Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

LA PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE DE GASTON BACHELARD
(d'après "Intuition et Réalisme en Mathématiques")

Michel SERFATI (*)
Lycée Raspail - Paris

- le philosophe anabaptiste :

On pourrait dire, pour faire bref, que l'œuvre de Bachelard, si particulière, est comme la mise en acte d'une contradiction assumée. Bachelard est pour nous en effet d'une part cet épistémologue des sciences expérimentales, rationaliste véhément, actif et incisif, le tenant de l'*animus*, associé à ce qu'il en est des vertus mâles (au rang desquelles le concept), mais aussi bien le chantre de la "rêverie", scientifique ou poétique, paladin de l'*anima*, ce symbole des principes femelles (où il place l'image). L'intérêt spécifique pour nous de la position de Bachelard tient sans doute en que ce "phénoménologue de l'imaginaire" (J.C Margolin) ne cherche nullement à réduire la contradiction, mais à l'exposer au contraire, et à l'assumer.
Cependant, ce qui est chez lui une démarche naturelle ne va évidemment pas sans faire lever quelques interrogations chez ses commentateurs et disciples. Et on voit, dans la "Revue internationale de Philosophie"(1) revenir une même ambivalence dans les titres des articles qui lui sont consacrés dans un numéro spécial : "Le Problème de l'Unit", "Janus Bi-Frons", "la synthèse". Canguilhem évoque à son propos une "anthropologie concordataire."

L'assomption de cette essentielle contradiction place évidemment Bachelard dans une position un peu à part dans les écoles philosophiques. Lui-même se définissait comme un philosophe "anabaptiste ".

- Psychanalyse et métapsychologie : *animus et anima* ?

Il se peut que Bachelard ait vu, dans ce qu'il appelle la psychanalyse, le seul outil conceptuel en mesure de mettre en forme cette assomption. Pendant une assez grande partie de sa vie, en effet, Bachelard a revendiqué et mis en avant la psychanalyse comme un moyen neuf et spécifique d'éclairage de la connaissance scientifique.

(*) Union des Professeurs de Spéciales.
Ce texte fait suite à un "Atelier" de l'Université d'Eté de La Rochelle en Histoire et Epistémologie des Mathématiques, sous le titre "Bachelard, connaissance approchée et épistémologie".
(1) Revue Internationale de Philosophie. N° 150 (194)(3) P.U.F.

A l'époque de sa thèse (1927), l'"Interprétation des Rêves" vient tout juste de paraître depuis un an (1926), et Bachelard est bien ici un homme de son temps ! Mais -il faudrait ailleurs le montrer-, c'est une "psychanalyse" bien particulière qu'il développe. Comme tous les grands créateurs en effet, (on songe ici à Lacan), Bachelard tire à lui termes et concepts forgés dans d'autres sciences, d'autres contextes et pour d'autres usages, s'autorisant l'emploi de signifiants ainsi "dévoyés" à un usage personnel fort fécond et pour sa plus grande gloire ! Dans les meilleurs cas, ces signifiants deviennent autant de métaphores par lesquels les autres doivent "passer" .

Plutôt qu'à Freud., on a dit, à juste titre, que la "psychanalyse" de Bachelard était plutôt empruntée à Jung. Cependant ,le terme même de "psychanalyse *de l'objet* ", que Bachelard évoque abondemment dans son œuvre fait aussitôt nécessairement question ! A notre sens, et pour le texte qui nous occupe ici, c'est davantage aux théorisations - à venir ! - de Mélanie Klein qu'il faudrait rattacher les conceptions de Bachelard.

Quoiqu'il en soit, je préférerai parler dans la suite de "métapsychologie", le mot psychanalyse ayant une connotation clinique qui est ici hors de propos.

- Bachelard et les Mathématiques.

La place des mathématiques dans l'œuvre de Bachelard est singulière : Epistémologiquement d'abord, elle est majeure. Bachelard lui-même écrit quelque part que son "sur moi" est mathématique, entendez une instance intériorisée qui guiderait son inconscient épistémique.

Cependant, de façon très surprenante quand on considère la variété de son œuvre, on trouve relativement peu de textes de Bachelard consacrés à l'épistémologie des mathématiques même. Maurice Loi(2) en fait l' inventaire, qui passe par "*l'Essai sur la connaissance approchée*" (1927/28 ; nous l'étudions ici) , le "*Nouvel esprit scientifique*" (1934 : Bachelard a 50 ans), puis la "*Formation de l'Esprit Scientifique* " (1938 : 54 ans), la "*Philosophie du Non* " (1940 : 56 ans), enfin et pour couronnement, le "*Rationalisme appliqué* " (1949 : 65 ans).

- Essai sur la Connaissance approchée .

Il s'agit de la thèse principale de Doctorat en Philosophie de Bachelard, publiée en librairie en 1928, un an après sa soutenance.(3)
Dans l' ouvrage, divisé en quatre livres et dix sept chapitres, Bachelard s'intéresse à ce qu'il appelle la connaissance approchée, et tout d'abord dans les questions de sciences expérimentales. Naturellement, et comme il s'agit de cette forme de figure imposée qui se nomme thèse universitaire, il ne peut se dispenser d'aborder cette même question relativement aux mathématiques, même si on peut croire qu'il ne l'aurait sans doute pas éludée de toutes façons.
Quel sens cependant donner, quand il s'agit de mathématiques, à l'expression : "connaissance approchée " ? A cette question, Bachelard consacre le livre III, lui-même divisé en quatre chapitres :

---

(2) "*Il Protagora*". Janvier-Juin 1984 (*Saggi e Richerche* n° 5)

(3) Librairie Philosophique J. VRIN. Paris. Réédition 1987.
Sa thèse complémentaire est dénommée *"Essai sur l'Evolution d'un Problème de Physique"*.

- Chapitre X : Intuition et réalisme en mathématiques .
- Chapitre XI : Les corps de nombres et l'explication mathématique .
- Chapitre XII : Les problèmes de l'approximation en Mathématiques
- Chapitre XIII : La notion d'infini et l'approximation.

C'est au chapitre X - au titre très " irémique" - qu'est consacré cet atelier -exposé.[4] Ce texte passionné, riche en métaphores, est à mon sens nourri de toute la théorie métapsychologique encore implicite de Bachelard (la "psychanalyse de l'objet"). Il est aussi malheureusement semé d'affirmations bien hasardeuses, en particulier sur la structure des mathématiques actuelles. Bachelard place par exemple un fossé entre l'Analyse et la Géométrie qui, dans l'actuelle unité des mathématiques, n'est plus aujourd'hui de saison . Et c'est aussi en physicien que, trop souvent, Bachelard nous parle de l'épistémologie des mathématiques, ignorant par exemple ce fait épistémologique majeur en mathématiques qu'est la recherche ludique de l'enigme[5]

- Intuition et réalisme en mathématiques .

