est en quelque sorte relationnelle, un point est déterminé par les droites qui concourent en ce point, cela est vrai pour une famille de droites parallèles comme pour une famille de droites concourantes. Ainsi, et cela se précise dans le développement de l'ouvrage, points à l'infini et points à distance finie participent des mêmes propriétés et jouent le même rôle; ainsi Desargues réunit cônes et cylindres sous l'appellation commune de rouleaux. Cette analogie explicite renvoie aux constructions perspectivistes, ce que nous allons préciser.

On sait depuis les premiers traités de perspective que les perspectives des perpendiculaires au plan du tableau convergent au point de fuite principal (la projection de l'oeil sur le plan du tableau). D'autre part Piero della Francesca dans son traité de perspective De Prospectiva Pingendi (écrit vraisemblablement entre 1472 et 1475 mais imprimé pour la première fois en 1899) a remarqué que les droites inclinées à 45° sur la direction perpendiculaire au plan du tableau (les diagonales d'un dallage) convergent vers ce qu'on appelle les points de distance, points de la ligne d'horizon (la ligne horizontale du tableau passant par le point de fuite principal) situés de part et d'autre du point de fuite principal à une distance égale à la distance de l'oeil au tableau (9). La convergence des diagonales étaient connue empiriquement des peintres de l'Europe du Nord et elle sera systématisée par Jean Pèlerin dit Viator dans son De Artificiali Perspectiva (10) publié en 1505, mais le texte peu explicite qui accompagne les dessins de Viator ne donne aucune indication sur le statut des points de convergence que l'auteur appelle les tiers-points.

Cependant la notion générale de point de fuite d'une famille de droites parallèles sera définie et légitimée seulement au début du XVII<sup>ème</sup> siècle, d'abord par Guido Ubaldo del Monte qui publie en 1600 les Perspectivae Libri Sex (les six livres de perspective) (11), puis par Simon Stevin qui publie en 1605 De sciagraphia (littéralement: du dessin des ombres), ouvrage qui sera publié en français par Girard en 1634 sous le titre De la Scénographie, dite vulgairement Perspective (12).

Ainsi on sait au début du XVII<sup>ème</sup> siècle qu'une famille de droites parallèles est représentée en perspective par une famille de droites concourantes si les droites de la famille ne sont pas parallèles au plan du tableau, par une famille de droites parallèles si les droites de la famille sont parallèles au plan du tableau.

Mais ce qui nous importe ici, c'est la façon dont on utilise ces droites parallèles devenues concourantes pour construire l'espace dans le tableau, c'est-à-dire mettre en place sur le tableau la représentation des différents points de l'objet que l'on dessine.

Ainsi Vignola dans son ouvrage Le due regole della prospettiva pratica (les deux règles de la perspective pratique) (13) publié après sa mort par Danti en 1582, montre comment la représentation perspective de deux familles de droites parallèles permet de construire la perspective de l'objet; il suffit de dessiner les perspectives des droites de chacune des familles, lesquelles passent par les points de fuite (ici le point de fuite principal et un point de distance), la correspondance étant assurée par les points des droites situées sur la ligne de terre (la ligne d'intersection du tableau avec le plan horizontal de référence), lesquels points coïncident avec leur représentation perspective.

Nous reproduisons ici deux figures du traité de Vignola- Danti, la première indique la construction de la perspective d'un polygone situé dans le plan horizontal, la seconde indique la construction de la perspective d'un cercle; dans chacune des figures on représente l'objet donné dans son plan horizontal quadrillé par les deux familles de droites parallèles, la représentation perspective est alors obtenue en représentant le quadrillage en perspective à partir des points de fuite et des points de la ligne de terre qu'on a reportés à partir du dessin dans le plan horizontal.

fig 1

fig 2

Notons que Vignola utilise aussi les points de distance situés sur la verticale du point de fuite principal ce qui lui permet de construire la perspective d'un cube:

fig 3

On a ainsi la mise en place de ce qu'on appelle aujourd'hui un système de lignes coordonnées, permettant à la fois de structurer l'espace et de le représenter sur le plan du tableau; nous verrons ci-dessous le rôle qu'a joué cette réticulation dans l'élaboration de la notion d'espace.

C'est une telle réticulation du plan horizontal qu'utilise Desargues en 1636 dans un opuscule de douze pages Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective... (14) pour construire la représentation d'un objet.

fig 4

Pour construire la représentation perspective, Desargues utilise un plan de l'objet (en haut et à droite de la figure) dont il va reporter les points remarquables sur le plan du tableau en utilisant un système de lignes coordonnées déterminé par la direction perpendiculaire au plan du tableau et la direction parallèle à la ligne de terre. Pour construire les échelles correspondantes sur chacune des lignes coordonnées, Desargues utilise l'une des directions diagonales, la difficulté vient de ce que les points de distance sortent des limites du tableau et Desargues va effectuer une réduction d'échelle. Il peut alors construire l'échelle des éloignements qui représente sur le tableau les distances en profondeur à partir de la ligne de terre et l'échelle des mesures qui représente les distances sur chacune des parallèles à la ligne de terre.

Nous indiquons sur la figure ci-dessous (fig 5) le principe de la construction

fig 5

On peut remarquer que,  $G$  étant le point de fuite principal et  $F$  le point de distance, le quadrilatère  $ACTI$  représente un carré (de coté égal à la distance de l'oeil au tableau) ce qui montre que la distance  $CT$  est égale à la distance  $AC$ , de même la distance  $OT$  est égale à la distance  $IT$  donc à la distance  $AC$  et ainsi de suite, on construit ainsi l'échelle des éloignements. Il est aisé de voir que si l'on prend au lieu de  $F$  un point quelconque de la ligne d'horizon, l'échelle des profondeurs ne change pas. D'autre part, l'échelle des mesures étant donnée sur la ligne de terre, on construit aisément l'échelle des mesures sur une parallèle à la ligne de terre, nous laissons au lecteur le plaisir d'effectuer cette construction. Enfin Desargues, pour terminer son dessin, explique comment, un point du plan horizontal étant donné, on peut élever en ce point une verticale de hauteur donnée.

Desargues termine en énonçant, pour les contemplatifs, les principes généraux de la représentation perspectiviste; il remarque alors que des droites parallèles deviendront, en perspective, des droites concourantes ou parallèles suivant qu'elles ne sont pas ou sont parallèles au plan du tableau, et de même que des droites concourantes

deviendront, en perspective, concourantes ou parallèles selon que la droite joignant l'oeil au point de concours de ces droites rencontre ou ne rencontre pas le plan du tableau.

Ainsi, sans que cela soit dit explicitement, familles de droites parallèles et familles de droites concourantes sont analogues du point de vue de la perspective. Cette analogie sera explicitée et exploitée dans le Brouillon Project de 1639.

La démarche de Desargues s'appuie sur la mise en évidence d'une relation point-droite invariante par perspective (pour employer un langage d'aujourd'hui). C'est cette invariance qui permet de considérer points à l'infini et points à distance finie comme analogues, de désinfinetiser l'infini en quelque sorte. C'est la différence essentielle entre la démarche de Desargues et celle de Kepler; celui-ci en considérant, par analogie avec l'ellipse, que la parabole a un second foyer à distance infinie, définit un premier mode d'unification des coniques via une famille de courbes qui se déduisent les unes des autres par déformation, mais les difficultés à appréhender l'infini ne lui permettent pas de penser un point à distance infinie comme un point ordinaire et par conséquent de penser les coniques comme une seule et même courbe. Desargues par contre, en éliminant l'infini en quelque sorte, remarque que les sections coniques (les coupes de rouleau comme il les appelle dans le Brouillon Project) définies comme perspectives de cercles participent des mêmes propriétés, qui ne sont que les propriétés du cercle transformées par perspective (c'est la mise en place de la méthode des transformations sur laquelle nous reviendrons); ceci lui permet de considérer les sections coniques comme une seule et même courbe que l'on peut étudier par une seule et même énonciation, construction et préparation ou pour dire mieux par un seul et même discours et sous de mêmes paroles.

Cette unification du fini et de l'infini géométrique posera problème, ainsi Descartes qui a senti l'importance de l'oeuvre de Desargues même s'il n'en a pas compris toute la signification, écrit à Desargues (lettre du 19 juin 1639, citée par Taton (15))

Pour votre façon de considérer les lignes parallèles, comme si elles s'assemblaient à un but à distance infinie, afin de les comprendre sous le même genre que celles qui tendent à un point, elle est fort bonne, pourvu que vous vous en serviez, comme je m'assure que vous le faites, pour donner à entendre ce qui est obscur en l'une de ces espèces, par le moyen de l'autre où il est plus clair, et non au contraire.

autrement dit cette analogie acceptable sur le plan de la métaphore, si elle peut en un certain sens éclairer la recherche, ne saurait intervenir dans le raisonnement mathématique.

Ici apparaît un obstacle à la compréhension de la pensée de Desargues, bien plus profond que le caractère

botanique de son vocabulaire. Issue d'une certaine lecture des constructions perspectives (sur laquelle nous reviendrons, car c'est cette lecture qui fait le passage de la pratique perspectiviste à la géométrie projective), la notion arguésienne qui contient à la fois la définition des points à l'infini et l'élimination de leur spécificité pour en faire des points ordinaires, posait un problème d'ordre épistémologique (quel est leur statut mathématique?), problème qui ne sera résolu que par les mathématiciens du XIXème siècle avec le développement de la géométrie projective moderne.

Notons que d'autres objets mathématiques au statut incertain, les infiniment petits, seront utilisés par les mathématiciens du XVIIIème siècle, mais dans ce cas on peut travailler formellement sur ces objets, c'est-à-dire effectuer des calculs sur les symboles qui les représentent sans se préoccuper, au cours du calcul, de la signification de ces symboles. Ce n'est pas le cas pour les points à l'infini, objets géométriques dont la nature (c'est-à-dire la signification) intervient en tant que telle dans le raisonnement (lequel ne se réduit pas dans le contexte arguésien à un calcul analytique).

Cependant, tout au long des XVIIème et XVIIIème siècles, des géomètres continueront la tradition arguésienne (et nous renvoyons à l'article cité de Denis Lanier et Jean-Pierre Legoff).

Ainsi, après Desargues qui dans le Brouillon project décrivait les asymptotes de l'hyperbole comme les touchantes de ses bords à distance infinie, Pascal, dans le premier livre de son Traité des Coniques (ouvrage perdu dont on a retrouvé un manuscrit de la première partie, Generatio conisectionum, dans les papiers de Leibniz) (16), définissant les propriétés élémentaires des coniques à partir du cercle par perspective et remarquant que la tangente en un point d'une conique est la perspective de la tangente au point correspondant du cercle, remarque que, dans le cas de la parabole et de l'hyperbole, il y a des points du cercle qui n'ont pas d'images perspectives, et considérant ce que deviennent les tangentes à ces points sans images, écrit, en ce qui concerne la parabole

Il y a donc sur la parabole une droite manquante qui joue vraiment le rôle d'une tangente, puisqu'elle est l'image d'une tangente

et en ce qui concerne l'hyperbole

... les asymptotes jouent le rôle de tangentes à distance infinie et doivent compter comme telles.

Quant à Newton dans son Enumeratio linearum tertii ordinis (Enumération des lignes du troisième ordre) (17) publié en 1704 mais vraisemblablement écrit beaucoup plus tôt, dans lequel il se propose de déterminer toutes les

courbes du troisième degré, il écrit à propos des branches infinies d'une courbe

The asymptote to any branch is, therefore, found by seeking for the tangent to a point in that branch at an infinite distance.

Il faut remarquer que les méthodes perspectivistes ne sont pas étrangères à Newton; c'est ainsi qu'il explique dans l'article cité que toutes les cubiques planes s'obtiennent à partir de cinq d'entre elles par perspective comme les lignes du second ordre (les sections coniques) s'obtiennent à partir du cercle.

En fait c'est au moment où le projectif (au sens littéral: ce qui a rapport avec les projections) acquiert un statut reconnu par les mathématiciens, c'est-à-dire dans la première moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle, que le concept arguésien de point à l'infini est enfin accepté.

C'est par des considérations d'invariance que Poncelet justifie, dans son Traité des Propriétés Projectives des Figures (18) publié en 1822, la notion de point à l'infini, c'est ainsi qu'il écrit,

Les lignes parallèles concourent en un point unique à l'infini

précisant pour justifier cette assertion

On voit, en effet, que les points de concours à distance infinie et à distance donnée s'échangent réciproquement par l'effet de la projection.

et à cette notion, dont il rappelle qu'elle est généralement admise, il ajoute la notion de droite à l'infini, écrivant

Tous les points situés à l'infini sur un plan peuvent être considérés idéalement distribués sur une ligne unique, située elle-même à l'infini sur ce plan.

notion métaphysique (c'est le terme utilisé par Poncelet) qu'il justifie en remarquant que

tous ces points sont représentés, en projection, par ceux d'une ligne droite unique située, en général, à distance donnée et finie.

Ainsi Poncelet se place dans la même problématique que Desargues, savoir, l'invariance par projection. Si Poncelet, à l'époque où il rédigeait son ouvrage, n'a pu lire le Brouillon Project (texte alors perdu dont une copie écrite par Philippe de La Hire sera retrouvée ultérieurement par Chasles; quant au manuscrit original, il sera retrouvé en 1959, ainsi que le raconte René Taton qui le publiera en 1961 (19)), il connaissait ce texte à travers les commentaires contemporains; c'est ainsi qu'il savait par la lettre de Descartes citée plus haut que Desargues considérait un

système de droites parallèles comme concourant à l'infini (ainsi qu'il l'a écrit dans la préface du traité de 1822) et qu'il connaissait l'interprétation des asymptotes à une courbe comme tangentes en ses points à l'infini, interprétation qu'il justifiait par l'invariance projective.

## **2. De la démonstration euclidienne à la démonstration projective.**

Dès la naissance de la perspective et les premiers traités énonçant des règles de construction, le problème se posait de justifier ces règles et pour cela d'énoncer des principes généraux permettant de les démontrer; la recherche de ces principes généraux jouera un rôle à la fois pratique et théorique, pratique dans la mesure où l'énoncé de tels principes simplifie la compréhension et l'utilisation des règles, théorique dans la mesure où cette recherche conduira à la géométrisation de la perspective avec les développements que l'on sait.

