COMMISSION INTER-IREM EPISTEMOLOGIE

Actes de l'Université d'Eté sur l'Histoire des Mathématiques

La Rochelle 1988



François Viète

IREM de POITIERS

SOMMAIRE

Avant-propos ..... p. 3

La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques
Evelyne BARBIN - IREM du MANS ..... p. 5

La naissance du projectif
De la perspective à la géométrie projective
Rudolf BKOUCHE - IREM de LILLE ..... p. 29

L'infini en mathématiques
Une question de l'Académie de Berlin pour l'année 1784
Jean-Pierre FRIEDELMEYER - IREM de STRASBOURG ..... p. 79

Ludwig WITTGENSTEIN et le fondement de la certitude
Jacqueline GUICHARD - Lycée E. Pérochon - PARTHENAY ..... p. 127

François BLONDEL - Architecte et Mathématicien
Jean-Paul GUICHARD - Collège Mendès France - PARTHENAY ..... p. 159

A propos de quelques algorithmes liés à des opérations élémentaires
Michel GUILLEMOT - IREM de TOULOUSE ..... p. 179

Un stage d'histoire des mathématiques pour la formation continue des enseignants du secondaire
Michèle GREGOIRE - Maryvonne HALLEZ - IREM de PARIS VII ..... p. 213

Exemples de calculs algébriques en Chine antique et médiévale
Olivier KELLER - Lycée P. Brossolette - VILLEURBANNE ..... p. 227

La recherche des tangentes à une conique
L'histoire des mathématiques comme outil pédagogique en terminale
Alain LE BOULCH - Lycée J. Cartier - SAINT-MALO ..... p. 249

Gerbert d'AURILLAC
Le savant, le maître, le mathématicien
Jean-Pierre LEVET - Université de LIMOGES ..... p. 257

Mathématiques constructives : hier et demain
Henri Lombardi - Faculté des Sciences et Techniques - BESANCON ..... p. 287

La relativité restreinte - Le rôle créateur d'EINSTEIN
Jean NOUET - Université du Maine - LE MANS ..... p. 303

La philosophie mathématique de Gaston BACHELARD
(d'après "Intuition et Réalisme en mathématique")
Michel SERFATI - Lycée Raspail - PARIS ..... p. 333

Théâtre et pédagogie
A propos d'une représentation théâtrale de "l'entretien de Mr DESCARTES et de Mr PASCAL LE JEUNE" de J.C. BRISVILLE
Michel SERFATI - Lycée Raspail - PARIS ..... p. 349

AMPERE et la différentiabilité des fonctions continues
Klauss VOLKERT - Bexbach - RFA ..... p. 359

Programme ..... p. 367

Liste des participants ..... p. 369

Liste des intervenants ..... p. 373

AVANT-PROPOS

La troisième Université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques, organisée par la Commission Nationale inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques, s'est tenue dans les locaux de l'I.U.T. de La Rochelle du 28 août au 2 septembre 1988. Elle a été subventionnée par le Ministère de l'Education Nationale, et elle a reçu une aide financière de l'Association pour le Développement des Etudes et des Recherches en Histoire et en Epistémologie des Mathématiques.

Cette *Université d'été* a rassemblé 85 participants, professeurs de collèges, de lycées, d'écoles normales, universitaires, chercheurs ou membres de l'Inspection, enseignants les mathématiques, la philosophie, l'histoire ou les sciences physiques.

- Donner une formation en épistémologie et en histoire des mathématiques que nécessite la mise en place d'un enseignement rénové des mathématiques,
- aider à l'élaboration de démarches pédagogiques qui permettent à un plus grand nombre d'élèves d'accéder au savoir et à une culture mathématique,
- diffuser les expériences menées dans les IREM en vue d'introduire une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques,

tels furent les objectifs de cette *Université d'été*.

Son objet portait sur la construction historique du savoir mathématique dans un contexte scientifique, technique, philosophique, culturel et social. Mathématiques et arts, la question de l'infini, les mathématiques dans la culture chinoise, l'histoire de l'enseignement des mathématiques, le rôle de la communauté scientifique, le contexte épistémologique de la construction des nombres réels furent quelques uns des thèmes abordés. Elle portait aussi sur les apports didactiques de l'épistémologie et de l'histoire avec des comptes rendus et des analyses d'expériences pédagogiques. Les problématiques et les méthodes de l'histoire des sciences ont également été abordées : introduction à la lecture de textes anciens, recherches bibliographiques et documentaires, problèmes de traduction et d'interprétation des textes mathématiques.

Le programme de l'*Université d'été* comprenait cinq conférences plénières, deux séries d'exposés et quatre séries d'ateliers en parallèle qui visaient à la fois des connaissances historiques, épistémologiques et pédagogiques. Il comportait également une séance de travail à la Bibliothèque Municipale de La Rochelle riche en livres anciens et rares de mathématiques, et une représentation théâtrale accueillie par la M.J.C.

Les organisateurs de l'*Université d'été* remercient tous les conférenciers et animateurs d'ateliers qui, grâce à la qualité de leurs interventions, ont su faire partager aux présents leurs réflexions et leur enthousiasme. Ils remercient également le Directeur de l'I.U.T. de La Rochelle, la Conservatrice de la Bibliothèque Municipale de La Rochelle et le Directeur de la M.J.C. de La Rochelle.

L'organisation pratique de cette *Université d'été* a été assurée par Annette FONTAINE, secrétaire de l'IREM de Poitiers. Nous la remercions très vivement pour son efficacité, sa compétence et son aide toujours souriante.

Les actes de l'Université rassemblent une partie des interventions qui ont été proposées. Ils illustrent le propos à la fois interdisciplinaire, culturel et pédagogique qui était celui de cette manifestation.

Evelyne BARBIN et Jacques BOROWCZYK

Commission inter-IREM
Epistémologie et Historique des Mathématiques

Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

LA DÉMONSTRATION MATHÉMATIQUE : SIGNIFICATIONS ÉPISTÉMOLOGIQUES ET QUESTIONS DIDACTIQUES

Evelyne BARBIN
IREM du MANS

SOMMAIRE

I Un exemple historico-pédagogique

II La démonstration dans la géométrie grecque

III Démontrer : convaincre ou éclairer ?

IV De la méthode : valeur épistémologique

V De la méthode : valeur didactique

VI Démonstration, évidence et contradiction

VII Conclusion

1. Le raisonnement déductif : un obstacle épistémologique
2. Comprendre une démonstration
3. Débat scientifique et conflit socio-cognitif
4. Les motivations de la démonstration
5. Enseignement des méthodes, méthodologie et construction de la rationalité.

LA DEMONSTRATION MATHEMATIQUE : SIGNIFICATIONS EPISTEMOLOGIQUES ET QUESTIONS DIDACTIQUES(1)

"On tire des lignes, on ne sait pour quelle raison, on s'aperçoit plus tard que c'étaient des nœuds coulants qui se serrent à l'improviste, pour surprendre le consentement du curieux qui cherchait à s'instruire ; celui-ci tout saisi, est obligé d'admettre une chose dont la contexture intime lui est encore parfaitement incomprise".

SCHOPENHAUER, Le monde comme volonté et comme représentation

Pourquoi démontrer ? Qu'est ce que démontrer ? Quel sens cela a-t-il de démontrer ? Quelle est la valeur et la signification d'une démonstration? Ces questions sont les préliminaires à toute réflexion sur l'apprentissage de la démonstration. Tout comme le problème du sens des contenus mathématiques enseignés est premier dans la recherche d'une démarche enseignante visant la construction des savoirs par les élèves.

L'histoire des mathématiques est un moyen de saisir la portée et la signification des objets mathématiques : à quels problèmes répondait leur élaboration, pour quelles raisons ont-ils connu des rectifications ? Les concepts et les théories mathématiques ont une histoire, tout comme la notion de rigueur ou l'idée de démonstration. Pour éclairer les questions ci-dessus nous interrogeons donc l'histoire des mathématiques en recherchant quelles furent les significations de la démonstration et en nous attachant aux moments essentiels, à savoir celui de la naissance de l'idée de démonstration et ceux où se sont opérées deux ruptures importantes, aux XVIIème et XIXème siècles.

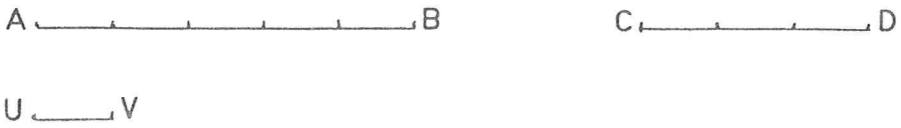
Nous mettons en regard de cet historique, les problèmes soulevés par l'apprentissage de la démonstration et les difficultés rencontrées par les élèves. Cela nous amène à approcher en des termes différents et plus complexes qu'elle ne l'est souvent la question de l'apprentissage de la démonstration, et à indiquer les limites des équivalences "démonstration = raisonnement déductif", et "démontrer = convaincre". L'apprentissage de la démonstration doit s'opérer par étapes et nécessite la constitution d'une rationalité chez l'élève, ce qui nous conduit à privilégier l'élaboration, l'explicitation et le perfectionnement de méthodes de résolution par les élèves.

---

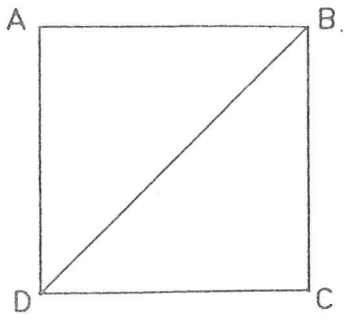
(1) Cet article est le texte d'un exposé effectué le 23 mars 1988 au séminaire de didactique de l'I.R.M.A.R. de Rennes (Régis GRAS).

I. Un exemple historico-pédagogique

Pour préciser notre point de vue, nous allons donner un exemple qui pose en termes historiques et didactiques la question de la valeur et de la signification d'une démonstration. Il s'agit de la démonstration de la proposition CXVII du livre X des Eléments d'Euclide, dite proposition par le pair et l'impair. L'énoncé de cette proposition est le suivant : "dans les figures carrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté". Deux grandeurs sont commensurables si elles ont une mesure commune ; ainsi deux segments AB et CD seront commensurables si on peut trouver un segment UV qui mesure à la fois AB et CD, c'est-à-dire si il existe deux entiers n et m tels que AB = n UV et CD = m UV. Euclide dirait encore que le segment AB a avec le segment CD la raison qu'un nombre n a avec un nombre m.



Pour démontrer que la diagonale BD du carré ABCD est incommensurable avec le côté AB de ce carré, Euclide procède par l'absurde. Notons que certains historiens avancent qu'Euclide reproduit ici la première démonstration par l'absurde élaborée par les géomètres grecs. L'argumentation d'Euclide est la suivante. Si AB et BD sont commensurables alors AB a avec BD



la raison d'un nombre n avec un nombre m. D'après le théorème de Pythagore $BD^2 = 2\ AB^2$, donc $m^2 = 2\ n^2$. On peut toujours supposer que m et n sont premiers entre eux et alors $m \neq 1$. A partir d'ici nous allons retrouver les termes actuels de la démonstration classique de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, mais remarquons que le contexte de la démonstration d'Euclide est tout à fait différent : il ne s'agit pas de montrer l'irrationalité d'un nombre noté $\sqrt{2}$. Puisque m^2 est pair, m est aussi pair et n est impair. Par ailleurs, si nous posons $m = 2$ k-nous utilisons ici des notations modernes- alors $n^2 = 2\ k^2$, donc n^2 est pair et n est aussi pair. Un nombre ne peut être à la fois pair et impair, donc il y a contradiction. Par conséquent, AB et BD sont incommensurables.

Quelle est la valeur et la signification de cette démonstration ? Ce sont des élèves de 3ème et des étudiants de lettres en premier cycle qui vont répondre.

Dans une classe de 3ème, Françoise Van Diren-Thomas du G.E.M. de Louvain-La-Neuve (Belgique) a fait devant ses élèves la démonstration d'Euclide en s'arrêtant juste avant la conclusion, elle leur a alors demandé : "que peut-on en conclure ?"

Les élèves ont répondu : "le théorème de Pythagore est faux". Cette conclusion peut dans un premier temps, nous faire sourire. Mais dans un second temps nous devons nous demander pourquoi et comment les élèves en sont arrivés là. La première chose que nous devons remarquer est qu'ils ont bien compris le ressort de la démonstration par l'absurde. Puisque nous arrivons à quelque chose d'absurde, c'est qu'un argument de la démonstration est faux. Examinons les trois arguments qui interviennent : AB et BD sont commensurables, le théorème de Pythagore et l'argumentation sur la parité. Lequel abandonner ? Exposer la situation en ces termes peut paraître provocant au mathématicien car seule la commensurabilité des segments était mise en jeu. Nous allons revenir sur ce point.

Premier argument : AB et BD sont commensurables. Là il n'y a pas de doute pour l'élève et pour n'importe quelle personne, en dehors d'un enseignant de mathématiques. Il est évident que deux segments quelconques ont une mesure commune, il suffit de prendre celle-ci suffisamment petite. Pour mettre en doute cette commensurabilité manifeste, il faut avoir idéalisé le segment. Le segment n'est pas ce morceau de papier que je peux couper jusqu'à trouver la mesure commune, ce n'est pas ce trait de crayon ou de craie que je peux fragmenter. Pour soupçonner la possibilité d'une incommensurabilité, il faut que l'élève ait déjà réalisé une conception idéale du segment, voire des objets mathématiques.

Pour le mathématicien, il est évident que dans une démonstration par l'absurde il n'y a qu'un argument que l'on met en balance, celui que l'on veut justement démontrer. Les théorèmes que l'on pourrait par ailleurs utiliser ne sont pas remis en cause par l'apparition d'une contradiction. Ceci est affaire de rationalité. Ainsi, le théorème de Pythagore est lui-même le résultat d'une démonstration et on doit lui accorder un degré de certitude absolu. Nous nous attendons à ce que l'élève admette cette certitude : le théorème de Pythagore est vrai quelles que soient les circonstances de son utilisation. Mais, en fait, cela suppose que l'élève fasse sienne une certaine rationalité : c'est la constitution de cette rationalité qui est ici en cause.

La réaction d'étudiants de première année de DEUG littéraire apporte d'autres indications. Dans une unité optionnelle d'histoire des sciences, j'ai assuré un enseignement consacré à l'épistémologie et l'histoire des mathématiques. Le thème abordé était "nombre et mesure". Lors d'une première séance, les étudiants avaient compris la question de l'incommensurabilité, conçu la démarche extraordinaire que représentait la tentative d'une démonstration dont le résultat constitue nécessairement une rupture épistémologique. La lecture du texte d'Euclide ne leur donnant visiblement pas satisfaction, je leur demandai : "Que pensez-vous de cette démonstra- tion ?" La réponse d'un étudiant est intéressante : l'insatisfaction venait du fait que l'argument sur lequel repose la démonstration -il s'agit cette fois du fait qu'un nombre ne peut être à la fois pair et impair- est éloigné de ce qui est cause, à savoir l'impossibilité de trouver une mesure commune à deux segments.

Examinons cette remarque. Il est exact que les segments interviennent en tant que tels uniquement dans le dessin ; dans la démonstration ils ne sont que les termes d'une relation : le carré de BD est double du carré de AB. Le reste de l'argumentation est de type arithmétique : nombres premiers, parité d'un nombre et de son carré, etc... Il est vrai que, contrairement à l'attente des étudiants, la démonstration évite toute considération sur la composition des segments. Le segment est une grandeur continue qui, par divisions successives, reste encore un segment sans que l'on puisse aboutir au point. Si un point avait une certaine grosseur alors tous les segments seraient commensurables, donc le rapport entre ligne et point est en cause. La démonstration d'Euclide semble artificielle. Ce qui a permis l'artifice est la forme même de la démonstration : le procédé par l'absurde.

Ainsi, cette démonstration peut nous convaincre, mais elle force notre entendement. Nous constatons le résultat mais, comme écrit Bachelard à propos de la démonstration mathématique, "il ne suffit pas d'en constater le résultat pour en saisir le sens"(2). Nous pouvons encore ne pas saisir pourquoi on ne peut vraiment pas trouver de mesure commune à ces deux segments.

La démonstration par le pair et l'impair est, à certains égards, assez typique de la démonstration dans la géométrie grecque. Nous allons la replacer dans son cadre historique pour étudier les conditions de la naissance de la démonstration et la signification de l'idée de démonstration dans la géométrie grecque.

II. La démonstration dans la géométrie grecque

Il n'y a pas dans les mathématiques égyptiennes ou babyloniennes de démonstration, sauf si on considère que l'accumulation de démarches identiques puisse faire preuve. Au VIème siècle avant J.C. naît dans la Grèce Antique une pensée rationnelle et géométrique. Dès son origine, l'astronomie grecque se détache de toute religion astrale. Pour Anaximandre, si la terre ne tombe pas ce n'est pas grâce à Zeus, mais parce qu'étant à égale distance de tous les points de la circonférence céleste, elle n'a pas plus de raison d'aller à droite qu'à gauche, ni en haut qu'en bas(3). Les historiens ont parlé pendant longtemps de "miracle grec". Aujourd'hui, les travaux de Vernant, de Caveing ou de Szabo permettent de comprendre ce qui n'est pas un miracle mais une mutation, mutation que l'on peut expliquer par les transformations sociales et économiques que connaît cette région à cette époque.

Le VIème siècle avant J.C. voit apparaître la cité grecque et naître la démocratie. Toutes les affaires de la cité doivent faire l'objet "d'un libre débat, d'une discussion publique, au grand jour de l'agora, sous forme de discours argumentés"(4). Alors que dans la civilisation égyptienne, le pouvoir appartient à l'écriture, spécialité et privilège de scribes jaloux de leur savoir, la civilisation grecque donne l'importance à la parole. Il s'agit de convaincre par un discours fondé sur la raison, le logos. Ce qui est vrai pour l'organisation de la cité est vrai dans tous les domaines de l'intellect. Les textes de Platon sont écrits sous forme de dialogue où le maître Socrate doit convaincre son interlocuteur. Les discussions philosophiques des Eléates obéissent à un véritable art oratoire dans lequel la démonstration indirecte est particulièrement appréciée, car elle permet de révéler les contradictions contenues dans les propositions de l'autre. Ceci permet de supposer que les mathématiciens ont emprunté la démonstration par l'absurde à la philosophie éléate(5).

