Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

LA DÉMONSTRATION MATHÉMATIQUE : SIGNIFICATIONS ÉPISTÉMOLOGIQUES ET QUESTIONS DIDACTIQUES

Evelyne BARBIN
IREM du MANS

SOMMAIRE

LA DEMONSTRATION MATHEMATIQUE : SIGNIFICATIONS EPISTEMOLOGIQUES ET QUESTIONS DIDACTIQUES(1)

> *"On tire des lignes, on ne sait pour quelle raison, on s'aperçoit plus tard que c'étaient des nœuds coulants qui se serrent à l'improviste, pour surprendre le consentement du curieux qui cherchait à s'instruire ; celui-ci tout saisi, est obligé d'admettre une chose dont la contexture intime lui est encore parfaitement incomprise".*
>
> SCHOPENHAUER, Le monde comme volonté et comme représentation

Pourquoi démontrer ? Qu'est ce que démontrer ? Quel sens cela a-t-il de démontrer ? Quelle est la valeur et la signification d'une démonstration? Ces questions sont les préliminaires à toute réflexion sur l'apprentissage de la démonstration. Tout comme le problème du sens des contenus mathématiques enseignés est premier dans la recherche d'une démarche enseignante visant la construction des savoirs par les élèves.

L'histoire des mathématiques est un moyen de saisir la portée et la signification des objets mathématiques : à quels problèmes répondait leur élaboration, pour quelles raisons ont-ils connu des rectifications ? Les concepts et les théories mathématiques ont une histoire, tout comme la notion de rigueur ou l'idée de démonstration. Pour éclairer les questions ci-dessus nous interrogeons donc l'histoire des mathématiques en recherchant quelles furent les significations de la démonstration et en nous attachant aux moments essentiels, à savoir celui de la naissance de l'idée de démonstration et ceux où se sont opérées deux ruptures importantes, aux XVIIème et XIXème siècles.

Nous mettons en regard de cet historique, les problèmes soulevés par l'apprentissage de la démonstration et les difficultés rencontrées par les élèves. Cela nous amène à approcher en des termes différents et plus complexes qu'elle ne l'est souvent la question de l'apprentissage de la démonstration, et à indiquer les limites des équivalences "démonstration = raisonnement déductif", et "démontrer = convaincre". L'apprentissage de la démonstration doit s'opérer par étapes et nécessite la constitution d'une rationalité chez l'élève, ce qui nous conduit à privilégier l'élaboration, l'explicitation et le perfectionnement de méthodes de résolution par les élèves.

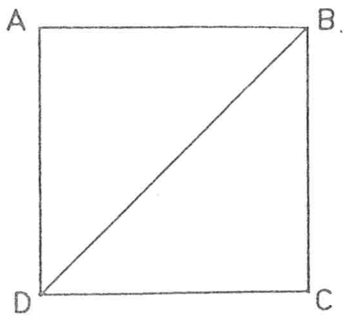
---

(1) Cet article est le texte d'un exposé effectué le 23 mars 1988 au séminaire de didactique de l'I.R.M.A.R. de Rennes (Régis GRAS).

I. Un exemple historico-pédagogique

Pour préciser notre point de vue, nous allons donner un exemple qui pose en termes historiques et didactiques la question de la valeur et de la signification d'une démonstration. Il s'agit de la démonstration de la proposition CXVII du livre X des Eléments d'Euclide, dite proposition par le pair et l'impair. L'énoncé de cette proposition est le suivant : "dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté". Deux grandeurs sont commensurables si elles ont une mesure commune ; ainsi deux segments AB et CD seront commensurables si on peut trouver un segment UV qui mesure à la fois AB et CD, c'est-à-dire si il existe deux entiers n et m tels que AB = n UV et CD = m UV. Euclide dirait encore que le segment AB a avec le segment CD la raison qu'un nombre n a avec un nombre m.

Pour démontrer que la diagonale BD du carré ABCD est incommensurable avec le côté AB de ce carré, Euclide procède par l'absurde. Notons que certains historiens avancent qu'Euclide reproduit ici la première démonstration par l'absurde élaborée par les géomètres grecs. L'argumentation d'Euclide est la suivante. Si AB et BD sont commensurables alors AB a avec BD



la raison d'un nombre n avec un nombre m. D'après le théorème de Pythagore $BD^2 = 2\ AB^2$, donc $m^2 = 2\ n^2$. On peut toujours supposer que m et n sont premiers entre eux et alors $m \neq 1$. A partir d'ici nous allons retrouver les termes actuels de la démonstration classique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, mais remarquons que le contexte de la démonstration d'Euclide est tout à fait différent : il ne s'agit pas de montrer l'irrationalité d'un nombre noté $\sqrt{2}$. Puisque m^2 est pair, m est aussi pair et n est impair. Par ailleurs, si nous posons m = 2 k-nous utilisons ici des notations modernes- alors $n^2 = 2\ k^2$, donc n^2 est pair et n est aussi pair. Un nombre ne peut être à la fois pair et impair, donc il y a contradiction. Par conséquent, AB et BD sont incommensurables.

Quelle est la valeur et la signification de cette démonstration ? Ce sont des élèves de 3ème et des étudiants de lettres en premier cycle qui vont répondre.

Dans une classe de 3ème, Françoise Van Diren-Thomas du G.E.M. de Louvain-La-Neuve (Belgique) a fait devant ses élèves la démonstration d'Euclide en s'arrêtant juste avant la conclusion, elle leur a alors demandé : "que peut-on en conclure ?"

Les élèves ont répondu : "le théorème de Pythagore est faux". Cette conclusion peut dans un premier temps, nous faire sourire. Mais dans un second temps nous devons nous demander pourquoi et comment les élèves en sont arrivés là. La première chose que nous devons remarquer est qu'ils ont bien compris le ressort de la démonstration par l'absurde. Puisque nous arrivons à quelque chose d'absurde, c'est qu'un argument de la démonstration est faux. Examinons les trois arguments qui interviennent : AB et BD sont commensurables, le théorème de Pythagore et l'argumentation sur la parité. Lequel abandonner ? Exposer la situation en ces termes peut paraître provocant au mathématicien car seule la commensurabilité des segments était mise en jeu. Nous allons revenir sur ce point.

Premier argument : AB et BD sont commensurables. Là il n'y a pas de doute pour l'élève et pour n'importe quelle personne, en dehors d'un enseignant de mathématiques. Il est évident que deux segments quelconques ont une mesure commune, il suffit de prendre celle-ci suffisamment petite. Pour mettre en doute cette commensurabilité manifeste, il faut avoir idéalisé le segment. Le segment n'est pas ce morceau de papier que je peux couper jusqu'à trouver la mesure commune, ce n'est pas ce trait de crayon ou de craie que je peux fragmenter. Pour soupçonner la possibilité d'une incommensurabilité, il faut que l'élève ait déjà réalisé une <u>conception idéale du segment</u>, voire des objets mathématiques.

Pour le mathématicien, il est évident que dans une démonstration par l'absurde il n'y a qu'un argument que l'on met en balance, celui que l'on veut justement démontrer. Les théorèmes que l'on pourrait par ailleurs utiliser ne sont pas remis en cause par l'apparition d'une contradiction. Ceci est affaire de rationalité. Ainsi, le théorème de Pythagore est lui-même le résultat d'une démonstration et on doit lui accorder un degré de certitude absolu. Nous nous attendons à ce que l'élève admette cette certitude : le théorème de Pythagore est vrai quelles que soient les circonstances de son utilisation. Mais, en fait, cela suppose que l'élève fasse sienne une certaine <u>rationalité</u> : c'est la constitution de cette rationalité qui est ici en cause.

La réaction d'étudiants de première année de DEUG littéraire apporte d'autres indications. Dans une unité optionnelle d'histoire des sciences, j'ai assuré un enseignement consacré à l'épistémologie et l'histoire des mathématiques. Le thème abordé était "nombre et mesure". Lors d'une première séance, les étudiants avaient compris la question de l'incommensurabilité, conçu la démarche extraordinaire que représentait la tentative d'une démonstration dont le résultat constitue nécessairement une rupture épistémologique. La lecture du texte d'Euclide ne leur donnant visiblement pas satisfaction, je leur demandai : "Que pensez-vous de cette démonstra- tion ?" La réponse d'un étudiant est intéressante : l'insatisfaction venait du fait que l'argument sur lequel repose la démonstration -il s'agit cette fois du fait qu'un nombre ne peut être à la fois pair et impair- est éloigné de ce qui est cause, à savoir l'impossibilité de trouver une mesure commune à deux segments.

Examinons cette remarque. Il est exact que les segments interviennent en tant que tels uniquement dans le dessin ; dans la démonstration ils ne sont que les termes d'une relation : le carré de BD est double du carré de AB. Le reste de l'argumentation est de type arithmétique : nombres premiers, parité d'un nombre et de son carré, etc... Il est vrai que, contrairement à l'attente des étudiants, la démonstration évite toute considération sur la composition des segments. Le segment est une grandeur continue qui, par divisions successives, reste encore un segment sans que l'on puisse aboutir au point. Si un point avait une certaine grosseur alors tous les segments seraient commensurables, donc le rapport entre ligne et point est en cause. La démonstration d'Euclide semble artificielle. Ce qui a permis l'artifice est la forme même de la démonstration : le procédé par l'absurde.