Ce n'est pas ici le lieu d'étudier l'impact de cette géométrisation sur la pratique perspectiviste; certains travaux ont effectivement eu un impact, d'autres, par leur sécheresse théorique ou par des objectifs trop éloignés de cette pratique ont eu peu ou pas d'impact chez les praticiens. Le problème qui nous intéresse ici est moins celui des retombées de la théorisation d'une pratique sur icelle que les voies ouvertes par cette théorisation dans le développement de la géométrie. Et c'est par rapport à celui-ci que nous situons notre exposé.

Justifications des règles de la perspective et principes généraux allaient d'abord s'élaborer conformément au canon géométrique de l'époque, celui de la géométrie grecque redécouverte en Europe depuis les premières traductions latines des Eléments d'Euclide (XII<sup>ème</sup> siècle).

La géométrie grecque, comme nous l'avons rappelé au début de cet article, est d'abord une géométrie de la mesure des grandeurs et c'est en rapport avec des problèmes de mesure que les premières théorisations des constructions perspectivistes vont se mettre en place; le problème est alors de déterminer les grandeurs représentées sur les tableaux, d'où les constructions d'échelles que l'on retrouve dans les premiers travaux théoriques (20). Il s'agit alors de justifier les constructions d'échelles et les tracés géométriques qui les accompagnent, et les critères de justification vont se traduire dans le mode de démonstration de la géométrie grecque, savoir, la théorie des proportions. Cependant la recherche de principes généraux de construction amènera la mise en place d'un nouveau mode de raisonnement qui deviendra au XIX<sup>ème</sup> siècle ce que l'on peut appeler la démonstration projective (par opposition à la démonstration à la grecque liée à la mesure des grandeurs).

Ainsi le paysage géométrique sera remodelé non seulement par les nouveaux objets (tel le point à l'infini

arguésien), mais aussi par de nouveaux modes de raisonnement, nouveaux objets et nouveaux modes de raisonnement s'accompagnant les uns les autres; ce qui obligera les mathématiciens à préciser les conditions de légitimation du raisonnement géométrique; on peut renvoyer ici au texte de Pascal De l'esprit géométrique et de l'art de persuader (21).

C'est ainsi qu'on pourrait comprendre la double démonstration de l'existence du point de fuite dans les Perspectivae Libri Sex déjà cités. Pour montrer que les perspectives de droites parallèles convergent sur le tableau, Guido Ubaldo commence par démontrer quatre propositions (propositions 28 à 31 du premier livre), distinguant le cas où le tableau (la section, terme par lequel Guido Ubaldo rappelle que la représentation perspective est une section de la pyramide visuelle) est perpendiculaire au plan support et le cas où il ne l'est pas, et dans chacun de ces cas, distinguant le cas où les droites parallèles sont toutes dans le plan support et le cas où elles sont dans des plans différents. La démonstration repose dans chacun des cas sur des arguments de proportion pour montrer que les perspectives convergent en un point situé sur le tableau à la même hauteur que l'oeil par rapport au plan support. Ceci fait Guido Ubaldo écrit (nous utilisons la traduction de Christian Guipaud (22)),

Du reste, tout ce qui a été démontré dans ces quatre derniers théorèmes, nous le réduisons, grâce à un procédé différent, à une seule démonstration dans le théorème qui suit

et il énonce le théorème (proposition 32)

Si l'oeil voit des lignes parallèles, qui, prolongées, rencontrent la section, les lignes apparentes dans la section se rencontrent en un point unique, aussi haut que l'oeil au dessus d'un plan parallèle aux lignes parallèles.

qu'il démontre en remarquant que si l'on mène par l'oeil la parallèle aux lignes données, celle-ci définit avec une des lignes données un plan dont l'intersection avec le tableau est la perspective de la ligne considérée, cette perspective passe donc par le point d'intersection du tableau et de la parallèle menée par l'oeil aux lignes données. Ainsi les perspectives des lignes parallèles convergent en un point, le point de concours (punctum concursus) dans la terminologie de Guido Ubaldo.

On peut se demander pourquoi Guido Ubaldo ne se contente pas de la seconde démonstration, à la fois courte et efficace; une réponse possible est que cette démonstration n'entre pas dans le canon de la géométrie grecque rappelé ci-dessus (même si elle s'appuie sur les résultats du livre XI des Eléments d'Euclide sur lequel nous reviendrons) et il est nécessaire de l'accompagner d'une démonstration certes lourde et compliquée mais seule capable de légitimer la propriété cherchée, savoir, l'existence du point de concours. Notons

que Guido Ubaldo ne mentionne pas la ligne d'horizon pourtant connue depuis le Quattrocento, insistant à chaque fois sur le fait que le point de concours (pour les lignes horizontales, les seules qu'il considère) est à la même hauteur que l'oeil par rapport au plan support, ce qui pourrait dénoter la prégnance de la notion de distance dans la détermination des éléments géométriques.

Une autre démonstration de l'existence du point de fuite sera donnée quelques années plus tard par Simon Stevin dans le De Sciagraphia déjà cité. L'objet à représenter étant appelé ombrageable et sa représentation l'ombre de l'objet (nous citons Stevin dans la traduction de Girard (23)), nous rappelons que la vitre est le plan du tableau, le pavé est le plan de l'objet qu'on représente et le rayon est une droite passant par l'oeil; Stevin énonce alors le théorème (proposition 3)

Les lignes ombrageables étant veuës par le vitre qui n'est parallèle avec les parallèles, et leurs ombres étant prolongées en iceluy, elles conjoignent en un mesme point du rayon qui est parallèle avec l'ombrageable parallèle, et icelles ombrageables étant pareillement parallèles avec le pavé, leur point de conjonction vient aussi haut dessus le pavé comme l'oeil.

Pour la démonstration, Stevin, ayant mené par l'oeil la parallèle aux lignes ombrageables qui coupe le plan du tableau en un point (le point de conjonction), montre que l'ombre d'une ligne ombrageable passe par ce point, mais la lourdeur de l'exposé laisse entendre que Stevin, soucieux de convaincre ses lecteurs, voire peut-être de se convaincre, de la légitimité de sa démonstration, ne pouvait ou ne savait utiliser un raisonnement direct analogue à celui de la deuxième démonstration de Guido Ubaldo. Notons aussi que Stevin, comme Guido Ubaldo, ne mentionne pas la ligne d'horizon, insistant sur la hauteur du point de concours au dessus du pavé qui est égale à celle de l'oeil.

Ainsi la question se pose de la légitimité d'un raisonnement qui repose essentiellement sur les propriétés d'incidence; pourtant ces propriétés d'incidence sont énoncées et démontrées au livre XI des Eléments d'Euclide, propositions 2, 3, et 7 que nous rappelons ci-dessous (dans la traduction de Peyrard (24)),

Si deux droites se coupent, elles sont dans un seul plan; tout triangle est aussi placé dans un seul plan.

Si deux plans se coupent mutuellement, leur commune section est une ligne droite.

Si deux droites sont parallèles, et si l'on prend dans chacune de ces droites des points quelconques, la droite joignant ces points sera dans le même plan que les parallèles.

Mais les démonstrations sont lourdes et parfois peu convaincantes, ce qui est peut-être lié au flou de la définition du plan chez Euclide (cf les commentaires de Heath (25)); on peut admettre que des mathématiciens, soucieux de légitimer leur raisonnement selon les canons de la géométrie grecque, et peut-être plus grecs que les Grecs, aient évité l'utilisation directe des propriétés d'incidence; ceci expliquerait la première démonstration de Guido Ubaldo et le discours embarrassé de Stevin. Il faudra attendre Brook Taylor qui, au début du XVIII<sup>ème</sup> siècle, légitimera les propriétés d'incidence en les énonçant comme axiomes.

Cependant, hors ce besoin de légitimation géométrique, les propriétés d'incidence seront utilisées librement, empiriquement si l'on préfère; elles se relient à la problématique de la fenêtre ouverte d'Alberti ou de la vitre de Leonardo da Vinci, et ce sont finalement les problèmes liés à la perspective qui conduiront les géomètres à préciser leur statut (et je renvoie encore une fois à Taylor).

Notons aussi que les propriétés d'incidence interviennent d'une façon expérimentale comme le montrent par exemple deux des gravures sur les portillons de Dürer dans lesquelles il représente un rayon lumineux par un fil tendu matérialisant ainsi l'intersection de la pyramide visuelle avec le plan du tableau (26).

Aussi, si Guido Ubaldo et Stevin sont embarrassés pour démontrer ce qui est l'un des points essentiels de la théorie de la perspective, ils ont moins de scrupules dans leurs constructions, utilisant librement ce que Kirsti Andersen a appelé le théorème principal de la perspective, savoir, la perspective d'une droite est la droite joignant le point de fuite et le point d'intersection de la droite donnée avec le plan du tableau (27).

A titre d'illustration nous donnons la construction de l'image d'un point chez Guido Ubaldo et chez Simon Stevin.

Guido Ubaldo commence par construire le point de fuite d'une direction de droite (problème 1 du deuxième livre), pour cela il remarque que des lignes parallèles étant données dans le plan support qui coupent respectivement la ligne de terre en E, B, K (fig 6), si l'on mène par le point S, projection de l'oeil sur le plan support, la parallèle aux lignes données qui coupe en F la ligne de terre, alors sous l'hypothèse que le plan du tableau est perpendiculaire au plan support, le point de fuite X des lignes données sera sur la perpendiculaire en F à la ligne de terre à une hauteur égale à la hauteur de l'oeil. Ceci nous donne la construction suivante, le plan du tableau ayant été rabattu sur le plan support par rotation autour de la ligne de terre, SA représentant la hauteur de l'oeil reportée sur le plan support (auquel cas  $SA = FX$  )

fig 6

On en déduit aisément la perspective d'un point (problème 3)

fig 7

ici le segment de droite **DE** du plan support est représenté par le segment de droite **LK**.

Stevin quant à lui procède d'une façon quelque peu différente. Il suppose aussi le plan du tableau perpendiculaire au pavé, et pour construire la représentation perspective il rabat le plan du tableau sur le plan du pavé. La construction du point de fuite d'une droite est alors identique à celle donnée par Guido Ubaldo, la justification étant la même; par contre pour déterminer la perspective d'un point, Stevin remarque qu'elle est sur la droite d'intersection du tableau et du plan perpendiculaire au pavé contenant le rayon joignant le point donné à l'oeil, ce qui l'amène à tracer la droite joignant le point à la projection de l'oeil sur le pavé, puis mener de l'intersection de cette dernière droite avec la ligne de terre, la perpendiculaire à la ligne de terre

fig 8

**A** est le point ombrageable (pour reprendre le langage de Stevin), **D** la projection de l'oeil sur le pavé, on considère une droite passant par **A** qui coupe la ligne de terre en **H**, et on construit le point de fuite **G** de la droite **AH**, l'ombre de la droite **AH** est donc **GH**, d'autre part traçant **AD** qui coupe la ligne de terre en **I**, on élève de **I** la perpendiculaire à la ligne de terre qui coupe **GH** en **K**, lequel point est l'ombre de **A**.

Ces premières constructions étant faites, chacun des auteurs donne un certain nombre de constructions perspectivistes que nous ne pouvons citer ici. Disons cependant que les démonstrations accompagnant ces constructions font appel de façon plus ou moins explicite aux propriétés d'incidence et que c'est à travers des constructions de ce type que les géomètres prendront conscience de l'importance de ces propriétés et de la nécessité de préciser leur statut.

Nous ne parlerons pas ici des principes qui guident la construction proposée par Desargues dans son opuscule de 1636 cité ci-dessus, car Desargues ne les énonce pas et se contente de décrire la construction; l'utilisation d'une réticulation du plan via les lignes coordonnées était déjà connue depuis longtemps et l'un des points essentiels de la construction est le changement d'échelle qui permet de ramener le point de distance dans les limites du tableau. Mais ce qui importe dans le texte de Desargues c'est l'ensemble de la construction (même non justifiée) et la vision spatiale qui se dégage de l'exposé; autrement dit ce qui importe c'est moins l'originalité de la construction que le regard qu'y apporte Desargues et qui le conduira au point de vue projectif du Brouillon Project de 1639. Quant à la

conclusion réservée aux contemplatifs (c'est-à-dire aux théoriciens) dans laquelle il énonce, d'une façon qui paraît indépendante de la construction qu'il vient d'exposer, quelques propositions, lesquelles peuvent être énoncées autrement pour diverses matières, mais (...) accomodées ici pour la perspective... dont il précise que la démonstration est assez intelligible sans figure, on peut considérer qu'y apparaît dans un cadre plus général que la perspective, sinon un point de vue projectif, du moins le rôle que jouent les propriétés d'incidence (cf ci-dessous).

Si le Brouillon Project de 1639 est le premier texte de géométrie projective de l'histoire de la géométrie par les éléments qu'il met en place (points à l'infini, invariance par projection, théorie unifiée des coniques comme perspectives de cercle), il faut remarquer que les démonstrations respectent la tradition grecque, elles sont fondées sur la théorie des proportions, en particulier les lourdes comparaisons de raisons dans le style des Coniques d'Apollonius, ce qui en rend aujourd'hui la lecture malaisée; ainsi l'invariance de la relation d'involution est démontrée à partir du théorème de Menelaüs (attribué par Desargues à Ptolémée), théorème lui-même redémontré via le théorème aujourd'hui appelé théorème de Thalès. Notons cependant que la vision projective de Desargues le conduit à quelques transgressions significatives; c'est ainsi qu'il considère que les distances du point à l'infini d'une droite à deux points de cette droite sont égales, ce qui lui permet de définir la relation d'involution même si l'un des points est à l'infini et d'énoncer le théorème d'invariance dans toute sa généralité, sans toujours en donner une justification canonique. Ceci lui permet aussi, dans la théorie des coniques, de considérer les diamètres comme polaires de points à l'infini et de remarquer, en l'absence d'une définition précise de la droite à l'infini d'un plan, que les conjugués du centre d'une conique sont des points à l'infini, ce qui le conduit à écrire

Quand en un plan, aucun des poincts d'une droite n'y est à distance finie, cette droite y est à distance infinie.

et par conséquent, il n'est plus besoin de considérer le centre comme point particulier.

Nous n'en dirons pas plus sur le Brouillon Project renvoyant à l'ouvrage déjà cité de René Taton et à celui de J.V. Field et J.J.Gray (28).