La démonstration apparaît donc comme un acte social qui a pour objet de convaincre l'autre. L'enjeu est politique dans l'agora, il est philosophique dans l'école de Platon ou d'Aristote: distinguer la science de l'opinion. Pour eux, la science est la connaissance vraie et certaine. Une propriété est connue scientifiquement quand on sait non seule-

---

(2) BACHELARD, *Le rationalisme appliqué*, p. 11.

(3) VERNANT, *Mythe et pensée chez les Grecs*, I, p. 175.

(4) Ibid, p. 177.

(5) SZABO, *Greek dialectic and Euclid's axiomatics.*

ment qu'elle est, mais pourquoi elle est et qu'elle ne peut être autrement[6]. Aristote affirme que connaître, c'est connaître par le moyen de la démonstration[7].

Comment démontrer, s'il s'agit de convaincre ? Il faut tout d'abord que l'interlocuteur admette un certain de nombre de points : ce sont les raisons premières qui, dans les Eléments d'Euclide, prennent le nom de postulats ou de demandes. Il faut ensuite obliger l'interlocuteur à consentir et le raisonnement déductif est mis en place à cet effet. Le raisonnement déductif fait des propositions mathématiques des propositions scientifiques.Les livres des Eléments d'Euclide sont constitués d'une série de définitions, de postulats et de demandes suivis de théorèmes et de corollaires qui doivent être établis uniquement -en principe- à l'aide des axiomes et des théorèmes précédents. Pour Aristote, le traitement des axiomes ne relève pas des mathématiques mais de la métaphysique : ils s'imposent grâce à la raison collective de l'humanité[8].

Est-ce si difficile de convaincre ? Oui, car les adversaires peuvent être coriaces et les questions soulevées délicates. Ainsi, les paradoxes de Zénon d'Elée qui nient la possibilité de tout mouvement. La lecture des démonstrations d'Euclide indique bien que leur principal souci est de convaincre et d'éviter toute considération qui pourrait porter le flanc aux détracteurs. Ainsi, toute considération sur l'infini est absente, le procédé par l'absurde est très fréquent et il n'y a jamais aucune indication sur la manière dont les démonstrations ont été produites. Nous pourrions dire la même chose de la plupart des démonstrations d'Archimède : nous reviendrons sur ce point lorsque nous aurons à les confronter à celles des mathématiciens du XVIIème siècle.

La démonstration par le pair et l'impair a bien les caractéristiques de la démonstration grecque : elle offre l'avantage d'éviter toute considération sur la composition du continu mais elle présente l'inconvénient de convaincre sans faire comprendre. Cependant, comme nous l'ont montré les réponses d'élèves de 3ème et d'étudiants, elle convainc l'interlocuteur qui partage avec Euclide un certain degré de rationalité, et reconnaît donc l'idéalité des segments considérés, la validité d'une démonstration par l'absurde ou la véracité de certains arguments mathématiques. La démonstration est un acte social dans un microcosme d'interlocuteurs partageant déjà une même rationalité et les mêmes connaissances. Comme le note Bachelard, "le caractère apodictique ne se décrète pas"[9]. Cette remarque a des implications didactiques sur lesquelles nous reviendrons.

Euclide a préféré la démonstration indirecte au procédé par antyphérèse. Ce procédé, développé par les Grecs, est pourtant directement lié à la proposition II du livre X des Eléments qui caractérise les grandeurs incommensurables. L'énoncé en est le suivant : "Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent ; ces grandeurs seront incommensurables". Il est directement calqué sur la proposition I du livre VII qui est l'algorithme d'Euclide pour décider que deux nombres sont premiers entre eux : "Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui qui est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seront premiers entre eux". Le problème est, bien sûr, que pour les grandeurs continues l'incommensurabilité est obtenue grâce au caractère infini du procédé ! Pourtant la démonstration par antyphérèse permet de faire voir, sans doute mieux que la démonstration par le pair et l'impair, comment on arrive à une procédure

---

(6) ARISTOTE, *Métaphysique*, Al, 981.

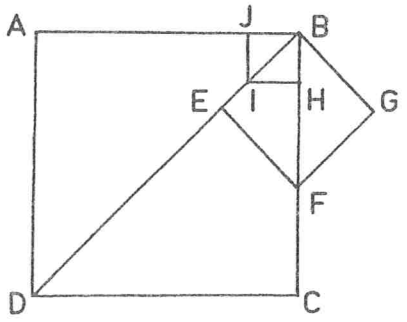
(7) ARISTOTE, *Organon, Seconds Analytiques*, 12, 15.

(8) MOREAU, *Aristote et son école.*

(9) Op. cit., p. 11.

infinie et donc pourquoi côté et diagonale sont incommensurables. Voici cette démonstration :

Considérons le carré ABCD, nous allons opérer -conformément à la proposition II du livre X- une suite de différences de segments, à commencer par la différence entre la diagonale BD et le côté DC. Le problème est de faire apparaître sur la figure des



segments qui représentent les différences successives. Pour commencer, nous portons le point E sur la diagonale BD tel que DE = DC, nous avons BD-DC = BE. Pour continuer, menons en E la perpendiculaire à BD qui coupe BC en F. Il est aisé de montrer que BE = EF = FC. La différence suivante est DC-BE = DC-FC = BF. Construisons le carré BEFG, et notons que la différence que nous devons maintenant effectuer est BF-BE, c'est-à-dire encore la différence entre la diagonale et le côté d'un carré. Nous pouvons recommencer, comme précédement : prendre H sur BF tel que HF = BE, et la différence suivante est BF-BE = BH, puis mener HI perpendiculaire à BF, et la différence suivante est BE-BH = BI. Arrivés à ce point, il est manifeste que nous nous retrouvons dans une position identique à celle du départ, nous avons à effectuer la différence entre la diagonale BI et côté BH du carré BHIJ. Le carré est plus petit, mais nous pouvons recommencer indéfiniment la même série d'opérations dans des carrés de plus en plus petits.

Cette démonstration présente l'inconvénient de ne point éviter l'infini, elle est donc susceptible d'être repoussée par un contradicteur qui demanderait ce que deviennent ces carrés de plus en plus petits et leurs propriétés. Cependant, on peut penser que les mathématiciens du XVIIème siècle auraient, eux, préféré la démonstration par antyphérèse à la démonstration par le pair et l'impair. En effet, la première offre l'intérêt d'être un procédé direct qui correspond exactement au critère d'incommensurabilité, elle peut donc nous faire sentir bien plus que la seconde la raison de l'incommensurabilité des segments concernés. Le XVIIème siècle aurait sans doute dit que la première peut nous éclairer, alors que la seconde ne peut que nous convaincre.

III. Démontrer : convaincre ou éclairer ?

Le XVIIème siècle marque une rupture dans la conception de la démonstration. Les textes des Anciens, en particulier ceux d'Euclide ou d'Archimède, sont connus et fort admirés. Mais un certain nombre de critiques, concernant leurs démonstrations, sont formulées : les théorèmes se suivent sans aucun ordre, les démonstrations ne dépendent d'aucune méthode générale, les démonstrations par l'absurde pullulent et, surtout, les Anciens n'ont pas donné leurs moyens de découverte. Nous retrouvons ces critiques sous la plume de Torricelli, de Descartes, de Pascal, d'Arnauld et Nicole, ou de Wallis.

S'il faut expliquer cette rupture, nous pouvons la trouver dans la soif d'inventer des géomètres du XVIIème siècle, elle-même liée à l'apparition de la fonction d'ingénieur-mathématicien. Galilée est le prototype de cette nouvelle race de savants plus intéressés à la mesure et au fonctionnement des phénomènes qu'à leur explication(10). Les mathématiciens vont avoir pour principal souci de développer des méthodes : méthode des indivisibles, méthode des tangentes, méthode cartésienne, méthode projective. Ces méthodes sont autant de moyens de résoudre par la même voie plusieurs problèmes, d'inventer de nouveaux résultats et de produire des heuristiques.

Dans La logique ou l'art de penser de 1674, les jansénistes et amis de Pascal, Arnauld et Nicole, énumèrent les défauts qui se rencontrent d'ordinaire dans la méthode des géomètres. Ces défauts sont autant de critiques vis à vis des Anciens, et ils tirent "d'Euclide même les exemples de ces défauts".

Le premier défaut est "d'avoir plus soin de la certitude que de l'évidence et de convaincre l'esprit que de l'éclairer". L'alternative convaincre ou éclairer est posée dès l'énoncé du premier défaut. Nous la retrouvons chez la plupart des auteurs d' Eléments de géométrie du XVIIème siècle qui justifient leurs écrits par la nécessité de suppléer aux déficiences des Eléments d'Euclide. Ce premier défaut est la cause essentielle des cinq autres défauts.

Le second défaut est de "prouver des choses qui n'ont pas besoin de preuves". Les géomètres croient qu'ils convaincront mieux en trouvant quelque preuve des choses même les plus évidentes. Ainsi, Euclide croit bon de prouver que la somme des longueurs de deux côtés d'un triangle est supérieure à la longueur du troisième.

Le troisième défaut est constitué par les "démonstrations par l'impossible". Ces démonstrations sont "très ordinaires dans Euclide". Elles convainquent l'esprit sans l'éclairer "car notre esprit n'est point satisfait, s'il ne sait non seulement que la chose est, mais pourquoi elle est".

Le quatrième défaut est constitué par les "démonstrations tirées par des voies trop éloignées". Arnauld et Nicole font remarquer que "tout Euclide est plein de ces démonstrations par des voies étrangères". La démonstration par le pair et l'impair cumule, comme nous l'avons vu, ce défaut et le précédent.

Les deux derniers défauts concernent le manque de méthode : le cinquième est de "n'avoir aucun soin du vrai ordre de la nature" et le sixième de "ne point se servir de divisions et de partitions"(11).

L'importance de la méthode est proclamée par Descartes et la recherche de la méthode est le principal objet de son Discours de la méthode dont La Géométrie constitue une partie. La règle IV de ses Règles pour la direction de l'esprit est sans ambiguïté : "La méthode est nécessaire pour la recherche de la vérité"(12) . Commentant cette règle, il écrit son insatisfaction à la lecture des textes anciens : "Certes j'y lisais sur les nombres une foule de développements dont le calcul me faisait constater la vérité (...). Mais pourquoi il en était ainsi et comment on parvenait à le trouver, ils ne me paraissaient pas suffisamment le montrer à l'intelligence même (...). Rien n'est plus futile dans ces démonstrations superficielles que le hasard fait découvrir plus souvent que l'art". Descartes est persuadé que les Anciens possédaient cet art d'inventer, cette

---

(10) Voir E. BARBIN et alia, *Mathématiques, arts et techniques au XVIIème siècle.*

(11) ARNAULD et NICOLE, *La logique ou l'art de penser*, p. 325 à 331.

(12) DESCARTES, *Règles pour la direction de l'esprit*, p. 18 à 28.

"véritable mathématique", mais ils ont dû "la faire disparaître par une sorte de ruse coupable". "Ils ont préféré, pour se faire admirer nous présenter à la place quelques vérités stériles démontrées avec une subtile rigueur logique comme des effets de leur art, plutôt que nous apprendre leur art lui-même qui aurait complètement tari notre admiration". Cette avarice supposée des Anciens est aussi dénoncée par les italiens Torricelli et Nardi ou par l'anglais Wallis(13) .

Le géomètre et pédagogue Lamy reprend à son compte la distinction convaincre ou éclairer, dans son ouvrage de 1683, Les entretiens sur les sciences, consacré à l'éducation scientifique. Le maître Théodose y conseille au novice Eugène : "pour bien apercevoir il faut attendre la clarté avant que de consentir : on ne le doit point faire qu'après qu'on s'y sent forcé par l'évidence de la vérité"(14). Dans ces entretiens, le maître apprend à son élève "comme l'on doit se servir des Sciences, pour se faire l'esprit juste, et le coeur droit" et lui donne "la méthode d'étudier". Dans le chapitre concernant la méthode, le maître précise : "il n'y a pas d'autre manière d'acquérir naturellement une connaissance qu'en la tirant de l'idée ou de la définition de la chose qu'on examine. Ces seules démonstrations éclairent l'esprit, car celle qu'on emploie en montrant que l'on ne peut contester ce que l'on propose, qu'il ne s'ensuive une grande absurdité, ces démonstrations dis-je convainquent l'esprit mais elles ne l'éclairent pas"(15).

Dans la préface à ses Eléments de géométrie de 1685, Lamy critique ouvertement les livres des Anciens qui "ne sont pas si propres pour exercer l'esprit que ceux qui ont été faits en ce temps". Il fait l'éloge de son temps où la Géométrie a été cultivée avec plus de succès qu'en aucun autre : "On y a fait de grandes découvertes, et ce qui est plus considérable, on a trouvé le moyen d'éclaircir ce que les Anciens avaient écrit avec obscurité et confusion". Le livre cinquième de l'ouvrage est consacré à la méthode, car l'on peut déduire "tout ce qui se peut savoir de Géométrie, lorsqu'on suit une bonne méthode". Il y donne, pour un même résultat, une démonstration qui convainc et une autre qui éclaire(16).

Il peut être intéressant de noter, sans pouvoir établir un parallèle, que les mathématiciens chinois distinguent dans l'idée de démontrer le "bian" qui a pour objet de convaincre et de persuader, du "xiao" qui a pour objet de faire comprendre. Cette distinction doit être rapprochée de la manière dont les mathématiciens chinois accueillirent les Eléments d'Euclide lorsque les jésuites les importèrent dans leur contrée au XVIIème siècle. Ils en apprécièrent fort les résultats mais ne furent vraiment pas sensibles à leurs démonstrations. En effet, les théorèmes d'Euclide comprennent rituellement plusieurs parties -l'énoncé, la construction de la figure, l'explication de l'énoncé sur la figure, la démonstration proprement dite et la conclusion-. Les mathématiciens chinois gardèrent tout sauf... la démonstration. Les Eléments d'Euclide leur semblaient vraiment par trop verbeux(17).

Au XVIIème siècle, la signification de la démonstration change : la démonstration n'est pas donnée pour convaincre, elle a pour but d'éclairer. Par là-même, ce qui a valeur de démonstration peut changer. Nous avons vu que le raisonnement déductif mis en place par les géomètres grecs répondait bien à la fonction de convaincre. Au XVIIème siècle,

---

(13) Voir E. BARBIN, *Heuristique et démonstration en mathématiques*, p. 147 à 150.

(14) LAMY, *Entretiens sur les sciences*, p. 64.

(15) Idem, p. 88-89

(16) LAMY, *Eléments de géométrie*, p. 278 à 282.

(17) Lire MARTZLOFF, *Histoire des mathématiques chinoises.*

la volonté d'inventer et d'éclairer correspond au privilège accordé à l'élaboration et à l'explicitation de méthodes de résolution -nommées "méthodes de découverte"-. Mais quelle est la valeur démonstrative des méthodes heuristiques ?

IV. De la méthode : valeur épistémologique

Les mathématiciens du XVIIème siècle se posent bien sûr le problème de la validité, comme démonstration, des méthodes qu'ils introduisent. Ces méthodes éclairent parce qu'elles montrent la voie par laquelle on est passé et apportent l'évidence. Mais ce qui est rendu évident doit-il être considéré comme démontré ? L'italien Nardi écrit que "toute évidence est certaine alors que toute certitude n'est pas évidente". Cette formule est significative : à partir du moment où le géomètre du XVIIème siècle se place hors la loi du raisonnement déductif, c'est à la certitude qu'il doit en appeler pour prétendre à la démonstration. L'appel à la certitude ne va pas sans poser des difficultés car, selon la méthode considérée, les avis des mathématiciens vont pouvoir être différents. La méthode des indivisibles est l'une de celles qui posent le plus de problèmes, alors que la méthode cartésienne paraît dès l'abord ne laisser aucun doute sur la vérité des résultats qu'elle permet d'obtenir. Quoi qu'il en soit de la certitude de leurs méthodes, les géomètres ne peuvent renoncer à les utiliser : elles sont nécessaires à la découverte de nouveaux résultats et à l'obtention de procédés généraux, elles sont indispensables à la satisfaction de leur soif d'inventer.

La méthode des indivisibles, parue en 1635 dans un ouvrage de l'italien Cavalieri, est une méthode générale pour résoudre des quadratures -c'est à dire pour comparer des surfaces. Le XVIIème siècle connaît les quadratures d'Archimède par la méthode d'exhaustion. Celle-ci consiste, pour démontrer l'égalité de deux surfaces A et B, à montrer que chacune des inégalités $A > B$ et $A < B$ conduit à une contradiction. Les contradictions sont obtenues en approchant la surface A par une surface rectiligne C, inscrite ou circonscrite, de sorte que la différence entre les surfaces A et C soit aussi petite que voulu. Cette méthode présente trois inconvénients dénoncés par les géomètres du XVIIème siècle. D'abord, c'est une méthode indirecte qui suppose que l'on connaisse a priori la mise en rapport que l'on veut établir : ce n'est pas une "méthode de découverte". Ensuite, c'est une méthode pénible qui demande de longs développements. Enfin, elle nécessite de résoudre chaque quadrature cas par cas. Cependant, elle offre l'avantage d'éviter toute considération sur l'infini ou sur la composition du continu.