Tel est le titre complet du chapitre dont nous proposons ici l'étude complète, et d'abord un bref résumé du contenu.
Commençant par examiner le statut et les conditions d'emploi de l'intuition, Bachelard s'attache ensuite à lui opposer la "rigueur", et la radicale et nécessaire correction que ,selon lui, elle apporte à l'intuition. Bachelard entonne ensuite un chant de gloire - argumenté - à la contingence des objets : les voici en effet, ces fruits de la liberté du créateur mathématicien, ces objets mathématiques arbitraires et contingents, et donc fort peu susceptibles de réalité. C'est donc d'abord à la faiblesse du statut de réalité des objets mathématiques que Bachelard conclut (parlant à ce propos d'"ontologie *minima* ").Nous nous emploierons évidemment ici à mettre à jour point par point ses éléments de démonstration .

Cependant, et après avoir ainsi établi une certaine faiblesse ontologique de ces objets, Bachelard poursuit par cette forte remarque :

"Cependant, quand la preuve serait faite que le réalisme mathématique est illusoire, les causes de cette illusion demeureraient qui réclameraient une explication supplémentaire. A y bien réfléchir, une métaphore aussi solide, c'est déjà, dans le domaine de la connaissance une réalité." (pp .185).

Et le chapitre de repartir alors sur cette piste neuve ! Pour traiter cette difficile contradiction sur le statut de l'objet mathématique, Bachelard, revenant sur une de ses remarques antérieures, élabore alors une théorie de construction de l'objet par "projection" (: "ontologie projetée" : c'est l'esprit qui crée), la "réification" étant l'exact résidu dans le réel de deux mouvements relatifs opposés : intégration et rejet de la chose par le sujet, dans un procès d'approximations successives : "A notre point de vue, ce n'est pas le monde qui vivrait d'oppositions et de réconciliations successives, mais l'esprit lui-même dans sa tâche épistémologique ou créatrice. "(pp .186) C'est ici, et même si jamais le mot n'apparaît, l'amorce d'une théorisation typiquement métapsychologique de la construction de l'objet (on songe à Mélanie Klein).

---

[4] Les références renvoient donc aux numéros des pages de l'Edition Vrin.

[5] Ce trait est même essentiel par exemple pour comprendre et expliquer la nature et la persistance des recherches des mathématiciens sur la quadrature du cercle. Les approximations de π données par les Babyloniens, ou par Archimède, puis par Métius par exemple, étaient bien suffisantes pour la "pratique" (pp. 173), et la question est évidemment ailleurs.

Bachelard conclut ainsi tout le chapitre X". Ainsi le réalisme est-il en quelque sorte fonction de l' hétérogénéïté des domaines. Il est d'autant plus net ,d'autant plus objectif que les intérférences sont plus nombreuses, plus diverses. D'ailleurs l'approximation consiste toujours dans un essai de correspondance entre deux domaines différents. C'est même, comme nous allons le voir, en examinant l'ordre d' hétérogénéité des domaines d'explication qu'on arrive à classer le plus rationnellement les procédés d'approximation." (pp 191)
Sans nécessairement en suivre le déroulement linéaire, nous proposons maintenant d'étudier une à une les principales idées qui courent à travers ce texte .

- la seule intuition est inapte à la construction de l'objet mathématique.

Une connaissance intuitive est fixe, tenace, localisée, bornée. Par nature inapte à la généralisation, l'intuition "entrave finalement la liberté de l'esprit" (pp 169). Bachelard en conclut donc logiquement : "l'"intuition mathématique est impropre à l'analyse ". Et de donner un exemple de fausse intuition qui conduit au calcul absurde de l'aire d'un tronc de cylindre(6)

L'intuition est donc une donnée brute, ni précise, ni imprécise, et dont on ne peut en tout cas améliorer la précision, qui est, de façon irréversible et immuable, associée à son surgissement même(7) : "Comment reconnaîtrait-on l'imprécision d'une notion en restant dans l'intuition qui primitivement la procure ? Les limites de la précision dans ce domaine doivent être atteintes rapidement et même d'emblée. " (pp .174)

- pour construire l'objet par abstraction, il faut sur lui deux points de vue au moins.

Ce point est crucial dans la démonstration de Bachelard. Il l'évoque en début de chapitre, il y revient en force à la fin.
Pour que, à partir de l'intuition, l'abstraction puisse se faire "avec méthode", il faut que la notion à considérer se retrouve dans au moins deux domaines distincts. La démonstration de Bachelard est ici directement sous-tendue, semble-t-il, à la fois par l'image du repérage géométrique (ou goniométrique), qui requiert deux (ou trois) points fixes pour situer un point, et aussi par celle, optique, de l'"intérférence", qui laisse apparaître, à l'intersection des franges, le réel comme résidu : "C'est dans l'interférence des domaines de pensée que nous trouverons le moyen de corriger les notions." (pp 169).
Pour bien comprendre une notion, on ne peut être plongé dans cette notion seule, et c'est donc à partir de deux *points de vue*, qu'on *distingue* l'objet, qu'on le *crée* : c'est en montrant en quoi un cercle est une ellipse, mais aussi une hypersphère, comme à l'intersection donc de ces deux concepts, qu'on a quelques chances (?) d'apercevoir celui de cercle.

---

(6) En "passant à la limite" sur des sommes d'aires de triangles situés dans des plans tangents. L'ambiguité est évidemment ici dans le passage à la limite, notion si usuelle, et cependant si peu simple !
La suite des triangles est ici une suite double (hauteur et base) : si les deux entiers tendent vers l'infini indépendemment, à la limite, on obtient donc géométriquement des bourrelets circulaires, (et numériquement tout ce qu'on veut...). Pourquoi ceci est-il contraire à l'intuition chez Bachelard ? (pp. 171)

(7) Emporté par son élan démonstratif, et voulant étendre sa preuve à la physique, on trouve chez Bachelard, déclarant citer Russel, cette affirmation hasardeuse : "l'intuition n'a rien à voir avec l'infiniment petit". (pp. 172). Les modèles de l'atome ne seraient-ils pas géomorphes ?

Bachelard : " Ainsi, pour bien connaître le cercle, il convient de l'envisager non seulement sur un plan , mais aussi sur une sphère, en distinguant les cas où il est grand et petit cercle. De même la connaissance du plan resterait insuffisante si on ne le comprenait dans ce qu'on appelle vulgairement l'*espace*, et qui ne qu'est que l'espace d'ordre immédiatement supérieur dans lequel il est retournable. (pp .188)
En d'autres termes encore, c' est de la confrontation d'une même notion à deux champs distincts qu'on constate une différence de "sensibilité", qui est créatrice. Si "on transporte ailleurs une notion expérimentale, il est bien rare que les sensibilités se correspondent dans les deux champs. Alors l'erreur éclate, la pensée s'éveille. Les mathématiques se libèrent..." (pp .174)

De cette théorie de l'objet comme produit rationnel de l'intersection des points de vue, Bachelard fait même une méthode : "Avant de reconnaître la liberté de l'esprit, il fallait en éprouver la mobilité. C'est en multipliant la signification en extension des mathématiques qu'on devait en approfondir la compréhension." (pp .173)).
Autrement dit, et à nouveau, c'est en multipliant (signes de "liberté ") les occurences d'une notion dans des registres divers et autonomes (signes de la "mobilité"), qu'on la fait advenir dans le domaine de la raison. C'est donc par abstraction à partir d'occurences, d'exemples, et de recoupements (significations "en extension") qu'on parvient à la conceptualisation (significations "en compréhension").