De Desargues, nous citerons encore le classique théorème des triangles homologues (le terme homologue n'est évidemment pas de Desargues); ce théorème a été publié en 1648 dans un ouvrage d'Abraham Bosse: Manière universelle de Monsieur Desargues de pratiquer la perspective (29) dans lequel l'auteur, ami et fervent partisan de Desargues, développe les idées de ce dernier. L'ouvrage se termine par trois propositions de géométrie écrites vraisemblablement par

Desargues, la première étant, formulée d'une façon bien compliquée, le théorème des triangles homologues.

Considérant trois droites  $HDA$ ,  $HEB$ ,  $HKI$  (non nécessairement dans un même plan), les cotés des triangles  $DEK$  et  $abl$  se coupent deux à deux aux points  $c$ ,  $f$ ,  $g$  (fig 9), alors les points  $c$ ,  $f$ ,  $g$  sont alignés. Desargues le démontre d'abord lorsque les trois droites données ne sont pas dans un même plan, les points  $c$ ,  $f$ ,  $g$  étant alors sur la droite d'intersection des plans  $DEK$  et  $abl$ , puis dans le cas où les droites sont dans un même plan en utilisant le théorème de Menelaüs

fig 9

Desargues montre alors une réciproque (qui n'est en fait qu'une autre façon de lire la figure). Puis, utilisant une projection parallèle, Desargues compare les deux configurations (la plane et la non-plane), la propriété de la configuration plane étant alors une conséquence de la configuration non-plane; remarquant l'analogie des deux configurations, Desargues termine l'exposé de la démonstration en écrivant

Et l'on peut discourir de leurs propriétés sur l'une comme sur l'autre, et par ce moyen se passer de celle du relief en luy substituant celle d'un seul plan.

Notons que Desargues ne démontre pas que toute configuration plane de ce type est projection d'une configuration non-plane. Cependant la remarque finale montre qu'il a vu comment la propriété plane n'était qu'une forme particulière de la propriété générale (sa perspective comme il le dit, même s'il ne le justifie pas complètement); la démonstration via le théorème de Menelaüs n'en est alors que la justification canonique.

Si Desargues a conscience d'une nouvelle approche de la géométrie qui consiste, à partir des propriétés de l'espace (que ses petits-neveux appelleront descriptives), à découvrir et démontrer des propriétés du plan, il reste encore dans une tradition fondée sur la mesure et la théorie des proportions et, contrainte plus forte, sur la nécessité, elle aussi héritée des Grecs, et d'ordre plus esthétique que logique, que la démonstration d'une propriété de géométrie plane ne demande que des arguments de géométrie plane. La lourdeur du Brouillon Project est alors le tribut payé à l'héritage grec.

Pascal, disciple de Desargues, ira plus loin dans la mise en place de ce que nous appelons la démonstration projective.

L'oeuvre géométrique de Pascal est mal connue; il ne nous reste, en ce qui concerne la géométrie, que deux textes: le premier, l'Essay pour les Coniques de 1640, le second Generatio Conisectium (Génération des sections coniques), première partie d'un Traité des Coniques

aujourd'hui perdu dont nous ne connaissons le contenu que par une lettre de Leibniz à l'un des neveux de Pascal, lettre de 1676 dans laquelle Leibniz insiste pour une publication rapide de l'ouvrage, malheureusement il n'en fut rien.

Dans l'Essay pour les Coniques (30) Pascal énonce sans démonstration le lemme suivant:

...si par les points K, V passe une quelconque section de cône qui coupe les droites MK, MV, SK, SV en points P, O, N, Q, les droites MS, NO, PQ seront de même ordre (c'est-à-dire, suivant la terminologie de Desargues, seront parallèles ou concourantes)

fig 10

Pascal relie son travail à celui de Desargues dont il reprend les méthodes. Ainsi il considère comme analogues familles de droites parallèles et familles de droites concourantes. Le lemme est énoncé d'abord pour le cercle, le lemme général pour les coniques s'en déduisant par projection. D'autre part, Pascal, qui ne donne aucune démonstration, relie son lemme au théorème de Desargues sur l'involution définie sur une droite par les cotés d'un quadrilatère et une conique passant par les sommets du quadrilatère, théorème qu'il affirme savoir démontrer à partir de son lemme.

L'importance du lemme de Pascal vient de ce que la condition qu'il énonce pour que six points soient sur une même conique est purement graphique (pour employer le langage des géomètres du XIX<sup>ème</sup> siècle) en ce sens qu'elle ne fait appel qu'à des droites et des intersections de droites. On a ainsi le moyen d'une étude projective des coniques indépendamment de toutes notions métriques (la définition d'une conique comme section plane d'un cône à base circulaire renvoie à des notions métriques via le cercle de base). Il semble d'après la lettre citée de Leibniz que Pascal ait développé ce point de vue dans son Traité des Coniques (31) en introduisant la configuration qu'il appelle l'hexagramme mystique qui serait la donnée de trois couples de droites tels que les points d'intersection définis par chacun des couples soient alignés (nous renvoyons aux notes manuscrites de Leibniz, ces notes sont publiées et commentées par Pierre Costabel dans un article publié dans un ouvrage intitulé L'oeuvre scientifique de Pascal (32)); six points d'une conique définissent un tel hexagramme, hexagramme conique d'après Leibniz.

Le point de vue projectif apparaît clairement dans Generatio Conisectium, le premier livre du traité, retrouvé dans les papiers de Leibniz en 1891. Pascal y définit les coniques comme sections d'un cône à base circulaire, il distingue le cas où le plan de section passe par le sommet du cône, auquel cas on obtient soit un point, soit une droite, soit deux droites, et le cas où le plan de section ne passe pas par le sommet du cône, auquel cas on obtient une ellipse (antobole), une parabole ou une hyperbole. Il peut alors

étudier l'intersection avec une droite (en projetant l'intersection du cercle de base avec une droite de son plan) puis les tangentes aux points de la conique (en projetant les tangentes aux points du cercle). Ceci l'amène à étudier les points sans images (les points du cercle qui définissent les points à l'infini de la conique) et les tangentes en ces points (cf ci-dessus p 9).

Signalons que Pascal avait annoncé la rédaction de son traité en 1654 dans une Adresse à l'Académie Parisienne (33), traité qu'il présente ainsi,

L'oeuvre complète des coniques, comprenant et les coniques d'Apollonius et d'innombrables autres résultats, par une seule proposition ou presque, invention que j'ai faite quand je n'avais pas encore l'âge de seize ans et que plus tard j'ai mise en ordre. (il s'agit du lemme de 1640).

Le développement du point de vue projectif par Pascal n'est pas sans lien avec les méthodes perspectives que Pascal connaissait; dans l'Adresse citée ci-dessus, Pascal annonçait une méthode de perspective dont il affirmait

aucune de celles déjà inventées, ou qu'on puisse inventer, ne peut être considérée comme plus brève et plus avantageuse que celle-là, puisqu'elle fournit les points du dessin par l'intersection de deux droites seulement; il est absolument impossible d'être plus rapide.

Nous ne savons rien de ce texte de Pascal en dehors de cette courte présentation, pas même s'il a été achevé, et nous n'en pouvons rien dire si ce n'est qu'il conforte l'idée de ce lien que l'on retrouve constamment entre l'élaboration du point de vue projectif et le développement des méthodes perspectivistes.

Pour une analyse plus complète de l'oeuvre géométrique de Pascal, nous renvoyons au texte de René Taton dans l'ouvrage déjà cité L'Oeuvre scientifique de Pascal (34).

Si Pascal a mis en avant les propriétés descriptives et graphiques, la systématisation viendra de Brook Taylor qui explicitera une axiomatique des propriétés d'incidence à partir de laquelle il développera les propriétés générales de la représentation perspectiviste et les méthodes de construction.

L'oeuvre de Taylor n'apporte peut-être rien de nouveau quant aux méthodes perspectivistes, peut-être même rien d'utile tant la concision du langage peut présenter des difficultés pour qui n'a pas étudié la géométrie. Elle représente ce nouveau regard, dont nous avons déjà parlé à propos de Desargues, qui conduit Taylor d'une part à mettre en valeur la place des propriétés d'incidence, et d'autre part, nous en parlerons plus loin, à mettre en place une méthode d'étude directe de la géométrie du tableau, méthode que Lambert développera plus tard sous le nom de géométrie

perspective et qui, en langage d'aujourd'hui, n'est autre que la transformée de la géométrie usuelle par la perspective.

Taylor a publié en 1715 un ouvrage intitulé Linear perspective or a new Method of Representing justly all manner of Objects as they appear to the Eye in all Situations (35), ouvrage qu'il présente ainsi,

In this Treatise I have endeavour'd to render the art of Perspective more general, and more easy, than has yet been done.

leit-motiv de tous les traités, surtout ceux des théoriciens (rappelons la présentation par Pascal de sa méthode de perspective dans son Adresse de 1654).

Mais au-delà de cette déclaration liminaire, qu'apporte l'ouvrage? essentiellement un point de vue de géomètre. Taylor, pour montrer la généralité de son exposé, ne suppose rien de particulier quant à situation du plan du tableau (the picture) et du plan de l'objet (the original plane), ce qui lui permet d'énoncer des définitions générales. Ainsi le point de fuite (the vanishing point) d'une ligne droite est l'intersection de la parallèle à cette droite menée par l'oeil avec le plan du tableau, la ligne de fuite (the vanishing line) d'un plan est l'intersection du plan parallèle à ce plan mené par l'oeil avec le plan du tableau. Taylor définit d'autre part le plan de direction (the directing plane), plan parallèle au plan du tableau passant par l'oeil, le point de direction (the directing point) d'une ligne droite est alors le point d'intersection d'icelle avec le plan de direction.

Taylor peut alors énoncer et démontrer, via les propriétés d'incidence, le théorème principal de la perspective, savoir, la perspective d'une droite est la droite joignant le point de fuite d'icelle à l'intersection de la droite donnée avec le plan du tableau, il montre de même que la perspective d'une droite est parallèle à la droite joignant le point de direction d'icelle à l'oeil (seconde propriété fondamentale de la perspective, la première étant le théorème principal)

Ces propositions étant démontrées, Taylor va, à travers quelques problèmes, expliciter les règles de construction. Pour cela, puisqu'il n'y a pas de plan particulier, au lieu de rabattre, comme on le fait habituellement, le plan du tableau sur le plan de l'objet qu'il veut représenter, il rabat le plan de l'objet sur le plan du tableau en le faisant tourner autour de la ligne de terre; en même temps il rabat l'oeil sur le plan du tableau en le faisant tourner autour de la ligne de fuite (un tel rabattement avait déjà été utilisé par Philippe de La Hire dans un traité sur les coniques publié en 1673, cf ci-dessous). La construction de l'image d'une droite, puis de l'image d'un point, est alors évidente.

fig 12

S est la projection orthogonale de l'oeil O sur le plan du tableau, C le point d'intersection de la droite AB sur le plan du tableau, D et E étant les projections orthogonales de A et B sur le plan du tableau, la ligne de fuite du plan perpendiculaire au plan du tableau passant par la droite AB est alors la parallèle à la droite CDE passant par S et le point de fuite de la droite AB est l'intersection de la parallèle à AB menée par l'oeil avec le plan du tableau; la construction de la perspective ab du segment AB s'obtient alors par le théorème principal.

Notons que sur la figure 12, les points O, A, a, c sont alignés, Taylor utilisera cette propriété sans la justifier explicitement dans d'autres constructions de l'ouvrage; dans la seconde édition de 1719 (cf ci-dessous) il montrera que l'intersection du plan du tableau et du rayon visuel OA (fig 11) ne change pas pendant la double rotation du plan de l'objet et de l'oeil (la droite OS restant constamment parallèle au plan de l'objet), remarquant que ce point d'intersection divise le segment SD dans un rapport constant; dans la figure 12, OA représente le segment rabattu. Ceci nous montre que la construction de Taylor (qui est essentiellement celle de Guido Ubaldo et de Stevin) est une homologie de centre le rabattement de l'oeil; cette propriété avait été démontrée par Stevin qui montrait qu'en rabattant le plan du tableau et l'oeil sur le pavé (le tableau tournant autour de la ligne de terre et l'oeil autour de la parallèle à la ligne de terre passant par sa projection sur le pavé) l'ombre d'un objet restait fixe sur le plan du tableau.

Taylor indique un second procédé de construction utilisant la seconde propriété fondamentale. Nous indiquons sans commentaire la construction de la perspective de l'image d'un triangle, la droite fd représentant le rabattement sur le plan du tableau de l'intersection du plan du triangle ABC avec le plan de direction.

fig13

Notons que cette construction n'est autre que la transformation de La Hire définie dans son traité de 1673, nous y reviendrons (cf ci-dessous p ).

Devant les critiques opposées à la trop grande concision de l'ouvrage, Taylor publie en 1719 une nouvelle édition qu'il intitule New Principles of Linear Perspective (36) et il précise en sous-titre or the Art of Designing on a Plane the Representations of all sorts of Objects in a more General and Simple Method than has been before. S'il est un peu plus explicite que dans l'édition de 1715, il insiste cependant sur la nécessité de connaître la géométrie pour lire son ouvrage, déplorant le manque de connaissances géométriques qui conduit à des erreurs dans les tableaux and

what is the more to be lamented, the Greatest Masters has been the most guilty of it.

En fait, il s'agit bien plus dans l'ouvrage de 1719 d'expliciter des principes que de préciser des constructions qui n'en sont que des conséquences, mais c'est cette explicitation qui fait la valeur géométrique de l'ouvrage.

Après l'exposé des définitions, plus complet que dans l'édition de 1715, Taylor énonce quatre axiomes:

The common intersection of two planes is a straight line.

If two straight lines meet in a point, or are parallel to one another, there may be a plane passing through them both.

If three straight lines cut one another, or if two of them being parallel, are both cut by the third, they will all three be in the same plane; that is, a plane passing through any two of them will also pass through the third.

Every point in any straight line, is in any plane that line is in.

On remarquera, d'une part que Taylor traite de la même manière droites parallèles et droites concourantes, d'autre part que les axiomes portent seulement sur les propriétés d'incidence.

Taylor démontre ensuite huit théorèmes sur lesquels s'appuieront les constructions, dont les deux propriétés fondamentales (théorème III et théorème V), puis dans un style proche de l'édition de 1715, il énonce et résoud divers problèmes de construction.

Nous n'étudierons pas dans le détail les deux ouvrages de Taylor renvoyant à l'excellent article de Kirsti Andersen (37).