L'idée essentielle de la méthode des indivisibles est de comparer deux surfaces en comparant les indivisibles de ces surfaces, les indivisibles étant les segments découpés sur ces surfaces par un plan parallèle à un plan donné appellé "règle". Après avoir procédé à une confrontation indivisible par indivisible et établi l'existence d'un même rapport entre indivisibles correspondants, on en conclut à l'existence du même rapport entre les surfaces comparées. Cette méthode a le mérite d'être directe et courte, mais elle entraîne le géomètre qui veut la justifier sur le terrain difficile de la composition du continu. La "géométrie des indivisibles" est largement utilisée au XVIIème siècle, car elle constitue aux yeux de tous un merveilleux procédé d'invention. En revanche, sa valeur comme démonstration ne fait pas l'unanimité[18].

---

(18) Sur l'usage des indivisibles au XVIIème siècle, voir E. BARBIN, *Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des indivisibles au XVIIème siècle.*

La méthode cartésienne pose, de manière moins critique que la précédente, la question de la validité de la méthode comme moyen de démonstration. En effet, le dénombrement méthodique des connaissances paraît ne laisser aucun doute sur l'évidence et la certitude d'un résultat. La méthode cartésienne a deux volets : le premier dans le Discours de la Méthode et le second dans La géométrie. Les préceptes du Discours de la méthode sont les suivants :

"Le premier était de ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment être telle (...). Le second, de diviser chacune des difficultés que j'examinerais, en autant de parcelles qu'il se pourrait, et qu'il serait requis pour les mieux résoudre. Le troisième, de conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour montrer peu à peu, comme par degrés, jusques à la connaissance des plus composés (...). Et le dernier, de faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre"(19).

Dans La Géométrie, Descartes donne une méthode générale pour résoudre des problèmes géométriques en les ramenant à la résolution d'une équation algébrique. Il écrit : "Ainsi voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes, qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues, et inconnues, on doit parcourir la difficulté, selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusques à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une Equation"(20).

Un résultat obtenu en utilisant la méthode cartésienne peut-il comporter une part d'incertitude ? Pour Descartes, la réponse est nette : "les choses que nous concevons fort clairement et fort distinctement sont toutes vraies"(21). Que l'on consente ou non à cette règle philosophique, il faut bien admettre que le dénombrement méthodique des connaissances et la conduite ordonnée de la pensée, auxquels le mathématicien est invité à s'appliquer, ne peut lui laisser aucun doute intime. Si la méthode conduit à la certitude alors elle peut prétendre à une valeur démonstrative. Cela nous entraîne à admettre, à côté du raisonnement déductif, une seconde façon de démontrer. Dans les Méditations métaphysiques, Descartes franchit ce pas :

"La manière de démontrer est double : l'une se fait par l'analyse ou résolution, et l'autre par la synthèse ou composition.

L'analyse montre la vraie voie par laquelle une chose a été méthodiquement inventée (...); en sorte que, si le lecteur la veut suivre, (...) il n'entendra pas moins parfaitement la chose ainsi démontrée, et ne la rendra pas moins sienne, que si lui-même l'avait inventée.

La synthèse (...) se sert d'une longue suite de définitions, de demandes, d'axiomes, de théorèmes et de problèmes (...), elle arrache le consentement du lecteur, tant obstiné et opiniâtre qu'il puisse être ; mais elle ne donne pas, comme l'autre, une entière satisfaction aux esprits de ceux qui désirent d'apprendre, parce qu'elle n'enseigne pas la méthode par laquelle la chose a été inventée"(22).

---

(19) DESCARTES, *Discours de la méthode*, p. 47.

(20) DESCARTES, *La géométrie*, p. 5-6.

(21) DESCARTES, *Discours de la méthode*, p. 60.

(22) DESCARTES, Réponses aux secondes objections, *Méditations métaphysiques*, p. 175.

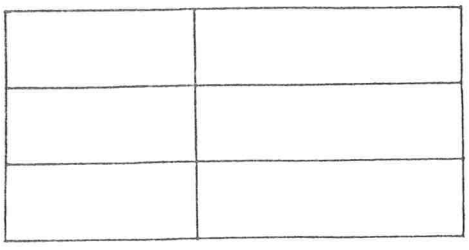
La conception cartésienne d'une double façon de démontrer, l'analyse et la synthèse, sera souvent reprise au cours des siècles suivants ; en particulier, dans les traités où -comme déjà dans les propos de Descartes- on s'adresse à des apprenants. Le sentiment de démontrer ne vient-il pas d'abord du cheminement même que l'on a emprunté pour découvrir un résultat ? Cette remarque a des implications didactiques qui nous conduisent à poser, sur le plan didactique, la question de la valeur des méthodes de résolution.

V. De la méthode : valeur didactique

L'acte de démontrer peut avoir plusieurs significations. Par conséquent, toute approche didactique de la démonstration nécessite une réflexion épistémologique qui passe par deux questions : quelle est cette signification pour l'élève ? quelle est-elle pour l'enseignant ? Nous avons dit que si la démonstration a pour signification d'éclairer, de rendre évident et certain, alors la méthode de résolution peut valoir comme démonstration. Ainsi, l'élève qui a suivi une méthode pour résoudre un problème peut s'en contenter. Tandis que, si l'enseignant pense que la démonstration a pour signification de convaincre, il va attendre des élèves une autre démarche. Nous allons examiner, selon ce point de vue, une expérience analysée par Nicolas Balacheff dans un article intitulé Preuve et démonstration au collège.

Dans cet article, Nicolas Balacheff veut montrer que "la nécessité de prouver est liée à la situation dans laquelle on se trouve" et que "la preuve est un acte social qui s'adresse à un individu (éventuellement soi-même) que l'on veut convaincre". Pour cela, le chercheur met en place un dispositif expérimental destiné à mettre en situation d'interactions et de communications des groupes d'élèves. Nous reviendrons plus loin sur l'aspect socio-cognitif de l'expérience. Ce qui nous intéresse, dans un premier temps, est le type de problème posé aux élèves, ce que les élèves en ont fait et les conclusions du chercheur, afin de pointer l'opposition qui existe entre la valorisation de la méthode par les élèves et la signification que le chercheur accorde à la démonstration. Il y a là une rupture d'ordre épistémologique, qui n'est pas relevée par le chercheur, et qui est fort intéressante pour notre propos.

Le problème posé aux élèves est le suivant : "combien y-a-t-il de rectangles dans cette figure ?"



La rédaction de l'article nous permet de suivre de près les démarches des élèves. Ces démarches relèvent pour beaucoup de la méthode cartésienne : une revue générale qui permet de ne rien omettre, un dénombrement mené souvent habilement avec un codage parfois astucieux. Cependant, le chercheur est insatisfait, il ne s'agit là que d'"explications" et non de "preuves". Pour lui, "la preuve du résultat implique l'examen de l'exhaustivité" et de la non-redondance de la procédure d'énumération". Les élèves de 3ème se sont bornés à énoncer une procédure d'énumération qui fait apparaître son caractère systématique. Comme l'écrit le chercheur, "la conviction est fon-

dée sur la reconnaissance du caractère systématique de la procédure". A partir du moment où l'on est certain de la procédure, pourquoi fournir en plus une preuve ? "J'en suis sûre" dit une élève, "Qu'est-ce-qu'on peut démontrer là dedans ?" se demande un autre. Les élèves de Balacheff feraient de bons disciples de Descartes.

Venons maintenant à l'attente du chercheur qui, notons-le, n'est peut-être pas tout à fait à la mesure de la question posée : "combien y-a-t-il de rectangles ?" Il semble, qu'en tant que disciple de Lakatos, le chercheur attende des réfutations : "puis-je avoir oublié un rectangle ?" et "est-ce que je suis sûr de ne pas avoir compté deux fois le même rectangle ?" Il aurait voulu que ces questions soient examinées par les élèves. Balacheff a lui-même sa propre conception de la démonstration ; pour lui "la notion de contradiction se trouve la clé de voûte de toute problématique de la validation"(23) . Si la conception des élèves est proche de celle du philosophe du XVIIème siècle, celle du chercheur en est différente. Celui-ci met la contradiction au centre de l'idée de démonstration, ce qui ne signifie pas qu'il doit être mis du côté des Anciens. Balacheff propose, en fait, une conception qui est celle du mathématicien du XXème siècle, comme nous le verrons dans la chapitre suivant.

Ainsi, au dénombrement des obstacles rencontrés par les élèves et relevés par le chercheur -obstacle lié à la situation mathématique, obstacle psycho-génétique, obstacle didactique-, il faudrait ajouter un obstacle épistémologique lié à la signification même de l'idée de démonstration.

La rupture épistémologique qui s'est produite au XVIIème siècle nous amène à poser deux questions concernant l'apprentissage de la démonstration.

La première question est la suivante : si la démonstration peut avoir une autre signification que celle de convaincre, pourquoi privilégier uniquement le raisonnement déductif ou l'enchaînement logique ?

En 1765, Clairaut indique dans son ouvrage à vocation pédagogique, Eléments de géométrie, qu'il "évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes ; c'est à dire de ces propositions, où l'on démontre que telle ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir". Il préfère donner la voie de la découverte afin que "les Commençants aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'Inventeur; et par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention"(24). Trois ans auparavant, Jean-Jacques Rousseau publiait l'Emile dans lequel il écrit "vous trouverez toute la géométrie élémentaire en marchant d'observation en observation, sans qu'il soit question ni de définitions, ni de problèmes, ni d'aucune autre forme démonstrative que la simple superposition"(25). Au siècle suivant, en 1841, Cournot note : "On peut satisfaire à toutes les conditions d'un enchaînement logique, sans éclairer l'esprit sur les rapports essentiels des idées et des théories auxquels on l'applique (...). J'avoue que j'attacherais moins de prix à mettre dans la démonstration d'un théorème cette rigueur extrême, qu'à faire clairement apercevoir la raison de ce théorème et ses connexions avec les autres vérités mathématiques"(26). Ainsi, jusqu'à la fin du XIXème siècle, des auteurs se défient du raisonnement déductif ou de l'enchaînement logique quand il s'agit d'éclairer des "commençants".

---

(23) BALACHEFF, *Processus de preuve et situation de validation*, p. 109.

(24) CLAIRAUT, *Eléments de géométrie*, préface p. XII.

(25) J.J. ROUSSEAU, *Emile*, p. 157.

(26) COURNOT, préface du Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitésimal, p. XIV, cité par ROSTAND, *Sur la clarté des démonstrations mathématiques*.

Aujourd'hui, dans les programmes et pour beaucoup d'enseignants, l'idée de démonstration est synonyme de raisonnement déductif. Dans l'ouvrage de Rostand, Sur la clarté des démonstrations mathématiques, il n'est quasiment question que du raisonnement logico - déductif. Dans un questionnaire distribué à des enseignants de collège lors d'un stage I.R.E.M., il était demandé de donner une définition au mot démonstration : 14 réponses sur 17 se ramènent à l'idée d'enchaînement logique(27). Il aurait été intéressant d'avoir leurs réponses à la question : "à quoi sert une démonstration ?". Si les enseignants associent d'emblée l'idée de démonstration à celle de raisonnement déductif, s'ils pensent que cette forme de raisonnement va émerger "naturellement" de la tête des élèves -même mis en situations d'interactions ou de conflits socio-cognitifs -sans soupçonner qu'il puisse y avoir là déjà un obstacle épistémologique, ne doit-on pas s'attendre encore à des attentes déçues ?

La seconde question est la suivante : si l'apprentissage de la démonstration suppose la construction de la rationalité de l'élève, quelles peuvent être les vertus didactiques d'une approche méthodologique ?

Dans le chapitre intitulé "Le rationalisme enseignant et le rationalisme enseigné" de son ouvrage Le rationalisme appliqué, Bachelard note : "Comment, par exemple, méconnaître l'aspect pédagogique du dénombrement des connaissances conseillé par Descartes ? Cette méthodique révision (...) n'a de sens que si elle nous oblige à prendre conscience de notre identité rationnelle à travers la diversité des connaissances acquises. Leur ordre nous ordonne (...). Au fond, le dénombrement cartésien a deux fonctions : garder les connaissances et maintenir leur ordre jusqu'à ce que la conscience d'ordre soit assez claire pour que l'ordre des connaissances rappelle les connaissances. C'est là précisément, dans l'intimité du sujet, un acte de rationalisme appliqué, l'acte utile d'un esprit qui s'applique sur lui-même"(28). Notons que c'est un acte individuel qui permet ici à l'être de devenir un "être de connaissance", alors que la conception de la démonstration comme acte social conduit à rechercher des interactions sociales. Nicolas Balacheff regrette dans l'article précédemment évoqué "l'égocentrisme" des élèves, la perspective méthodologique au contraire le nécessite -au moins pour un moment.

Le mot méthode a quasiment disparu du vocabulaire de l'enseignant des mathématiques. Cependant, Polya dans La découverte des mathématiques écrit : "le premier et le principal souci de l'enseignement des mathématiques dans les lycées est de souligner la méthodologie dans la résolution des problèmes". De même, le G.E.M. de Louvain-la-Neuve insiste dans la construction du savoir sur "les acquis méthodologiques" conçus comme la voie de l'autonomie, et juge inefficace de partir de l'enchaînement logico - déductif. Le G.E.M. reprend la distinction entre analyse et synthèse(29). Par ailleurs, des activités méthodologiques sont expérimentées par des enseignants de L.E.P. dans un groupe de l'I.R.E.M. de Nantes. Il est proposé aux élèves des exercices suffisamment compliqués pour qu'une méthode soit indispensable à l'obtention d'un résultat(30).

Nous reviendrons sur les questions didactiques posées plus haut après avoir évoqué une seconde rupture épistémologique dans l'histoire de la démonstration. Au XIXème siècle, les rapports entre démonstration, évidence et contradiction connaissent de profonds changements.

---

(27) Groupe collège de Laval, janvier 1988.

(28) BACHELARD, *Le rationalisme appliqué*, p. 14.

(29) G.E.M., *Apprivoiser l'infini, un enseignement des débuts de l'analyse*, chapitre XIII.

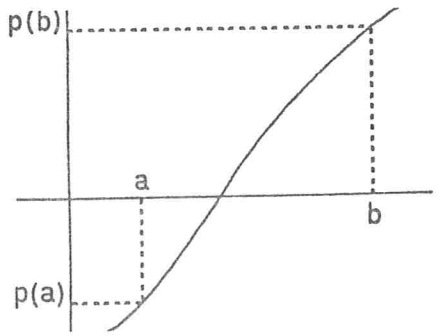
(30) FLANDROIS, *Les chemins de la logique.*

VI. Démonstration, évidence et contradiction

Les géomètres du XVIIème siècle s'appuient beaucoup sur le sentiment d'évidence : ils le recherchent, il est pour eux source de certitude. Arnauld et Nicole dénigrent ceux qui prouvent ce qui est suffisamment clair et évident. L'évidence est positive. Dans ses Eléments de géométrie de 1823, Legendre définit un théorème comme "une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé démonstration". Les idées de démonstration et d'évidence sont fortement liées. Pourtant, presque à la même époque, en 1817, Bolzano écrit un mémoire dans lequel il s'oppose avec force à la conception de la démonstration comme "fabrication d'évidences", conception qui accompagne parfaitement la signification de la démonstration qui "éclaire". Il marque ainsi une rupture dans la signification de la démonstration qui va s'amplifier avec la construction des géométries non euclidiennes et le mouvement formaliste.

Le mémoire de Bolzano s'intitule Démonstration purement analytique du théorème entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation. Dans la préface de ce mémoire, Bolzano explique pourquoi il considère que la démonstration entièrement correcte du théorème, que l'on appelle aujourd'hui de D'Alembert-Gauss, n'a pas encore été donnée. Ce théorème -un polynôme réel de degré n admet n racines réelles ou complexes- a été énoncé au XVIIème siècle par Girard et Descartes. Puis il a connu plusieurs démonstrations proposées par d'Alembert, Euler, Lagrange, Laplace, etc..., Gauss en a donné trois en 1799. Pour démontrer ce théorème, un argument consiste à prouver qu'un polynôme de degré impair admet nécessairement une racine réelle. Il est aisé de prouver qu'un tel polynôme admet une valeur positive et une valeur négative, il reste alors à en déduire qu'il s'annule pour une valeur réelle. Bolzano examine les arguments qui ont été avancés jusqu'ici pour établir ce dernier fait, et explique pourquoi il est insatisfait.

La méthode la plus courante s'appuie sur une considération géométrique : toute ligne continue dont les valeurs sont positives, puis négatives, ou inversement, doit nécessairement couper quelque part l'axe des abcisses. Bolzano rétorque qu'"il n'y a absolument rien à objecter ni contre la justesse, ni contre l'évidence de ce théorème



géométrique. Mais il est tout aussi manifeste qu'il y a là une faute intolérable contre la bonne méthode" puisqu'on s'appuie sur des considérations géométriques pour déduire des vérités de mathématiques pures. Il ajoute : "dans la science, les démonstrations ne doivent nullement être de simples procédés de fabrications d'évidences mais doivent être plutôt des fondements ; il faut exposer le fondement objectif que possède la vérité à

démontrer". La vérité géométrique est peut être évidente, mais cela est insuffisant, elle a quand même besoin d'un fondement. Bolzano rejette également la démonstration basée sur l'idée de mouvement et de temps qui procède par analogie avec les mouvements de deux corps dont l'un serait au début derrière l'autre, et l'a devancé à la fin, et doit donc nécessairement avoir une fois passé à côté de lui. Pour Bolzano, il s'agit là d'un exemple qui ne démontre pas le théorème.

Une démonstration doit être un fondement, et ce qui fonde une proposition c'est de pouvoir établir des relations entre cette proposition et d'autres propositions. Ici le fondement de la proposition est qu'une fonction continue, positive pour une valeur de la variable, négative pour une autre, doit être nulle pour une valeur intermédiaire. C'est ceci qu'il faut démontrer. Bolzano le fait et, pour cela, définit pour la première fois une fonction continue, montre que les fonctions polynômiales sont continues, énonce et montre le théorème dit de Bolzano -Weierstrass, introduit la notion de limite d'une suite et introduit -avant Cauchy- le critère de Cauchy de convergence d'une suite. Il a alors réalisé son voeu : relier la proposition à d'autres propositions mathématiques.