Ainsi, cette démonstration peut nous convaincre, mais elle force notre entendement. Nous constatons le résultat mais, comme écrit Bachelard à propos de la démonstration mathématique, "il ne suffit pas d'en constater le résultat pour en saisir le sens"(2). Nous pouvons encore ne pas saisir pourquoi on ne peut vraiment pas trouver de mesure commune à ces deux segments.

La démonstration par le pair et l'impair est, à certains égards, assez typique de la démonstration dans la géométrie grecque. Nous allons la replacer dans son cadre historique pour étudier les conditions de la naissance de la démonstration et la signification de l'idée de démonstration dans la géométrie grecque.

II. La démonstration dans la géométrie grecque

Il n'y a pas dans les mathématiques égyptiennes ou babyloniennes de démonstration, sauf si on considère que l'accumulation de démarches identiques puisse faire preuve. Au VIème siècle avant J.C. naît dans la Grèce Antique une pensée rationnelle et géométrique. Dès son origine, l'astronomie grecque se détache de toute religion astrale. Pour Anaximandre, si la terre ne tombe pas ce n'est pas grâce à Zeus, mais parce qu'étant à égale distance de tous les points de la circonférence céleste, elle n'a pas plus de raison d'aller à droite qu'à gauche, ni en haut qu'en bas(3). Les historiens ont parlé pendant longtemps de "miracle grec". Aujourd'hui, les travaux de Vernant, de Caveing ou de Szabo permettent de comprendre ce qui n'est pas un miracle mais une mutation, mutation que l'on peut expliquer par les transformations sociales et économiques que connaît cette région à cette époque.

Le VIème siècle avant J.C. voit apparaître la cité grecque et naître la démocratie. Toutes les affaires de la cité doivent faire l'objet "d'un libre débat, d'une discussion publique, au grand jour de l'agora, sous forme de discours argumentés"(4). Alors que dans la civilisation égyptienne, le pouvoir appartient à l'écriture, spécialité et privilège de scribes jaloux de leur savoir, la civilisation grecque donne l'importance à la parole. Il s'agit de convaincre par un discours fondé sur la raison, le logos. Ce qui est vrai pour l'organisation de la cité est vrai dans tous les domaines de l'intellect. Les textes de Platon sont écrits sous forme de dialogue où le maître Socrate doit convaincre son interlocuteur. Les discussions philosophiques des Eléates obéissent à un véritable art oratoire dans lequel la démonstration indirecte est particulièrement appréciée, car elle permet de révéler les contradictions contenues dans les propositions de l'autre. Ceci permet de supposer que les mathématiciens ont emprunté la démonstration par l'absurde à la philosophie éléate(5).

La démonstration apparaît donc comme un acte social qui a pour objet de convaincre l'autre. L'enjeu est politique dans l'agora, il est philosophique dans l'école de Platon ou d'Aristote: distinguer la science de l'opinion. Pour eux, la science est la connaissance vraie et certaine. Une propriété est connue scientifiquement quand on sait non seule-

(2) BACHELARD, *Le rationalisme appliqué*, p. 11.

(3) VERNANT, *Mythe et pensée chez les Grecs*, I, p. 175.

(4) Ibid, p. 177.

(5) SZABO, *Greek dialectic and Euclid's axiomatics*.

ment qu'elle est, mais pourquoi elle est et qu'elle ne peut être autrement[6]. Aristote affirme que connaître, c'est connaître par le moyen de la démonstration[7].

Comment démontrer, s'il s'agit de convaincre ? Il faut tout d'abord que l'interlocuteur admette un certain de nombre de points : ce sont les raisons premières qui, dans les Eléments d'Euclide, prennent le nom de postulats ou de demandes. Il faut ensuite obliger l'interlocuteur à consentir et le raisonnement déductif est mis en place à cet effet. Le raisonnement déductif fait des propositions mathématiques des propositions scientifiques.Les livres des Eléments d'Euclide sont constitués d'une série de définitions, de postulats et de demandes suivis de théorèmes et de corollaires qui doivent être établis uniquement -en principe- à l'aide des axiomes et des théorèmes précédents. Pour Aristote, le traitement des axiomes ne relève pas des mathématiques mais de la métaphysique : ils s'imposent grâce à la raison collective de l'humanité[8].

Est-ce si difficile de convaincre ? Oui, car les adversaires peuvent être coriaces et les questions soulevées délicates. Ainsi, les paradoxes de Zénon d'Elée qui nient la possibilité de tout mouvement. La lecture des démonstrations d'Euclide indique bien que leur principal souci est de convaincre et d'éviter toute considération qui pourrait porter le flanc aux détracteurs. Ainsi, toute considération sur l'infini est absente, le procédé par l'absurde est très fréquent et il n'y a jamais aucune indication sur la manière dont les démonstrations ont été produites. Nous pourrions dire la même chose de la plupart des démonstrations d'Archimède : nous reviendrons sur ce point lorsque nous aurons à les confronter à celles des mathématiciens du XVIIème siècle.

La démonstration par le pair et l'impair a bien les caractéristiques de la démonstration grecque : elle offre l'avantage d'éviter toute considération sur la composition du continu mais elle présente l'inconvénient de convaincre sans faire comprendre. Cependant, comme nous l'ont montré les réponses d'élèves de 3ème et d'étudiants, elle convainc l'interlocuteur qui partage avec Euclide un certain degré de rationalité, et reconnaît donc l'idéalité des segments considérés, la validité d'une démonstration par l'absurde ou la véracité de certains arguments mathématiques. La démonstration est un acte social dans un microcosme d'interlocuteurs partageant déjà une même rationalité et les mêmes connaissances. Comme le note Bachelard, "le caractère apodictique ne se décrète pas"[9]. Cette remarque a des implications didactiques sur lesquelles nous reviendrons.

Euclide a préféré la démonstration indirecte au procédé par antyphérèse. Ce procédé, développé par les Grecs, est pourtant directement lié à la proposition II du livre X des Eléments qui caractérise les grandeurs incommensurables. L'énoncé en est le suivant : "Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent ; ces grandeurs seront incommensurables". Il est directement calqué sur la proposition I du livre VII qui est l'algorithme d'Euclide pour décider que deux nombres sont premiers entre eux : "Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entre eux". Le problème est, bien sûr, que pour les grandeurs continues l'incommensurabilité est obtenue grâce au caractère infini du procédé ! Pourtant la démonstration par antyphérèse permet de faire voir, sans doute mieux que la démonstration par le pair et l'impair, comment on arrive à une procédure

---

[6] ARISTOTE, *Métaphysique*, AI, 981.

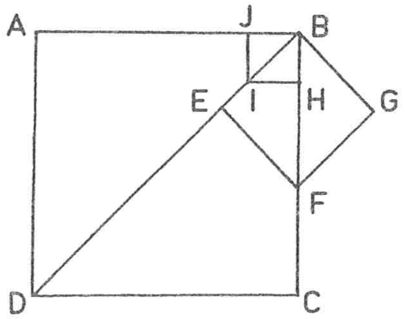
[7] ARISTOTE, *Organon, Seconds Analytiques*, 12, 15.

[8] MOREAU, *Aristote et son école.*

[9] Op. cit., p. 11.

infinie et donc pourquoi côté et diagonale sont incommensurables. Voici cette démonstration :

Considérons le carré ABCD, nous allons opérer -conformément à la proposition II du livre X- une suite de différences de segments, à commencer par la différence entre la diagonale BD et le côté DC. Le problème est de faire apparaître sur la figure des



segments qui représentent les différences successives. Pour commencer, nous portons le point E sur la diagonale BD tel que DE = DC, nous avons BD-DC = BE. Pour continuer, menons en E la perpendiculaire à BD qui coupe BC en F. Il est aisé de montrer que BE = EF = FC. La différence suivante est DC-BE = DC-FC = BF. Construisons le carré BEFG, et notons que la différence que nous devons maintenant effectuer est BF-BE, c'est-à-dire encore la différence entre la diagonale et le côté d'un carré. Nous pouvons recommencer, comme précédement : prendre H sur BF tel que HF = BE, et la différence suivante est BF-BE = BH, puis mener HI perpendiculaire à BF, et la différence suivante est BE-BH = BI. Arrivés à ce point, il est manifeste que nous nous retrouvons dans une position identique à celle du départ, nous avons à effectuer la différence entre la diagonale BI et côté BH du carré BHIJ. Le carré est plus petit, mais nous pouvons recommencer indéfiniment la même série d'opérations dans des carrés de plus en plus petits.

Cette démonstration présente l'inconvénient de ne point éviter l'infini, elle est donc susceptible d'être repoussée par un contradicteur qui demanderait ce que deviennent ces carrés de plus en plus petits et leurs propriétés. Cependant, on peut penser que les mathématiciens du XVIIème siècle auraient, eux, préféré la démonstration par antyphérèse à la démonstration par le pair et l'impair. En effet, la première offre l'intérêt d'être un procédé direct qui correspond exactement au critère d'incommensurabilité, elle peut donc nous faire sentir bien plus que la seconde la raison de l'incommensurabilité des segments concernés. Le XVIIème siècle aurait sans doute dit que la première peut nous éclairer, alors que la seconde ne peut que nous convaincre.