- la rigueur est affaire de discours

Pour Bachelard, la "rigueur", qu'il oppose ici fortement à l'intuition, est un pur effet de discours, utile à l'exposé et à l'exposé seulement :

"La rigueur est, de notre point de vue, essentiellement discursive" (pp 170). Il semble que René Thom ait rejoint ici Bachelard : "de toutes les disciplines scientifiques, les mathématiques sont celles où la rigueur est, *a priori*, la moins nécessaire. "
Pour Bachelard, toute création d'un objet mathématique est le produit du conflit entre rigueur et intuition, celle-ci venant radicalement contredire celle-là : "La rigueur ne peut donc provenir que d'une correction radicale de l'intuition." (pp .172)[8]

"Même cette rigueur n'est jamais si assurée que lorsqu'elle est conquise sur une véritable erreur." Et Bachelard de citer alors ici le très célèbre exemple de la mise à jour du concept de convergence uniforme.
Sur ce dernier point, on doit, à mon sens, cependant lui objecter fortement qu'il ne s'agit pas ici de "rigueur", mais du procès si usuel de la création d'un nouvel objet mathématique, comme suite à la constatation d'un manque dans un théorème. De ce manque pointe un concept : la convergence uniforme.[9]

Cette lutte entre intuition et rigueur recouvre aussi pour Bachelard le conflit entre l'immédiat et le construit, ou bien entre l'inconscient et le volontaire. La rigueur en effet, pour Bachelard, est avant tout un produit de la conscience et de la volonté :"Si les conditions de clarté et d'évidence peuvent subsister, comme nous l'avons vu dans l'expérience, si les éléments de la persuasion les plus déterminants sont même attachés à

---

(8) C'est sans doute trop dire, et c'est probablement seulement d'une mise en forme qu'il s'agit !

(9) Il est certain que "notre intuition" est sur ce point celle de la convergence uniforme, c'est-à-dire celle de l'"écrasement", et non curieusement, celle de la convergence simple. Il ne faut pas chercher ailleurs que dans cette discordance entre intuition et écriture la source de ces quotidiennes surprises, paradoxes apparents que suscitent nombre d'exercices sur la convergence des suites de fonctions : telle suite converge uniformément vers zéro, cepndant que la distance pour la métrique uniforme tend vers l'infini.

l'exemple, les conditions de la rigueur sont au contraire entièrement solidaires de l'activité de l'esprit, allons plus loin, elles sont nettement solidaires de l'activité volontaire. Nous ne sommes sûrs que de nos actes pris à leur origine même." (pp .174)

Si on peut en effet recommencer un raisonnement, on ne peut certes pas décider de revivre une intuition. L'intuition a un caractère involontaire ; le raisonnement est un acte, répétable, donc scientifique dans une certaine mesure : "Dans la lutte entre la rigueur et l'intuition, pourquoi donnera-t-il finalement sa confiance à la reconstruction arithmétique du donné ? C'est sans doute parce qu'il est toujours libre de recommencer la construction et de vérifier sa solidité. Mais c'est aussi parce que les éléments géométriques, lignes surfaces, volumes, apparaissent, dans l'intuition même, comme unité d'une loi ou d'une fonction, confondu avec le mouvement qui pose un élément particulier" (pp .175).

Dans ces dernières lignes de conclusion, l'argument bachelardien nous parait très faible : ce serait parce que les éléments géométriques saisis par l'intuition seraient chaque fois des réalisations concrètes, des "unités" d'une loi ou d'une fonction, que toute accusation de solipsisme doit être écartée. On retombe ici abruptement dans un réalisme des lois et des fonctions (et quel réalisme !) .

Notons curieusement pour terminer le point de vue empiriste que Bachelard prête à Houël: l'évidence n'est rien d'autre que l'intériorisation d'une habitude expérimentale, son oubli, et son logement inconscient. (pp .172)

- l'arithmétique est purement subjective, elle a donc une certitude apodictique (et vice-versa..)

Tout nombre entier est un pur produit d'un esprit pur dans une synthèse finie d'actes de pensée. La preuve en est le caractère achevé, immédiat, sans faille, absolu de l'appréhension du nombre par le sujet. Et c'est parce que le nombre est ainsi purement subjectif que l'arithmétique, qui en est la science, est dotée d'une certitude sans conteste, nécessaire, et contenant en elle même sa propre necessité, c'est à dire qu'un sujet ne doit- ni ne peut - aller la chercher, cette nécessité, en dehors de la façon dont elle, l'arithmétique, s'impose à lui . Telles sont, me semble-t-il, les articulations résumées de la pensée première de Bachelard sur la question du nombre entier :
" Dès lors, le nombre est le moyen le plus propre à analyser adéquatement l'action de l'esprit dans sa tâche de reconstruction. D'ailleurs l'arithmétique, ne peut par réciproque, correspondre qu'à une expérience interne, toute entière du côté de l'esprit. En effet, en lui appliquant le critérium que M Russel applique à la géométrie, on peut énoncer le double principe suivant : si l'arithmétique a une certitude apodictique, son objet, c'est à dire le nombre, doit être a priori et comme tel, purement subjectif ; et réciproquement, si le nombre est purement subjectif, l'arithmétique doit avoir une certtude apodictique. Le nombre n'est qu'un moment de la numération et, toute numération est une méthode de pensée. On peut dire encore que le nombre est une synthèse d'actes. Si le nombre nous était donné par un enseignement du monde extérieur, il n'aurait pas l'absolu qui le caractérise. Le seul fait que l'unité soit nécessairement exacte, finie du premier coup, est la preuve qu'elle a son origine dans l'exercice de l'esprit." (pp .174-175)

La réciproque est donc également valable pour Bachelard, c'est -à-dire : si une science, à savoir l'arithmétique, s'impose à un sujet de façon apodictique, alors c'est que le nombre, qui en est l'objet d'étude, est purement subjectif. On se demande un peu comment Bachelard pourra esquiver l'inévitable accusation de solipsisme qui pointe ici. Notons en outre, dans la citation précédente, le caractère inattendu d'un affirmation qui définit le nombre comme un "moment".

Et c'est en effet à écarter cette question du solipsisme que Bachelard consacre les lignes qui suivent : " Mais si l'homme peut fonder l'arithmétique en quelque sorte les yeux fermés.........par quelle audacieuse transcendance ira-t-il au-devant du monde des objets avec des cadres si nettement subjectifs ?" (pp .175)

Cependant, la question est ici seulement posée, et il la reprendra plus loin. Soulignons au passage que c'est : "les yeux fermés par rapport à l'expérience, que Bachelard voit la construction de l'arithmétique dans un sujet..