Nous voulons seulement souligner le caractère des démonstrations de Taylor qui s'appuient essentiellement sur les relations d'incidence, le passage des situations spatiales (objet, tableau, oeil) au plan s'effectuant via le procédé de rabattement décrit ci-dessus; les considérations métriques interviennent dans ce contexte et perdent ainsi le rôle privilégié que leur accordait la tradition grecque. On y voit apparaître de façon explicite cette alliance intime et systématique entre les figures à trois dimensions et les figures planes que soulignera Chasles à propos de Monge dans son Aperçu historique de 1837 (38). S'il est vrai que ce lien entre figures spatiales et figures planes est au coeur de la pratique perspective, c'est peut-être Taylor qui le premier l'a explicité comme principe de démonstration. En ce sens l'intérêt de l'oeuvre de Taylor relève plus de l'ordre géométrique que de la pratique perspectiviste.

Par comparaison, nous citerons un ouvrage publié en 1711, l'Essai de Perspective (39) de s'Gravesande dans lequel l'auteur se propose d'énoncer les principes de la perspective et de montrer à travers plusieurs problèmes explicitement résolus comment ces principes interviennent dans les constructions perspectivistes.

Devant la similitude des problèmes proposés et des méthodes de résolution, la question se pose d'une part de l'influence de s'Gravesande sur Taylor (le second a-t-il lu le premier et dans quelle mesure s'en est-il inspiré ?), d'autre part de ce qui les différencie. Et il est vrai que sur le plan de la pratique perspectiviste Taylor n'apporte rien de plus que s'Gravesande, l'Essai de Perspective est plus complet et plus utile au praticien par le nombre de problèmes proposés, multipliant les solutions pour un même problème, solutions expliquées en détail, ce que ne fera pas Taylor plus préoccupé des principes. Mais la différence essentielle entre les deux auteurs qui apparaît à la lecture se situe dans les méthodes de démonstration.

Si les propriétés d'incidence spatiale sont présentes chez s'Gravesande et si on sent à la lecture qu'elles ont guidé l'auteur dans la mise en place de ses constructions, elles n'ont pas valeur de preuve et s'Gravesande justifie ses constructions en faisant appel à la géométrie euclidienne plane (triangles semblables, théorème de Thales comme on l'appelle aujourd'hui...); ce qui donne un caractère quelque peu artificiel à certaines démonstrations. Ainsi s'Gravesande qui utilise les deux méthodes liées aux deux propriétés fondamentales citées ci-dessus, justifie l'équivalence de ces constructions par des arguments de géométrie plane, démonstration inutile du point de vue de Taylor. C'est que Taylor cherche une légitimation de ses démonstrations dans la problématique perspectiviste elle-même; il se montre en cela proche du courant développé au XVII<sup>ème</sup> siècle par Pascal et les logiciens de Port-Royal (40) (dont les Nouveaux Elémens de Géométrie (41) d'Antoine Arnauld sont l'exemple canonique), courant qui, à travers une critique de la méthode des géomètres, met en avant le rôle de la démonstration pour éclairer par rapport à la démonstration pour convaincre (42) et recommande dans la démonstration de ne point recourir à des voies trop éloignées.

Ceci nous amène à revenir sur l'axiomatique des propriétés d'incidence développées par Taylor dans l'édition de 1719.

La notion d'axiome, jusqu'à l'élaboration d'une nouvelle forme d'axiomatique par Hilbert à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, reste ce qu'elle est depuis Aristote, savoir, une proposition première qui n'a pas à être démontrée, soit parce qu'elle est évidente par elle-même (définition que l'on retrouve dans de nombreux traités de géométrie des XVII<sup>ème</sup> et XVIII<sup>ème</sup> siècles, Arnaud, dans ses Nouveaux Elémens de Géométrie cité ci-dessus, écrit qu'un axiome est une proposition si claire qu'elle n'a pas besoin de preuve), soit parce qu'elle est nécessaire à la découverte et à la démonstration de nouvelles vérités, ce qui, d'une certaine

façon, assure sa propre vérité (et nous renvoyons aux Seconds Analytiques d'Aristote (43)).

En énonçant comme axiomes les propriétés d'incidence, alors que ces propriétés sont énoncées et démontrées dans le livre XI des Eléments d'Euclide, Taylor insiste sur leur rôle premier dans la légitimation de la démonstration, celle-ci devient indépendante de la tradition grecque (point de vue que l'on trouve déjà chez Pascal dans le premier livre de son Traité des Coniques), mais ce rôle premier est lié au caractère d'évidence de ces propriétés qui n'appellent pas le besoin d'une démonstration, caractère d'évidence qui s'appuie à la fois sur le sens visuel et sur une tradition perspectiviste déjà bien établie.

Ainsi la perspective, mode de représentation des choses vues, conduit à un déplacement d'une géométrie de la mesure liée à la tradition grecque vers une géométrie de la vision. Cette géométrie visuelle est ancienne dans la mesure où elle apparaît avec les premiers théoriciens de la perspective, mais ce qui est nouveau chez Taylor (et peut-être déjà chez Pascal, si l'on se réfère au premier livre du Traité des Coniques sur la génération des coniques faite optiquement par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cône des rayons comme le dit si bien Leibniz dans sa lettre de 1676 citée ci-dessus), c'est que cette géométrie visuelle fonde un principe de légitimation de la démonstration. Si les premiers théoriciens cherchaient à géométriser la perspective en s'appuyant sur la tradition grecque, c'est la perspective qui a permis un renouvellement de la pensée géométrique avec la mise en place d'une géométrie visuelle. Et les deux principaux protagonistes de cette histoire ont été Pascal et Taylor.

Ce déplacement marque la prise en compte (la reprise en compte!) de la place du donné empirique dans l'édification de la géométrie. Avec le développement de la rationalité de la géométrie grecque, la part d'empirisme d'icelle (essentiellement liée au mouvement via le principe de l'égalité par superposition) a été occultée, la construction axiomatique euclidienne, tout en s'appuyant sur cette part d'empirisme, mettant en place les conditions de cette occultation (44); la géométrie devenait ainsi une science purement rationnelle. La construction d'une nouvelle forme de géométrie à partir d'une problématique essentiellement pratique, savoir, comment dessiner l'intersection du cône visuel avec le plan du tableau, posait de nouveau le problème de la part d'empirisme de ce domaine de la connaissance qu'est la géométrie; et les théoriciens, suivant en cela une démarche analogue à celle des géomètres grecs, s'emploieront à dépasser, voire occulter cette part d'empirisme, tout en restant à l'intérieur de la problématique perspectiviste. Ceci conduisait à redéfinir les conditions de légitimation de la démonstration; ce qu'a voulu faire Taylor lorsque, répondant aux critiques adressées à l'édition de 1715 et peut-être à côté de ces critiques, il a explicité sous forme d'axiomes les principes qui régissent ses méthodes.

Pour préciser cette distinction qui se dessine entre ces deux aspects de la géométrie, la géométrie de la mesure et la géométrie de la vision, il faudrait parler ici de l'empirisme anglais tel qu'il se développe au tournant des XVIIème et XVIIIème siècles. John Locke publie en 1690 son Essay concerning Human Understanding (45), George Berkeley publie en 1709 An essay towards a New Theory of Vision (46); si la connaissance a son origine dans l'expérience sensible, la connaissance des objets de la géométrie relève du toucher (touch) et de la vue (sight) ce qui pose le problème d'abord de la part de chacun de ses sens, d'autre part de leur articulation. Ceci conduira à considérer la géométrie de la mesure comme relevant du toucher et la géométrie de la perspective (qui deviendra la géométrie projective) comme relevant de la vue; cette conception sera reprise et développée au début du XXème siècle par Enriques dans Problema della Scienza dont la seconde partie (celle qui nous interesse ici) a été traduite en français sous le titre Les concepts fondamentaux de la science (47). Nous ne pouvons en dire plus dans cet article, renvoyant à un article ultérieur sur Les Sens de la Géométrie (exposé au Seminaire Histoire Théorie et Pratique de la Perspective et des Modes de Représentation).

C'est dans ce contexte que s'inscrit Taylor développant une géométrie du visuel, et c'est en ce sens que son oeuvre marque une étape de la pensée géométrique; qu'elle ait eu peu d'influence ou une influence à côté comme le signale avec justesse Kirsti Andersen (48), importe peu. Le problème est moins celui d'une influence directe que le fait que les ouvrages de Taylor, et surtout celui de 1719, expriment des idées qui se développeront tout au long du XVIIIème siècle jusqu'à la mise en place de la géométrie projective moderne.

Il faudrait citer ici Lambert, même si celui-ci, dans un court exposé historique sur la perspective publié en 1774, passe un peu trop rapidement sur l'oeuvre de Taylor en laquelle il ne voit que la généralisation de la construction, le tableau étant oblique (49); pourtant on retrouve dans l'ouvrage de Lambert La perspective affranchie de l'embarras du plan géométral publié en 1759 et plus encore dans les Notes et Additions à la seconde édition de 1774, une problématique proche de celle de Taylor, nous y reviendrons.

L'oeuvre de Taylor sera appréciée par Monge qui y verra moins un intérêt pour les praticiens qu'une démarche théorique, malheureusement au moment où l'oeuvre de Taylor aurait pu être appréciée pour ce qu'elle est, elle sera dépassée par la géométrie projective naissante (50).

### 3. Des constructions aux transformations.

On peut considérer le Brouillon Project de 1639 comme le premier ouvrage où l'on déduit de nouvelles propriétés géométriques à partir de propriétés connues en transformant une figure (ainsi les propriétés des coniques

s'obtiennent à partir des propriétés du cercle par projection), ce qui deviendra la méthode des transformations. Celle-ci n'est autre que la lecture d'une situation géométrique à travers une autre situation géométrique (sa transformée), ce qui s'appuie sur la définition des invariants (c'est-à-dire, de ce qui est commun aux deux situations).

La question que nous posons ici, du point de vue de l'histoire, est celle de la place des constructions perspectivistes dans l'élaboration des notions de transformation et d'invariant.

On ne peut définir les constructions perspectivistes comme des transformations géométriques au sens moderne du terme (celui du Programme d'Erlangen de Felix Klein). Au contraire le projet perspectiviste est de représenter le monde tel que nous le voyons (cf la fenêtre ouverte d'Alberti ou la vitre de Leonardo da Vinci), le problème est alors moins de transformer que de définir ce qui est commun à l'objet et à sa représentation, ainsi les constructions perspectivistes concernent plus l'explicitation d'invariants que la notion de transformation. Ceci apparaît dans les problèmes de report de mesure à travers les constructions d'échelles et la mise en place des lignes coordonnées via les dallages (cf ci-dessus), problèmes qui sont encore au coeur de la construction arguésienne.

Nous distinguerons deux grandes classes de constructions perspectivistes; d'une part les constructions qui s'appuient sur une structuration de l'espace via les dallages (et nous verrons le rôle qu'elles ont joué dans la construction de la notion d'espace), constructions qui sont celles des premiers perspectivistes du Quattrocento, et dont le principe est résumé dans l'opuscule de Desargues de 1636; d'autre part les constructions qui s'appuient sur le théorème fondamental de la perspective et qui seront systématisées par Taylor et Lambert, Chasles y reconnaîtra les premières formes de l'homologie (cf la note XVIII de l'Aperçu historique de 1837 (51)).

La première construction perspectiviste: la construction légitime est exposée par Alberti dans son Trattato della Pittura publié en 1435, puis par Piero della Francesca dans son ouvrage déjà cité De Perspectiva Pingendi (52). Le principe de la construction s'appuie sur la donnée préalable d'une double projection orthogonale: projection sur un plan horizontal et projection sur un plan vertical (que Vitruve (1er siècle avant J.C.) appelle respectivement ichnographia et ortographia au premier de ses Dix Livres d'Architecture (53)); l'objet et l'oeil étant représentés par la double projection, on peut alors construire l'intersection de la pyramide visuelle avec le plan du tableau (supposé orthogonal aux deux plans de projections), plan qu'il suffira de rabattre sur le plan vertical pour obtenir la représentation cherchée. Le principe de la construction légitime est résumé dans la figure ci-dessous (extraite de

l'ouvrage cité de Vignola Le due regole della prospettiva pratica)

fig 14

En fait Alberti et Piero della Francesca donnent une construction abrégée qui consiste à représenter un dallage situé sur le plan horizontal de référence

fig 15

La représentation du dallage joue un rôle fondamental dans la mise en place des éléments du tableau, définissant ce qu'on appelle aujourd'hui un système de lignes coordonnées, il suffit alors de reporter sur le tableau les positions des points remarquables déterminées par rapport au dallage pour obtenir la représentation cherchée. Ainsi pour les besoins de la représentation perspectiviste se met en place une première structuration de l'espace via la construction d'un réseau de lignes coordonnées, ce qui permet de mettre en relation les divers lieux de l'espace; c'est en ce sens que la perspective intervient dans la mise en place de la notion d'espace (cf ci-dessous).

A coté de la construction légitime apparaît une autre méthode de représentation dont nous avons déjà parlée: la méthode des points de distance (cf ci-dessus p 5), le principe de la construction est expliqué dans la figure suivante (extraite de l'ouvrage cité de Vignola),

fig 16

Vignola montrera dans son ouvrage l'équivalence des deux constructions par des considérations de géométrie plane s'appuyant sur les Eléments d'Euclide; cette démonstration peut nous paraître aujourd'hui redondante dans la mesure où l'on sait que l'on représente le même objet par la même transformation, mais de telles considérations n'existent pas pour Vignola et ses contemporains et le problème est de montrer que les deux constructions (essentiellement planes) donnent le même résultat.

Desargues utilisera systématiquement la méthode du dallage (qu'on pourrait appeler la méthode des lignes coordonnées en la distinguant de la méthode des coordonnées inventée à la même époque par Descartes et Fermat). Nous avons vu le rôle qu'elle a joué dans la définition des points à l'infini, il faudrait souligner le rôle qu'elle a pu jouer dans la mise en place de la notion d'invariant via les constructions d'échelles; en effet ce sont les relations métriques invariantes par perspective (qui deviendront les propriétés métriques projectives des géomètres du XIXème siècle (54)) qui ont permis d'expliciter le caractère commun à deux figures qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation.