III. Démontrer : convaincre ou éclairer ?

Le XVIIème siècle marque une rupture dans la conception de la démonstration. Les textes des Anciens, en particulier ceux d'Euclide ou d'Archimède, sont connus et fort admirés. Mais un certain nombre de critiques, concernant leurs démonstrations, sont formulées : les théorèmes se suivent sans aucun ordre, les démonstrations ne dépendent d'aucune méthode générale, les démonstrations par l'absurde pullulent et, surtout, les Anciens n'ont pas donné leurs moyens de découverte. Nous retrouvons ces critiques sous la plume de Torricelli, de Descartes, de Pascal, d'Arnauld et Nicole, ou de Wallis.

S'il faut expliquer cette rupture, nous pouvons la trouver dans la soif d'inventer des géomètres du XVIIème siècle, elle-même liée à l'apparition de la fonction d'ingénieur-mathématicien. Galilée est le prototype de cette nouvelle race de savants plus intéressés à la mesure et au fonctionnement des phénomènes qu'à leur explication(10). Les mathématiciens vont avoir pour principal souci de développer des méthodes : méthode des indivisibles, méthode des tangentes, méthode cartésienne, méthode projective. Ces méthodes sont autant de moyens de résoudre par la même voie plusieurs problèmes, d'inventer de nouveaux résultats et de produire des heuristiques.

Dans La logique ou l'art de penser de 1674, les jansénistes et amis de Pascal, Arnauld et Nicole, énumèrent les défauts qui se rencontrent d'ordinaire dans la méthode des géomètres. Ces défauts sont autant de critiques vis à vis des Anciens, et ils tirent "d'Euclide même les exemples de ces défauts".

Le premier défaut est "d'avoir plus soin de la certitude que de l'évidence et de convaincre l'esprit que de l'éclairer". L'alternative convaincre ou éclairer est posée dès l'énoncé du premier défaut. Nous la retrouvons chez la plupart des auteurs d' Eléments de géométrie du XVIIème siècle qui justifient leurs écrits par la nécessité de suppléer aux déficiences des Eléments d'Euclide. Ce premier défaut est la cause essentielle des cinq autres défauts.

Le second défaut est de "prouver des choses qui n'ont pas besoin de preuves". Les géomètres croient qu'ils convaincront mieux en trouvant quelque preuve des choses même les plus évidentes. Ainsi, Euclide croit bon de prouver que la somme des longueurs de deux côtés d'un triangle est supérieure à la longueur du troisième.

Le troisième défaut est constitué par les "démonstrations par l'impossible". Ces démonstrations sont "très ordinaires dans Euclide". Elles convainquent l'esprit sans l'éclairer "car notre esprit n'est point satisfait, s'il ne sait non seulement que la chose est, mais pourquoi elle est".

Le quatrième défaut est constitué par les "démonstrations tirées par des voies trop éloignées". Arnauld et Nicole font remarquer que "tout Euclide est plein de ces démonstrations par des voies étrangères". La démonstration par le pair et l'impair cumule, comme nous l'avons vu, ce défaut et le précédent.

Les deux derniers défauts concernent le manque de méthode : le cinquième est de "n'avoir aucun soin du vrai ordre de la nature" et le sixième de "ne point se servir de divisions et de partitions"(11).

L'importance de la méthode est proclamée par Descartes et la recherche de la méthode est le principal objet de son Discours de la méthode dont La Géométrie constitue une partie. La règle IV de ses Règles pour la direction de l'esprit est sans ambiguïté : "La méthode est nécessaire pour la recherche de la vérité"(12) . Commentant cette règle, il écrit son insatisfaction à la lecture des textes anciens : "Certes j'y lisais sur les nombres une foule de développements dont le calcul me faisait constater la vérité (...). Mais pourquoi il en était ainsi et comment on parvenait à le trouver, ils ne me paraissaient pas suffisamment le montrer à l'intelligence même (...). Rien n'est plus futile dans ces démonstrations superficielles que le hasard fait découvrir plus souvent que l'art". Descartes est persuadé que les Anciens possédaient cet art d'inventer, cette

(10) Voir E. BARBIN et alia, *Mathématiques, arts et techniques au XVIIème siècle.*

(11) ARNAULD et NICOLE, *La logique ou l'art de penser*, p. 325 à 331.

(12) DESCARTES, *Règles pour la direction de l'esprit*, p. 18 à 28.

"véritable mathématique", mais ils ont dû "la faire disparaître par une sorte de ruse coupable". "Ils ont préféré, pour se faire admirer nous présenter à la place quelques vérités stériles démontrées avec une subtile rigueur logique comme des effets de leur art, plutôt que nous apprendre leur art lui-même qui aurait complètement tari notre admiration". Cette avarice supposée des Anciens est aussi dénoncée par les italiens Torricelli et Nardi ou par l'anglais Wallis(13) .

Le géomètre et pédagogue Lamy reprend à son compte la distinction convaincre ou éclairer, dans son ouvrage de 1683, Les entretiens sur les sciences, consacré à l'éducation scientifique. Le maître Théodose y conseille au novice Eugène : "pour bien apercevoir il faut attendre la clarté avant que de consentir : on ne le doit point faire qu'après qu'on s'y sent forcé par l'évidence de la vérité"(14). Dans ces entretiens, le maître apprend à son élève "comme l'on doit se servir des Sciences, pour se faire l'esprit juste, et le coeur droit" et lui donne "la méthode d'étudier". Dans le chapitre concernant la méthode, le maître précise : "il n'y a pas d'autre manière d'acquérir naturellement une connaissance qu'en la tirant de l'idée ou de la définition de la chose qu'on examine. Ces seules démonstrations éclairent l'esprit, car celle qu'on emploie en montrant que l'on ne peut contester ce que l'on propose, qu'il ne s'ensuive une grande absurdité, ces démonstrations dis-je convainquent l'esprit mais elles ne l'éclairent pas"(15).

Dans la préface à ses Eléments de géométrie de 1685, Lamy critique ouvertement les livres des Anciens qui "ne sont pas si propres pour exercer l'esprit que ceux qui ont été faits en ce temps". Il fait l'éloge de son temps où la Géométrie a été cultivée avec plus de succès qu'en aucun autre : "On y a fait de grandes découvertes, et ce qui est plus considérable, on a trouvé le moyen d'éclaircir ce que les Anciens avaient écrit avec obscurité et confusion". Le livre cinquième de l'ouvrage est consacré à la méthode, car l'on peut déduire "tout ce qui se peut savoir de Géométrie, lorsqu'on suit une bonne méthode". Il y donne, pour un même résultat, une démonstration qui convainc et une autre qui éclaire(16).

Il peut être intéressant de noter, sans pouvoir établir un parallèle, que les mathématiciens chinois distinguent dans l'idée de démontrer le "bian" qui a pour objet de convaincre et de persuader, du "xiao" qui a pour objet de faire comprendre. Cette distinction doit être rapprochée de la manière dont les mathématiciens chinois accueillirent les Eléments d'Euclide lorsque les jésuites les importèrent dans leur contrée au XVIIème siècle. Ils en apprécièrent fort les résultats mais ne furent vraiment pas sensibles à leurs démonstrations. En effet, les théorèmes d'Euclide comprennent rituellement plusieurs parties -l'énoncé, la construction de la figure, l'explication de l'énoncé sur la figure, la démonstration proprement dite et la conclusion-. Les mathématiciens chinois gardèrent tout sauf... la démonstration. Les Eléments d'Euclide leur semblaient vraiment par trop verbeux(17).

Au XVIIème siècle, la signification de la démonstration change : la démonstration n'est pas donnée pour convaincre, elle a pour but d'éclairer. Par là-même, ce qui a valeur de démonstration peut changer. Nous avons vu que le raisonnement déductif mis en place par les géomètres grecs répondait bien à la fonction de convaincre. Au XVIIème siècle,

(13) Voir E. BARBIN, *Heuristique et démonstration en mathématiques*, p. 147 à 150.

(14) LAMY, *Entretiens sur les sciences*, p. 64.

(15) Idem, p. 88-89

(16) LAMY, *Eléments de géométrie*, p. 278 à 282.

(17) Lire MARTZLOFF, *Histoire des mathématiques chinoises*.

la volonté d'inventer et d'éclairer correspond au privilège accordé à l'élaboration et à l'explicitation de méthodes de résolution -nommées "méthodes de découverte"-. Mais quelle est la valeur démonstrative des méthodes heuristiques ?

IV. De la méthode : valeur épistémologique

Les mathématiciens du XVIIème siècle se posent bien sûr le problème de la validité, comme démonstration, des méthodes qu'ils introduisent. Ces méthodes éclairent parce qu'elles montrent la voie par laquelle on est passé et apportent l'évidence. Mais ce qui est rendu évident doit-il être considéré comme démontré ? L'italien Nardi écrit que "toute évidence est certaine alors que toute certitude n'est pas évidente". Cette formule est significative : à partir du moment où le géomètre du XVIIème siècle se place hors la loi du raisonnement déductif, c'est à la certitude qu'il doit en appeler pour prétendre à la démonstration. L'appel à la certitude ne va pas sans poser des difficultés car, selon la méthode considérée, les avis des mathématiciens vont pouvoir être différents. La méthode des indivisibles est l'une de celles qui posent le plus de problèmes, alors que la méthode cartésienne paraît dès l'abord ne laisser aucun doute sur la vérité des résultats qu'elle permet d'obtenir. Quoi qu'il en soit de la certitude de leurs méthodes, les géomètres ne peuvent renoncer à les utiliser : elles sont nécessaires à la découverte de nouveaux résultats et à l'obtention de procédés généraux, elles sont indispensables à la satisfaction de leur soif d'inventer.