- l'opposition continu/discontinu est une métaphore de la dualité : esprit / "actes" .

Précisons d'abord le sens bien particulier du "donné" chez Bachelard . Le "donné", en effet, est pour lui une fonction épistémologique, et non un "produit empirique plus ou moins élaboré". (pp .176). Fonction qui prend sens, seulement de s'opposer à la fonction de la connaissance rigoureuse : l'arithmétique. Autrement dit, tout ce qui n'est pas l'arithmétique, même d'autres parties des mathématiques, comme l'algèbre ou l'analyse, sont à ranger dans le "donné". Ces derniers cependant sont des donnés particulièrement adaptés à l'étude du mécanisme de l'approximation.
Bachelard développe alors toute une métaphore du continu-discontinu pour décrire ce couple d'opposés intuition - rigueur, qu'il vient d'étudier. (l'intuition serait évidemment du côté du "continu") :
"On pourrait dire que, comprendre un donné, c'est appliquer le continu des intuitions sur le discontinu des actes, ce qui ne peut se faire qu'en resserrant l'intuition, essentiellement continue .....sur l'intention qui tend à la reconstituer" (pp .175). Le "continu des intuitions", est sans doute ici l'immense univers des appréhensions intuitives possibles, et l'"intention", c'est le produit de la volonté consciente, ce que Bachelard a plus haut appelé la "rigueur".
Il y a malheureusement très vite quelques ennuis :"La simple correspondance d'un continu et d'un discontinu pose des difficultés mathématiques considérables." (pp .175). A tâcher de passer en effet d'un "continu" à un "discontinu", il y a nécessairement de la perte (ce "resserrement" qu'évoque Bachelard), et cette opposition n'étant donc pas mathématiquement facilement réductible, il en est de même du couple d'opposés intuition /rigueur, dualité en place de laquelle, très vite, Bachelard a substitué celui de esprit / objet .
C'est donc par des tentatives d'approximations successives du continu par le discontinu que procède ici la formation de la connaissance, selon Bachelard : " C'est à ce problème d'adéquation que s'attache l'approximation. Chacun des degrés de l'approximation traduit un état de reconstruction du donné."
Dans cette course poursuite par quoi Bachelard croit pouvoir décrire une tentative d'adéquation du sujet à l'objet, on voit déjà ici pointer une métaphore d'approximations successives qui sera reprise et magnifiée plus loin.

- le statut de réalité de l'objet mathématique est à la mesure de l'echec de sa représentation arithmétique. Nouvelle métaphore pour le couple subjet/objet.

Ou bien une connaissance entre directement et, immédiatement dans le champ de prise de la connaissance pure, rigoureuse, celle de l'arithmétique, ou bien elle demeurera toujours pour Bachelard en dehors de ce champ de la rigueur, ne recevant seulement qu' "une valeur pragmatique". (pp .176). En effet : "Si le réseau d'approximation arithmétique ne saisit pas l'intuition du premier coup, cette prise est à jamais manquée.

On pourrait donc s'étonner que l'approximation s'attache à représenter le non-représentable.." (pp .176)
Donc, le statut d'existant - c'est à dire en dehors du sujet - des notions mathématiques est précisément lié à ce que ces notions ne sont pas du domaine de la connaissance pure.
" A cet échec est lié, croyons-nous, l'aspect ontologique qu'on reconnaît parfois aux notions mathématiques (pp .176)."
Le propos de Bachelard évoque ici irrésistiblement la différence majeure que la métapsychologie moderne érige entre la "réalité extérieure" et la "réalité psychique".

Et Bachelard, logiquement, va au bout de sa pensée : la thèse selon laquelle les objets mathématiques pourraient exister en dehors du sujet - leur réalisme donc - n'aurait certes pas tenu la route si les objets mathématiques, avaient tous pu être obtenus à partir de l'arithmétique :
" Si la connaissance arithmétique eût pu analyser toutes les intuitions, il est à penser que les thèses du réalisme mathématique n'eussent jamais eu d'objet. Cette analyse eut entrainé, dans ces conditions, une assimilation complète." (pp .176)

De ce qu' il est des objets mathématiques non réductibles à l'Arithmétique, Bachelard croit tenir une preuve de réalisme. C'est donc une nouvelle - et forte - métaphore qui associe à la dualité sujet-objet le couple d'opposés arithmétique/irrationnel, le sujet étant évidemment du côté de l'arithmétique. Elle remplace sans doute celle de discontinu/continu. : " Mais l'échec de l'arithmétique devant l'irrationnel dressait dans les mathématiques un dualisme ausi accusé que l'opposition du sujet et du réel dans la connaissance ordinaire." (pp .177)
Bachelard continue logiquement : tout ce qui est un nombre pur est purement en provenance du sujet, mais donc aussi tout ce qui peut s'élaborer à partir du nombre pur par un nombre fini d'opérations -. Le *finiment engendré* reste donc dans le champ clos du sujet : "........aucun gouffre épistémologique ne séparerait l'être défini des éléments de son explication...... " , et du coup sa "réalité" s'évanouirait, c'est-à-dire sa place en dehors du sujet.

Tout objet mathématique finiment engendré à partir du nombre est donc d'existence vacillante : son statut dépend de l'individuation du sujet qui le constitue.
C'est au contraire dans l'indétermination que réside la possibilité d'une vraie existence, et c'est à l'infinitude(10) qu'il faut faire appel pour créer un être mathématique doué d'une existence autonome, en dehors du sujet : "L'être mathématique ne peut avoir de consistance que par son inconnu. Est il vraiment le sujet d'un nombre infini, ou du moins indéterminé de prédicats ? Alors son existence est solide. Il est, lui aussi, un objet. N'est-il que le signe d'un nombre de relations, qui étant déjà connues, sont en nombre nécessairement fini ? Alors, sa solidité est en quelque sorte extrinsèque. Elle dépend de la solidarité des notions." (pp .177)

L'infinitude, parce qu'elle n'est pas directement appréhensible par le sujet, implique nécessairement l'extériorité, ce signe premier de l'existence : "une telle résistance aux actes vraiment simples de l'esprit rappelle l'irrationalité foncière du donné.Elle est alors prise pour signe d'une existence séparée." (pp .177)
Bachelard examine même une sorte de réciproque, tâche assez extrême : il précise en effet, qu' à l'inverse, considerer comme réellement existant un objet mathématique qui serait seulement *finiment engendré* ne peut être que le fait d'un artifice volontariste, sous-tendu par le désir de le vouloir faire exister à tout prix : " le réalisme mathématique apparait dans cette dernière hypothèse comme la manifestation d'un besoin ontologique, ou moins encore, comme une abréviation commode du langage scientifique."

---

(10) Noter ici chez Bachelard le glissement dialectique presque immédiat entre "indéterminé" et "infini".