Se pose alors la question de l'origine de ces invariants projectifs que sont l'involution de six points et l'involution de quatre points (cette dernière étant la

division hamonique d'aujourd'hui) définies par Desargues dans le Brouillon Project de 1639. Ceci renvoie aux grands traités grecs sur lesquels se sont appuyés les géomètres du projectif; il s'agit d'une part des Coniques d'Apollonius, d'autre part du livre VII de la Collection Mathématique de Pappus, plus particulièrement de la partie consacrée aux Porismes (55), un ouvrage d'Euclide aujourd'hui perdu. Mais il n'y a pas de point de vue projectif chez les Grecs, même si Apollonius peut donner lieu à une relecture projective, ce qu'a fait Desargues écrivant le Brouillon Project en 1639, ce que fera quelques années plus tard Philippe de La Hire publiant en 1673 ses Nouvelles méthodes en géométrie plane pour les sections des superficies coniques et cylindriques (56) contenant deux parties, la première étudiant les coniques comme sections planes d'un cône ou d'un cylindre, la seconde intitulée Planiconiques consacrée à une construction plane des coniques sur laquelle nous reviendrons.

Rappelons que l'on trouve dans la partie de la Collection Mathématique consacrée aux Porismes des énoncés qui deviendront des théorèmes de géométrie projective, ainsi la proposition 129

Menons transversalement, sur trois droites AB, CA, DA, les droites TE, TD; je dis que le rectangle compris sous les droites TB, DC est au rectangle compris sous les droites TD, BC comme le rectangle compris sous les droites TE, HZ est au rectangle compris sous les droites TH, ZE.

fig 17

que l'on peut lire comme l'invariance projective du birapport, mais cette interprétation si elle prend sens aujourd'hui après le développement de la géométrie projective, est étrangère au contexte grec. On pourrait citer aussi le théorème de Menelaüs-Ptolémée, exemple canonique de propriété métrique projective, dont l'origine relève de questions d'astronomie de position (57); Pappus démontre ce théorème au début du livre VIII de son ouvrage à propos d'un problème de statique.

Le problème reste donc ouvert d'explicitier comment la perspective a conduit les premiers géomètres du projectif à cette lecture projective des géomètres grecs, donnant à la notion de transformation l'importance qu'on lui connaît aujourd'hui.

Si les constructions précédentes (celles de la première classe) s'appuient sur la représentation des lignes coordonnées et le report des données métriques sur le tableau, les constructions de la seconde classe peuvent être considérées comme plus spécifiquement graphiques (au sens des géomètres du XIXème siècle (58)) et s'appuient sur le théorème principal de la perspective (cf ci-dessus p ). Les premières constructions sont celles de Guido Ubaldo et Stevin rappelées ci-dessus. Elles seront systématiquement étudiées par s'Gravesande dans son Essai de Perspective de 1711. Enfin la mise en place de certains éléments de référence dans le

plan du tableau permettront de se passer du plan horizontal de référence (plan géométral) ce que feront Taylor puis Lambert, définissant ainsi la géométrie propre du tableau.

Taylor, nous l'avons vu (cf p ), introduit un changement dans la construction perspectiviste en rabattant le plan géométral sur le plan du tableau, il construit alors sur le tableau les éléments qui serviront de référence, ainsi le rabattement de l'oeil (cf ci-dessus fig 12); cela lui permet de construire le point de fuite d'une direction horizontale donnée, cette direction étant représentée par une droite passant par le rabattement de l'oeil (rabattement de la droite passant par l'oeil et parallèle à la direction donnée), le point de fuite est alors l'intersection de cette droite avec la ligne d'horizon.

On peut ainsi effectuer des constructions sur le tableau sans référence à un objet original, ainsi dans l'ouvrage de 1715 la construction de la perspective d'un cercle de centre donné (en perspective) passant par un point donné (en perspective)

fig 18

O est le rabattement de l'oeil, ED la ligne d'horizon, C le centre d'un cercle en perspective passant par le point A, on veut construire un point B du cercle sur le diamètre CE, il suffit de remarquer que le triangle CAB est isocèle auquel cas les angles CAB et CBA sont égaux entre eux, chacun étant égal à la moitié de l'angle ECD, il suffit alors de construire la bissectrice de l'angle en vraie grandeur EOD, le point F intersection de cette bissectrice avec la ligne d'horizon est le point de fuite de la droite AB.

L'idée de rabattre le plan horizontal sur le plan du tableau qui caractérise la construction taylorienne se relie aux travaux de Philippe de La Hire sur les coniques (cf son ouvrage cité de 1673). Philippe de La Hire, définissant une conique comme section plane d'un cône à base circulaire, rabat le plan de la base sur le plan de la conique ce qui lui permet d'étudier celle-ci comme transformée du cercle rabattu par une transformation plane qui n'est autre qu'une homologie.

La transformation de La Hire peut être ainsi décrite: la formatrice est la droite d'intersection des deux plans, la directrice est le rabattement sur le plan de section de l'intersection du plan de base avec le plan parallèle au plan de section passant par le sommet du cône, on note P le rabattement du sommet du cône dans le plan de section; soit M un point du plan du cercle rabattu sur le plan de section, le transformé M' est alors d'une part sur la droite PM, d'autre part si l'on mène une droite quelconque passant par M coupant la formatrice en F et la directrice en D, le point M' est sur la parallèle menée par F à la droite DO,

fig 19

fig 20

La figure 19 décrit la situation dans l'espace, la figure 20 montre la construction plane indépendamment de toute référence à l'espace; on comparera avec la figure 13 correspondant à la seconde construction de Taylor (lequel ne cite jamais La Hire).

Nous terminerons cette partie sur les constructions et les transformations avec l'oeuvre de Lambert. Lambert publie en 1752 un Essai sur la Perspective (59) dans lequel il met au point un instrument à dessiner en perspective, le perspectographe; la construction qu'il définit a encore un caractère métrique en ce sens qu'elle s'appuie sur des calculs de longueur. Dans un second ouvrage La Perspective affranchie de l'embarras du plan géométral (60) qu'il publie en 1759, Lambert se propose de se passer d'un plan horizontal de référence en faisant ses constructions directement sur le tableau, pour cela il va mettre en place les éléments remarquables du tableau qui serviront de référence; c'est ce qui le conduit à définir la géométrie propre du tableau qu'il appelle la géométrie perspective, géométrie qu'on a vu apparaître chez Taylor (cf ci-dessus) et même chez Desargues travaillant directement sur la représentation du dallage (cf l'ouvrage déjà cité d'Abraham Bosse (61)).

Lambert commence par définir les divers éléments de la représentation perspectiviste et justifie la notion de point de fuite.

fig 21

Il va alors préciser la distribution des points de fuite sur la ligne d'horizon en définissant ce qu'il appelle le transporteur perspectif (qui n'est autre que l'échelle des angles)

fig 22

Soit  $P$  le point de fuite principal, Lambert construit le point  $Q$  sur la perpendiculaire en  $P$  à la ligne d'horizon situé à une distance de  $P$  égale à la distance de l'oeil au tableau, une direction horizontale étant donnée par sa déclinaison sur le plan vertical passant par l'oeil et perpendiculaire au tableau, on considère sur le plan du tableau la droite passant par  $Q$  et faisant l'angle avec la droite  $QP$  (à droite ou à gauche selon que la déclinaison est à droite ou à gauche), cette droite coupe la ligne d'horizon au point de fuite de la direction donnée.

On peut ainsi, à partir de la graduation du demi-cercle ( $AB$ ), graduer la ligne d'horizon (échelle des angles) et repérer ainsi sur le tableau les directions horizontales. On peut alors mesurer les angles représentés sur le tableau, ou mener par un point d'une droite donnée, une droite faisant un angle donné avec la droite donnée (62).

On peut aussi, une échelle étant donnée sur une parallèle à la ligne d'horizon, déterminer l'échelle de mesure sur une droite donnée; nous montrons ici comment on peut construire sur une droite donnée un segment ayant même longueur qu'un segment donné sur une parallèle à la ligne d'horizon (63).

fig 23

Soit à construire sur la droite  $gh$  un segment égal au segment  $lm$ , soit  $\alpha$  la déclinaison de la direction définie par  $h$ , on construit le point de fuite  $k$  correspondant à la déclinaison  $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ,  $h$  et  $k$  étant de part et d'autre du point  $P$ , on vérifie aisément que le triangle  $jgl$  est isocèle (les segments  $jl$  et  $gl$  sont de même longueur), le point  $i$  est alors l'intersection des droites  $mk$  et  $gh$ .

Nous ne développerons pas plus l'oeuvre de Lambert, renvoyant à l'ouvrage de Roger Laurent et Jeanne Peiffer La place de J.H. Lambert dans l'histoire de la perspective (64).

Avec Taylor et Lambert s'achève la théorisation de la perspective, elle aura mis en évidence la géométrie propre du tableau, systématisant ainsi ce qui constitue l'un des caractères essentiels de la méthode des transformations, savoir, la lecture d'une situation spatiale à travers une représentation de cette situation, ce qui deviendra non seulement transfert de lecture, mais aussi transfert de méthode voire transfert d'intuition (65).

Lambert l'avait compris lorsqu'il utilisait, dans les Notes et Additions de 1774 (66), les méthodes perspectivistes pour résoudre certains problèmes de la géométrie de la règle dont nous citons l'un des plus caractéristiques (problème V)

AC, BD sont des lignes qui se coupent en un point en dehors de la table, tracer à l'aide d'une règle seulement et sans prolonger ces lignes, une ligne passant par un point E donné et coupant BD, AC au même point d'intersection.

fig 24

On trace deux droites  $AH$  et  $GB$  passant par  $E$  puis on trace  $AB$  et  $GH$  qui se coupent en  $K$ . On trace une droite passant par  $K$  qui rencontre les droites données en  $C$  et  $D$ , les droites  $HC$  et  $GD$  se coupent en  $F$ , la droite  $EF$  est la droite cherchée.

En fait il faut lire  $AC$  et  $BD$  comme des droites parallèles, de même  $AB$  et  $GH$  comme des droites parallèles (autrement dit le point d'intersection des droites  $AC$  et  $BD$  et le point  $K$  sont sur la ligne d'horizon). Les points  $E$  et  $F$  sont respectivement les points d'intersection des parallélogrammes  $ABHG$  et  $GHDC$  et dans ces conditions la droite  $EF$  est parallèle aux droites  $AC$  et  $BD$ .

Avec la mise en place des éléments constitutifs du projectif (points à l'infini considérés comme points ordinaires, rôle des propriétés d'incidence (qui déterminent les propriétés graphiques), méthodes des transformations reliée à la notion d'invariant) pourra se développer au XIXème siècle la géométrie projective proprement dite; il nous reste à remarquer, pour terminer ce chapitre, que ce développement commence encore une fois avec un problème de représentation qui a conduit à la géométrie descriptive de Monge. Mais ce n'est pas le lieu ici d'en dire plus.

#### 4. La notion d'espace.

Si la perspective a conduit au renouvellement de la pensée géométrique, ce n'est pas seulement avec la mise en place du point de vue projectif dont nous venons de parler, c'est aussi, et c'est peut-être l'apport le plus important, par sa contribution à l'émergence du concept d'espace, concept fondamental de la physique mathématique telle qu'elle s'élabore au XVIIème siècle.

Il n'y a pas d'espace dans la géométrie grecque, l'objet de la géométrie est l'étude, du point de vue de la grandeur, de situations spatiales locales dont on se propose d'expliciter diverses propriétés, essentiellement métriques (67), étude qui s'insère dans les conceptions de la philosophie classique grecque, essentiellement le platonisme et l'aristotélisme. Il faudrait mettre à part le courant issu de Leucippe et Démocrite (68), mais il ne semble pas qu'il ait eu d'influence dans l'élaboration de la géométrie grecque, du moins celle que nous connaissons et sur laquelle s'est construite la tradition scientifique occidentale, des Arabes du IXème siècle à nos jours.

La première mention de la géométrie comme étude de l'espace, se trouve, à ma connaissance, dans un texte de Pascal, fragment retrouvé (dans les papiers de Leibniz) d'un traité de géométrie aujourd'hui perdu(69). Pascal écrit

Principe 1. L'objet de la pure géométrie est l'espace, dont elle considère la triple étendue en trois sens divers qu'on appelle dimensions, lesquelles on distingue par les noms de longueur, largeur et profondeur, en donnant indifféremment chacun de ces noms à chacune de ces dimensions, pourvu qu'on ne donne pas le même à deux ensemble; elle suppose que tous ces termes-là soient définis d'eux-mêmes.

Principe 2. L'espace est infini selon toutes dimensions,

Principe 3. et immobile en tout et chacune de ses parties.

Le problème se pose alors d'explicitier les raisons qui font apparaître, à un moment donné de l'histoire, la notion géométrique d'espace et les problématiques qui la

portent, problème que nous n'aborderons pas ici; nous nous contenterons d'insister sur le rôle qu'y ont joué les constructions perspectivistes à travers ce que nous avons appelé, d'une façon quelque peu ambiguë, la structuration de l'espace. C'est que, si la notion d'espace se met en place à travers cette structuration, ce que l'on structure, savoir, les relations de situation entre les différents objets de l'espace, se définit au fur et à mesure qu'on le construit. On ne saurait, si ce n'est par une reconstitution artificielle et arbitraire, déterminer une donnée première, antérieure à l'espace, dont la structuration conduirait à la notion d'espace, autrement dit la notion d'espace est née moins des objets que des problèmes que l'on se pose par rapport à ces objets.

Il est clair qu'il n'y a pas d'autre perception effective de l'espace que celle des corps qui le remplissent.

écrivait en 1912 Léon Brunschvicg dans Les Etapes de la Philosophie Mathématique (70).

C'est dire que l'espace n'est pas une donnée immédiate de l'expérience, c'est un concept élaboré de la géométrie qui s'est construit à travers l'explicitation des relations de situation entre les corps, cela nous renvoie aux deux grandes problématiques que sont la représentation perspectiviste et la mécanique, problématiques qui se développent et se mathématisent à peu près à la même époque (71).

Le problème de l'espace se pose dès qu'il s'agit de mettre en relation plusieurs situations spatiales, ainsi la perspective qui doit, d'une part, déterminer les relations entre les trois composantes que sont l'objet à représenter, le tableau et l'oeil du spectateur, d'autre part, déterminer les relations entre les divers objets que l'on veut représenter, et ainsi coordonner les diverses parties du tableau. C'est cette double détermination qui conduit à ce que nous avons appelé la structuration de l'espace, que l'on peut essayer d'explicitier à travers les deux grandes classes de constructions perspectivistes.