La méthode des indivisibles, parue en 1635 dans un ouvrage de l'italien Cavalieri, est une méthode générale pour résoudre des quadratures -c'est à dire pour comparer des surfaces. Le XVIIème siècle connaît les quadratures d'Archimède par la méthode d'exhaustion. Celle-ci consiste, pour démontrer l'égalité de deux surfaces A et B, à montrer que chacune des inégalités $A > B$ et $A < B$ conduit à une contradiction. Les contradictions sont obtenues en approchant la surface A par une surface rectiligne C, inscrite ou circonscrite, de sorte que la différence entre les surfaces A et C soit aussi petite que voulu. Cette méthode présente trois inconvénients dénoncés par les géomètres du XVIIème siècle. D'abord, c'est une méthode indirecte qui suppose que l'on connaisse a priori la mise en rapport que l'on veut établir : ce n'est pas une "méthode de découverte". Ensuite, c'est une méthode pénible qui demande de longs développements. Enfin, elle nécessite de résoudre chaque quadrature cas par cas. Cependant, elle offre l'avantage d'éviter toute considération sur l'infini ou sur la composition du continu.

L'idée essentielle de la méthode des indivisibles est de comparer deux surfaces en comparant les indivisibles de ces surfaces, les indivisibles étant les segments découpés sur ces surfaces par un plan parallèle à un plan donné appellé "règle". Après avoir procédé à une confrontation indivisible par indivisible et établi l'existence d'un même rapport entre indivisibles correspondants, on en conclut à l'existence du même rapport entre les surfaces comparées. Cette méthode a le mérite d'être directe et courte, mais elle entraîne le géomètre qui veut la justifier sur le terrain difficile de la composition du continu. La "géométrie des indivisibles" est largement utilisée au XVIIème siècle, car elle constitue aux yeux de tous un merveilleux procédé d'invention. En revanche, sa valeur comme démonstration ne fait pas l'unanimité[18].

---

(18) Sur l'usage des indivisibles au XVIIème siècle, voir E. BARBIN, *Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au XVIIème siècle.*

La méthode cartésienne pose, de manière moins critique que la précédente, la question de la validité de la méthode comme moyen de démonstration. En effet, le dénombrement méthodique des connaissances paraît ne laisser aucun doute sur l'évidence et la certitude d'un résultat. La méthode cartésienne a deux volets : le premier dans le Discours de la Méthode et le second dans La géométrie. Les préceptes du Discours de la méthode sont les suivants :

"Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle (...). Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre. Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour montrer peu à peu, comme par degrés, jusques à la connaissance des plus composés (...). Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre"(19).

Dans La Géométrie, Descartes donne une méthode générale pour résoudre des problèmes géométriques en les ramenant à la résolution d'une équation algébrique. Il écrit : "Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues, et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une Equation"(20).

Un résultat obtenu en utilisant la méthode cartésienne peut-il comporter une part d'incertitude ? Pour Descartes, la réponse est nette : "les choses que nous concevons fort clairement et fort distinctement sont toutes vraies"(21). Que l'on consente ou non à cette règle philosophique, il faut bien admettre que le dénombrement méthodique des connaissances et la conduite ordonnée de la pensée, auxquels le mathématicien est invité à s'appliquer, ne peut lui laisser aucun doute intime. Si la méthode conduit à la certitude alors elle peut prétendre à une valeur démonstrative. Cela nous entraîne à admettre, à côté du raisonnement déductif, une seconde façon de démontrer. Dans les Méditations métaphysiques, Descartes franchit ce pas :

"La manière de démontrer est double : l'une se fait par l'analyse ou résolution, et l'autre par la synthèse ou composition.

L'analyse montre la vraie voie par laquelle une chose a été méthodiquement inventée (...); en sorte que, si le lecteur la veut suivre, (...) il n'entendra pas moins parfaitement la chose ainsi démontrée, et ne la rendra pas moins sienne, que si lui-même l'avait inventée.

La synthèse (...) se sert d'une longue suite de définitions, de demandes, d'axiomes, de théorèmes et de problèmes (...), elle arrache le consentement du lecteur, tant obstiné et opiniâtre qu'il puisse être ; mais elle ne donne pas, comme l'autre, une entière satisfaction aux esprits de ceux qui désirent d'apprendre, parce qu'elle n'enseigne pas la méthode par laquelle la chose a été inventée"(22).

---

(19) DESCARTES, *Discours de la méthode*, p. 47.

(20) DESCARTES, *La géométrie*, p. 5-6.

(21) DESCARTES, *Discours de la méthode*, p. 60.

(22) DESCARTES, Réponses aux secondes objections, *Méditations métaphysiques*, p. 175.

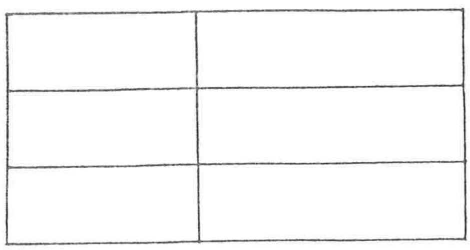
La conception cartésienne d'une double façon de démontrer, l'analyse et la synthèse, sera souvent reprise au cours des siècles suivants ; en particulier, dans les traités où -comme déjà dans les propos de Descartes- on s'adresse à des apprenants. Le sentiment de démontrer ne vient-il pas d'abord du cheminement même que l'on a emprunté pour découvrir un résultat ? Cette remarque a des implications didactiques qui nous conduisent à poser, sur le plan didactique, la question de la valeur des méthodes de résolution.

V. De la méthode : valeur didactique

L'acte de démontrer peut avoir plusieurs significations. Par conséquent, toute approche didactique de la démonstration nécessite une réflexion épistémologique qui passe par deux questions : quelle est cette signification pour l'élève ? quelle est-elle pour l'enseignant ? Nous avons dit que si la démonstration a pour signification d'éclairer, de rendre évident et certain, alors la méthode de résolution peut valoir comme démonstration. Ainsi, l'élève qui a suivi une méthode pour résoudre un problème peut s'en contenter. Tandis que, si l'enseignant pense que la démonstration a pour signification de convaincre, il va attendre des élèves une autre démarche. Nous allons examiner, selon ce point de vue, une expérience analysée par Nicolas Balacheff dans un article intitulé Preuve et démonstration au collège.

Dans cet article, Nicolas Balacheff veut montrer que "la nécessité de prouver est liée à la situation dans laquelle on se trouve" et que "la preuve est un acte social qui s'adresse à un individu (éventuellement soi-même) que l'on veut convaincre". Pour cela, le chercheur met en place un dispositif expérimental destiné à mettre en situation d'interactions et de communications des groupes d'élèves. Nous reviendrons plus loin sur l'aspect socio-cognitif de l'expérience. Ce qui nous intéresse, dans un premier temps, est le type de problème posé aux élèves, ce que les élèves en ont fait et les conclusions du chercheur, afin de pointer l'opposition qui existe entre la valorisation de la méthode par les élèves et la signification que le chercheur accorde à la démonstration. Il y a là une rupture d'ordre épistémologique, qui n'est pas relevée par le chercheur, et qui est fort intéressante pour notre propos.

Le problème posé aux élèves est le suivant : "combien y-a-t-il de rectangles dans cette figure ?"



La rédaction de l'article nous permet de suivre de près les démarches des élèves. Ces démarches relèvent pour beaucoup de la méthode cartésienne : une revue générale qui permet de ne rien omettre, un dénombrement mené souvent habilement avec un codage parfois astucieux. Cependant, le chercheur est insatisfait, il ne s'agit là que d'"explications" et non de "preuves". Pour lui, "la preuve du résultat implique l'examen de l'exhaustivité" et de la non-redondance de la procédure d'énumération". Les élèves de 3ème se sont bornés à énoncer une procédure d'énumération qui fait apparaître son caractère systématique. Comme l'écrit le chercheur, "la conviction est fondée sur la reconnaissance du caractère systématique de la procédure". A partir du moment où l'on est certain de la procédure, pourquoi fournir en plus une preuve ? "J'en suis sûre" dit une élève, "Qu'est-ce-qu'on peut démontrer là dedans ?" se demande un autre. Les élèves de Balacheff feraient de bons disciples de Descartes.

Venons maintenant à l'attente du chercheur qui, notons-le, n'est peut-être pas tout à fait à la mesure de la question posée : "combien y-a-t-il de rectangles ?" Il semble, qu'en tant que disciple de Lakatos, le chercheur attende des réfutations : "puis-je avoir oublié un rectangle ?" et "est-ce que je suis sûr de ne pas avoir compté deux fois le même rectangle ?" Il aurait voulu que ces questions soient examinées par les élèves. Balacheff a lui-même sa propre conception de la démonstration ; pour lui "la notion de contradiction se trouve la clé de voûte de toute problématique de la validation"[(23)] . Si la conception des élèves est proche de celle du philosophe du XVIIème siècle, celle du chercheur en est différente. Celui-ci met la contradiction au centre de l'idée de démonstration, ce qui ne signifie pas qu'il doit être mis du côté des Anciens. Balacheff propose, en fait, une conception qui est celle du mathématicien du XXème siècle, comme nous le verrons dans la chapitre suivant.