- l'ordre, comme nécessité première.

La primauté de l'ordre est décidément une question majeure pour Bachelard qui a par exemple consacré le chapitre II de l'*Essai sur la Connaissance approchée* à montrer que pour lui,l'ordre est premier, fondateur ,par rapport à la quantité : la structure ordonnée fonde le numérique, et non l'inverse.
S'appuyant sur cette même pétition de principe , Bachelard nous expose dans le présent chapitre cet utopique regret qu'en en Mathématiques, l'ordre dans l'exposition des résultats ou des définitions ne soit pas lui aussi imposé par la doctrine elle-même, bref ne participe pas à la necessité des mathématiques.
Ce bien étrange regret est seulement le signe que c'est à une place décidément fort élevée, transcendante même, que Bachelard place les Mathématiques : "En réalité il serait bien difficile de concilier cette unité de développement avec le décousu qui subsiste dans une doctrine mathématique.." (pp .178). Et plus loin : : "l'introduction des diverses fonctions analytiques paraît bien obéir à un principe de complexité croissante, mais il s'agit toujours de complexité à un point de vue déterminé." (pp .179)

Il y a ici comme une confusion, me semble-t-il, chez Bachelard, entre le rigoureux et le nécessaire. Plus loin encore :" la déduction est tout au plus une méthode d'exposition." (pp .178)". Par exemple dans un livre de géométrie, on passe en toute indépendance du triangle au cercle et du cercle à l'ellipse, etc....On se réserve bien de faire ressortir après-coup.......mais ce n'est pas là justifier complètement l'ordre choisi ; on ne démontre pas qu'un ordre différent eut été illogique." (pp .178).

Une autre conséquence immédiate de ce défaut en la nécessité de l'ordre est l'absence d'e toute taxinomie naturelle dans l'univers des objets mathématiques. La construction mathématique met au jour des objets distincts, mais elle ne fonde pas - en droit - des genres qui viendraient classifier et recouvrir ces objets : " En tous cas, s'il y a ontogénèse, il n' y a plus phylogénèse.." (pp .179)

Renonçant donc à un rêve où l'ordre de l'exposé eut été lui aussi un beau produit logique de la structure - dans le registre de la déduction donc -, Bachelard en revient à une autre de ses idées chères : une architecture des concepts en Mathématique qui serait dialectique, et non plus déductive :
" A y regarder de plus près, comme nous aurons l'occasion d'y revenir, si les notions s'apppellent, c'est plutôt par opposition que par déduction." (pp .179)

- contingence des objets géométriques et liberté du géométre créateur.

Bachelard nous donne en commençant l'image d'un concept *fondamental* en géométrie, qu'il déclare vouloir "simple"(11) et qui tient un peu de la métaphore des" origines" : concept-rocher, posé là , surgissant et solitaire, sans précedesseur, et même, tant qu'il n'est pas relié à d'autres, sans descendance :
" On pourrait parler, à certains égards, d'une contingence radicale de la géométrie ....les définitions mathématiques sont de véritables hypothèses qui posent librement les objets..." ....." Contrairement aux défintions physiques......après l'examen attentif des phénomènes, les défintions mathématiques sont des bases que l'esprit fixe en conservant une telle liberté qu'elles ne prendront tout leur sens qu'après intervention des postulats.......L'objet ainsi défini n'a pas la moindre fécondité........... A bien y réfléchir,

---

(11) Bachelard écrit ailleurs que la simplicité est, entre tous, un concept compliqué. Elle ne vient qu'en second, après tous les autres.

si l'on veut qu'un concept soit un concept fondamental, il faut que ce soit un concept simple ...." (pp .179)

A partir de là, et de façon un peu inattendue chez lui, Bachelard développe alors un conception très hilbertienne de la géométrie, où tout sens est évacué[12], les mots n'ayant pas en eux-mêmes de signification, et où seules les relations entre eux sont signifiantes. Et Bachelard d'entonner à ce propos un chant de gloire à la liberté (du créateur) et la contingence (de l'objet créé) :
" L'esprit n'apparaît donc comme nullement lié par la position des concepts fondamentaux", s'exprime M.Mac Leod " (pp .180) Avant le choix des postulats les mots exprimant les concepts fondamentaux seront censés représenter des objets choisis n'importe comment, sans restrictions ". Il ajoute : "La liberté initiale nous paraît donc absolue." (pp .180) Bachelard : "L'esprit va-t-il la restreindre par la liaison des postulats ?"..." l'esprit ne nous semble lié par aucune intuition ; aucune matière ne l'opprime. S'il se donne des règles, sa seule obligation sera de s'y astreindre." (pp .180)

Bachelard souligne certes ici avec raison que les règles sont l'essence même de la liberté du mathématicien. Mais jamais il n'envisage la question de la *consistance* du système obtenu - et ce n'est pas rien - : les "règles" doivent en effet être *non contradictoires*, et, si possible, indépendantes. Bachelard reviendra ensuite un plus bas sur ce seul dernier point. Cependant, et à cela près, le formaliste le plus pointilleux ne trouverait ici rien à redire à ce procédé d'évacuation du sens, à nouveau très hilbertien et très formaliste, et, tout de même un peu surprenant chez Bachelard, même si c'était évidemment un peu l'air du temps :
"Ainsi les concepts fondamentaux de point et de droite sont entièrement indépendants........Le postulat d'appartenance ne doit pas nous tromper à cet égard......tout bien considéré, le postulat d'appartenance n'affirme rien hors la liaison." (pp.180)Bachelard : "Il en serait de même des postulats d'appartenance suivants qui agglomèrent une droite et un point extérieur pour donner le plan, et un point extérieur pour donner l'espace. La construction progressive obéit à une véritable dialectique qui est un nouveau signe de notre liberté originelle dans les choix des notions successives, car la dialectique incline sans opprimer..." (pp .181)

Bachelard développe ensuite l'idée que, s'il ne suffit évidemment pas d'un seul axiome pour fabriquer une géométrie, la prise en compte des nécessaires couches successives d'axiomes ne modifie en rien la contingence de l'objet, ni la liberté du créateur : " A la suite de postulats d'appartenance, la géométrie usuelle introduit explicitement les postulats d'ordre, de congruenc, de continuité, de parallélisme.....Aucun d'eux séparément ne supprime la contingence des notions....mais réunis en un même système ne vont-ils pas coordonner les notions au point que les relations qu'ils déterminent entre elles deviennent nécessaires ? " (pp .182)
Comme déjà indiqué, Bachelard consacre plus loin quelques lignes à la question de l'indépendance des postulats, mais c'est d'abord par un surprenant discours, et une curieuse définition de l'indépendance. Bachelard voit en effet le modèle de l'indépendance, dans les deux termes d'une alternative - cette mise en acte du tiers - exclu - : or, quoi de plus *logiquement* lié au contraire que les deux termes d'une alternative, qui s'excluent mutuellement ! Bachelard, faisant à nouveau l'économie de la question de la consistance - ne l'a-t-il pas tout simplement confondue avec celle de l'indépendance ? -, veut ici nous signifier qu'il croit qu'il est possible d' ajouter un axiome ou sa négation, de façon librement consentie, à un corpus déjà existant :
"Rien de plus indépendant en soi que les deux termes d'une alternative. Aucune déduction ne peut tirer l'existence de l'un de l'existence de l'autre. Il faut affirmer l'un et l'autre par des actes qui sont foncièrement indépendants. Le besoin d'être complet et d'étudier les deux termes opposés ne correspond à aucune necessité" .