Les constructions via les lignes coordonnées permettent par la détermination, dans le réseau ainsi défini (le dallage), des positions des objets à représenter, l'unification des diverses parties du tableau, ce qu'on appelle la construction de l'espace unifié (72); nous pourrions ici renvoyer à ces monuments théoriques de la construction perspectiviste que sont les classiques panneaux représentant des perspectives architecturales, panneaux qui résument l'idéal perspectiviste (73).

La seconde classe de construction (les constructions graphiques!) met l'accent sur les objets élémentaires (droites, points) de la géométrie dans leurs relations mutuelles, il ne s'agit plus de configurations locales étudiées pour elles-mêmes à la façon des géomètres grecs, mais d'une mise en relation de configurations, et l'acte de dessin pose le problème de l'explicitation de cette

mise en relation, ceci conduira à préciser le rôle des propriétés d'incidence. Ces propriétés d'incidence d'abord implicites, peut-être parce que allant de soi dans la problématique de la fenêtre ouverte ou de la vitre, matérialisées par les portillons des gravures de Dürer, seront explicitées par Taylor en 1719 (cf ci-dessus p ), acquérant ainsi le statut de propriétés fondatrices de la géométrie.

Ainsi la structuration de l'espace se présente sous un double aspect, le réseau des lignes coordonnées et les propriétés d'incidence, permettant une appréhension globale du domaine géométrique; c'est dans cette appréhension globale que se situe le renouvellement du paysage géométrique dont nous avons parlé au début de cet article, et dont l'expression anachronique d'espace euclidien montre l'importance, la notion d'espace s'intégrant aujourd'hui, à la fois signe d'ignorance et signe de reconnaissance, dans la tradition canonique de la géométrie issue des Grecs.

## 5. Conclusion

Naissance du projectif, émergence de la notion géométrique d'espace, le courant perspectiviste a joué un rôle important dans le développement de la géométrie; il a été pourtant occulté par le courant analytique issu de la méthode des coordonnées fondée à partir de l'oeuvre de Viète par Descartes et Fermat. Pourtant cette histoire de la naissance du projectif qui va depuis les premières théorisations de Guido Ubaldo et Simon Stevin jusqu'à Taylor et Lambert montre que ce courant perspectiviste reste vivace pendant ces deux siècles, sans parler de l'influence sur des mathématiciens comme Newton (cf ci-dessus) et Leibniz, grand lecteur de Pascal et qui connaissait l'oeuvre de Desargues (74).

Mais si, dans les années trente du XVIIème siècle, Desargues et Descartes cherchaient chacun à développer une méthode universelle pour la géométrie, la méthode dite analytique avait l'avantage de la réduction au calcul conduisant à l'idée d'un développement autonome du calcul sans référence au sens des lettres ou signes utilisés, méthode qui s'est révélée féconde avec le développement de l'analyse et qui par cela-même prenait le pas sur une méthode qui restait engagée dans le sens (et en cela plus proche de la tradition grecque).

De l'histoire des relations entre les deux méthodes, marquée par des incompréhensions (Desargues et Descartes se lisant et s'appréciant mutuellement sans que chacun d'eux ait vraiment compris la signification de l'oeuvre de l'autre) et des conflits (comme la querelle entre partisans de la méthode analytique et partisans de la méthode synthétique au XIXème siècle), nous retiendrons ces deux points d'apparence paradoxale.

C'est peut-être Leibniz, fervent partisan de la réduction au calcul avec ce que j'appellerai le fantasme de la caractéristique universelle, qui comprit le mieux la portée de l'oeuvre de Pascal dans laquelle il voyait aussi se mettre en place un calcul géométrique. Mais c'est peut-être que Leibniz, et en cela il n'est pas formaliste au sens moderne du terme, ne détachait pas le calcul du sens; la caractéristique universelle ne devait pas être un langage réduit à sa syntaxe, bien au contraire (75).

Second paradoxe, c'est au moment où le réductionnisme analytique se radicalise avec Lagrange (le modèle de cette radicalisation étant la Mécanique Analytique (76)), que le courant issu de la perspective atteint son plein développement avec Monge (qui est au coeur des deux méthodes), puis Carnot et Poncelet.

C'est que les deux méthodes, qui se veulent chacune universelles, se complètent plus qu'elles ne s'opposent. Nous donnerons un seul exemple; si la notion d'espace s'est mise en place à partir des constructions perspectivistes, c'est la méthode analytique, qui l'ignore à ses débuts (il n'y a pas d'espace chez Descartes et Fermat), qui va en permettre l'étude, et ce, grâce à la rencontre de deux méthodes, la méthode des lignes coordonnées et la méthode des coordonnées, ou si l'on veut, l'unification des coordonnées comme repère et des coordonnées comme mesure.

Lille, janvier 1990

Ce texte, qui reprend en grande partie l'exposé que j'ai fait au colloque Les Mathématiques de l'Antiquité à l'Age classique, fait partie d'un travail en cours sur l'histoire de la pensée géométrique, travail qui s'appuie sur ma participation à la Commission Inter-IREM d'Epistémologie et au Séminaire d'Histoire, Théorie et Pratique de la Perspective et des Modes de Représentation (Institut Henri Poincaré). Je remercie mes collègues Didier Bessot, Christian Guipaud, Roger Laurent, Jean-Luc Lechevalier, Jean-Pierre Legoff, Joël Sakarovitch pour les nombreuses discussions sur l'histoire de ce riche domaine qu'est la perspective, ainsi que Kirsti Andersen de l'Université d'Aarhus.

Ce texte paraîtra dans les Actes du colloque "Les mathématiques de l'antiquité à l'âge classique". (Marseille, janvier 1989 )."

#### NOTES

- 1 - Denis Lanier, Jean-Pierre Legoff L'héritage arguésien in La Naissance du Projectif. Actes du Colloque de Lille Mai 1989 (à paraître)
- 2 - Rudolf Bkouche La construction du rationnel in Les Cahiers de Philosophie (à paraître)
- 3 - Johann Kepler Paralipomènes à Vitellion (traduction et notes par Catherine Chevalley) Vrin, Paris 1980
- 4 - Apollonius de Perge Les Coniques (traduction par Ver Eecke) Blanchard, Paris 1979
- 5 - Pappus d'Alexandrie Collection Mathématique (2 volumes) (traduction par Ver Eecke) Blanchard, Paris 1982 ; Livre VII, propositions 235 à 238
- 6 - Thomas L. Heath A History of Greek Mathematics (2 volumes) Dover Publications New-York, 1981 ; Chapter XXI
- 7 - Alexandre Koyré Du monde clos à l'univers infini (traduit de l'anglais par Raissa Tarr) Gallimard. Paris 1973. Chapitre III
- 8 - Girard Desargues Brouillon Project d'une Atteinte aux Evènements des Rencontres du Cône avec un Plan (1639) in René Taton L'oeuvre mathématique de Desargues Vrin Paris 1981
- 9 - Jean-Pierre Legoff Une oeuvre aux confins de l'Art et de la Science : "De Prospectiva Pingendi" de Piero della Francesca in Les Cahiers de la Perspective n° 4, 1987
- 10 - Jean Pèlerin dit Viator De Artificiali Perspectiva (2ème édition 1509) Librairie des Arts et Métiers. Nogent le Roi 1978
- 11 - Guido Ubaldo del Monte Les Six Livres de Perspective (traduction française et notes par Christian Guipaud) (à paraître) ; traduction italienne par Rocco Sinisgalli, L'Erma di Bretschneider Roma
- 12 - Simon Stevin De Sciagraphia (1605) ; traduction française par Albert Girard in Les Oeuvres Mathématiques de Simon Stevin Leyde 1634 ; traduction italienne par Rocco Sinisgalli in Il contributo de Simon Stevin allo sviluppo scientifico della prospettiva artificiale. L'Erma di Bretschneider Roma 1978
- 13 - Jacomo Barozzi da Vignola Le due regole della prospettiva pratica (commentaires de E. Danti) Bologne 1582

- 14 - Girard Desargues Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la perspective... (1636), réédité par Abraham Bosse in Manière Universelle de Mr Desargues pour pratiquer la perspective... Paris 1648, et fac-similé in J.V. field and J.J. Gray The Geometrical Work of Girard Desargues Springer Verlag, New-York Berlin Heidelberg 1987
- 15 - René Taton L'oeuvre mathématique de Desargues Vrin Paris 1981
- 16 - Blaise Pascal Traité des coniques in Oeuvres complètes (présentation et notes de Louis Lafuma) Le Seuil Paris 1963
- 17 - Isaac Newton Enumeratio linearum tertii ordinis (1701) ; english translation in D.J. Struick A source-book in mathematics 1200-1800 Princeton University Press 1986
- 18 - Jean Victor Poncelet Traité des Propriétés Projectives des Figures (2 volumes) Gauthier-Villars Paris 1865, Section I Chapitre III n° 103 à 107
- 19 - René Taton o.c.
- 20 - Jean-Pierre Legoff o.c.
- 21 - Blaise Pascal De l'Esprit géométrique et de l'Art de persuader in Oeuvres complètes o.c.
- 22 - Guido Ubaldo del Monte o.c. Livre I
- 23 - Simon Stevin o.c.
- 24 - euclide Les oeuvres d'Euclide (traduction française par Peyrard 1817) Blanchard Paris 1966
- 25 - Euclide The Thirteen Books of the Elements (translated with introduction and commentaries by sir Thomas L. Heath) (3 volumes) Dover Publications New-York 1956 Book I and Book XI
- 26 - Willi Kurth The complete woodcuts of Albrecht Dürer Dover Publications New-York plate 338 and 339
- 27 - Kirsti Andersen Brook Taylor's role in the history of linear perspective preprint february 1989 University of Aarhus Danemark
- 28 - J.V. Field, J.J. Gray The Geometrical Work of Girard Desargues Springer Verlag, New-York Berlin Heidelberg 1987
- 29 - Abraham Bosse Manière universelle de Mr Desargues pour pratiquer la Perspective... Paris 1648 et René Taton o.c.
- 30 - Blaise Pascal Essay pour les Coniques in Oeuvres complètes o.c.

32 - Pierre Costabel Traduction française des notes de Leibniz sur les Coniques de Pascal in l'Oeuvre scientifique de Pascal PUF Paris 1964 chapitre V

33 - Blaise Pascal Adresse à l'Académie Parisienne in Oeuvres complètes o.c.

L'Académie Parisienne fondée par Mersenne en 1635 a continué son activité après la mort de Mersenne (1648) ; dans son Adresse, Pascal annonce plusieurs de ces travaux, en particulier en géométrie ; les textes de ces derniers ne nous sont pas parvenus. Cette adresse est analysé par René Taton au chapitre III de l'ouvrage déjà cité L'Oeuvre Scientifique de Pascal (32)

34 - René Taton L'oeuvre de Pascal en géométrie projective in L'Oeuvre scientifique de Pascal o.c. Chapitre III

35 - Brook Taylor Linear Perspective London 1715

36 - Brook Taylor New Principles of Linear Perspective London 1719 ; Nouveaux principes de la Perspective linéaire (traduction française par le R.P. Rivoire) Amsterdam, Lyon 1789

37 - Kirsti Andersen o.c.

38 - Michel Chasles Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie Bruxelles 1837 ; réédition Editions Jacques Gabay, Paris 1989

39 - G.J. s'Gravesande Essai de Perspective La Haye 1711

40 - Antoine Arnauld, Pierre Nicole La logique ou l'Art de Penser Flammarion Paris 1970

41 - Antoine Arnauld Nouveaux Elémens de Géométrie Paris 1667

42 - Evelyne Barbin La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques Bulletin APMEP n° 366 Décembre 1988

43 - Aristote Les Seconds Analytiques (traduction Tricot) Vrin Paris 1979

44 - Rudolf Bkouche Un peu d'histoire Appendice in Daniel Lehmann, Rudolf Bkouche Initiation à la géométrie PUF Paris 1988

45 - John Locke Essay concerning Human Understanding London 1690 ; Essai Philosophique concernant l'Entendement Humain (Traduction de Coste) Amsterdam, Leipzig 1755, Réédition Vrin Paris 1983

46 - George Berkelay An essay towards a New Theory of Vision 1709 ; Essai d'une théorie nouvelle de la vision in Oeuvres choisies de Berkeley (traduction, préface et note de André Leroy) Aubier Montaigne Paris 1944

- 47 - Federigo Enriques Les concepts fondamentaux de la Science (traduit par Louis Rougier) Flammarion Paris 1913
- 48 - Kirsti Andersen o.c.
- 49 - Jean-Henri Lambert Notes et Additions de 1774 in Roger Laurent, Jeanne Peiffer La place de Lambert dans l'Histoire de la Perspective Cedric/Nathan Paris 1987
- 50 - Phillip S. Jones Brook Taylor and the Mathematical Theory of linear Perspective American Mathematical Monthly Volume 58, 1951
- 51 - Michel Chasles o.c.
- 52 - Jean-Pierre Legoff o.c.
- 53 - Vitruve Les dix livres d'Architecture (traduction par Claude Perrault), Paris 1684, réédition Pierre Mardaga Bruxelles 1979
- 54 - Jean-Victor Poncelet o.c. Section I chapitre I n° 7
- 55 - Pappus d'Alexandrie o.c. Livre VII propositions 127 à 164
- 56 - Philippe de la Hire Nouvelles Méthodes en géométrie plane pour les sections des superficies coniques et cylindriques Paris 1673 ; voir aussi Denis Lanier, Jean-Pierre Legoff o.c.
- 57 - Thomas L. Heath o.c. chapter XIX
- 58 - Jean-Victor Poncelet o.c. Section I Chapitre I n° 6
- 59 - Jean-Henri Lambert Essai sur la Perspective (traduction de Jeanne Peiffer, commentaires de Roger Laurent) Monom Coubon 1981
- 60 - Jean-Henri Lambert La Perspective affranchie de l'embarrras du plan géométral Zurich 1759 réédition Alain Brieux Paris 1977
- 61 - Abraham Bosse o.c. Planches 141-148 Aux Théoriciens
- 62 - Jean-Henri Lambert La Perspective affranchie... Paragraphe 33
- 63 - Jean-Henri Lambert o.c. paragraphe 52
- 64 - Roger Laurent Jeanne Peiffer La place de Lambert dans l'histoire de la perspective Cedric Nathan Paris 1987
- 65 - Jean Dieudonné The Universal Domination of Geometry International Congress of Mathematical Education Berkeley 1980; Rudolf Bkouche Un peu d'histoire o.c.
- 66 - Jean-Henri Lambert Notes et Additions o.c.