Ainsi, au dénombrement des obstacles rencontrés par les élèves et relevés par le chercheur -obstacle lié à la situation mathématique, obstacle psycho-génétique, obstacle didactique-, il faudrait ajouter un obstacle épistémologique lié à la signification même de l'idée de démonstration.

La rupture épistémologique qui s'est produite au XVIIème siècle nous amène à poser deux questions concernant l'apprentissage de la démonstration.

La première question est la suivante : si la démonstration peut avoir une autre signification que celle de convaincre, pourquoi privilégier uniquement le raisonnement déductif ou l'enchaînement logique ?

En 1765, Clairaut indique dans son ouvrage à vocation pédagogique, Eléments de géométrie, qu'il "évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes ; c'est à dire de ces propositions, où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir". Il préfère donner la voie de la découverte afin que "les Commençants aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'Inventeur; et par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention"[(24)]. Trois ans auparavant, Jean-Jacques Rousseau publiait l'Emile dans lequel il écrit "vous trouverez toute la géométrie élémentaire en marchant d'observation en observation, sans qu'il soit question ni de définitions, ni de problèmes, ni d'aucune autre forme démonstrative que la simple superposition"[(25)]. Au siècle suivant, en 1841, Cournot note : "On peut satisfaire à toutes les conditions d'un enchaînement logique, sans éclairer l'esprit sur les rapports essentiels des idées et des théories auxquels on l'applique (...). J'avoue que j'attacherais moins de prix à mettre dans la démonstration d'un théorème cette rigueur extrême, qu'à faire clairement apercevoir la raison de ce théorème et ses connexions avec les autres vérités mathématiques"[(26)]. Ainsi, jusqu'à la fin du XIXème siècle, des auteurs se défient du raisonnement déductif ou de l'enchaînement logique quand il s'agit d'éclairer des "commençants".

---

(23) BALACHEFF, *Processus de preuve et situation de validation*, p. 109.

(24) CLAIRAUT, *Eléments de géométrie*, préface p. XII.

(25) J.J. ROUSSEAU, *Emile*, p. 157.

(26) COURNOT, préface du Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal, p. XIV, cité par ROSTAND, *Sur la clarté des démonstrations mathématiques*.

Aujourd'hui, dans les programmes et pour beaucoup d'enseignants, l'idée de démonstration est synonyme de raisonnement déductif. Dans l'ouvrage de Rostand, Sur la clarté des démonstrations mathématiques, il n'est quasiment question que du raisonnement logico - déductif. Dans un questionnaire distribué à des enseignants de collège lors d'un stage I.R.E.M., il était demandé de donner une définition au mot démonstration : 14 réponses sur 17 se ramènent à l'idée d'enchaînement logique(27). Il aurait été intéressant d'avoir leurs réponses à la question : "à quoi sert une démonstration ?". Si les enseignants associent d'emblée l'idée de démonstration à celle de raisonnement déductif, s'ils pensent que cette forme de raisonnement va émerger "naturellement" de la tête des élèves -même mis en situations d'interactions ou de conflits socio-cognitifs -sans soupçonner qu'il puisse y avoir là déjà un obstacle épistémologique, ne doit-on pas s'attendre encore à des attentes déçues ?

La seconde question est la suivante : si l'apprentissage de la démonstration suppose la construction de la rationalité de l'élève, quelles peuvent être les vertus didactiques d'une approche méthodologique ?

Dans le chapitre intitulé "Le rationalisme enseignant et le rationalisme enseigné" de son ouvrage Le rationalisme appliqué, Bachelard note : "Comment, par exemple, méconnaître l'aspect pédagogique du dénombrement des connaissances conseillé par Descartes ? Cette méthodique révision (...) n'a de sens que si elle nous oblige à prendre conscience de notre identité rationnelle à travers la diversité des connaissances acquises. Leur ordre nous ordonne (...). Au fond, le dénombrement cartésien a deux fonctions : garder les connaissances et maintenir leur ordre jusqu'à ce que la conscience d'ordre soit assez claire pour que l'ordre des connaissances rappelle les connaissances. C'est là précisément, dans l'intimité du sujet, un acte de rationalisme appliqué, l'acte utile d'un esprit qui s'applique sur lui-même"(28). Notons que c'est un acte individuel qui permet ici à l'être de devenir un "être de connaissance", alors que la conception de la démonstration comme acte social conduit à rechercher des interactions sociales. Nicolas Balacheff regrette dans l'article précédemment évoqué "l'égocentrisme" des élèves, la perspective méthodologique au contraire le nécessite -au moins pour un moment.

Le mot méthode a quasiment disparu du vocabulaire de l'enseignant des mathématiques. Cependant, Polya dans La découverte des mathématiques écrit : "le premier et le principal souci de l'enseignement des mathématiques dans les lycées est de souligner la méthodologie dans la résolution des problèmes". De même, le G.E.M. de Louvain-la-Neuve insiste dans la construction du savoir sur "les acquis méthodologiques" conçus comme la voie de l'autonomie, et juge inefficace de partir de l'enchaînement logico - déductif. Le G.E.M. reprend la distinction entre analyse et synthèse(29). Par ailleurs, des activités méthodologiques sont expérimentées par des enseignants de L.E.P. dans un groupe de l'I.R.E.M. de Nantes. Il est proposé aux élèves des exercices suffisamment compliqués pour qu'une méthode soit indispensable à l'obtention d'un résultat(30).

Nous reviendrons sur les questions didactiques posées plus haut après avoir évoqué une seconde rupture épistémologique dans l'histoire de la démonstration. Au XIXème siècle, les rapports entre démonstration, évidence et contradiction connaissent de profonds changements.

---

(27) Groupe collège de Laval, janvier 1988.

(28) BACHELARD, *Le rationalisme appliqué*, p. 14.

(29) G.E.M., *Apprivoiser l'infini, un enseignement des débuts de l'analyse*, chapitre XIII.

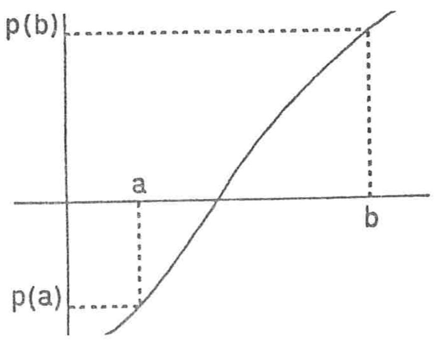
(30) FLANDROIS, *Les chemins de la logique*.

VI. Démonstration, évidence et contradiction

Les géomètres du XVIIème siècle s'appuient beaucoup sur le sentiment d'évidence : ils le recherchent, il est pour eux source de certitude. Arnauld et Nicole dénigrent ceux qui prouvent ce qui est suffisamment clair et évident. L'évidence est positive. Dans ses Eléments de géométrie de 1823, Legendre définit un théorème comme "une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé démonstration". Les idées de démonstration et d'évidence sont fortement liées. Pourtant, presque à la même époque, en 1817, Bolzano écrit un mémoire dans lequel il s'oppose avec force à la conception de la démonstration comme "fabrication d'évidences", conception qui accompagne parfaitement la signification de la démonstration qui "éclaire". Il marque ainsi une rupture dans la signification de la démonstration qui va s'amplifier avec la construction des géométries non euclidiennes et le mouvement formaliste.

Le mémoire de Bolzano s'intitule Démonstration purement analytique du théorème entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation. Dans la préface de ce mémoire, Bolzano explique pourquoi il considère que la démonstration entièrement correcte du théorème, que l'on appelle aujourd'hui de D'Alembert-Gauss, n'a pas encore été donnée. Ce théorème -un polynôme réel de degré n admet n racines réelles ou complexes- a été énoncé au XVIIème siècle par Girard et Descartes. Puis il a connu plusieurs démonstrations proposées par d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, etc..., Gauss en a donné trois en 1799. Pour démontrer ce théorème, un argument consiste à prouver qu'un polynôme de degré impair admet nécessairement une racine réelle. Il est aisé de prouver qu'un tel polynôme admet une valeur positive et une valeur négative, il reste alors à en déduire qu'il s'annule pour une valeur réelle. Bolzano examine les arguments qui ont été avancés jusqu'ici pour établir ce dernier fait, et explique pourquoi il est insatisfait.

La méthode la plus courante s'appuie sur une considération géométrique : toute ligne continue dont les valeurs sont positives, puis négatives, ou inversement, doit nécessairement couper quelque part l'axe des abcisses. Bolzano rétorque qu'"il n'y a absolument rien à objecter ni contre la justesse, ni contre l'évidence de ce théorème



géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode" puisqu'on s'appuie sur des considérations géométriques pour déduire des vérités de mathématiques pures. Il ajoute : "dans la science, les démonstrations ne doivent nullement être de simples procédés de fabrications d'évidences mais doivent être plutôt des fondements ; il faut exposer le fondement objectif que possède la vérité à démontrer". La vérité géométrique est peut être évidente, mais cela est insuffisant, elle a quand même besoin d'un fondement. Bolzano rejette également la démonstration basée sur l'idée de mouvement et de temps qui procède par analogie avec les mouvements de deux corps dont l'un serait au début derrière l'autre, et l'a devancé à la fin, et doit donc nécessairement avoir une fois passé à côté de lui. Pour Bolzano, il s'agit là d'un exemple qui ne démontre pas le théorème.