Pourquoi cette rupture par rapport à l'idée de démonstration comme "fabrication d'évidences" ? Certaines raisons tiennent à Bolzano lui-même, d'autres correspondent à de nouvelles exigences qui se posent aux mathématiciens du XIXème siècle.

Il est impossible de séparer les recherches mathématiques de Bolzano de son activité philosophique. Bolzano s'oppose à Kant sur le mode d'existence des êtres et des propositions mathématiques : le second considère que les êtres et les propositions mathématiques n'existent pas en dehors de l'esprit du mathématicien, alors que le premier estime que les propositions mathématiques ont une existence ontologique -elles existent en tant que telles. Pour Bolzano, ce qui fait l'existence d'une proposition mathématique, c'est sa relation aux autres propositions(31).

Bolzano rejette, nous l'avons vu, la considération géométrique sur laquelle s'appuyaient plusieurs de ses prédécesseurs. Cette attitude correspond à la tendance, de plus en plus marquée, à abandonner la géométrie comme fondement des mathématiques. Au XVIIIème siècle se sont développées avec succès les méthodes cartésiennes et infinitésimales qui donnent à l'algèbre, à l'analyse et à l'arithmétique la primauté sur la géométrie. De plus, les failles de la géométrie euclidienne -à commencer par le fameux axiome d'Euclide- sont de plus en plus souvent relevées(32).

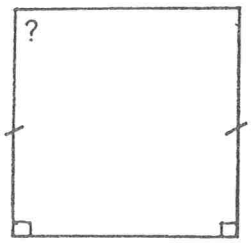
Par ailleurs, le début du XIXème siècle connait un mouvement visant à plus de rigueur dans les méthodes mathématiques : Bolzano devance Cauchy, Abel et Weierstrass. Ce mouvement s'explique, en particulier, par la difficulté des problèmes mathématiques à résoudre, et par la fonction d'enseignant que plusieurs mathématiciens sont invités à assurer après la Révolution et sous l'Empire.

---

(31) SEBESTIK, préface au mémoire de Bolzano.

(32) Voir KLINE, *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, chap. 40.

La construction des géométries non euclidiennes va renforcer la rupture entre l'idée de démonstration et celle d'évidence. Les tentatives des précurseurs sont à ce titre intéressantes. Dans un ouvrage de 1733, intitulé Euclide lavé de toute tache, Saccheri démontre l'axiome d'Euclide. Pour cela, il utilise le quadrilatère introduit par le mathématicien arabe Omar Khuyyam au XIème siècle. Il s'agit là de démontrer un résultat



équivalent à l'axiome d'Euclide, à savoir que si un quadrilatère isocèle a deux angles droits à la base alors la valeur commune des deux autres angles est l'angle droit. Saccheri procède par l'absurde, en examinant ce qu'il nomme l'hypothèse de l'angle obtus et l'hypothèse de l'angle aigu. Le première est assez vite écartée, en revanche la seconde le conduit à établir toute une série de propositions qui sont déjà de véritables énoncés de géométrie non euclidienne(33). Pourtant, Saccheri s'arrête et affirme : "L'hypothèse de l'angle aigu est absolument fausse car elle répugne à la nature de la ligne droite". Les figures sur lesquelles il doit raisonner sont trop impossibles, les lignes droites sont trop tordues : la situation est inadmissible. Saccheri doit prendre en compte la nature des êtres géométriques, et les propositions qu'il établit logiquement doivent aussi exprimer la vérité de l'espace physique. Comment admettre que des lignes droites soient à ce point tordues ? Il faut s'arrêter, dit Saccheri. Lobatchevsky et Bolayi ne s'arrêteront pas. Après les constructions des géométries non euclidiennes, le point de vue du mathématicien change. L'espace physique est-il euclidien ou non euclidien ? Les mathématiques ne peuvent rien en dire. On peut prendre chacune des trois hypothèses - angle droit, aigu ou obtus- et on aura, dans chaque cas, un ensemble de propositions non contradictoires. Les axiomes changent de statut: ce ne sont plus des vérités évidentes à chacun, ce sont de libres hypothèses.

Les Fondements de la géométrie d'Hilbert de 1899 ne supposent même plus que nous ayons une connaissance ou une intuition des objets géométriques, points, droites et plans. Tout ce que nous devons savoir, ce sont les relations, données par les axiomes, entre les différentes classes d'objets. Comme l'écrit Einstein, dans La géométrie et l'expérience, "la seule chose qu'on suppose est la validité des axiomes (...) qui doivent être également conçus comme purement formels, c'est-à-dire dépourvus de tout contenu intuitif ou accessible à l'expérience. Ces axiomes sont des créations libres de l'esprit humain (...). Par les termes de point, droite, etc... il ne faut entendre dans la géométrie axiomatique que des concepts schématiques vides de contenu". Pour Legendre, une proposition est vraie lorsqu'elle est rendue évidente par le moyen d'une démonstration. Selon la conception formaliste, une proposition est vraie si elle est non contradictoire avec un système d'axiomes. On peut dire, maintenant, que "la clé de voûte de la démonstration est la contradiction" pour reprendre l'expression de Balacheff.

L'idée de contradiction apparaît également dans la conception grecque de la démonstration, nous devons donc préciser qu'elle intervient d'une toute autre façon dans l'Antiquité et au XXème siècle. En effet, il est fort ambigu de se référer en même temps à la conception grecque -démontrer c'est convaincre- et à la conception moderne -démontrer c'est prouver la non contradiction-. Une telle ambiguïté ne nous semble pas écartée dans certains travaux de Nicolas Balacheff(34). Chez les Grecs, la

(33) CHABERT, *Les géométries non euclidiennes.*

(34) BALACHEFF, *Processus de preuve et situations de validation.*

contradiction intervient dans un acte social, elle est utilisée pour mieux convaincre l'autre. Aujourd'hui, la contradiction intervient dans un système de propositions mathématiques, elle est utilisée pour produire des résultats mathématiques.

Dans la conception formaliste, l'idée d'évidence n'a aucun sens puisque les "termes" points, droites, plans ne doivent rien devoir à nos représentations physiques : tout est à démontrer. Ce qui fait la réalité des objets mathématiques, ce sont les relations qui existent entre eux. Enseigner la géométrie selon ce point de vue a été tenté avec la réforme des mathématiques modernes, nous savons ce qu'il en est advenu. Aujourd'hui l'esprit des nouveaux programmes ne se veut plus formaliste, et la question de l'évidence se pose de nouveau avec acuité. Comme le fait remarquer un stagiaire C.P.R. de l'Académie de Nantes, les choses étaient plus simples avec les "mathématiques modernes" -pour l'enseignant en tous les cas- puisque rien n'était évident. Aujourd'hui peut-on faire l'économie, dans l'étude de l'apprentissage de la démonstration, d'une réflexion épistémologique sur la signification de la démonstration, sur le rôle de l'évidence et sur celui de la contradiction ?

VII. Conclusion

> *"Il y aurait ainsi à écrire une histoire de la démonstration ou plutôt des conditions de légitimation de la démonstration, histoire qui nous permettrait de mieux comprendre ce qui signifie une telle légitimation, ainsi que les hésitations et les difficultés qui accompagnent sa mise en place, histoire qui nous permettrait aussi de nous libérer de certains délires logico-mathématiques qui sont loin d'avoir disparu de l'enseignement d'aujourd'hui"*(35).
>
> Rudolf BKOUCHE

Au terme de cet itinéraire historique, je ne prétends pas avoir donné une histoire de la démonstration -qui reste à écrire et que, comme Rudolf Bkouche, j'appelle de mes voeux- mais j'espère avoir montré que l'idée de démonstration a une historicité. La démonstration a connu historiquement plusieurs significations, et il est important que les enseignants sachent que la notion de démonstration n'est pas un absolu. L'histoire de la démonstration ne va pas d'ailleurs dans le sens que certains pourraient croire. F. Rostand écrit dans son ouvrage, Sur la clarté des démonstrations mathématiques, que "les mathématiques ne se sont pas développées (dans leur histoire) dans le sens de la plus grande clarté ; seule la rigueur a été recherchée, la clarté étant généralement atteinte de surcroît, car la rigueur peut naturellement entraîner la clarté, et inversement, le manque de rigueur suppose en un sens un manque de clarté"(36).Nous avons vu que cela n'est pas exact.

Quelles conclusions d'ordre didactique en tirer ? J'en tire tout de suite deux conclusions, même si elles peuvent paraître provocantes :

---

(35) BKOUCHE, *Quelques grandes problématiques de l'histoire de la géométrie.*

(36) ROSTAND, *Sur la clarté des démonstrations mathématiques*, p. 12.

1- associer d'emblée l'idée de démonstration au raisonnement déductif ne va pas de soi.
2- affirmer péremptoirement que démontrer c'est convaincre est une façon dogmatique d'aborder la question du sens de la démonstration.

Ces conclusions vont à l'encontre de travaux récents des I.R.E.M. concernant la démonstration, mais peut être le problème difficile de l'apprentissage de la démonstration mérite-t-il un peu de dialectique.

Comme je l'ai indiqué, plus haut, l'équivalence "démonstration = raisonnement déductif" est souvent considérée comme, si j'ose dire, un axiome. Pour Nicolas Balacheff, le terme de démonstration est réservé aux explications obtenues à l'aide de règles de déduction, les explications et les preuves sont des discours plus ou moins acceptables, et les raisonnemnets sont des manipulations d'informations(37). Michel Mante reprend ces définitions dans son article L'initiation au raisonnement déductif et le nouveau programme du collège, ce qui lui permet à la lettre de déclarer qu'un démonstration produite par un élève "est une preuve, mais ce n'est pas une démonstration"(38). Le cas de la démonstration en question est intéressant -l'élève s'appuie sur l'existence de points d'intersection de deux cercles qu'il a dessinés-, car si nous suivons Michel Mante nous devons dire que la proposition 1 du Livre I d'Euclide n'est pas une démonstration. Dominique Gaud et Jean-Paul Guichard parlent également dans leur article sur la démonstration en collège, Apprentissage de la démonstration, de "la démonstration en tant que formulation d'un raisonnement déductif"(39). Une équipe de l'I.R.E.M. de Grenoble va encore plus loin dans ce sens puisqu'elle nous propose, dans un article intitulé A propos de la mise en oeuvre des nouveaux programmes, une "géométrie de la déduction"(40).

Les tenants de l'équivalence "démonstration = raisonnement déductif" l'associent à la signification de la démonstration comme acte social destiné à convaincre. Ainsi, Michel Mante écrit que la nécessité de prouver a deux raisons : "pour convaincre les autres, pour se convaincre soi-même". Michel Bridenne, qui a précisé "qu'une proposition est dite démontrée si elle est la dernière proposition d'une suite finie de propositions construites suivant les règles d'un système de la logique formelle", estime que l'acte de démontrer "n'est pas indépendant d'un désir de convaincre"(41).

Nous avons déjà noté les limites épistémologiques de ces conceptions. Ces conceptions ont également des implications didactiques qui nous semblent poser problème et que nous relèverons en quatre points.

1. Le raisonnement déductif : un obstacle épistémologique

A la lecture de l'article de Nicolas Balacheff, Preuve et démonstration en mathématiques au collège, nous avons constaté que les élèves ayant emprunté une méthode pour résoudre un problème s'en contentaient -un élève se demandant même "qu'est-ce qu'on peut démontrer là-dedans ?". Les élèves n'ont pas cherché à réfuter ou à contredire leur résultat : "Est-ce que j'ai pu oublié un rectangle ?". Nous pouvons élargir la portée de cet exemple en disant que le premier sentiment de démonstration provient du cheminement même que l'on a adopté pour démontrer, de la construc-

---

(37) BALACHEFF, *Preuve et démonstration en mathématiques au collège*, p. 263.

(38) *Suivi scientifique 5ème*, p. 279.

(39) *Petit x*, n° 4, p. 6.

(40) Distribué à la Commission Inter-IREM 1er cycle.

(41) *Feuille de vigne*, IREM de Dijon, février-mars 1988, p. 20.

tion même de l'objet de connaissance. Si l'on pose que la démonstration est un acte social destiné à convaincre, on gomme ce premier sentiment. Si on dit à l'élève "ceci est une explication, ce n'est pas une démonstration", comment l'élève pourra-t-il franchir l'obstacle qui va de sa démonstration à celle qu'attend l'enseignant -surtout si l'enseignant attend un raisonnement déductif- Quelles peuvent être, aux yeux d'un débutant, les vertus du raisonnement déductif ? L'enseignant répond que le raisonnement déductif convainc, alors que l'élève se contente d'être éclairé. Il y a là un obstacle épistémologique.

2. Comprendre une démonstration

L'équivalence "démontrer = convaincre" pose un autre problème, car si l'on est convaincu par la démonstration d'un autre, doit-on consentir, ou comme le conseille Lamy à son élève, doit-on attendre pour cela "de se sentir forcé par l'évidence de la vérité ?" Est-il facile de faire sienne la démonstration d'un autre ? Bachelard écrit, à propos de la démonstration en géométrie : "La démonstration a une autonomie si nette qu'on ne peut la recevoir du dehors, qu'il ne suffit pas d'en constater le résultat pour en saisir le sens (...). Pour comprendre il faut ici participer à une émergence"(42). S'il y a quelque chose à comprendre en géométrie, et j'espère que les enseignants sont de cet avis, alors la remarque de Bachelard va à l'encontre de l'équivalence "démontrer = convaincre", ou la réduit à "démontrer = se convaincre soi-même". Chacun de nous en a fait l'expérience, a connu cette impression de ne pas avoir compris une démonstration qui coule de source et a senti le besoin de griffonner "sa" démonstration. Il ne suffit pas d'être convaincu, on veut être éclairé. Il paraît difficile de négliger cet aspect dans l'apprentissage de la démonstration

3. Débat scientifique et conflit socio-cognitif

Notre point de vue conduit à relativiser la portée du débat scientifique dans l'apprentissage de la démonstration.

Les travaux genevois, en particulier ceux de Doise et Mugny dans Le développement social de l'intelligence, s'accordent bien avec la signification de la démonstration comme acte social destiné à convaincre. Le débat scientifique est certainement efficace dans une initiation à la réfutation et à la déduction, il doit aussi être utilisé dans les moments d'institutionnalisation. Cependant, il faut que les enseignants qui désirent mettre en pratique le conflit socio-cognitif en connaissent les limites -en particulier en ce qui concerne l'apprentissage de la démonstration. Ces limites sont signalées par Doise et Mugny, ainsi que par les chercheurs du C.R.E.S.A.S. dans un ouvrage récent.

La première difficulté dans la pratique du débat scientifique est qu'elle peut laisser croire que tout va sortir de la tête des enfants, y compris le raisonnement déductif au collège. "Quant au rôle de l'enseignant, je dirai simplement que celui-ci peut aussi apprendre à se taire" écrit Michel Bridenne(43). Comme le note Michel Deleau dans un article de l'ouvrage du C.R.E.S.A.S., On n'apprend pas tout seul. Interactions sociales et construction des savoirs, l'idée que l'adulte devrait disparaître en tant que tel et que la construction des savoirs aurait lieu "naturellement" à partir des conflits cognitifs entre enfants est fallacieuse(44). Le raisonnement déductif est l'aboutissement de la

---

(42) BACHELARD, *Le rationalisme appliqué*, p. 11.

(43) Op. cit., p. 26.

(44) DELEAU, *le groupe d'enfants dans la stratégie éducative*, p. 130.

culture grecque de l'Antiquité, les mathématiciens chinois ne s'y sont jamais intéressés, et nos élèves ne sont pas des philosophes grecs...ni des mathématiciens chinois.

Une autre limite est signalée dans l'ouvrage de Doise et Mugny cité plus haut, elle concerne le passage de la réussite collective à la réussite individuelle : "il ne faut pas s'attendre forcément à une supériorité cognitive des sujets ayant travaillé en groupe". L'enseignant doit savoir qu'une performance collective peut être possible sans que les individus partenaires de ces interactions progressent lors d'un travail individuel ultérieur. Il faut attendre que le "processus interpersonnel se transforme en un processus intrapersonnel" pour reprendre la formule de Vygotski(45). Le problème posé par ce passage est particulièrement délicat en ce qui concerne l'apprentissage de la démonstration car, comme nous l'avons noté, on peut être convaincu par une démonstration sans en saisir le sens, et ce tant que l'on ne l'aura pas produite soi-même.

Enfin, il ne faut pas oublier que les relations entre les élèves peuvent être asymétriques et que les relations élèves-adultes peuvent être source de progrès, ce qui fait dire à Doise et Mugny qu'"il serait erroné de prétendre a priori que toute interaction sociale favorise le développement cognitif, et que l'interaction entre pairs lui sera plus propice que l'interaction avec l'adulte"(46).

4. Les motivations de la démonstration

Pourquoi démontrer si démontrer signifie convaincre ? Michel Mante répond que "la production des preuves est liée à l'incertitude et à la présence d'un enjeu qui incite l'élève à lever cette incertitude. L'enjeu est généralement lié à la volonté de se convaincre ou de convaincre les autres"(47). Par conséquent, l'enseignant doit créer une situation où les élèves se trouvent dans l'incertitude d'un résultat, ce qui doit les conduire à conjecturer, à confronter leurs conjectures et à démontrer pour trancher et convaincre. Par ailleurs, un article de l'I.R.E.M. de Limoges, intitulé Evidence - démonstration, nous propose plusieurs situations géométriques ingénieuses qui contredisent l'évidence et doivent donc faire apparaître la nécessité d'une démonstration(48). Ici la question suivante se pose : si la démonstration peut aussi avoir pour rôle de rendre évident, de faire comprendre, n'y-a-t-il pas un risque à la présenter d'emblée comme une "antinomie de l'évidence"(49) ?