67 - Rudolf Bkouche Quelques grandes problématiques de l'histoire de la géométrie Université d'Eté d'Histoire des Mathématiques Toulouse Juillet 1986. IREM de Toulouse

68 - Jean-Paul Dumont, Daniel Delattre, Jean-Louis Poirier Les Présocratiques Gallimard 1988

69 - Blaise Pascal Introduction à la géométrie in Oeuvres complètes o.c. voir aussi Jean Itard "L'Introduction à la géométrie" de Pascal in L'oeuvre scientifique de Pascal o.c.

70 - Léon Brunschwig Les Etapes de la Philosophie Mathématique Blanchard Paris 1972 Ch XXII

71 - Pierre Thuillier La Naissance de la Perspective in La Recherche n° 160 1984

72 - Erwin Panofsky, La perspective comme forme symbolique (traduction française Guy Ballanger) Les Editions de Minuit Paris 1975

Hubert Damish L'origine de la perspective Flammarion Paris 1977

73 - La cité idéale panneau dit d'Urbino, Galerie Nationale des Murches, Urbino

Perspective architecturale panneau dit de Baltimore, Walters Art Gallery, Baltimore

Perspective architecturale panneau dit de Berlin, Staatliche Museen,

Ces panneaux sont étudiés dans l'ouvrage cité de Damish (72)

74 - Javier Echevarria Recherches inconnues de Leibniz sur la géométrie projective in Leibniz et la Renaissance Franz Steiner Verlag Wiesbaden 1983

75 - Louis Couturat La logique de Leibniz Felix Alcan Paris 1901, réédition Georg Olms Verlag Hildesheim, Zurich, New-York

76 - Joseph-Louis Lagrange Mécanique Analytique (1788) réédition Blanchard Paris 1965 ; Gabay Paris 1989