Une démonstration doit être un fondement, et ce qui fonde une proposition c'est de pouvoir établir des relations entre cette proposition et d'autres propositions. Ici le fondement de la proposition est qu'une fonction continue, positive pour une valeur de la variable, négative pour une autre, doit être nulle pour une valeur intermédiaire. C'est ceci qu'il faut démontrer. Bolzano le fait et, pour cela, définit pour la première fois une fonction continue, montre que les fonctions polynômiales sont continues, énonce et montre le théorème dit de Bolzano -Weierstrass, introduit la notion de limite d'une suite et introduit -avant Cauchy- le critère de Cauchy de convergence d'une suite. Il a alors réalisé son voeu : relier la proposition à d'autres propositions mathématiques.

Pourquoi cette rupture par rapport à l'idée de démonstration comme "fabrication d'évidences" ? Certaines raisons tiennent à Bolzano lui-même, d'autres correspondent à de nouvelles exigences qui se posent aux mathématiciens du XIXème siècle.

Il est impossible de séparer les recherches mathématiques de Bolzano de son activité philosophique. Bolzano s'oppose à Kant sur le mode d'existence des êtres et des propositions mathématiques : le second considère que les êtres et les propositions mathématiques n'existent pas en dehors de l'esprit du mathématicien, alors que le premier estime que les propositions mathématiques ont une existence ontologique -elles existent en tant que telles. Pour Bolzano, ce qui fait l'existence d'une proposition mathématique, c'est sa relation aux autres propositions(31).

Bolzano rejette, nous l'avons vu, la considération géométrique sur laquelle s'appuyaient plusieurs de ses prédécesseurs. Cette attitude correspond à la tendance, de plus en plus marquée, à abandonner la géométrie comme fondement des mathématiques. Au XVIIIème siècle se sont développées avec succès les méthodes cartésiennes et infinitésimales qui donnent à l'algèbre, à l'analyse et à l'arithmétique la primauté sur la géométrie. De plus, les failles de la géométrie euclidienne -à commencer par le fameux axiome d'Euclide- sont de plus en plus souvent relevées(32).

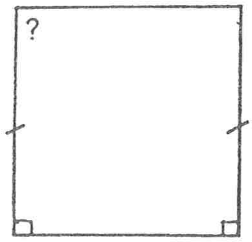
Par ailleurs, le début du XIXème siècle connait un mouvement visant à plus de rigueur dans les méthodes mathématiques : Bolzano devance Cauchy, Abel et Weierstrass. Ce mouvement s'explique, en particulier, par la difficulté des problèmes mathématiques à résoudre, et par la fonction d'enseignant que plusieurs mathématiciens sont invités à assurer après la Révolution et sous l'Empire.

---

(31) SEBESTIK, préface au mémoire de Bolzano.

(32) Voir KLINE, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, chap. 40.

La construction des géométries non euclidiennes va renforcer la rupture entre l'idée de démonstration et celle d'évidence. Les tentatives des précurseurs sont à ce titre intéressantes. Dans un ouvrage de 1733, intitulé Euclide lavé de toute tache, Saccheri démontre l'axiome d'Euclide. Pour cela, il utilise le quadrilatère introduit par le mathématicien arabe Omar Khuyyam au XIème siècle. Il s'agit là de démontrer un résultat



équivalent à l'axiome d'Euclide, à savoir que si un quadrilatère isocèle a deux angles droits à la base alors la valeur commune des deux autres angles est l'angle droit. Saccheri procède par l'absurde, en examinant ce qu'il nomme l'hypothèse de l'angle obtus et l'hypothèse de l'angle aigu. Le première est assez vite écartée, en revanche la seconde le conduit à établir toute une série de propositions qui sont déjà de véritables énoncés de géométrie non euclidienne(33). Pourtant, Saccheri s'arrête et affirme : "L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse car elle répugne à la nature de la ligne droite". Les figures sur lesquelles il doit raisonner sont trop impossibles, les lignes droites sont trop tordues : la situation est inadmissible. Saccheri doit prendre en compte la nature des êtres géométriques, et les propositions qu'il établit logiquement doivent aussi exprimer la vérité de l'espace physique. Comment admettre que des lignes droites soient à ce point tordues ? Il faut s'arrêter, dit Saccheri. Lobatchevsky et Bolayi ne s'arrêteront pas. Après les constructions des géométries non euclidiennes, le point de vue du mathématicien change. L'espace physique est-il euclidien ou non euclidien ? Les mathématiques ne peuvent rien en dire. On peut prendre chacune des trois hypothèses - angle droit, aigu ou obtus- et on aura, dans chaque cas, un ensemble de propositions non contradictoires. Les axiomes changent de statut: ce ne sont plus des vérités évidentes à chacun, ce sont de libres hypothèses.

Les Fondements de la géométrie d'Hilbert de 1899 ne supposent même plus que nous ayons une connaissance ou une intuition des objets géométriques, points, droites et plans. Tout ce que nous devons savoir, ce sont les relations, données par les axiomes, entre les différentes classes d'objets. Comme l'écrit Einstein, dans La géométrie et l'expérience, "la seule chose qu'on suppose est la validité des axiomes (...) qui doivent être également conçus comme purement formels, c'est-à-dire dépourvus de tout contenu intuitif ou accessible à l'expérience. Ces axiomes sont des créations libres de l'esprit humain (...). Par les termes de point, droite, etc... il ne faut entendre dans la géométrie axiomatique que des concepts schématiques vides de contenu". Pour Legendre, une proposition est vraie lorsqu'elle est rendue évidente par le moyen d'une démonstration. Selon la conception formaliste, une proposition est vraie si elle est non contradictoire avec un système d'axiomes. On peut dire, maintenant, que "la clé de voûte de la démonstration est la contradiction" pour reprendre l'expression de Balacheff.

L'idée de contradiction apparaît également dans la conception grecque de la démonstration, nous devons donc préciser qu'elle intervient d'une toute autre façon dans l'Antiquité et au XXème siècle. En effet, il est fort ambigu de se référer en même temps à la conception grecque -démontrer c'est convaincre- et à la conception moderne -démontrer c'est prouver la non contradiction-. Une telle ambiguïté ne nous semble pas écartée dans certains travaux de Nicolas Balacheff(34). Chez les Grecs, la

(33) CHABERT, *Les géométries non euclidiennes.*

(34) BALACHEFF, *Processus de preuve et situations de validation.*

contradiction intervient dans un acte social, elle est utilisée pour mieux convaincre l'autre. Aujourd'hui, la contradiction intervient dans un système de propositions mathématiques, elle est utilisée pour produire des résultats mathématiques.

Dans la conception formaliste, l'idée d'évidence n'a aucun sens puisque les "termes" points, droites, plans ne doivent rien devoir à nos représentations physiques : tout est à démontrer. Ce qui fait la réalité des objets mathématiques, ce sont les relations qui existent entre eux. Enseigner la géométrie selon ce point de vue a été tenté avec la réforme des mathématiques modernes, nous savons ce qu'il en est advenu. Aujourd'hui l'esprit des nouveaux programmes ne se veut plus formaliste, et la question de l'évidence se pose de nouveau avec acuité. Comme le fait remarquer un stagiaire C.P.R. de l'Académie de Nantes, les choses étaient plus simples avec les "mathématiques modernes" -pour l'enseignant en tous les cas- puisque rien n'était évident. Aujourd'hui peut-on faire l'économie, dans l'étude de l'apprentissage de la démonstration, d'une réflexion épistémologique sur la signification de la démonstration, sur le rôle de l'évidence et sur celui de la contradiction ?

VII. Conclusion

> *"Il y aurait ainsi à écrire une histoire de la démonstration ou plutôt des conditions de légitimation de la démonstration, histoire qui nous permettrait de mieux comprendre ce qui signifie une telle légitimation, ainsi que les hésitations et les difficultés qui accompagnent sa mise en place, histoire qui nous permettrait aussi de nous libérer de certains délires logico-mathématiques qui sont loin d'avoir disparu de l'enseignement d'aujourd'hui"*[35].
>
> Rudolf BKOUCHE

Au terme de cet itinéraire historique, je ne prétends pas avoir donné une histoire de la démonstration -qui reste à écrire et que, comme Rudolf Bkouche, j'appelle de mes voeux- mais j'espère avoir montré que l'idée de démonstration a une historicité. La démonstration a connu historiquement plusieurs significations, et il est important que les enseignants sachent que la notion de démonstration n'est pas un absolu. L'histoire de la démonstration ne va pas d'ailleurs dans le sens que certains pourraient croire. F. Rostand écrit dans son ouvrage, <u>Sur la clarté des démonstrations mathématiques</u>, que "les mathématiques ne se sont pas développées (dans leur histoire) dans le sens de la plus grande clarté ; seule la rigueur a été recherchée, la clarté étant généralement atteinte de surcroît, car la rigueur peut naturellement entraîner la clarté, et inversement, le manque de rigueur suppose en un sens un manque de clarté"[36].Nous avons vu que cela n'est pas exact.

Quelles conclusions d'ordre didactique en tirer ? J'en tire tout de suite deux conclusions, même si elles peuvent paraître provocantes :

---

(35) BKOUCHE, *Quelques grandes problématiques de l'histoire de la géométrie.*

(36) ROSTAND, *Sur la clarté des démonstrations mathématiques*, p. 12.

1- associer d'emblée l'idée de démonstration au raisonnement déductif ne va pas de soi.
2- affirmer péremptoirement que démontrer c'est convaincre est une façon dogmatique d'aborder la question du sens de la démonstration.