Présenter la démonstration comme un moyen de trancher en cas d'incertitude signifie que l'attention de l'élève est tournée vers l'obtention d'un résultat. Par exemple, est-ce que oui ou non la somme des angles d'un triangle égale 180° ? Cette remarque amène à se poser une autre question : puisque le but de l'enseignant est l'apprentissage de la démonstration ne doit-il pas trouver des situations l'apprentissage qui visent autant, ou davantage, les moyens à mettre en oeuvre pour obtenir un résultat que le résultat même ? La recherche d'un résultat peut parfois avoir un intérêt supérieur au résultat établi.

Nous reprenons à notre compte les deux questions soulevées par Dominique Gaud et Jean-Paul Guichard à la fin de leur article concernant l'apprentissage de la démonstration conçue comme "formulation d'un raisonnement déductif". Ils demandent : "Mais quels autres types de preuves devraient faire l'objet d'un apprentissage au niveau du

---

(45) DOISE & MUGNY, *Le développement social de l'intelligence*, p. 174.

(46) Op. cit., p. 179.

(47) Op. cit., p. 27.

(48) Op. cit., p. 273.

(49) *Feuille de vigne*, op. cit., p. 32

collège ? Pourrait-on les recenser, et peut-être viser moins à enseigner des contenus pour des contenus que des contenus pour des méthodes et des démarches ?"(50) Je compléterai leur dernière interrogation en ajoutant : et si l'on visait aussi parfois des méthodes pour des méthodes ?

5. Enseignement des méthodes, méthodologie et construction de la rationalité

Les difficultés rencontrées par les élèves dans l'apprentissage de la démonstration indiquent que cet apprentissage va de pair avec la construction des connaissances et la construction de la rationalité des élèves. Nous l'avions noté à propos de la démonstration par le pair et l'impair présentée en classe de 3ème. Un autre exemple nous est fourni par une collègue de l'I.R.E.M. de Rennes(51). Elle avait fait avec ses élèves de collège une démonstration concernant une propriété du triangle. Mais un élève était insatisfait, il ne voulait pas croire que cette démonstration valait pour tous les triangles, en particulier des triangles très plats, plus plats que celui sur lequel avait été effectuée la démonstration, et il a fallu qu'il refasse la démonstration sur un triangle plat avant de consentir. L'enseignant apprend à l'élève à douter d'un résultat obtenu par le dessin d'une ou de plusieurs figures particulières, il s'appuiera même sur ce doute pour faire sentir la nécessité d'une démonstration. Que se passe-t-il si l'élève doute d'une démonstration faite sur une figure particulière, certes, mais qui est supposée quelconque ?

Cet exemple repose le problème de la signification du dessin. Je ne pense pas qu'il faille le considérer "comme une activité de tracé et non comme un ersatz de preuve intellectuelle"(52). Dessiner une figure est déjà une activité intellectuelle puisque nous sommes en train de représenter des objets purement intellectuels : triangles, médianes, milieu de segment, etc... La rationalité consiste ici à saisir que le triangle dessiné n'est qu'une représentation d'un triangle, elle permet de comprendre pourquoi il est quelconque.

Nous avons indiqué plus haut que la construction de méthodes par les élèves avait un intérêt certain dans la constitution de la rationalité. Dans cette perspective, quelles situations didactiques doit-on mettre en oeuvre ? Puisqu'il s'agit de construire des méthodes il faut sûrement partir de situations - problèmes nécessitant une mise en ordre et un dénombrement méthodique des connaissances. Dans un premier temps, tous les moyens pour parvenir au résultat seraient bons, mais on demanderait par contre à l'élève d'expliciter sa démarche. C'est ce retour sur lui-même, cette introspection, qui selon Bachelard constitue un acte de rationalisme appliqué et permet à l'être de devenir un "être de connaissance". Pour Piaget, on peut obtenir d'excellentes introspections avec des enfants à partir de l'âge de 7 ans. Dans Le jugement et le raisonnement chez l'enfant, il estime considérable la faculté pour la conscience de prendre conscience d'elle-même. Il écrit : "La justification logique d'un jugement se fait sur un autre plan que l'invention de ce jugement. Alors que celle-ci est inconsciente et résulte de la recombinaison d'expériences antérieures, celle-là exige la réflexion et le langage, bref, une introspection construisant au-dessus de la pensée spontanée une "pensée de la pensée" qui seule est capable de nécessité logique"(53). Cette remarque semble particulièrement intéressante en ce qui concerne l'apprentissage de la démonstration.

---

(50) *Petit x*, n° 4, p. 15.

(51) Colloque interne, Belle-Ile, Ascension 1988.

(52) IREM de Grenoble, op. cit.

(53) PIAGET, *Le jugement et le raisonnement chez l'enfant*, p. 121.

Allant dans le même sens, des chercheurs du C.R.E.S.A.S. proposent pour l'apprentissage de la lecture un "dialogue métacognitif" où l'on demande à l'apprenti lecteur comment il fait pour lire(54). Concernant l'apprentissage de la démonstration, la question posée à l'élève ne serait pas "comment tu démontres ce résultat ?" mais "comment es-tu parvenu à cette démonstration ?" Ce travail serait la première étape d'un travail d'explicitation des méthodes, puis de perfectionnement des méthodes de démonstration -le perfectionnement des méthodes pouvant être réalisé à partir des confrontations des méthodes produites par les élèves-. La méthodologie consiste en cette réflexion sur les méthodes. Etape par étape, on arriverait à une méthode subtile de démonstration qui est le raisonnement déductif. La construction de la rationalité de l'élève n'est-elle pas prioritaire dans l'enseignement des mathématiques ?

(54) G. CHAUVEAU & E. CHAUVEAU, *Interactions chercheur-enfant et apprentissage de la lecture.*

BIBLIOGRAPHIE

ARNAULD, Nouveaux éléments de géométrie, 1667, réédition I.R.E.M. de Dijon, 1982.

ARNAUD & Nicole, La logique ou l'art de penser, 1674, réédition P.U.F., Paris, 1965.

BACHELARD, Le rationalisme appliqué, P.U.F., Paris, 1949.

BALACHEFF, Preuve et démonstration en mathématiques au collège, R.D.M., vol. 3, n° 3, 1982.

BALACHEFF, Processus de preuve et situations de validation, IIIè Ecole Eté Didactique, 1984.

BARBIN, Heuristique et démonstration en mathématiques in Fragments d'histoire des mathématiques n° 2, A.P.M.E.P., 1987.

BARBIN & al, Mathématiques, arts et techniques au XVIIème siècle, Publications de l'Université du Maine, n° 4, 1987.

BKOUCHE, Quelques grandes problématiques de l'histoire de la géométrie, Université d'Eté d'histoire des mathématiques de Toulouse, à paraître.

BOLZANO, Démonstration purement analytique..., 1817, traduction SEBESTIK, Revue Franc. d'hist. Sc., 1964.

CAVEING, La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque, Université de Lille III, 1982.

CHABERT, Les géométries non euclidiennes, Université d'Eté d'histoire des mathématiques de Toulouse, à paraître.

CHAUVEAU & CHAUVEAU, Interactions chercheur-enfant et apprentissage de la lecture in C.R.E.S.A.S. On n'apprend pas tout seul.

CLAIRAUT, Eléments de géométrie, 1765, réédition Siloë, Laval, 1986.

C.R.E.S.A.S., On n'apprend pas tout seul, Interactions sociales et constructions des savoirs, E.S.F., Paris, 1987.

DELEAU, Le groupe d'enfants dans la stratégie éducative in C.R.E.S.A.S. On n'apprend pas tout seul

DESCARTES, Les méditations métaphysiques, P.U.F., Paris, 1961.

DESCARTES, La géométrie, 1637, Christophe David, Paris, 1705.

DESCARTES, Règles pour la direction de l'esprit, Vrin, Paris, 1966.

DESCARTES, Discours de la méthode, Flammarion, Paris, 1966.

DOISE & MUGNY, Le développement social de l'intelligence, Interéditions, Paris, 1981.

EUCLIDE, Les éléments, traduction Peyrard, édition Blanchard, Paris, 1966.

FLANDROIS, Les chemins de la logique, I.R.E.M. de Nantes, 1987.

GAUD & GUICHARD, Apprentissage de la démonstration, in petit x, 1984, n° 4.

G.E.M., Apprivoiser l'infini, un enseignement des débuts de l'analyse, Ciaco Editeur, Louvain-La-Neuve, 1987.

I.R.E.M. de Grenoble, A propos de la mise en oeuvre des nouveaux programmes.

I.R.E.M. de Dijon, Feuille de vigne, Février - Mars 1988.

KLINE, Mathematical thought from Ancient to Modern Times, Oxford University Press, 1972.

LAMY, Entretiens sur les sciences, 1694.

LAMY, Eléments de géométrie ou de la mesure des corps, 1685.

MANTE, L'initiation au raisonnement déductif et le nouveau programme du collège in Suivi Scientifique 5ème, I.R.E.M. de Lyon, 1987.

MARTZLOFF, Histoire des mathématiques chinoises, Masson, Paris, 1987.

MOREAU, Aristote et son école, P.U.F., Paris, 1962.

PIAGET, Le jugement et le raisonnement chez l'enfant, Delachaux et Niestlé, Neufchâtel, 1967.

PLATON, Oeuvres complètes, tome II, La Pléïade, Paris, 1950.

ROUSSEAU, Emile ou de l'éducation, Garnier, Paris, 1964.

SZABO, Greek dialectic and Euclid's axiomatics, in LAKATOS, Problems in the philosophy of mathematics, North Holland Company, 1972.

VERNANT, Mythe et pensée chez les Grecs, Maspero, Paris, 1971.

Actes de l'Université d'Eté sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

LA NAISSANCE DU PROJECTIF
De la perspective à la géométrie projective

Rudolf BKOUCHE
IREM de Lille

N'oublions jamais qu'un espace, c'est à la fois ce qu'un groupe humain voit et ce qu'il représente.
Pierre Francastel

Il est devenu banal de dire que la géométrie projective est née de la pratique perspective du Quattrocento et l'on peut considérer que la géométrisation de la perspective, c'est-à-dire l'insertion d'icelle dans une théorie mathématique, est à la source de la géométrie projective comme la mesure des grandeurs est à la source de la géométrie grecque. Mais l'apport de la perspective est bien plus large que la simple émergence d'un nouveau chapitre de la géométrie, c'est une redéfinition du paysage géométrique: définition de nouveaux concepts et mise en place de nouvelles méthodes conduisant à de nouveaux modes de démonstration (et par conséquent de nouvelles formes de légitimation de la démonstration), mais aussi, et c'est l'un des aspects essentiels du point de vue projectif, la mise en place de la notion d'espace comme lieu de coordination des phénomènes géométriques et physiques, qui renouvelle la pensée scientifique (et nous citerons ici Pascal et Newton).

Nous nous proposons ici de regarder comment se met en place ce nouveau paysage géométrique depuis la première géométrisation de la perspective de Guido Ubaldo et les considérations théoriques de Desargues jusqu'à l'oeuvre visionnaire de Taylor et la géométrie perspective de Lambert.

Le courant projectif, s'il est en partie occulté par le courant analytique au cours des XVIIème et XVIIIème siècles, est loin d'avoir disparu et nous renvoyons ici à l'article de Denis Lanier et Jean-Pierre Legoff (1); nous reviendrons par ailleurs sur l'opposition entre le courant projectif (celui de la géométrie dite synthétique) et le courant analytique et les raisons d'ordre philosophique et d'ordre idéologique de cette opposition (2).

1. Un nouveau concept: le point à l'infini.

Il est souvent dit,dans les ouvrages d'histoire des mathématiques, que la notion de point à l'infini a été introduite pour la première fois par Kepler: en fait nous verrons qu'il s'agit bien plus d'un point infiniment éloigné que du point à l'infini tel qu'il apparaît dans la géométrie projective. Quelques années après Kepler, Desargues définit le point à l'infini comme le point de concours d'une famille de droites parallèles, lui donnant un statut analogue à celui de point à distance finie. Je ne sais si Desargues connaissait et avait lu les textes de Kepler, nous noterons que les deux constructions sont différentes dans leur principe, la première essentiellement dynamique, la seconde s'appuyant sur l'analogie, issue des constructions perspectivistes, entre familles de droites concourantes et familles de droites parallèles.

En 1604, Kepler publie les Paralipomènes à Vitellion (3), première partie d'un traité d'optique Astronomiae Pars Optica (pour une étude de cet ouvrage nous renvoyons à la présentation de Catherine Chevalley).

Pour les besoins de l'optique, Kepler introduit par deux fois, et de deux façons différentes, la notion de point à l'infini, ou plutôt comme je l'ai dit ci-dessus,la notion de point infiniment éloigné.

Au chapitre II, étudiant un problème d'ombre au soleil, Kepler énonce le postulat (que nous citons dans la traduction de Catherine Chevalley)

Deux droites lumineuses issues d'une même source ponctuelle de lumière sont considérées du point de vue de la sensation comme équivalentes à des parallèles si elles sont à une distance immensément grande de la base à laquelle elles sont toutes deux reliées, bien qu'en réalité elles soient concourantes à leur origine.

Ainsi, il s'agit bien plus d'une approximation (justifiée du point de vue de la sensation) permettant de représenter l'ombre lorsque la source est immensément éloignée, que du point de concours de deux droites parallèles.

Par contre, au chapitre IV, Kepler va beaucoup plus loin lorsqu'il considère une parabole comme une section conique dont les foyers sont séparés par une distance infinie. En fait, toujours pour les besoins de l'optique, Kepler veut présenter les propriétés des sections coniques d'une manière méchanique,analogique et populaire.

Considérant cinq espèces de sections coniques: la droite, le cercle, la parabole, l'hyperbole et l'ellipse, Kepler écrit

Entre ces lignes -et pour parler plutôt analytiquement que selon la Géométrie- il y a un ordre,

dépendant de leurs propriétés, qui est le passage de la ligne droite à la parabole par l'intermédiaire d'une infinité d'hyperboles, puis de là au cercle par l'intermédiaire d'une infinité d'ellipses.

La parabole a ainsi une position intermédiaire entre l'hyperbole et l'ellipse, la ligne droite et le cercle étant les courbes extrêmes; Kepler le précise après avoir introduit les foyers.

Les foyers des coniques à centre sont définis au livre III des Coniques d'Apollonius qui les appelait les points issus de l'application (traduction de Ver Eecke (4)), rappelant ainsi leur définition via la méthode d'application des aires. Dans son ouvrage, Apollonius montre que la tangente en un point d'une ellipse ou d'une hyperbole fait des angles égaux avec les droites joignant ce point aux foyers. Apollonius ne parle pas du foyer d'une parabole, la définition par foyer et directrice d'une section conique est énoncée par Pappus au livre VII de sa Collection Mathématique (5), mais cette définition aurait déjà été énoncée par Euclide dans un ouvrage sur les coniques aujourd'hui perdu.

C'est Kepler qui a donné leur nom moderne aux foyers (focus) en référence aux propriétés optiques d'iceux. Ces propriétés optiques étaient connues des Grecs, Apollonius aurait même écrit un ouvrage sur les miroirs ardents, ouvrage perdu qui nous est connu par un texte tardif attribué à Anthemius de Tralles, l'architecte de Sainte-Sophie, qui vivait au VIème siècle (6).

Kepler, comparant la position des foyers dans les cinq espèces de coniques, remarque que le cercle possède un foyer unique situé en son centre, que l'ellipse possède deux foyers situés à l'intérieur d'icelle, également éloignés du centre; la parabole quant à elle, possède un foyer situé à l'intérieur et un autre foyer doit être imaginé sur l'axe, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur, éloigné du premier foyer par une distance infinie, enfin l'hyperbole possède deux foyers, l'un intérieur, l'autre extérieur. Pour être complet, Kepler remarque que, par analogie, pour la ligne droite les deux foyers coïncident avec la droite elle même et qu'ils sont un seul et même point.

On obtient ainsi les différentes espèces de sections coniques en faisant varier la distance entre les foyers; pour plus de détails, nous renvoyons à l'ouvrage de Kepler.

Ainsi la notion képlérienne de point à l'infini est liée, soit à une approximation (des droites concourant en un point immensément éloigné pouvant être considérées, du point de vue de la sensation, comme parallèles), soit au mouvement (le point à l'infini comme point infiniment éloigné): ce n'est pas encore le point à l'infini de la géométrie projective, point de concours d'une famille de droites parallèles, point inconcevable pour Kepler partisan d'un monde fini et pour lequel la distance infinie dont il parle

dans les Paralipomènes à Vitellion relève de l'infini en puissance et non de l'infini en acte.

Pour une discussion de la position de Kepler et des arguments qu'il développe contre les partisans d'un monde infini, nous renvoyons à l'ouvrage de Koyré Du monde clos à l'univers infini (7).

Nous nous contenterons ici de reprendre un texte de Kepler, cité par Koyré, texte qui montre la difficulté que posait à Kepler la notion d'un point à distance infinie.

A la question

Mais n'est-il pas possible qu'une étoile visible soit à distance infinie de nous?

Kepler répond

Non: car ce qui est vu est vu par ses extrémités. Ainsi une étoile visible a un pourtour qui la limite. Si l'étoile s'éloignait à une distance réellement infinie, ces limites aussi seraient à distance mutuelle infinie, car elles participeraient de l'infinité comme en participe le corps entier de l'étoile; aussi l'angle de vision demeurant ce qu'il est, le diamètre de l'étoile, qui est le segment de droite tiré entre les limites, serait-il agrandi proportionnellement à son éloignement; de sorte que, de même que le diamètre d'une étoile deux fois plus éloigné sera deux fois plus grand que celui de l'étoile plus proche, de même le diamètre d'une étoile située à distance finie, sera lui- même fini, tandis que celui d'un corps dont on rendrait l'éloignement infini grandirait infiniment.