(12) On songe à ce passage fameux, dits des "bocks de bière".

Continuant d'ignorer la question de la consistance, Bachelard revient alors sur l'indépendance des axiomes, cette fois par l'aspect de la redondance :
" les postulats sont et doivent être indépendants. On a démontré que s'ils n'étaient pas indépendants dans leur ensemble, ce serait le signe d'une surabondance, d'une répétition déguisée. Leur nombre devrait alors être réduit......"
Bachelard, ensuite, et toujours sur le fond de cette contingence à laquelle il tient tant, persiste et signe : selon lui, plus on augmente librement le nombre d'axiomes entrant dans la composition d'une géométrie - par ce moyen universel, spécifié, d' y ajouter chaque fois un axiome ou son contraire - plus grand est le nombre de géométries distinctes qu' on peut obtenir ! La contingence est ici le produit de choix alternatifs successifs et indépendants :

" Tant que l'on se contente de géométries à petits nombre d'axiomes, comme les géométrie euclidienne, lobatschewskienne, riemannienne, le pouvoir de l'esprit peut sembler rapidement limité et il est bien vite oublié. Mais il n'en reste pas moins que la locution dichotomique " Ou bien - Ou bien " de Kierkegaard est à la base de l'activité mathématique comme de toute autre activité....Si l'on partait d'un plus grand nombre de postulats les géométries possibles se multiplieraient très rapidement " (pp .182/183)

C'est à nouveau croire que, d'abord on peut trouver un moyen de multiplier *ad libitum* les axiomes non contradictoires et indépendants (Bachelard fournit même un calcul combinatoire de dénombrement à ce sujet......). Secondairement, c'est aussi ne pas voir, que, même chaque fois que c'est légitime, l'adjonction d'un nouvel axiome à une structure existante, nous fournit chaque fois une structure nouvelle incluse dans la précédente, donc plus riche et plus particulière .

Changeant alors pour une part de sujet, Bachelard tente à nouveau de <u>concilier</u> la contingence, cette absolue liberté dont il se veut le chantre, avec le caractère applicable des mathématiques. Eternelle question ! La réponse de Bachelard sur le sujet, quelque peu tautologique, n'est malheureusement ici guère satisfaisante :

" Nous avons démontré pour le moins, croyons-nous, que dans son formalisme l' élément géométrique se développe en laissant l'esprit libre de poser tel principe de combinaison qu'il voudra. Si les résultats d'une combinaison multiple et répétée des postulats rejoignent une expérience usuelle, c'est sans doute qu'au départ une première intuition a rempli les formes avec la matière même à laquelle on rapportera l'expérience ultime..." (pp .183)

- mythe ou réalité du concept de fonction : Riemann et Weierstrass.

C'est en principe à une exemplarisation du paragraphe précédent que Bachelard s'attache ensuite. D'abord, et puisque le cas du statut des êtres géométriques est censé être réglé (par la négative), qu'en est -il des autres êtres mathématiques, en particulier en Analyse : "auront-ils plus de réalité intrinsèque ? "

Bachelard conclut négativement par la même pétition de principe :

".... D'ailleurs on pourrait trouver mille traces de cet élément de liberté en examinant directement le domaine de l'Analyse." (pp .184)
Et, pour démontrer la chose, il propose alors de s'appuyer sur l'exemple du concept mathématique de fonction. Bachelard s'extasie d'abord sur le caractère de liberté et de contingence de cet objet mathématique, quand il est pris au sens riemannien du mot, c'est à dire pour nous, dans sa signification actuelle, moderne, épurée : une correspondance presque quelconque entre deux ensembles :

"Que l'on se reporte par exemple, à la définition de la fonction par Riemann. Cette définition n'implique, comme on sait, que l'idée de la correspondance. Cette correspondance est alors une véritable forme indifférente à toute matière, et en donnant à l'Analyse une base aussi générale, on va y incorporer, on va le voir, un véritable arbitraire." (pp .184)

Pour Bachelard, cet arbitraire riemannien est le signe d'un complet idéalisme, et il en conclut que l'objet de Riemann n'a pas de statut de réalité. Et de comparer ce qui est - selon lui - une différence majeure entre Riemann et le réaliste Weierstrass, cité ici à propos du principe de son prolongement analytique, Bachelard, en effet, opposant alors le cas d'une fonction analytique, déclare qu'on est "invinciblement amené à croire" que la donnée en un point d'une telle fonction entraîne sa connaissance partout où elle peut l'être. Et, comme s'il était question d'une sorte de permanence de l'objet, de conclure ici à une une preuve de réalisme :
"On est ainsi invinciblement amenés à croire que l'expression conditionne entièrement la fonction hors de son domaine normal de validité, au delà du domaine où elle était primitivement définie. C'est bien là la preuve habituelle du réalisme." (pp .184)

Rappelons ici d'abord qu' il ne s'agit certes pas d'une "croyance", mais d'un fait mathématique, valide dans un certain champ, et surtout que l'interprétation bachelardienne est abusive : le résultat de Weierstrass s'applique aux fonctions *analytiques* , c'est à dire à une catégorie bien connue de fonctions riemannienes, d'un type particulier cependant, puisque soumis à de fortes contraintes de structure : une fonction analytique, ce n'est pas n'importe quelle fonction. Et il arrive ici la contrainte qui s'exerce sur l'objet trouve en effet sa traduction - ou sa contrepartie - en ce que sa donnée en un point entraîne sa connaissance partout. Il n'y a là rien que de logique, et certes pas en tous cas coexistence de deux définitions de la notion de fonction qui seraient disjointes .

Si l'on voulait néanmoins interpréter en termes intuitifs le théorème du prolongement analytique, il serait sans doute plus convenable d'y déceler un passage du local au global, ou bien encore un fantasme de maîtrise .

Bachelard cependant s'est fondé sur cet exemple pour étayer une distinction entre les concepts de fonction chez Riemann et Weierstrass, à l'avantage du premier nommé, pour conclure inévitablement, en Analyse également, à la contingence des objets mathématiques, :
"Mais le moyen de Weierstrass est trop étroit........"l' "être en Analyse ne nous apparaît donc comme le résultat d'une construction...... c'est une construction libre."
De ce que la définition de Riemann n'entraine - évidemment ! - aucune sorte de prolongement *a priori* possible ,Bachelard y a donc décelé une preuve supplémentaire de liberté : liberté du créateur et contingence de l'objet sont donc pour lui pareillement valides en dehors du champ de la géométrie :

" En résumé ,tant dans la géométrie que dans l'Analyse(13). L'arbitraire initial est trop évident ,trop irréductible pour que nous y séparions nettement le domaine du possible et le domaine du réalisé. A aucun moment le réel mathématique n'est assez accentué pour que nous suivions ses traits préfigurés dans le possible." (pp .185).