Ces conclusions vont à l'encontre de travaux récents des I.R.E.M. concernant la démonstration, mais peut être le problème difficile de l'apprentissage de la démonstration mérite-t-il un peu de dialectique.

Comme je l'ai indiqué, plus haut, l'équivalence "démonstration = raisonnement déductif" est souvent considérée comme, si j'ose dire, un axiome. Pour Nicolas Balacheff, le terme de démonstration est réservé aux explications obtenues à l'aide de règles de déduction, les explications et les preuves sont des discours plus ou moins acceptables, et les raisonnemnets sont des manipulations d'informations(37). Michel Mante reprend ces définitions dans son article L'initiation au raisonnement déductif et le nouveau programme du collège, ce qui lui permet à la lettre de déclarer qu'un démonstration produite par un élève "est une preuve, mais ce n'est pas une démonstration"(38). Le cas de la démonstration en question est intéressant -l'élève s'appuie sur l'existence de points d'intersection de deux cercles qu'il a dessinés-, car si nous suivons Michel Mante nous devons dire que la proposition 1 du Livre I d'Euclide n'est pas une démonstration. Dominique Gaud et Jean-Paul Guichard parlent également dans leur article sur la démonstration en collège, Apprentissage de la démonstration, de "la démonstration en tant que formulation d'un raisonnement déductif"(39). Une équipe de l'I.R.E.M. de Grenoble va encore plus loin dans ce sens puisqu'elle nous propose, dans un article intitulé A propos de la mise en oeuvre des nouveaux programmes, une "géométrie de la déduction"(40).

Les tenants de l'équivalence "démonstration = raisonnement déductif" l'associent à la signification de la démonstration comme acte social destiné à convaincre. Ainsi, Michel Mante écrit que la nécessité de prouver a deux raisons : "pour convaincre les autres, pour se convaincre soi-même". Michel Bridenne, qui a précisé "qu'une proposition est dite démontrée si elle est la dernière proposition d'une suite finie de propositions construites suivant les règles d'un système de la logique formelle", estime que l'acte de démontrer "n'est pas indépendant d'un désir de convaincre"(41).

Nous avons déjà noté les limites épistémologiques de ces conceptions. Ces conceptions ont également des implications didactiques qui nous semblent poser problème et que nous relèverons en quatre points.

1. Le raisonnement déductif : un obstacle épistémologique

A la lecture de l'article de Nicolas Balacheff, Preuve et démonstration en mathématiques au collège, nous avons constaté que les élèves ayant emprunté une méthode pour résoudre un problème s'en contentaient -un élève se demandant même "qu'est-ce qu'on peut démontrer là-dedans ?". Les élèves n'ont pas cherché à réfuter ou à contredire leur résultat : "Est-ce que j'ai pu oublié un rectangle ?". Nous pouvons élargir la portée de cet exemple en disant que le premier sentiment de démonstration provient du cheminement même que l'on a adopté pour démontrer, de la construc-

(37) BALACHEFF, *Preuve et démonstration en mathématiques au collège*, p. 263.
(38) *Suivi scientifique 5ème*, p. 279.
(39) *Petit x*, n° 4, p. 6.
(40) Distribué à la Commission Inter-IREM 1er cycle.
(41) *Feuille de vigne*, IREM de Dijon, février-mars 1988, p. 20.

tion même de l'objet de connaissance. Si l'on pose que la démonstration est un acte social destiné à convaincre, on gomme ce premier sentiment. Si on dit à l'élève "ceci est une explication, ce n'est pas une démonstration", comment l'élève pourra-t-il franchir l'obstacle qui va de sa démonstration à celle qu'attend l'enseignant -surtout si l'enseignant attend un raisonnement déductif- Quelles peuvent être, aux yeux d'un débutant, les vertus du raisonnement déductif ? L'enseignant répond que le raisonnement déductif convainc, alors que l'élève se contente d'être éclairé. Il y a là un obstacle épistémologique.

2. Comprendre une démonstration

L'équivalence "démontrer = convaincre" pose un autre problème, car si l'on est convaincu par la démonstration d'un autre, doit-on consentir, ou comme le conseille Lamy à son élève, doit-on attendre pour cela "de se sentir forcé par l'évidence de la vérité ?" Est-il facile de faire sienne la démonstration d'un autre ? Bachelard écrit, à propos de la démonstration en géométrie : "La démonstration a une autonomie si nette qu'on ne peut la recevoir du dehors, qu'il ne suffit pas d'en constater le résultat pour en saisir le sens (...). Pour comprendre il faut ici participer à une émergence"(42). S'il y a quelque chose à comprendre en géométrie, et j'espère que les enseignants sont de cet avis, alors la remarque de Bachelard va à l'encontre de l'équivalence "démontrer = convaincre", ou la réduit à "démontrer = se convaincre soi-même". Chacun de nous en a fait l'expérience, a connu cette impression de ne pas avoir compris une démonstration qui coule de source et a senti le besoin de griffonner "sa" démonstration. Il ne suffit pas d'être convaincu, on veut être éclairé. Il paraît difficile de négliger cet aspect dans l'apprentissage de la démonstration

3. Débat scientifique et conflit socio-cognitif

Notre point de vue conduit à relativiser la portée du débat scientifique dans l'apprentissage de la démonstration.

Les travaux genevois, en particulier ceux de Doise et Mugny dans Le développement social de l'intelligence, s'accordent bien avec la signification de la démonstration comme acte social destiné à convaincre. Le débat scientifique est certainement efficace dans une initiation à la réfutation et à la déduction, il doit aussi être utilisé dans les moments d'institutionnalisation. Cependant, il faut que les enseignants qui désirent mettre en pratique le conflit socio-cognitif en connaissent les limites -en particulier en ce qui concerne l'apprentissage de la démonstration. Ces limites sont signalées par Doise et Mugny, ainsi que par les chercheurs du C.R.E.S.A.S. dans un ouvrage récent.

La première difficulté dans la pratique du débat scientifique est qu'elle peut laisser croire que tout va sortir de la tête des enfants, y compris le raisonnement déductif au collège. "Quant au rôle de l'enseignant, je dirai simplement que celui-ci peut aussi apprendre à se taire" écrit Michel Bridenne(43). Comme le note Michel Deleau dans un article de l'ouvrage du C.R.E.S.A.S., On n'apprend pas tout seul. Interactions sociales et construction des savoirs, l'idée que l'adulte devrait disparaître en tant que tel et que la construction des savoirs aurait lieu "naturellement" à partir des conflits cognitifs entre enfants est fallacieuse(44). Le raisonnement déductif est l'aboutissement de la

(42) BACHELARD, *Le rationalisme appliqué*, p. 11.

(43) Op. cit., p. 26.

(44) DELEAU, *le groupe d'enfants dans la stratégie éducative*, p. 130.

culture grecque de l'Antiquité, les mathématiciens chinois ne s'y sont jamais intéressés, et nos élèves ne sont pas des philosophes grecs...ni des mathématiciens chinois.

Une autre limite est signalée dans l'ouvrage de Doise et Mugny cité plus haut, elle concerne le passage de la réussite collective à la réussite individuelle : "il ne faut pas s'attendre forcément à une supériorité cognitive des sujets ayant travaillé en groupe". L'enseignant doit savoir qu'une performance collective peut être possible sans que les individus partenaires de ces interactions progressent lors d'un travail individuel ultérieur. Il faut attendre que le "processus interpersonnel se transforme en un processus intrapersonnel" pour reprendre la formule de Vygotski[(45)]. Le problème posé par ce passage est particulièrement délicat en ce qui concerne l'apprentissage de la démonstration car, comme nous l'avons noté, on peut être convaincu par une démonstration sans en saisir le sens, et ce tant que l'on ne l'aura pas produite soi-même.

Enfin, il ne faut pas oublier que les relations entre les élèves peuvent être asymétriques et que les relations élèves-adultes peuvent être source de progrès, ce qui fait dire à Doise et Mugny qu'"il serait erroné de prétendre a priori que toute interaction sociale favorise le développement cognitif, et que l'interaction entre pairs lui sera plus propice que l'interaction avec l'adulte"[(46)].

4. Les motivations de la démonstration

Pourquoi démontrer si démontrer signifie convaincre ? Michel Mante répond que "la production des preuves est liée à l'incertitude et à la présence d'un enjeu qui incite l'élève à lever cette incertitude. L'enjeu est généralement lié à la volonté de se convaincre ou de convaincre les autres"[(47)]. Par conséquent, l'enseignant doit créer une situation où les élèves se trouvent dans l'incertitude d'un résultat, ce qui doit les conduire à conjecturer, à confronter leurs conjectures et à démontrer pour trancher et convaincre. Par ailleurs, un article de l'I.R.E.M. de Limoges, intitulé Evidence - démonstration, nous propose plusieurs situations géométriques ingénieuses qui contredisent l'évidence et doivent donc faire apparaître la nécessité d'une démonstration[(48)]. Ici la question suivante se pose : si la démonstration peut aussi avoir pour rôle de rendre évident, de faire comprendre, n'y-a-t-il pas un risque à la présenter d'emblée comme une "antinomie de l'évidence"[(49)] ?