Ceci conduit Kepler,après avoir montré l'impossibilité pour une étoile, corps fini, d'être infiniment éloignée et remarqué que le nombre d'étoiles est fini (conformément aux conceptions aristotéliciennes), à conclure à l'impossibilité d'un espace infini, balayant l'idée d'un monde fini plongé dans un espace infini:

S'il s'agit de l'espace vide, c'est-à-dire de ce qui est néant, n'a pas été crée, n'existe pas, ni ne peut résister à rien qui est supposé s'y trouver, la question change, car ce qui est évidemment un néant n'a pas d'existence en acte. Si au contraire l'espace existe du fait de corps qui y ont leurs lieux, alors il a été précédemment démontré qu'aucun corps susceptible de localisation ne comporte d'infinité en acte; et que des corps de dimension finie ne peuvent exister en nombre infini. Il n'est donc nullement nécessaire que l'espace soit infini du fait des corps qui doivent s'y trouver. Il ne peut non plus y avoir entre deux corps de segment de droite infini en acte. Car il est derechef contradictoire d'être infini en acte et de se terminer en deux corps ou points qui constituent les extrémités du segment

Toute autre est la démarche de Desargues. Celui-ci publie en 1639 le Brouillon Project d'une Atteinte aux

Evénemens des Rencontres du Cône avec un Plan (8), après avoir précisé

Icy toute ligne droite est entendue alongée au besoin à l'infiny d'une part et de l'autre,

Desargues définit ce qu'il appelle une ordonnance de droites,

Pour donner à entendre de plusieurs lignes droictes, qu'elles sont toutes entre elles ou bien parallèles, ou bien inclinées à mesme poinct, il est icy dit, que toutes ces droictes sont d'une mesme ordonnance entre elles, par où l'on concevra de ces plusieurs droictes, qu'en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de position, elles tendent comme toutes à un mesme endroict.

L'endroict auquel on conçoit que tendent ainsi plusieurs droictes en l'une aussi bien qu'en l'autre de ces deux espèces de position, est icy nommé, but de l'ordonnance de ces droictes.

Desargues précise alors que si les droites sont parallèles, le but est dit à distance infinie, si les droites sont concourantes, le but est dit à distance finie.

Ici la définition est en quelque sorte relationnelle, un point est déterminé par les droites qui concourent en ce point, cela est vrai pour une famille de droites parallèles comme pour une famille de droites concourantes. Ainsi, et cela se précise dans le développement de l'ouvrage, points à l'infini et points à distance finie participent des mêmes propriétés et jouent le même rôle; ainsi Desargues réunit cônes et cylindres sous l'appellation commune de rouleaux. Cette analogie explicite renvoie aux constructions perspectivistes, ce que nous allons préciser.

On sait depuis les premiers traités de perspective que les perspectives des perpendiculaires au plan du tableau convergent au point de fuite principal (la projection de l'oeil sur le plan du tableau). D'autre part Piero della Francesca dans son traité de perspective De Prospectiva Pingendi (écrit vraisemblablement entre 1472 et1475 mais imprimé pour la première fois en 1899) a remarqué que les droites inclinées à 45° sur la direction perpendiculaire au plan du tableau (les diagonales d'un dallage) convergent vers ce qu'on appelle les points de distance, points de la ligne d'horizon (la ligne horizontale du tableau passant par le point de fuite principal) situés de part et d'autre du point de fuite principal à une distance égale à la distance de l'oeil au tableau (9). La convergence des diagonales étaient connue empiriquement des peintres de l'Europe du Nord et elle sera systématisée par Jean Pèlerin dit Viator dans son De Artificiali Perspectiva (10) publié en 1505, mais le texte peu explicite qui accompagne les dessins de Viator ne donne aucune indication sur le statut des points de convergence que l'auteur appelle les tiers-points.

Cependant la notion générale de point de fuite d'une famille de droites parallèles sera définie et légitimée seulement au début du XVIIème siècle, d'abord par Guido Ubaldo del Monte qui publie en 1600 les Perspectivae Libri Sex (les six livres de perspective) (11), puis par Simon Stevin qui publie en 1605 De sciagraphia (littéralement: du dessin des ombres), ouvrage qui sera publié en français par Girard en 1634 sous le titre De la Scénographie,dite vulgairement Perspective (12).

Ainsi on sait au début du XVIIème siècle qu'une famille de droites parallèles est représentée en perspective par une famille de droites concourantes si les droites de la famille ne sont pas parallèles au plan du tableau, par une famille de droites parallèles si les droites de la famille sont parallèles au plan du tableau.

Mais ce qui nous importe ici, c'est la façon dont on utilise ces droites parallèles devenues concourantes pour construire l'espace dans le tableau, c'est-à-dire mettre en place sur le tableau la représentation des différents points de l'objet que l'on dessine.

Ainsi Vignola dans son ouvrage Le due regole della prospettiva pratica (les deux règles de la perspective pratique) (13) publié après sa mort par Danti en 1582, montre comment la représentation perspective de deux familles de droites parallèles permet de construire la perspective de l'objet; il suffit de dessiner les perspectives des droites de chacune des familles, lesquelles passent par les points de fuite (ici le point de fuite principal et un point de distance), la correspondance étant assurée par les points des droites situées sur la ligne de terre (la ligne d'intersection du tableau avec le plan horizontal de référence), lesquels points coïncident avec leur représentation perspective.

Nous reproduisons ici deux figures du traité de Vignola- Danti, la première indique la construction de la perspective d'un polygone situé dans le plan horizontal, la seconde indique la construction de la perspective d'un cercle; dans chacune des figures on représente l'objet donné dans son plan horizontal quadrillé par les deux familles de droites parallèles, la représentation perspective est alors obtenue en représentant le quadrillage en perspective à partir des points de fuite et des points de la ligne de terre qu'on a reportés à partir du dessin dans le plan horizontal.

fig 1

fig 2

Notons que Vignola utilise aussi les points de distance situés sur la verticale du point de fuite principal ce qui lui permet de construire la perspective d'un cube:

fig 3

On a ainsi la mise en place de ce qu'on appelle aujourd'hui un système de lignes coordonnées, permettant à la fois de structurer l'espace et de le représenter sur le plan du tableau; nous verrons ci-dessous le rôle qu'a joué cette réticulation dans l'élaboration de la notion d'espace.

C'est une telle réticulation du plan horizontal qu'utilise Desargues en 1636 dans un opuscule de douze pages Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la pratique de la perspective... (14) pour construire la représentation d'un objet.

fig 4

Pour construire la représentation perspective, Desargues utilise un plan de l'objet (en haut et à droite de la figure) dont il va reporter les points remarquables sur le plan du tableau en utilisant un système de lignes coordonnées déterminé par la direction perpendiculaire au plan du tableau et la direction parallèle à la ligne de terre. Pour construire les échelles correspondantes sur chacune des lignes coordonnées, Desargues utilise l'une des directions diagonales, la difficulté vient de ce que les points de distance sortent des limites du tableau et Desargues va effectuer une réduction d'échelle. Il peut alors construire l'échelle des éloignements qui représente sur le tableau les distances en profondeur à partir de la ligne de terre et l'échelle des mesures qui représente les distances sur chacune des parallèles à la ligne de terre.

Nous indiquons sur la figure ci-dessous (fig 5) le principe de la construction

fig 5

On peut remarquer que, **G** étant le point de fuite principal et **F** le point de distance, le quadrilatère **ACTI** représente un carré (de coté égal à la distance de l'oeil au tableau) ce qui montre que la distance **CT** est égale à la distance **AC**, de même la distance **OT** est égale à la distance **IT** donc à la distance **AC** et ainsi de suite, on construit ainsi l'échelle des éloignements. Il est aisé de voir que si l'on prend au lieu de **F** un point quelconque de la ligne d'horizon, l'échelle des profondeurs ne change pas. D'autre part, l'échelle des mesures étant donnée sur la ligne de terre, on construit aisément l'échelle des mesures sur une parallèle à la ligne de terre, nous laissons au lecteur le plaisir d'effectuer cette construction. Enfin Desargues , pour terminer son dessin, explique comment, un point du plan horizontal étant donné, on peut élever en ce point une verticale de hauteur donnée.

Desargues termine en énonçant, pour les contemplatifs, les principes généraux de la représentation perspectiviste; il remarque alors que des droites parallèles deviendront, en perspective, des droites concourantes ou parallèles suivant qu'elles ne sont pas ou sont parallèles au plan du tableau, et de même que des droites concourantes

deviendront, en perspective, concourantes ou parallèles selon que la droite joignant l'oeil au point de concours de ces droites rencontre ou ne rencontre pas le plan du tableau.

Ainsi, sans que cela soit dit explicitement, familles de droites parallèles et familles de droites concourantes sont analogues du point de vue de la perspective. Cette analogie sera explicitée et exploitée dans le Brouillon Project de 1639.

La démarche de Desargues s'appuie sur la mise en évidence d'une relation point-droite invariante par perspective (pour employer un langage d'aujourd'hui). C'est cette invariance qui permet de considérer points à l'infini et points à distance finie comme analogues, de désinfinitiser l'infini en quelque sorte. C'est la différence essentielle entre la démarche de Desargues et celle de Kepler; celui-ci en considérant, par analogie avec l'ellipse, que la parabole a un second foyer à distance infinie, définit un premier mode d'unification des coniques via une famille de courbes qui se déduisent les unes des autres par déformation, mais les difficultés à appréhender l'infini ne lui permettent pas de penser un point à distance infinie comme un point ordinaire et par conséquent de penser les coniques comme une seule et même courbe. Desargues par contre, en éliminant l'infini en quelque sorte, remarque que les sections coniques (les coupes de rouleau comme il les appelle dans le Brouillon Project) définies comme perspectives de cercles participent des mêmes propriétés, qui ne sont que les propriétés du cercle transformées par perspective (c'est la mise en place de la méthode des transformations sur laquelle nous reviendrons); ceci lui permet de considérer les sections coniques comme une seule et même courbe que l'on peut étudier par une seule et mesme énonciation, construction et préparation ou pour dire mieux par un seul et mesme discours et sous de mesmes paroles.

Cette unification du fini et de l'infini géométrique posera problème, ainsi Descartes qui a senti l'importance de l'oeuvre de Desargues même s'il n'en a pas compris toute la signification, écrit à Desargues (lettre du 19 juin 1639, citée par Taton (15))

Pour votre façon de considérer les lignes parallèles, comme si elles s'assemblaient à un but à distance infinie, afin de les comprendre sous le même genre que celles qui tendent à un point, elle est fort bonne, pourvu que vous vous en serviez, comme je m'assure que vous le faites, pour donner à entendre ce qui est obscur en l'une de ces espèces, par le moyen de l'autre où il est plus clair, et non au contraire.

autrement dit cette analogie acceptable sur le plan de la métaphore, si elle peut en un certain sens éclairer la recherche, ne saurait intervenir dans le raisonnement mathématique.

Ici apparaît un obstacle à la compréhension de la pensée de Desargues, bien plus profond que le caractère

botanique de son vocabulaire. Issue d'une certaine lecture des constructions perspectives (sur laquelle nous reviendrons, car c'est cette lecture qui fait le passage de la pratique perspectiviste à la géométrie projective), la notion arguésienne qui contient à la fois la définition des points à l'infini et l'élimination de leur spécificité pour en faire des points ordinaires, posait un problème d'ordre épistémologique (quel est leur statut mathématique?), problème qui ne sera résolu que par les mathématiciens du XIXème siècle avec le développement de la géométrie projective moderne.

Notons que d'autres objets mathématiques au statut incertain, les infiniment petits, seront utilisés par les mathématiciens du XVIIIème siècle, mais dans ce cas on peut travailler formellement sur ces objets, c'est-à-dire effectuer des calculs sur les symboles qui les représentent sans se préoccuper, au cours du calcul, de la signification de ces symboles. Ce n'est pas le cas pour les points à l'infini, objets géométriques dont la nature (c'est-à-dire la signification) intervient en tant que telle dans le raisonnement (lequel ne se réduit pas dans le contexte arguésien à un calcul analytique).

Cependant, tout au long des XVIIème et XVIIIème siècles, des géomètres continueront la tradition arguésienne (et nous renvoyons à l'article cité de Denis Lanier et Jean-Pierre Legoff).

Ainsi, après Desargues qui dans le Brouillon project décrivait les asymptotes de l'hyperbole comme les touchantes de ses bords à distance infinie, Pascal, dans le premier livre de son Traité des Coniques (ouvrage perdu dont on a retrouvé un manuscrit de la première partie, Generatio conisectionum, dans les papiers de Leibniz) (16), définissant les propriétés élémentaires des coniques à partir du cercle par perspective et remarquant que la tangente en un point d'une conique est la perspective de la tangente au point correspondant du cercle, remarque que, dans le cas de la parabole et de l'hyperbole, il y a des points du cercle qui n'ont pas d'images perspectives, et considérant ce que deviennent les tangentes à ces points sans images, écrit, en ce qui concerne la parabole

Il y a donc sur la parabole une droite manquante qui joue vraiment le rôle d'une tangente, puisqu'elle est l'image d'une tangente

et en ce qui concerne l'hyperbole

... les asymptotes jouent le rôle de tangentes à distance infinie et doivent compter comme telles.

Quant à Newton dans son Enumératio linearum tertii ordinis (Enumération des lignes du troisième ordre) (17) publié en 1704 mais vraisemblablement écrit beaucoup plus tôt, dans lequel il se propose de déterminer toutes les

courbes du troisième degré, il écrit à propos des branches infinies d'une courbe

The asymptote to any branch is, therefore, found by seeking for the tangent to a point in that branch at an infinite distance.

Il faut remarquer que les méthodes perspectivistes ne sont pas étrangères à Newton; c'est ainsi qu'il explique dans l'article cité que toutes les cubiques planes s'obtiennent à partir de cinq d'entre elles par perspective comme les lignes du second ordre (les sections coniques) s'obtiennent à partir du cercle.

En fait c'est au moment où le projectif (au sens littéral: ce qui a rapport avec les projections) acquiert un statut reconnu par les mathématiciens, c'est-à-dire dans la première moitié du XIXème siècle, que le concept arguésien de point à l'infini est enfin accepté.

C'est par des considérations d'invariance que Poncelet justifie, dans son Traité des Propriétés Projectives des Figures (18) publié en 1822, la notion de point à l'infini, c'est ainsi qu'il écrit,

Les lignes parallèles concourent en un point unique à l'infini

précisant pour justifier cette assertion

On voit, en effet, que les points de concours à distance infinie et à distance donnée s'échangent réciproquement par l'effet de la projection.

et à cette notion, dont il rappelle qu'elle est généralement admise, il ajoute la notion de droite à l'infini, écrivant

Tous les points situés à l'infini sur un plan peuvent être considérés idéalement distribués sur une ligne unique, située elle-même à l'infini sur ce plan.

notion métaphysique (c'est le terme utilisé par Poncelet) qu'il justifie en remarquant que

tous ces points sont représentés, en projection, par ceux d'une ligne droite unique située, en général, à distance donnée et finie.

Ainsi Poncelet se place dans la même problématique que Desargues , savoir, l'invariance par projection. Si Poncelet, à l'époque où il rédigeait son ouvrage, n'a pu lire le Brouillon Project (texte alors perdu dont une copie écrite par Philippe de La Hire sera retrouvée ultérieurement par Chasles; quant au manuscrit original, il sera retrouvé en I959, ainsi que le raconte René Taton qui le publiera en 1961 (19)), il connaissait ce texte à travers les commentaires contemporains; c'est ainsi qu'il savait par la lettre de Descartes citée plus haut que Desargues considérait un

système de droites parallèles comme concourant à l'infini (ainsi qu'il l'écrit dans la préface du traité de 1822) et qu'il connaissait l'interprétation des asymptotes à une courbe comme tangentes en ses points à l'infini, interprétation qu'il justifiait par l'invariance projective.

2.De la démonstration euclidienne à la démonstration projective.

Dès la naissance de la perspective et les premiers traités énonçant des règles de construction, le problème se posait de justifier ces règles et pour cela d'énoncer des principes généraux permettant de les démontrer; la recherche de ces principes généraux jouera un rôle à la fois pratique et théorique, pratique dans la mesure où l'énoncé de tels principes simplifie la compréhension et l'utilisation des règles, théorique dans la mesure où cette recherche conduira à la géométrisation de la perspective avec les développements que l'on sait.

Ce n'est pas ici le lieu d'étudier l'impact de cette géométrisation sur la pratique perspectiviste; certains travaux ont effectivement eu un impact, d'autres, par leur sécheresse théorique ou par des objectifs trop éloignés de cette pratique ont eu peu ou pas d'impact chez les praticiens. Le problème qui nous intéresse ici est moins celui des retombées de la théorisation d'une pratique sur icelle que les voies ouvertes par cette théorisation dans le développement de la géométrie. Et c'est par rapport à celui-ci que nous situons notre exposé.

Justifications des règles de la perspective et principes généraux allaient d'abord s'élaborer conformément au canon géométrique de l'époque, celui de la géométrie grecque redécouverte en Europe depuis les premières traductions latines des Eléments d'Euclide (XIIème siècle).

La géométrie grecque, comme nous l'avons rappelé au début de cet article, est d'abord une géométrie de la mesure des grandeurs et c'est en rapport avec des problèmes de mesure que les premières théorisations des constructions perspectivistes vont se mettre en place; le problème est alors de déterminer les grandeurs représentées sur les tableaux, d'où les constructions d'échelles que l'on retrouve dans les premiers travaux théoriques (20). Il s'agit alors de justifier les constructions d'échelles et les tracés géométriques qui les accompagnent, et les critères de justification vont se traduire dans le mode de démonstration de la géométrie grecque, savoir, la théorie des proportions. Cependant la recherche de principes généraux de construction amènera la mise en place d'un nouveau mode de raisonnement qui deviendra au XIXème siècle ce que l'on peut appeler la démonstration projective (par opposition à la démonstration à la grecque liée à la mesure des grandeurs).

Ainsi le paysage géométrique sera remodelé non seulement par les nouveaux objets (tel le point à l'infini

arguésien), mais aussi par de nouveaux modes de raisonnement, nouveaux objets et nouveaux modes de raisonnement s'accompagnant les uns les autres; ce qui obligera les mathématiciens à préciser les conditions de légitimation du raisonnement géométrique; on peut renvoyer ici au texte de Pascal De l'esprit géométrique et de l'art de persuader (21).