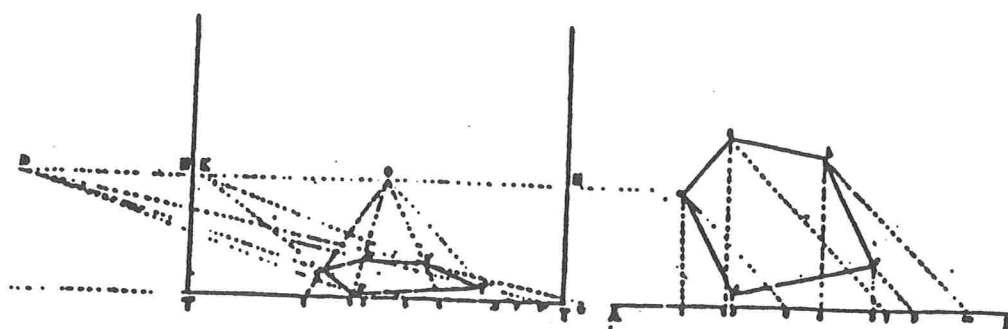


fig 1

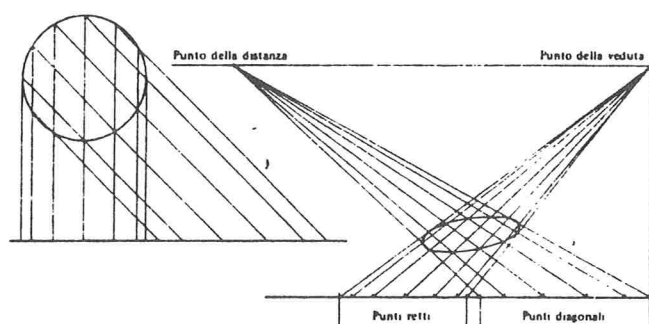


fig 2

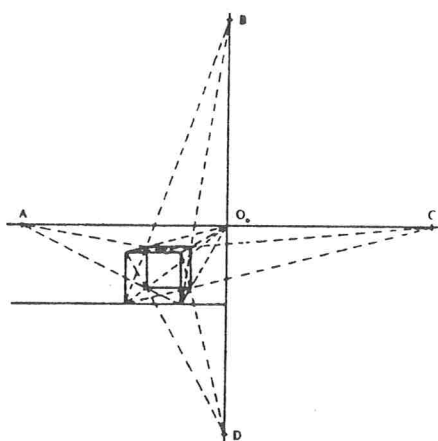


fig 3

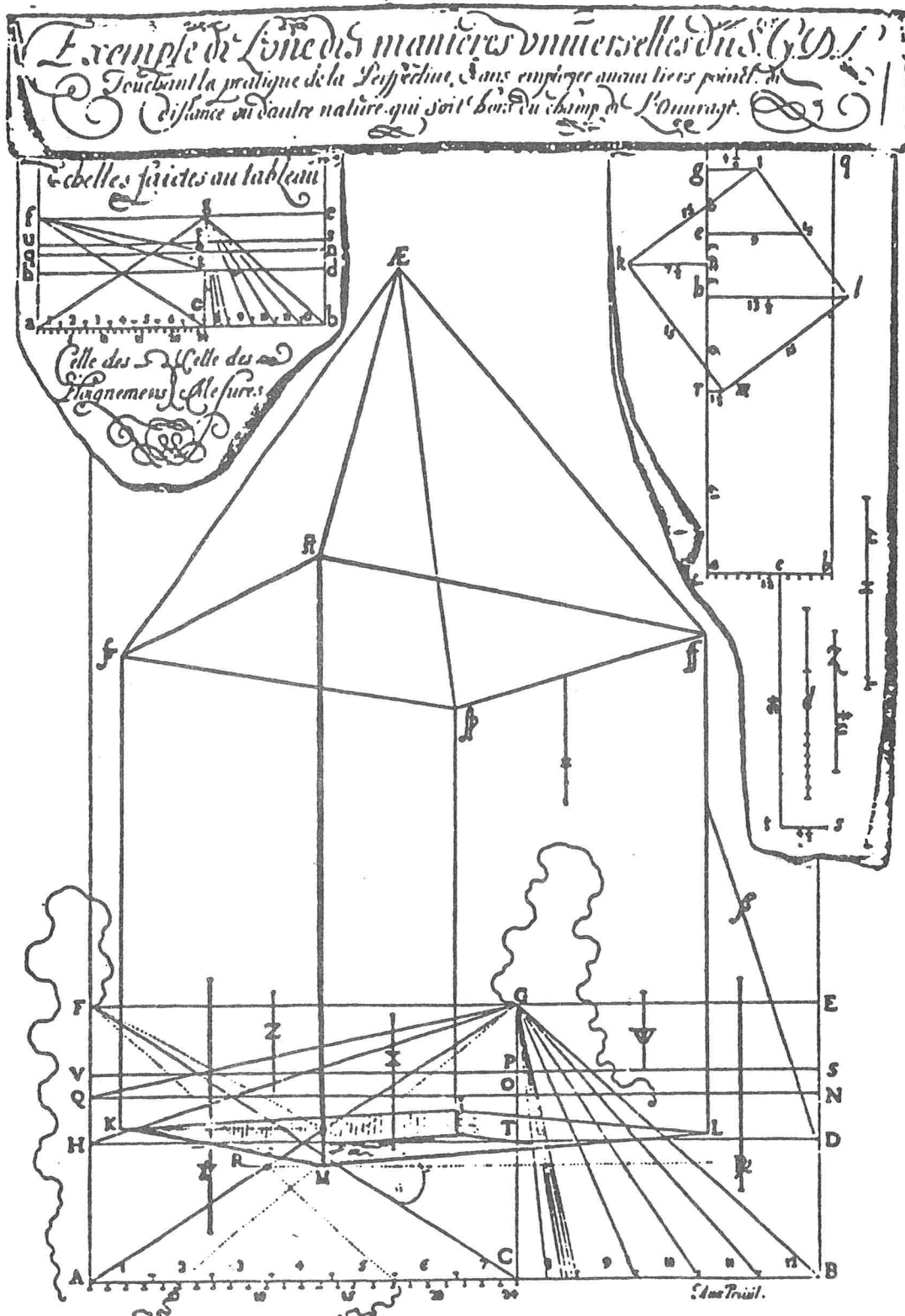


fig 4

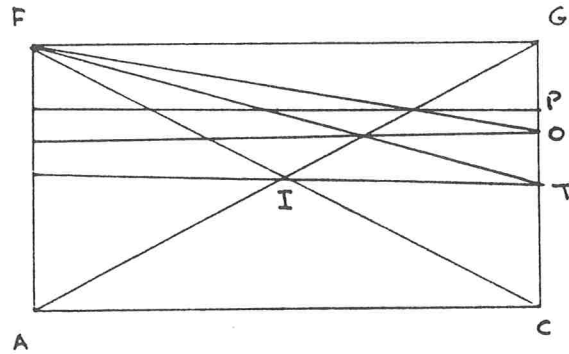


fig 5

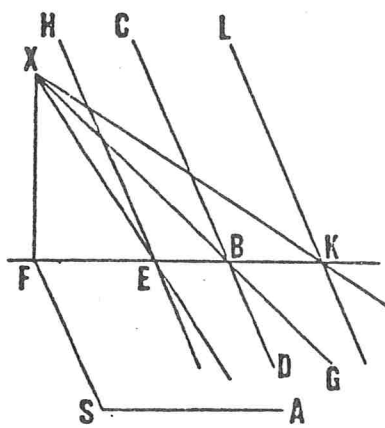


fig 6

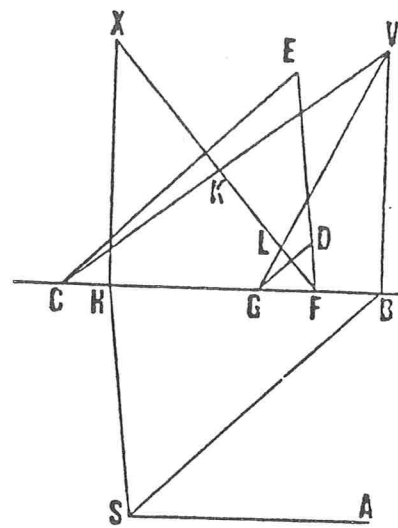


fig 7

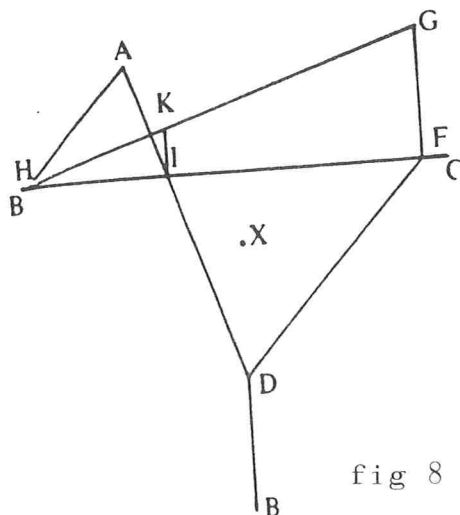


fig 8

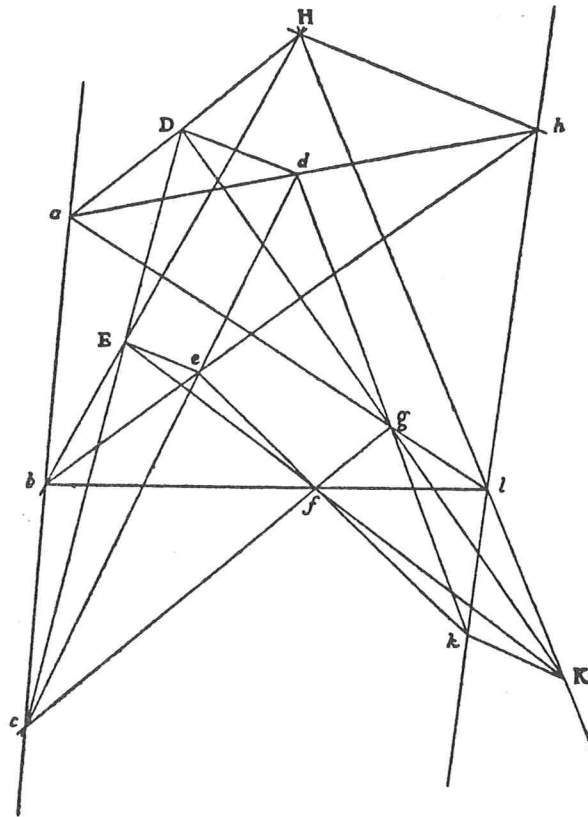


fig 9

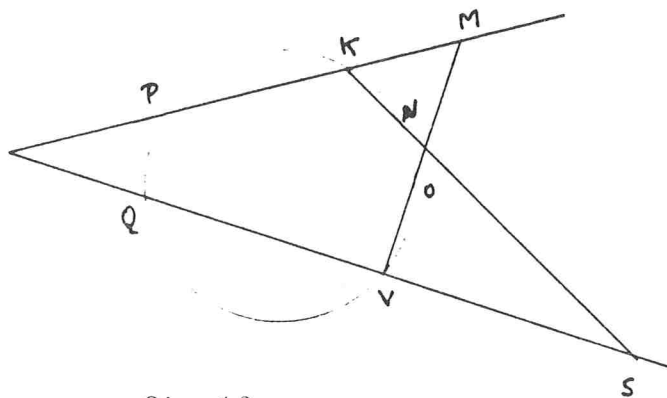


fig 10

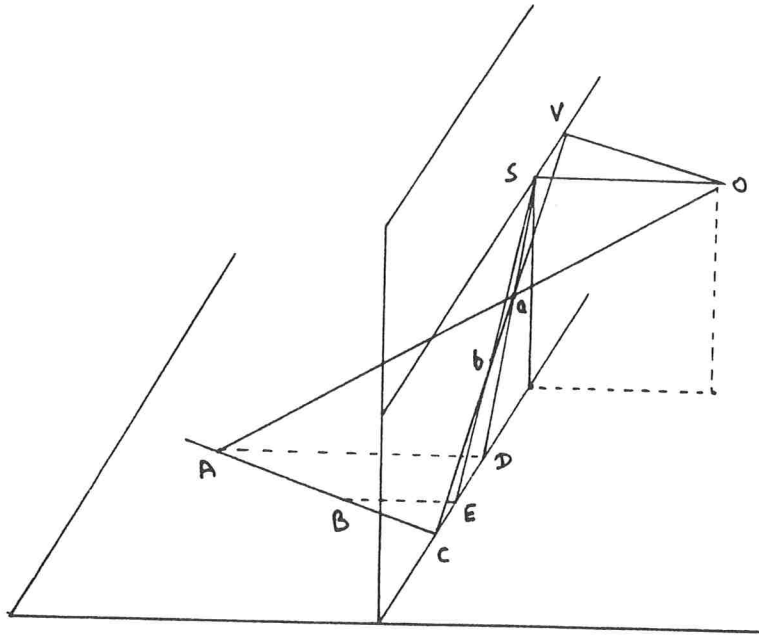


fig 11

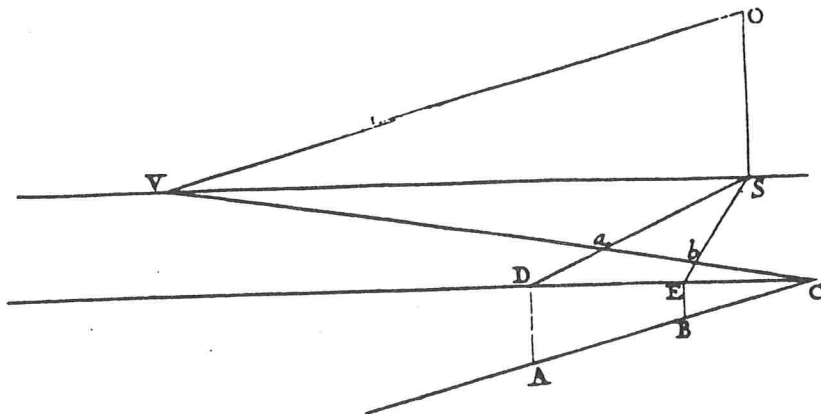


fig 12

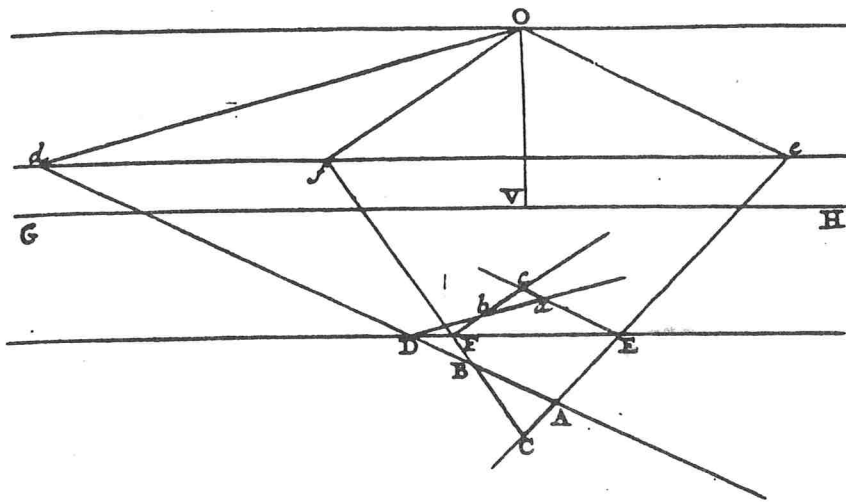


fig 13

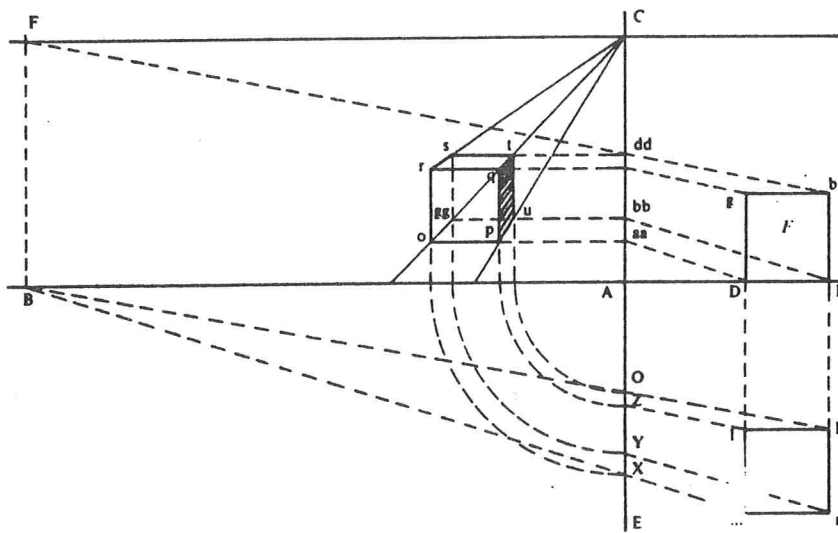


fig 14

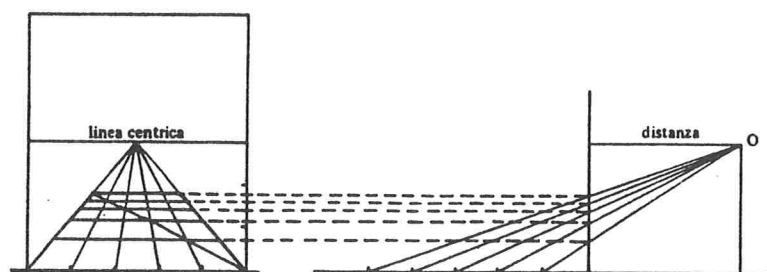


fig 15

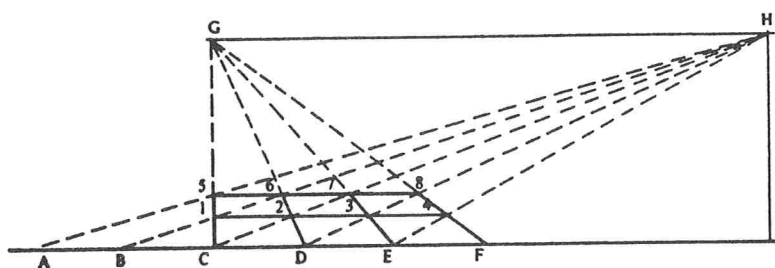


fig 16

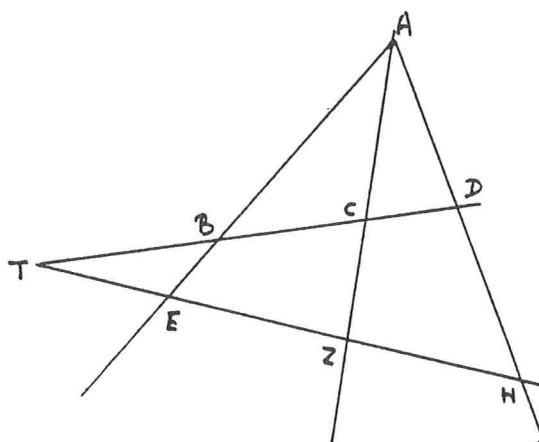


fig 17

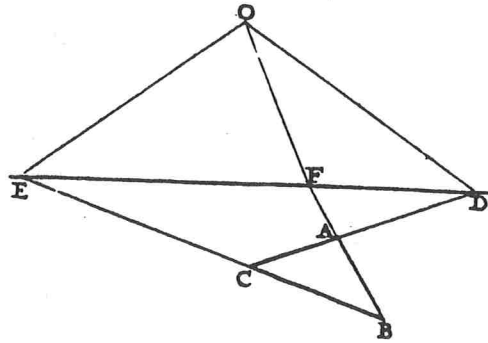


fig 18

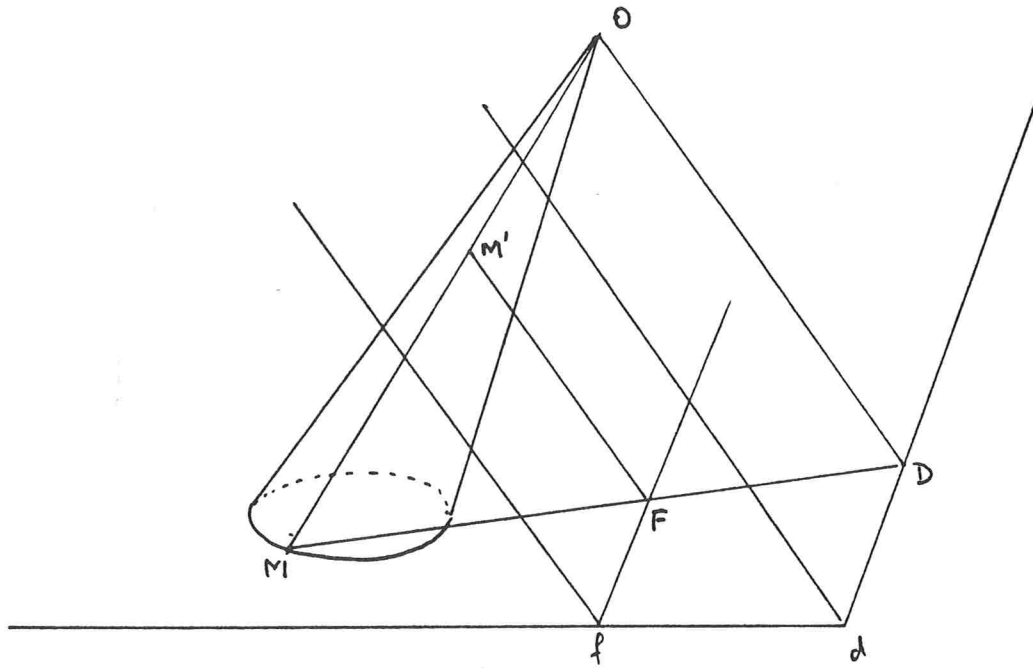


fig 19

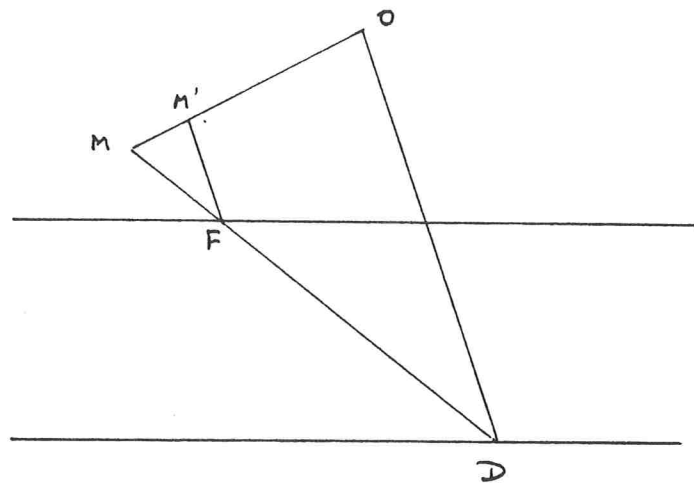


fig 20

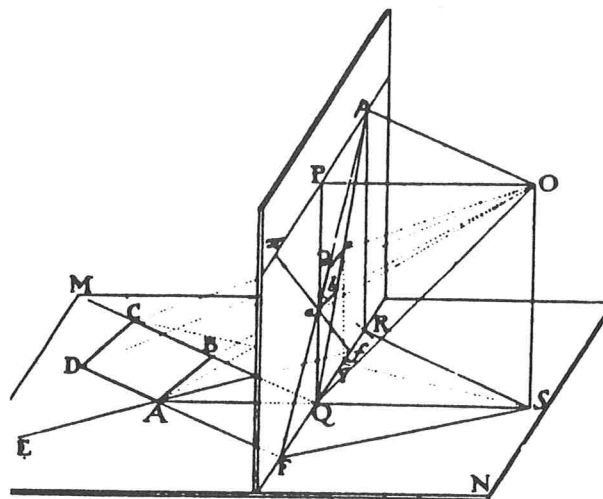


fig 21

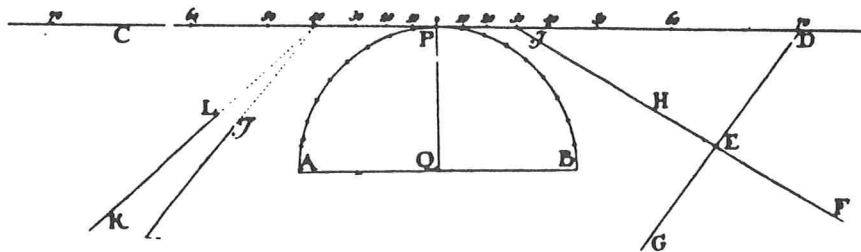


fig 22

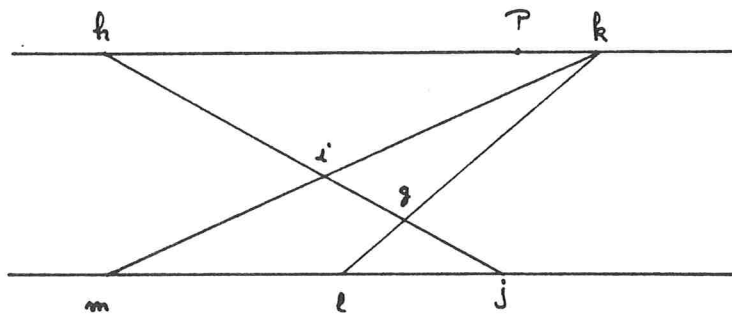


fig 23

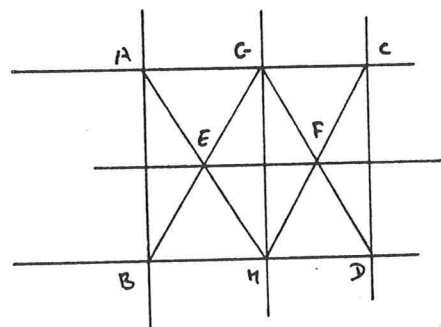
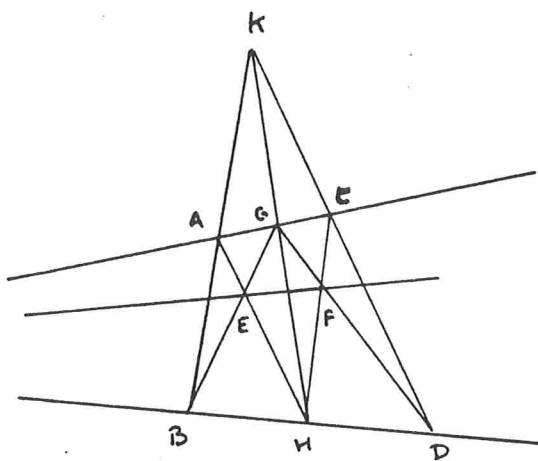


fig 24