---

(13) Noter la différence chez Bachelard dans l'emploi des majuscules.

- illusion de réalité et causes de l'illusion.

A ce point de sa démonstration, Bachelard fait une sorte de pause. Si tout objet mathématique est en effet une idéalité, et si sa contingence vaut pour preuve d'absence de réalisme, que dire de plus ?

Suit alors cette assertion, profonde à notre avis, et comme inspirée d'une "sorte de principe de réalité ", au sens freudien du terme :

" Cependant quand la preuve serait faite que le réalisme mathématique est illusoire, les causes de cette illusion demeureraient qui réclameraient une explication supplémentaire. A y bien réfléchir, une métaphore aussi solide, c'est déjà, dans le domaine de la connaissance une réalité." (pp .185)
On n'a en effet rien à objecter à semblable déclaration de principe qui vaut pour méthode.

- la construction dialectique de l'objet : mouvements du sujet et approximations successives .

C'est alors sur une nouvelle voie que Bachelard nous lance ! D'abord, dit-il, l'origine du réalisme mathématique réside dans "la nécessité épistémologique qui pousse l'esprit à réaliser ce qu'il s'applique à connaître "(pp .185), autrement dit que l'homme construit des objets (théoriques) à la figure de ce qu'il imagine *in petto* .

Et d'appeler Meyerson à la rescousse : "Une ontologie projetée nous paraît correspondre en mathématiques à cette ontologie extraite de l'objet que M. Meyerson a reconnue dans toutes les parties des sciences physiques." (pp .185)

Deuxième point, essentiel : ce mouvement de construction est pour Bachelard, toujours inachevé, *potentiel* donc, au sens ou le mot s'oppose à actuel (dans les questions relatives à l'infini), et *dialectique,* au sens il est le produit, le fruit et le compromis de ces deux mouvements en sens contraire : l'incorporation et le rejet. On reconnaît ici des fragments de théorie psychanalytique sur la construction de l'objet .

C'est d'abord une construction en perpétuel achèvement : "Cette ontologie constructive n'est jamais à son terme puisqu'elle correspond plutôt à une action qu'à une trouvaille. L'objet est-il un instant assimilé, effacé en tant qu'obstacle, réduit par l'analyse à sa véritable nature de notion ? Le même processus constructif le mettra en rapport avec un irrationnel nouveau. La généralisation en Mathématiques tend à absorber les domaines qui bordent le domaine primitif." (pp .185)

Le caractère dialectique de la construction apparaît alors une nécessaire conséquence pour Bachelard de sa propre métaphore de l'ontologie projetée : "A notre point de vue, ce n'est pas le monde qui vivrait d'oppositions et de réconciliations successives, mais l'esprit lui-même dans sa tâche épistémologique ou créatrice. A tous les niveaux de la connaissance, l'opposition ferait correspondre un objet, la réincorporation de cet objet dans le compris se ferait par des méthodes élargies qui tomberaient à leur tour en défaut, du fait d"une nouvelle opposition." (pp .186)
Il faut cependant ici souligner : dans ces dernières lignes, Bachelard a enfourché avec fracas son grand cheval épistémologique : <u>la réification est l'exact produit de ce procès dialectique</u> entre l'intégration (ce sont les "conditions"), et le rejet (ce sont les "oppositions.").

Et de poursuivre un peu plus loin l'image d'une construction proprement dialectique, par une *succession* de doubles mouvements, où le maître mot est certainement "opposition" :

" ...Un donné est posé avec tout un cortège de conditions. Mais par voie d'opposition, un donné inconnu se présente aussitôt qui déborde ces conditions. Il en résulte vraiment une réification progressive."(pp .186)

Suit alors ce que curieusement Bachelard présente comme une exemplarisation de la théorie précédente, et qu'il fonde sur le caractère*relatif* des notions de rationnel et d'irrationnel : un nombre est en effet, dit Bachelard, toujours "irrationnel -par - rapport" à d'autres : il y aurait donc, une "réification" de l'irrationnalité, au delà des objets irrationnels eux-mêmes :
"En Mathématiques, le genre reçoit, sous ce point de vue, une réalité qui n'appartient pas aux espèces" (pp .187).

En conséquence, regarder par exemple un entier comme un rationnel particulier, puis de la même façon comme un réel particulier, et pareillement un rationnel comme un réel particulier est un abus commode, mais qui postule en fait une existence véritable sous jacente et souhaitée, et qui serait le fait d'un réalisme espéré(14) :

" Ce réalisme construit déposera donc tout une série de donnés successifs. Les éléments prendront dans ces domaines des existences vraiment différentes, et ce sera par un abus d'ontologie que nous oublierons les conditions qui ressortissent uniquement à ces domaines pour en faire des propriétés appartenant réellement aux entités." (pp .187)

- l' hétérogénéïté des "domaines", source du statut de réalité et du caractère nécessaire de l'approximation de la connaissance

Au bout de tous ces détours et controverses, voici maintenant un certain retour raisonné de Bachelard vers ce point crucial qu'il a précédemment évoqué au début : l'absolue nécessité du double point de vue dans la construction de l'objet mathématique. Nécessité qui cependant se conjugue maintenant avec deux faits supplémentaires : d'une part Bachelard envisage désormais ce double point de vue à l'intérieur même des mathématiques, d'autre part l'accent mis qu'il met sur ce qui serait pour lui le " domaine d'origine " d'un objet.

L'existence de deux méthodes différentes pour connaître l'objet est, comme on l'a vu, la source et, dans un certaine mesure, la garantie de son objectivation. Bachelard précise davantage : un signe clair de l'objectivation, un sûr garant, c'est ici la présence d'une "resistance", d'une "opacité", due à la simultanéité sur un même observable de deux méthodes differentes, c'est à dire pour Bachelard, presque contraires..
Bachelard fournit d'abord l'exemple du nombre π, étayé sur l'"hétérogénéïté des domaines en mathématiques" :
" Ainsi le nombre π est défini très exactement par le rapport de la circonférence à son diamètre dès qu'on accepte l'intuition géométrique comme une donnée. C'est dans son évaluation par les moyens arithmétiques que cette notion est frappée d'inexactitude. Il ne s'agit donc pas d'un inconnu en soi, mais d'un inconnu par rapport à un moyen de connaître spécifié." (pp .188)
Bachelard a utilisé ici, à des fins démonstratives, un point de vue assez ancien sur les Mathématiques, qui fait bon marché de leur actuelle unité. Il place en effet là, entre arithmétique et géométrie, une différence de nature, et aperçoit des "moyens de connaitre"

---

(14) En Mathématiques, *stricto sensu*, Bachelard a ici cependant raison : car, comme on sait, l'identification n'est pas une identité.

radicalement différents, là où il n' est évidemment plus aujourd'hui que des *modalités* de la mathématique.
Cependant, ceci l'autorise à conclure pareillement, en un obsédant *leit-motiv,* que c'est bien l'*ombre* portée sur un "domaine" par un "domaine étranger" (ici, par l'arithmétique sur la géométrie) qui permet - et elle seule - de savoir de *quoi l'on parle* dans le domaine initial.