C'est ainsi qu'on pourrait comprendre la double démonstration de l'existence du point de fuite dans les Perspectivae Libri Sex déjà cités. Pour montrer que les perspectives de droites parallèles convergent sur le tableau, Guido Ubaldo commence par démontrer quatre propositions (propositions 28 à 31 du premier livre), distinguant le cas où le tableau (la section, terme par lequel Guido Ubaldo rappelle que la représentation perspective est une section de la pyramide visuelle) est perpendiculaire au plan support et le cas où il ne l'est pas, et dans chacun de ces cas, distinguant le cas où les droites parallèles sont toutes dans le plan support et le cas où elles sont dans des plans différents. La démonstration repose dans chacun des cas sur des arguments de proportion pour montrer que les perspectives convergent en un point situé sur le tableau à la même hauteur que l'oeil par rapport au plan support. Ceci fait Guido Ubaldo écrit (nous utilisons la traduction de Christian Guipaud (22)),

Du reste, tout ce qui a été démontré dans ces quatre derniers théorèmes, nous le réduisons, grâce à un procédé différent, à une seule démonstration dans le théorème qui suit

et il énonce le théorème (proposition 32)

Si l'oeil voit des lignes parallèles, qui, prolongées, rencontrent la section, les lignes apparentes dans la section se rencontrent en un point unique, aussi haut que l'oeil au dessus d'un plan parallèle aux lignes parallèles.

qu'il démontre en remarquant que si l'on mène par l'oeil la parallèle aux lignes données, celle-ci définit avec une des lignes données un plan dont l'intersection avec le tableau est la perspective de la ligne considérée, cette perspective passe donc par le point d'intersection du tableau et de la parallèle menée par l'oeil aux lignes données. Ainsi les perspectives des lignes parallèles convergent en un point, le point de concours (punctum concursus) dans la terminologie de Guido Ubaldo.

On peut se demander pourquoi Guido Ubaldo ne se contente pas de la seconde démonstration, à la fois courte et efficace; une réponse possible est que cette démonstration n'entre pas dans le canon de la géométrie grecque rappelé ci-dessus (même si elle s'appuie sur les résultats du livre XI des Eléments d'Euclide sur lequel nous reviendrons) et il est nécessaire de l'accompagner d'une démonstration certes lourde et compliquée mais seule capable de légitimer la propriété cherchée, savoir, l'existence du point de concours. Notons

que Guido Ubaldo ne mentionne pas la ligne d'horizon pourtant connue depuis le Quattrocento, insistant à chaque fois sur le fait que le point de concours (pour les lignes horizontales, les seules qu'il considère) est à la même hauteur que l'oeil par rapport au plan support, ce qui pourrait dénoter la prégnance de la notion de distance dans la détermination des éléments géométriques.

Une autre démonstration de l'existence du point de fuite sera donnée quelques années plus tard par Simon Stevin dans le De Sciagraphia déjà cité. L'objet à représenter étant appelé ombrageable et sa représentation l'ombre de l'objet (nous citons Stevin dans la traduction de Girard (23)), nous rappelons que la vitre est le plan du tableau, le pavé est le plan de l'objet qu'on représente et le rayon est une droite passant par l'oeil; Stevin énonce alors le théorème (proposition 3)

Les lignes ombrageables estant veuës par le vitre qui n'est parallèle avec les parallèles, et leurs ombres étant prolongées en iceluy, elles conjoignent en un mesme poinct du rayon qui est parallèle avec l'ombrageable parallèle, et icelles ombrageables estant pareillement parallèles avec le pavé, leur poinct de conjonction vient aussi haut dessus le pavé comme l'oeil.

Pour la démonstration, Stevin, ayant mené par l'oeil la parallèle aux lignes ombrageables qui coupe le plan du tableau en un point (le point de conjonction), montre que l'ombre d'une ligne ombrageable passe par ce point, mais la lourdeur de l'exposé laisse entendre que Stevin, soucieux de convaincre ses lecteurs, voire peut-être de se convaincre, de la légitimité de sa démonstration, ne pouvait ou ne savait utiliser un raisonnement direct analogue à celui de la deuxième démonstration de Guido Ubaldo. Notons aussi que Stevin, comme Guido Ubaldo, ne mentionne pas la ligne d'horizon, insistant sur la hauteur du point de concours au dessus du pavé qui est égale à celle de l'oeil.

Ainsi la question se pose de la légitimité d'un raisonnement qui repose essentiellement sur les propriétés d'incidence; pourtant ces propriétés d'incidence sont énoncées et démontrées au livre XI des Eléments d'Euclide, propositions 2, 3, et 7 que nous rappelons ci-dessous (dans la traduction de Peyrard (24)),

Si deux droites se coupent, elles sont dans un seul plan; tout triangle est aussi placé dans un seul plan.

Si deux plans se coupent mutuellement, leur commune section est une ligne droite.

Si deux droites sont parallèles, et si l'on prend dans chacune de ces droites des points quelconques, la droite joignant ces points sera dans le même plan que les parallèles.

Mais les démonstrations sont lourdes et parfois peu convaincantes, ce qui est peut-être lié au flou de la définition du plan chez Euclide (cf les commentaires de Heath (25)); on peut admettre que des mathématiciens, soucieux de légitimer leur raisonnement selon les canons de la géométrie grecque, et peut-être plus grecs que les Grecs, aient évité l'utilisation directe des propriétés d'incidence; ceci expliquerait la première démonstration de Guido Ubaldo et le discours embarrassé de Stevin. Il faudra attendre Brook Taylor qui, au début du XVIIIème siècle, légitimera les propriétés d'incidence en les énonçant comme axiomes.

Cependant, hors ce besoin de légitimation géométrique, les propriétés d'incidence seront utilisées librement, empiriquement si l'on préfère; elles se relient à la problématique de la fenêtre ouverte d'Alberti ou de la vitre de Leonardo da Vinci, et ce sont finalement les problèmes liés à la perspective qui conduiront les géomètres à préciser leur statut (et je renvoie encore une fois à Taylor).

Notons aussi que les propriétés d'incidence interviennent d'une façon expérimentale comme le montrent par exemple deux des gravures sur les portillons de Dürer dans lesquelles il représente un rayon lumineux par un fil tendu matérialisant ainsi l'intersection de la pyramide visuelle avec le plan du tableau (26).

Aussi, si Guido Ubaldo et Stevin sont embarrassés pour démontrer ce qui est l'un des points essentiels de la théorie de la perspective, ils ont moins de scrupules dans leurs constructions, utilisant librement ce que Kirsti Andersen a appelé le théorème principal de la perspective, savoir, la perspective d'une droite est la droite joignant le point de fuite et le point d'intersection de la droite donnée avec le plan du tableau (27).

A titre d'illustration nous donnons la construction de l'image d'un point chez Guido Ubaldo et chez Simon Stevin.

Guido Ubaldo commence par construire le point de fuite d'une direction de droite (problème 1 du deuxième livre), pour cela il remarque que des lignes parallèles étant données dans le plan support qui coupent respectivement la ligne de terre en **E**, **B**, **K** (fig 6), si l'on mène par le point **S**, projection de l'oeil sur le plan support, la parallèle aux lignes données qui coupe en **F** la ligne de terre, alors sous l'hypothèse que le plan du tableau est perpendiculaire au plan support, le point de fuite **X** des lignes données sera sur la perpendiculaire en **F** à la ligne de terre à une hauteur égale à la hauteur de l'oeil. Ceci nous donne la construction suivante, le plan du tableau ayant été rabattu sur le plan support par rotation autour de la ligne de terre, **SA** représentant la hauteur de l'oeil reportée sur le plan support (auquel cas **SA** = **FX**)

fig 6

On en déduit aisément la perspective d'un point (problème 3)

fig 7

ici le segment de droite **DE** du plan support est représenté par le segment de droite **LK.**

Stevin quant à lui procède d'une façon quelque peu différente. Il suppose aussi le plan du tableau perpendiculaire au pavé, et pour construire la représentation perspective il rabat le plan du tableau sur le plan du pavé. La construction du point de fuite d'une droite est alors identique à celle donnée par Guido Ubaldo, la justification étant la même; par contre pour déterminer la perspective d'un point, Stevin remarque qu'elle est sur la droite d'intersection du tableau et du plan perpendiculaire au pavé contenant le rayon joignant le point donné à l'oeil, ce qui l'amène à tracer la droite joignant le point à la projection de l'oeil sur le pavé, puis mener de l'intersection de cette dernière droite avec la ligne de terre, la perpendiculaire à la ligne de terre

fig 8

A est le point ombrageable (pour reprendre le langage de Stevin), **D** la projection de l'oeil sur le pavé, on considère une droite passant par **A** qui coupe la ligne de terre en **H**, et on construit le point de fuite **G** de la droite **AH**, l'ombre de la droite **AH** est donc **GH**, d'autre part traçant **AD** qui coupe la ligne de terre en **I**, on élève de **I** la perpendiculaire à la ligne de terre qui coupe **GH** en **K**, lequel point est l'ombre de **A.**

Ces premières constructions étant faites, chacun des auteurs donne un certain nombre de constructions perspectivistes que nous ne pouvons citer ici. Disons cependant que les démonstrations accompagnant ces constructions font appel de façon plus ou moins explicite aux propriétés d'incidence et que c'est à travers des constructions de ce type que les géomètres prendront conscience de l'importance de ces propriétés et de la nécessité de préciser leur statut.

Nous ne parlerons pas ici des principes qui guident la construction proposée par Desargues dans son opuscule de 1636 cité ci-dessus, car Desargues ne les énonce pas et se contente de décrire la construction; l'utilisation d'une réticulation du plan via les lignes coordonnées était déjà connue depuis longtemps et l'un des points essentiels de la construction est le changement d'échelle qui permet de ramener le point de distance dans les limites du tableau. Mais ce qui importe dans le texte de Desargues c'est l'ensemble de la construction (même non justifiée) et la vision spatiale qui se dégage de l'exposé; autrement dit ce qui importe c'est moins l'originalité de la construction que le regard qu'y apporte Desargues et qui le conduira au point de vue projectif du Brouillon Project de 1639. Quant à la

conclusion réservée aux contemplatifs (c'est-à-dire aux théoriciens) dans laquelle il énonce, d'une façon qui paraît indépendante de la construction qu'il vient d'exposer, quelques propositions, lesquelles peuvent être énoncées autrement pour diverses matières, mais (...) accomodées ici pour la perspective... dont il précise que la démonstration est assez intelligible sans figure, on peut considérer qu'y apparaît dans un cadre plus général que la perspective, sinon un point de vue projectif, du moins le rôle que jouent les propriétés d'incidence (cf ci-dessous).

Si le Brouillon Project de 1639 est le premier texte de géométrie projective de l'histoire de la géométrie par les éléments qu'il met en place (points à l'infini, invariance par projection, théorie unifiée des coniques comme perspectives de cercle), il faut remarquer que les démonstrations respectent la tradition grecque, elles sont fondées sur la théorie des proportions,en particulier les lourdes comparaisons de raisons dans le style des Coniques d'Apollonius, ce qui en rend aujourd'hui la lecture malaisée; ainsi l'invariance de la relation d'involution est démontrée à partir du théorème de Menelaüs (attribué par Desargues à Ptolémée), théorème lui-même redémontré via le théorème aujourd'hui appelé théorème de Thalès. Notons cependant que la vision projective de Desargues le conduit à quelques transgressions significatives; c'est ainsi qu'il considère que les distances du point à l'infini d'une droite à deux points de cette droite sont égales, ce qui lui permet de définir la relation d'involution même si l'un des points est à l'infini et d'énoncer le théorème d'invariance dans toute sa généralité, sans toujours en donner une justification canonique. Ceci lui permet aussi, dans la théorie des coniques, de considérer les diamètres comme polaires de points à l'infini et de remarquer, en l'absence d'une définition précise de la droite à l'infini d'un plan, que les conjugués du centre d'une conique sont des points à l'infini, ce qui le conduit à écrire

Quand en un plan, aucun des poincts d'une droite n'y est à distance finie, cette droite y est à distance infinie.

et par conséquent, il n'est plus besoin de considérer le centre comme point particulier.

Nous n'en dirons pas plus sur le Brouillon Project renvoyant à l'ouvrage déjà cité de René Taton et à celui de J.V. Field et J.J.Gray (28).

De Desargues, nous citerons encore le classique théorème des triangles homologiques (le terme homologique n'est évidemment pas de Desargues); ce théorème a été publié en 1648 dans un ouvrage d'Abraham Bosse: Manière universelle de Monsieur Desargues de pratiquer la perspective (29) dans lequel l'auteur, ami et fervent partisan de Desargues, développe les idées de ce dernier. L'ouvrage se termine par trois propositions de géométrie écrites vraisemblablement par

Desargues, la première étant, formulée d'une façon bien compliquée, le théorème des triangles homologiques.

Considérant trois droites **HDa**, **HEb**, **HKl** (non nécessairement dans un même plan), les cotés des triangles **DEK** et abl se coupent deux à deux aux points **c**, **f**, **g** (fig 9), alors les points **c**, **f**, **g** sont alignés. Desargues le démontre d'abord lorsque les trois droites données ne sont pas dans un même plan, les point **c**, **f**, **g** étant alors sur la droite d'intersection des plans **DEK** et **abl**, puis dans le cas où les droites sont dans un même plan en utilisant le théorème de Menelaüs

fig 9

Desargues montre alors une réciproque (qui n'est en fait qu'une autre façon de lire la figure). Puis, utilisant une projection parallèle, Desargues compare les deux configurations (la plane et la non-plane), la propriété de la configuration plane étant alors une conséquence de la configuration non-plane; remarquant l'analogie des deux configurations, Desargues termine l'exposé de la démonstration en écrivant

Et l'on peut discourir de leurs propriétés sur l'une comme sur l'autre, et par ce moyen se passer de celle du relief en luy substituant celle d'un seul plan.

Notons que Desargues ne démontre pas que toute configuration plane de ce type est projection d'une configuration non-plane. Cependant la remarque finale montre qu'il a vu comment la propriété plane n'était qu'une forme particulière de la propriété générale (sa perspective comme il le dit, même s'il ne le justifie pas complètement); la démonstration via le théorème de Menelaüs n'en est alors que la justification canonique.

Si Desargues a conscience d'une nouvelle approche de la géométrie qui consiste, à partir des propriétés de l'espace (que ses petits-neveux appelleront descriptives), à découvrir et démontrer des propriétés du plan, il reste encore dans une tradition fondée sur la mesure et la théorie des proportions et, contrainte plus forte, sur la nécessité, elle aussi héritée des Grecs, et d'ordre plus esthétique que logique, que la démonstration d'une propriété de géométrie plane ne demande que des arguments de géométrie plane. La lourdeur du Brouillon Project est alors le tribut payé à l'héritage grec.

Pascal, disciple de Desargues, ira plus loin dans la mise en place de ce que nous appelons la démonstration projective.

L'oeuvre géométrique de Pascal est mal connue; il ne nous reste, en ce qui concerne la géométrie, que deux textes: le premier, l'Essay pour les Coniques de 1640, le second Generatio Conisectium (Génération des sections coniques), première partie d'un Traité des Coniques

aujourd'hui perdu dont nous ne connaissons le contenu que par une lettre de Leibniz à l'un des neveux de Pascal, lettre de 1676 dans laquelle Leibniz insiste pour une publication rapide de l'ouvrage, malheureusement il n'en fut rien.

Dans l'Essay pour les Coniques (30) Pascal énonce sans démonstration le lemme suivant:

...si par les points **K, V** passe une quelconque section de cône qui coupe les droites **MK, MV, SK, SV** ès points **P, O, N, Q**, les droites **MS, NO, PQ** seront de même ordre (c'est-à-dire, suivant la terminologie de Desargues, seront parallèles ou concourantes)

fig 10

Pascal relie son travail à celui de Desargues dont il reprend les méthodes. Ainsi il considère comme analogues familles de droites parallèles et familles de droites concourantes. Le lemme est énoncé d'abord pour le cercle, le lemme général pour les coniques s'en déduisant par projection. D'autre part, Pascal, qui ne donne aucune démonstration, relie son lemme au théorème de Desargues sur l'involution définie sur une droite par les cotés d'un quadrilatère et une conique passant par les sommets du quadrilatère, théorème qu'il affirme savoir démontrer à partir de son lemme.

L'importance du lemme de Pascal vient de ce que la condition qu'il énonce pour que six points soient sur une même conique est purement graphique (pour employer le langage des géomètres du XIXème siècle) en ce sens qu'elle ne fait appel qu'à des droites et des intersections de droites. On a ainsi le moyen d'une étude projective des coniques indépendamment de toutes notions métriques (la définition d'une conique comme section plane d'un cône à base circulaire renvoie à des notions métriques via le cercle de base). Il semble d'après la lettre citée de Leibniz que Pascal ait développé ce point de vue dans son Traité des Coniques (31) en introduisant la configuration qu'il appelle l'hexagramme mystique qui serait la donnée de trois couples de droites tels que les points d'intersection définis par chacun des couples soient alignés (nous renvoyons aux notes manuscrites de Leibniz, ces notes sont publiées et commentées par Pierre Costabel dans un article publié dans un ouvrage intitulé L'oeuvre scientifique de Pascal (32)); six points d'une conique définissent un tel hexagramme, hexagramme conique d'après Leibniz.

Le point de vue projectif apparaît clairement dans Generatio Conisectium, le premier livre du traité, retrouvé dans les papiers de Leibniz en 1891. Pascal y définit les coniques comme sections d'un cône à base circulaire, il distingue le cas où le plan de section passe par le sommet du cône, auquel cas on obtient soit un point, soit une droite, soit deux droites, et le cas où le plan de section ne passe pas par le sommet du cône, auquel cas on obtient une ellipse (antobole), une parabole ou une hyperbole. Il peut alors

étudier l'intersection avec une droite (en projetant l'intersection du cercle de base avec une droite de son plan) puis les tangentes aux points de la conique (en projetant les tangentes aux points du cercle). Ceci l'amène à étudier les points sans images (les points du cercle qui définissent les points à l'infini de la conique) et les tangentes en ces points (cf ci-dessus p 9).