Présenter la démonstration comme un moyen de trancher en cas d'incertitude signifie que l'attention de l'élève est tournée vers l'obtention d'un résultat. Par exemple, est-ce que oui ou non la somme des angles d'un triangle égale 180° ? Cette remarque amène à se poser une autre question : puisque le but de l'enseignant est l'apprentissage de la démonstration ne doit-il pas trouver des situations l'apprentissage qui visent autant, ou davantage, les moyens à mettre en oeuvre pour obtenir un résultat que le résultat même ? La recherche d'un résultat peut parfois avoir un intérêt supérieur au résultat établi.

Nous reprenons à notre compte les deux questions soulevées par Dominique Gaud et Jean-Paul Guichard à la fin de leur article concernant l'apprentissage de la démonstration conçue comme "formulation d'un raisonnement déductif". Ils demandent : "Mais quels autres types de preuves devraient faire l'objet d'un apprentissage au niveau du

---

(45) DOISE & MUGNY, *Le développement social de l'intelligence*, p. 174.

(46) Op. cit., p. 179.

(47) Op. cit., p. 27.

(48) Op. cit., p. 273.

(49) *Feuille de vigne*, op. cit., p. 32

collège ? Pourrait-on les recenser, et peut-être viser moins à enseigner des contenus pour des contenus que des contenus pour des méthodes et des démarches ?"[(50)] Je complèterai leur dernière interrogation en ajoutant : et si l'on visait aussi parfois des méthodes pour des méthodes ?

5. Enseignement des méthodes, méthodologie et construction de la rationalité

Les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage de la démonstration indiquent que cet apprentissage va de pair avec la construction des connaissances et la construction de la rationalité des élèves. Nous l'avions noté à propos de la démonstration par le pair et l'impair présentée en classe de 3ème. Un autre exemple nous est fourni par une collègue de l'I.R.E.M. de Rennes[(51)]. Elle avait fait avec ses élèves de collège une démonstration concernant une propriété du triangle. Mais un élève était insatisfait, il ne voulait pas croire que cette démonstration valait pour tous les triangles, en particulier des triangles très plats, plus plats que celui sur lequel avait été effectuée la démonstration, et il a fallu qu'il refasse la démonstration sur un triangle plat avant de consentir. L'enseignant apprend à l'élève à douter d'un résultat obtenu par le dessin d'une ou de plusieurs figures particulières, il s'appuiera même sur ce doute pour faire sentir la nécessité d'une démonstration. Que se passe-t-il si l'élève doute d'une démonstration faite sur une figure particulière, certes, mais qui est supposée quelconque ?

Cet exemple repose le problème de la signification du dessin. Je ne pense pas qu'il faille le considérer "comme une activité de tracé et non comme un ersatz de preuve intellectuelle"[(52)]. Dessiner une figure est déjà une activité intellectuelle puisque nous sommes en train de représenter des objets purement intellectuels : triangles, médianes, milieu de segment, etc... La rationalité consiste ici à saisir que le triangle dessiné n'est qu'une représentation d'un triangle, elle permet de comprendre pourquoi il est quelconque.

Nous avons indiqué plus haut que la construction de méthodes par les élèves avait un intérêt certain dans la constitution de la rationalité. Dans cette perspective, quelles situations didactiques doit-on mettre en oeuvre ? Puisqu'il s'agit de construire des méthodes il faut sûrement partir de situations - problèmes nécessitant une mise en ordre et un dénombrement méthodique des connaissances. Dans un premier temps, tous les moyens pour parvenir au résultat seraient bons, mais on demanderait par contre à l'élève d'expliciter sa démarche. C'est ce retour sur lui-même, cette introspection, qui selon Bachelard constitue un acte de rationalisme appliqué et permet à l'être de devenir un "être de connaissance". Pour Piaget, on peut obtenir d'excellentes introspections avec des enfants à partir de l'âge de 7 ans. Dans <u>Le jugement et le raisonnement chez l'enfant</u>, il estime considérable la faculté pour la conscience de prendre conscience d'elle-même. Il écrit : "La justification logique d'un jugement se fait sur un autre plan que l'invention de ce jugement. Alors que celle-ci est inconsciente et résulte de la recombinaison d'expériences antérieures, celle-là exige la réflexion et le langage, bref, une introspection construisant au-dessus de la pensée spontanée une "pensée de la pensée" qui seule est capable de nécessité logique"[(53)]. Cette remarque semble particulièrement intéressante en ce qui concerne l'apprentissage de la démonstration.

---

(50) *Petit x*, n° 4, p. 15.

(51) Colloque interne, Belle-Ile, Ascension 1988.

(52) IREM de Grenoble, op. cit.

(53) PIAGET, *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*, p. 121.

Allant dans le même sens, des chercheurs du C.R.E.S.A.S. proposent pour l'apprentissage de la lecture un "dialogue métacognitif" où l'on demande à l'apprenti lecteur comment il fait pour lire[54]. Concernant l'apprentissage de la démonstration, la question posée à l'élève ne serait pas "comment tu démontres ce résultat ?" mais "comment es-tu parvenu à cette démonstration ?" Ce travail serait la première étape d'un travail d'explicitation des méthodes, puis de perfectionnement des méthodes de démonstration -le perfectionnement des méthodes pouvant être réalisé à partir des confrontations des méthodes produites par les élèves-. La méthodologie consiste en cette réflexion sur les méthodes. Etape par étape, on arriverait à une méthode subtile de démonstration qui est le raisonnement déductif. La construction de la rationalité de l'élève n'est-elle pas prioritaire dans l'enseignement des mathématiques ?

---

(54) G. CHAUVEAU & E. CHAUVEAU, *Interactions chercheur-enfant et apprentissage de la lecture.*

BIBLIOGRAPHIE

ARNAULD, Nouveaux éléments de géométrie, 1667, réédition I.R.E.M. de Dijon, 1982.

ARNAUD & Nicole, La logique ou l'art de penser, 1674, réédition P.U.F., Paris, 1965.

BACHELARD, Le rationalisme appliqué, P.U.F., Paris, 1949.

BALACHEFF, Preuve et démonstration en mathématiques au collège, R.D.M., vol. 3, n° 3, 1982.

BALACHEFF, Processus de preuve et situations de validation, IIIè Ecole Eté Didactique, 1984.

BARBIN, Heuristique et démonstration en mathématiques in Fragments d'histoire des mathématiques n° 2, A.P.M.E.P., 1987.

BARBIN & al, Mathématiques, arts et techniques au XVIIème siècle, Publications de l'Université du Maine, n° 4, 1987.

BKOUCHE, Quelques grandes problématiques de l'histoire de la géométrie, Université d'Eté d'histoire des mathématiques de Toulouse, à paraître.

BOLZANO, Démonstration purement analytique..., 1817, traduction SEBESTIK, Revue Franc. d'hist. Sc., 1964.

CAVEING, La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque, Université de Lille III, 1982.

CHABERT, Les géométries non euclidiennes, Université d'Eté d'histoire des mathématiques de Toulouse, à paraître.

CHAUVEAU & CHAUVEAU, Interactions chercheur-enfant et apprentissage de la lecture in C.R.E.S.A.S. On n'apprend pas tout seul.

CLAIRAUT, Eléments de géométrie, 1765, réédition Siloë, Laval, 1986.

C.R.E.S.A.S., On n'apprend pas tout seul, Interactions sociales et constructions des savoirs, E.S.F., Paris, 1987.

DELEAU, Le groupe d'enfants dans la stratégie éducative in C.R.E.S.A.S. On n'apprend pas tout seul

DESCARTES, Les méditations métaphysiques, P.U.F., Paris, 1961.

DESCARTES, La géométrie, 1637, Christophe David, Paris, 1705.

DESCARTES, Règles pour la direction de l'esprit, Vrin, Paris, 1966.

DESCARTES, Discours de la méthode, Flammarion, Paris, 1966.

DOISE & MUGNY, Le développement social de l'intelligence, Interéditions, Paris, 1981.

EUCLIDE, Les éléments, traduction Peyrard, édition Blanchard, Paris, 1966.

FLANDROIS, Les chemins de la logique, I.R.E.M. de Nantes, 1987.

GAUD & GUICHARD, Apprentissage de la démonstration, in petit x, 1984, n° 4.

G.E.M., Apprivoiser l'infini, un enseignement des débuts de l'analyse, Ciaco Editeur, Louvain-La-Neuve, 1987.

I.R.E.M. de Grenoble, A propos de la mise en oeuvre des nouveaux programmes.

I.R.E.M. de Dijon, Feuille de vigne, Février - Mars 1988.

KLINE, Mathematical thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, 1972.

LAMY, Entretiens sur les sciences, 1694.

LAMY, Eléments de géométrie ou de la mesure des corps, 1685.

MANTE, L'initiation au raisonnement déductif et le nouveau programme du collège in Suivi Scientifique 5ème, I.R.E.M. de Lyon, 1987.

MARTZLOFF, Histoire des mathématiques chinoises, Masson, Paris, 1987.

MOREAU, Aristote et son école, P.U.F., Paris, 1962.

PIAGET, Le jugement et le raisonnement chez l'enfant, Delachaux et Niestlé, Neufchâtel, 1967.

PLATON, Oeuvres complètes, tome II, La Pléïade, Paris, 1950.

ROUSSEAU, Emile ou de l'éducation, Garnier, Paris, 1964.

SZABO, Greek dialectic and Euclid's axiomatics, in LAKATOS, Problems in the philosophy of mathematics, North Holland Company, 1972.

VERNANT, Mythe et pensée chez les Grecs, Maspero, Paris, 1971.