En ces dernières pages, on est ici au cœur des métaphores bachelardiennes, et aussi de ses authentiques conclusions pour tout ce chapitre : à partir d'un seul "domaine d'explication", d'un seul sujet, d'un seul point de vue, le sujet en est vainement réduit à échafauder sans contrôle des objets sans consistance - des fantasmes ? - dans la fausse clarté qui émane de l'indifférenciation. Seule la confrontation avec l'Autre, distinct - c'est à dire, pour une part hostile, d'où les "résistances" : le glissement dialectique de Bachelard est ici frappant - permet de créer l'"apparence objective". Le propos est très directement métapsychologique.

"Cette hétérogénéïté des domaines est la source de la résistance à l'assimilation des notions mathématiques. C'est elle qui donne, croyons-nous, l'existence aux êtres de raison. La fonction "existence" apparaîtra au moment où l'on voudra appliquer l'un sur l'autre deux domaines étrangers, cette fonction correspondant à l'*opacité relative de deux méthodes différentes*." (pp .188)

Bachelard encore : "D'ailleurs, un domaine d'explication est toujours pur et clair à l'égard de ses propres éléments. Une notion n'y porte ombre que si on essaie de l'analyser par des procédés indirects, étrangers au domaine naturel de la notion. Mais comme cette analyse est du même coup imparfaite, elle crée l'apparence objective. Comme nous le remarquions au début de cette discussion, c'est ici encore l'échec de la représentation qui entraine à postuler une réalité en quelque sorte hostile." (pp .189)

- Mathématiques et Physique .

Dans les toutes dernières lignes du chapitre, Bachelard tente alors de répondre à la question majeure posée à tout épistémoloque conséquent par l'adéquation entre mathématiques et sciences physiques : y a -t- il, en épistémologie des sciences exactes, un autre problème vraiment sérieux ?
Bachelard souligne que ce qui fait en effet ici réalité, c'est l'adéquation elle-même, dont on sait qu'elle n'est pas qu'approximative ! Cette réalité, dit Bachelard, est le fait, soit des choses elles-mêmes, soit le signe du divin :

"Mais où l'hétérogénéïté des domaines serait-elle plus accentuée que celle qui sépare les constructions de la raison des résultats de l'expérience physique ? Les mondes que la physique mathématique réussit à joindre sont si étrangers l'un à l'autre qu'une coïncidence approximative est invinciblement mise au compte d'une réalité,soit qu'on porte cette réalité sur les êtres de raison, soit qu'on y reconnaisse l'inscription dans la matière d'un esprit créateur " (pp .189)

Il poursuit par un ensemble d'exemples empruntés à Fourier, et où la "nature" semble par exemple connaître et utiliser les logarithmes.....:
"L'Analyse mathématique a des rapports nécessaires avec les phénomènes sensibles ; son objet n'est point crée par l'intelligence de l'homme ; il est un élément préexistant de l'ordre universel ,et il n'a rien de contingent et de fortuit ; il est empreint dans toute la nature". (pp .189) (Oeuvres Complètes ,t I ,pp 14)

Cependant, remarque Bachelard, les mathématiques reçoivent, en retour des "impulsions "de la théorie physique : " Etrange forme *a priori* qu'une matière suscite !" (pp .190)

Bachelard conclut alors - assez classiquement - par le point de vue d'un "physicien" sur les mathématiques, c'est à dire : c'est parce que les mathématiques sont "solidaires de la réalité" qu'on doit accorder statut à leurs objets. Faute de précision sur la nature de la "réalité" citée, la réponse paraîtra sans doute bien insuffisante à tout mathématicien.

Examinons néanmoins l'argumentation de Bachelard sur ce point: d'abord, et pour ce qui est des mathématiques *simples*, elles sont dans un premier temps immédiatement dérivées de l'expérience, même si, par la suite, elles "cacheront" soigneusement leurs origines. Cependant , à aucun moment , on ne voit ici chez Bachelard la moindre tentative d' une explication, pourtant épistémologiquement indispensable, sur l'origine et la phénoménologie de cette "dissimulation" :
" Sans doute, par la suite, elles cacheront sous des constructions logiques "l'origine expérimentale" de leurs concepts (Milhaud)"

Certes, il s'agissait là d'"expérience primitive et simple....", nous dit Bachelard. Cependant, et pour celles qui sont moins immédiatement accessibles, comme celles de la physique moderne, le procès est bien plus clair encore. Il conclut donc : les deux aspects, mathématique et physique, sont tellement liés, "inhérents" - ceci étant paradoxalement d'autant plus vrai qu'on s'éloigne du XVII° siècle - que c'est à un échange mutuel dans les deux directions qu'on assiste, comme à la mise en acte d'une bijection, pourrait-on dire..:

"Mais dans la physique mathématique moderne, il s'agit d'une expérience raffinée, et elle fait vraiment corps avec la théorie. L'examen attentif des lois physiques décèle entre les variables une fonctionnalité plus réaliste que riemannienne.....Dans ces conditions, comment se refuser à donner l'existence à des êtres de raison aussi solidaires de la réalité?" (pp .190)
Et plus loin : "Comment expliquer sans cela le succès vraiment physique d'un formalisme absolu ? Ce formalisme a plus que la cohérence intrinsèque, il a d'abord l'inhérence au réel....... Comme dit Condorcet, "l' inhérence de l'étendue à tous les corps est la première considération que prend le géomètre". Dans les théories modernes, cette inhérence est encore plus profonde. A rapprocher les domaines mathématique et physique, on rationalise le réel, mais en échange on réalise le géométrique." (pp .190)
Enfin Bachelard revient *in fine*, sur cette nécessaire condition d'objectivation qu'est pour lui l'altérité des points de vue, des regards, le statut objectal étant donc à l'exacte mesure de cette altérité. Comme conséquence, il y ajoute cette idée, qu'il développe au chapitre suivant : toute approximation est le nécessaire produit de la confrontation avec l'Autre :

"Ainsi le réalisme est-il en quelque sorte fonction de l'hétérogénéïté des domaines. Il est d'autant plus net, d'autant plus objectif que les interférences sont plus nombreuses, plus diverses. D'ailleurs l'approximation consiste toujours dans un essai de correspondance entre deux domaines différents. C'est même, comme nous allons le voir, en examinant l'ordre d'hétérogénéïté des domaines d'explication qu'on arrive à classer le plus rationnellement les procédés d'approximation." (pp 191).