Signalons que Pascal avait annoncé la rédaction de son traité en 1654 dans une Adresse à l'Académie Parisienne (33), traité qu'il présente ainsi,

L'oeuvre complète des coniques, comprenant et les coniques d'Apollonius et d'innombrables autres résultats, par une seule proposition ou presque, invention que j'ai faite quand je n'avais pas encore l'âge de seize ans et que plus tard j'ai mise en ordre.(il s'agit du lemme de 1640).

Le développement du point de vue projectif par Pascal n'est pas sans lien avec les méthodes perspectives que Pascal connaissait; dans l'Adresse citée ci-dessus, Pascal annonçait une méthode de perspective dont il affirmait

aucune de celles déjà inventées, ou qu'on puisse inventer, ne peut être considérée comme plus brève et plus avantageuse que celle-là, puisqu'elle fournit les points du dessin par l'intersection de deux droites seulement; il est absolument impossible d'être plus rapide.

Nous ne savons rien de ce texte de Pascal en dehors de cette courte présentation, pas même s'il a été achevé, et nous n'en pouvons rien dire si ce n'est qu'il conforte l'idée de ce lien que l'on retrouve constamment entre l'élaboration du point de vue projectif et le développement des méthodes perspectivistes.

Pour une analyse plus complète de l'oeuvre géométrique de Pascal, nous renvoyons au texte de René Taton dans l'ouvrage déjà cité L'Oeuvre scientifique de Pascal (34).

Si Pascal a mis en avant les propriétés descriptives et graphiques, la systématisation viendra de Brook Taylor qui explicitera une axiomatique des propriétés d'incidence à partir de laquelle il développera les propriétés générales de la représentation perspectiviste et les méthodes de construction.

L'oeuvre de Taylor n'apporte peut-être rien de nouveau quant aux méthodes perspectivistes, peut-être même rien d'utile tant la concision du langage peut présenter des difficultés pour qui n'a pas étudier la géométrie. Elle représente ce nouveau regard, dont nous avons déjà parlé à propos de Desargues, qui conduit Taylor d'une part à mettre en valeur la place des propriétés d'incidence, et d'autre part, nous en parlerons plus loin, à mettre en place une méthode d'étude directe de la géométrie du tableau, méthode que Lambert développera plus tard sous le nom de géométrie

perspective et qui, en langage d'aujourd'hui,n'est autre que la transformée de la géométrie usuelle par la perspective.

Taylor a publié en 1715 un ouvrage intitulé Linear perspective or a new Method of Representing justly all manner of Objects as they appear to the Eye in all Situations (35), ouvrage qu'il présente ainsi,

In this Treatise I have endeavour'd to render the art of Perspective more general, and more easy, than has yet been done.

leit-motiv de tous les traités, surtout ceux des théoriciens (rappelons la présentation par Pascal de sa méthode de perspective dans son Adresse de 1654).

Mais au-delà de cette déclaration liminaire, qu'apporte l'ouvrage? essentiellement un point de vue de géomètre. Taylor,pour montrer la généralité de son exposé, ne suppose rien de particulier quant à situation du plan du tableau (the picture) et du plan de l'objet (the original plane), ce qui lui permet d'énoncer des définitions générales. Ainsi le point de fuite (the vanishing point) d'une ligne droite est l'intersection de la parallèle à cette droite menée par l'oeil avec le plan du tableau, la ligne de fuite (the vanishing line) d'un plan est l'intersection du plan parallèle à ce plan mené par l'oeil avec le plan du tableau. Taylor définit d'autre part le plan de direction (the directing plane), plan parallèle au plan du tableau passant par l'oeil, le point de direction (the directing point) d'une ligne droite est alors le point d'intersection d'icelle avec le plan de direction.

Taylor peut alors énoncer et démontrer, via les propriétés d'incidence, le théorème principal de la perspective, savoir, la perspective d'une droite est la droite joignant le point de fuite d'icelle à l'intersection de la droite donnée avec le plan du tableau, il montre de même que la perspective d'une droite est parallèle à la droite joignant le point de direction d'icelle à l'oeil (seconde propriété fondamentale de la perspective, la première étant le théorème principal)

Ces propositions étant démontrées, Taylor va, à travers quelques problèmes, expliciter les règles de construction. Pour cela, puisqu'il n'y a pas de plan particulier, au lieu de rabattre, comme on le fait habituellement, le plan du tableau sur le plan de l'objet qu'il veut représenter, il rabat le plan de l'objet sur le plan du tableau en le faisant tourner autour de la ligne de terre; en même temps il rabat l'oeil sur le plan du tableau en le faisant tourner autour de la ligne de fuite (un tel rabattement avait déjà été utilisé par Philippe de La Hire dans un traité sur les coniques publié en 1673, cf ci-dessous). La construction de l'image d'une droite, puis de l'image d'un point, est alors évidente.

fig 11

fig 12

S est la projection orthogonale de l'oeil **O** sur le plan du tableau, **C** le point d'intersection de la droite **AB** sur le plan du tableau, **D** et **E** étant les projections orthogonales de **A** et **B** sur le plan du tableau, la ligne de fuite du plan perpendiculaire au plan du tableau passant par la droite **AB** est alors la parallèle à la droite **CDE** passant par **S** et le point de fuite de la droite **AB** est l'intersection de la parallèle à **AB** menée par l'oeil avec le plan du tableau; la construction de la perspective **ab** du segment **AB** s'obtient alors par le théorème principal.

Notons que sur la figure 12, les points **O**, **A**, **a**, c sont alignés, Taylor utilisera cette propriété sans la justifier explicitement dans d'autres constructions de l'ouvrage; dans la seconde édition de 1719 (cf ci-dessous) il montrera que l'intersection du plan du tableau et du rayon visuel **OA** (fig 11) ne change pas pendant la double rotation du plan de l'objet et de l'oeil (la droite **OS** restant constamment parallèle au plan de l'objet), remarquant que ce point d'intersection divise le segment **SD** dans un rapport constant; dans la figure 12, **OA** représente le segment rabattu. Ceci nous montre que la construction de Taylor (qui est essentiellement celle de Guido Ubaldo et de Stevin) est une homologie de centre le rabattement de l'oeil; cette propriété avait été démontrée par Stevin qui montrait qu'en rabattant le plan du tableau et l'oeil sur le pavé (le tableau tournant autour de la ligne de terre et l'oeil autour de la parallèle à la ligne de terre passant par sa projection sur le pavé) l'ombre d'un objet restait fixe sur le plan du tableau.

Taylor indique un second procédé de construction utilisant la seconde propriété fondamentale. Nous indiquons sans commentaire la construction de la perspective de l'image d'un triangle, la droite **fd** représentant le rabattement sur le plan du tableau de l'intersection du plan du triangle **ABC** avec le plan de direction.

fig13

Notons que cette construction n'est autre que la transformation de La Hire définie dans son traité de 1673, nous y reviendrons (cf ci-dessous p).

Devant les critiques opposées à la trop grande concision de l'ouvrage, Taylor publie en 1719 une nouvelle édition qu'il intitule New Principles of Linear Perspective (36) et il précise en sous-titre or the Art of Designing on a Plane the Representations of all sorts of Objects in a more General and Simple Method than has been before. S'il est un peu plus explicite que dans l'édition de 1715, il insiste cependant sur la nécessité de connaître la géométrie pour lire son ouvrage, déplorant le manque de connaissances géométriques qui conduit à des erreurs dans les tableaux and

what is the more to be lamented, the Greatest Masters has been the most guilty of it.

En fait, il s'agit bien plus dans l'ouvrage de 1719 d'expliciter des principes que de préciser des constructions qui n'en sont que des conséquences, mais c'est cette explicitation qui fait la valeur géométrique de l'ouvrage.

Après l'exposé des définitions, plus complet que dans l'édition de 1715, Taylor énonce quatre axiomes:

The common intersection of two planes is a straight line.

If two straight lines meet in a point, or are parallel to one another, there may be a plane passing through them both.

If three straight lines cut one another, or if two of them being parallel, are both cut by the third, they will all three be in the same plane; that is, a plane passing through any two of them will also pass through the third.

Every point in any straight line, is in any plane that line is in.

On remarquera, d'une part que Taylor traite de la même manière droites parallèles et droites concourantes, d'autre part que les axiomes portent seulement sur les propriétés d'incidence.

Taylor démontre ensuite huit théorèmes sur lesquels s'appuiront les constructions, dont les deux propriétés fondamentales (théorème III et théorème V),puis dans un style proche de l'édition de 1715, il énonce et résoud divers problèmes de construction.

Nous n'étudierons pas dans le détail les deux ouvrages de Taylor renvoyant à l'excellent article de Kirsti Andersen (37).

Nous voulons seulement souligner le caractère des démonstrations de Taylor qui s'appuient essentiellement sur les relations d'incidence, le passage des situations spatiales (objet, tableau, oeil) au plan s'effectuant via le procédé de rabattement décrit ci-dessus; les considérations métriques interviennent dans ce contexte et perdent ainsi le rôle privilégié que leur accordait la tradition grecque. On y voit apparaître de façon explicite cette alliance intime et systématique entre les figures à trois dimensions et les figures planes que soulignera Chasles à propos de Monge dans son Aperçu historique de 1837 (38). S'il est vrai que ce lien entre figures spatiales et figures planes est au coeur de la pratique perspective, c'est peut-être Taylor qui le premier l'a explicité comme principe de démonstration. En ce sens l'intérêt de l'oeuvre de Taylor relève plus de l'ordre géométrique que de la pratique perspectiviste.

Par comparaison, nous citerons un ouvrage publié en 1711, l'Essai de Perspective (39) de s'Gravesande dans lequel l'auteur se propose d'énoncer les principes de la perspective et de montrer à travers plusieurs problèmes explicitement résolus comment ces principes interviennent dans les constructions perspectivistes.

Devant la similitude des problèmes proposés et des méthodes de résolution, la question se pose d'une part de l'influence de s'Gravesande sur Taylor (le second a-t-il lu le premier et dans quelle mesure s'en est-il inspiré?), d'autre part de ce qui les différencie. Et il est vrai que sur le plan de la pratique perspectiviste Taylor n'apporte rien de plus que s'Gravesande, l'Essai de Perspective est plus complet et plus utile au praticien par le nombre de problèmes proposés, multipliant les solutions pour un même problème, solutions expliquées en détail, ce que ne fera pas Taylor plus préoccupé des principes. Mais la différence essentielle entre les deux auteurs qui apparaît à la lecture se situe dans les méthodes de démonstration.

Si les propriétés d'incidence spatiale sont présentes chez s'Gravesande et si on sent à la lecture qu'elles ont guidé l'auteur dans la mise en place de ses constructions, elles n'ont pas valeur de preuve et s'Gravesande justifie ses constructions en faisant appel à la géométrie euclidienne plane (triangles semblables, théorème de Thales comme on l'appelle aujourd'hui...); ce qui donne un caractère quelque peu artificiel à certaines démonstrations. Ainsi s'Gravesande qui utilise les deux méthodes liées aux deux propriétés fondamentales citées ci-dessus, justifie l'équivalence de ces constructions par des arguments de géométrie plane, démonstration inutile du point de vue de Taylor. C'est que Taylor cherche une légitimation de ses démonstrations dans la problématique perspectiviste elle-même; il se montre en cela proche du courant développé au XVIIème siècle par Pascal et les logiciens de Port-Royal (40) (dont les Nouveaux Elémens de Geométrie (41) d'Antoine Arnauld sont l'exemple canonique), courant qui, à travers une critique de la méthode des géomètres, met en avant le rôle de la démonstration pour éclairer par rapport à la démonstration pour convaincre (42) et recommande dans la démonstration de ne point recourir à des voies trop éloignées.

Ceci nous amène à revenir sur l'axiomatique des propriétés d'incidence développées par Taylor dans l'édition de 1719.

La notion d'axiome, jusqu'à l'élaboration d'une nouvelle forme d'axiomatique par Hilbert à la fin du XIXème siècle, reste ce qu'elle est depuis Aristote, savoir, une proposition première qui n'a pas à être démontrée, soit parce qu'elle est évidente par elle-même (définition que l'on retrouve dans de nombreux traités de géométrie des XVIIème et XVIIIème siècles, Arnaud, dans ses Nouveaux Elémens de Géométrie cité ci-dessus, écrit qu'un axiome est une proposition si claire qu'elle n'a pas besoin de preuve), soit parce qu'elle est nécessaire à la découverte et à la démonstration de nouvelles vérités, ce qui, d'une certaine

façon, assure sa propre vérité (et nous renvoyons aux Seconds Analytiques d'Aristote (43)).

En énonçant comme axiomes les propriétés d'incidence, alors que ces propriétés sont énoncées et démontrées dans le livre XI des Eléments d'Euclide, Taylor insiste sur leur rôle premier dans la légitimation de la démonstration, celle-ci devient indépendante de la tradition grecque (point de vue que l'on trouve déjà chez Pascal dans le premier livre de son Traité des Coniques), mais ce rôle premier est lié au caractère d'évidence de ces propriétes qui n'appellent pas le besoin d'une démonstration, caractère d'évidence qui s'appuie à la fois sur le sens visuel et sur une tradition perspectiviste déjà bien établie.

Ainsi la perspective, mode de représentation des choses vues, conduit à un déplacement d'une géométrie de la mesure liée à la tradition grecque vers une géométrie de la vision. Cette géométrie visuelle est ancienne dans la mesure où elle apparaît avec les premiers théoriciens de la perspective, mais ce qui est nouveau chez Taylor (et peut-être déjà chez Pascal, si l'on se réfère au premier livre du Traité des Coniques sur la génération des coniques faite optiquement par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cône des rayons comme le dit si bien Leibniz dans sa lettre de 1676 citée ci-dessus), c'est que cette géométrie visuelle fonde un principe de légitimation de la démonstration. Si les premiers théoriciens cherchaient à géométriser la perspective en s'appuyant sur la tradition grecque, c'est la perspective qui a permis un renouvellement de la pensée géométrique avec la mise en place d'une géométrie visuelle. Et les deux principaux protagonistes de cette histoire ont été Pascal et Taylor.

Ce déplacement marque la prise en compte (la reprise en compte!) de la place du donné empirique dans l'édification de la géométrie. Avec le développement de la rationalité de la géométrie grecque, la part d'empirisme d'icelle (essentiellement liée au mouvement via le principe de l'égalité par superposition) a été occultée, la construction axiomatique euclidienne, tout en s'appuyant sur cette part d'empirisme, mettant en place les conditions de cette occultation (44); la géométrie devenait ainsi une science purement rationnelle. La construction d'une nouvelle forme de géométrie à partir d'une problématique essentiellement pratique, savoir, comment dessiner l'intersection du cône visuel avec le plan du tableau, posait de nouveau le problème de la part d'empirisme de ce domaine de la connaissance qu'est la géométrie; et les théoriciens, suivant en cela une démarche analogue à celle des géomètres grecs, s'emploieront à dépasser, voire occulter cette part d'empirisme, tout en restant à l'intérieur de la problématique perspectiviste. Ceci conduisait à redéfinir les conditions de légitimation de la démonstration; ce qu'a voulu faire Taylor lorsque, répondant aux critiques adressées à l'édition de 1715 et peut-être à coté de ces critiques, il a explicité sous forme d'axiomes les principes qui régissent ses méthodes.

Pour préciser cette distinction qui se dessine entre ces deux aspects de la géométrie, la géométrie de la mesure et la géométrie de la vision, il faudrait parler ici de l'empirisme anglais tel qu'il se développe au tournant des XVIIème et XVIIIème siècles. John Locke publie en 1690 son Essay concerning Human Understanding (45), George Berkeley publie en 1709 An essay towards a New Theory of Vision (46); si la connaissance a son origine dans l'expérience sensible, la connaissance des objets de la géométrie relève du toucher (touch) et de la vue (sight) ce qui pose le problème d'abord de la part de chacun de ses sens, d'autre part de leur articulation. Ceci conduira à considérer la géométrie de la mesure comme relevant du toucher et la géométrie de la perspective (qui deviendra la géométrie projective) comme relevant de la vue; cette conception sera reprise et développée au début du XXème siècle par Enriques dans Problema della Scienzia dont la seconde partie (celle qui nous interesse ici) a été traduite en français sous le titre Les concepts fondamentaux de la science (47). Nous ne pouvons en dire plus dans cet article, renvoyant à un article ultérieur sur Les Sens de la Géométrie (exposé au Seminaire Histoire Théorie et Pratique de la Perspective et des Modes de Représentation).

C'est dans ce contexte que s'inscrit Taylor développant une géométrie du visuel, et c'est en ce sens que son oeuvre marque une étape de la pensée géométrique; qu'elle ait eu peu d'influence ou une influence à côté comme le signale avec justesse Kirsti Andersen (48), importe peu. Le problème est moins celui d'une influence directe que le fait que les ouvrages de Taylor, et surtout celui de 1719, expriment des idées qui se développeront tout au long du XVIIIème siècle jusqu'à la mise en place de la géométrie projective moderne.

Il faudrait citer ici Lambert, même si celui-ci, dans un court exposé historique sur la perspective publié en 1774, passe un peu trop rapidement sur l'oeuvre de Taylor en laquelle il ne voit que la généralisation de la construction, le tableau étant oblique (49); pourtant on retrouve dans l'ouvrage de Lambert La perspective affranchie de l'embarras du plan géométral publié en 1759 et plus encore dans les Notes et Additions à la seconde édition de 1774, une problématique proche de celle de Taylor, nous y reviendrons.

L'oeuvre de Taylor sera appréciée par Monge qui y verra moins un intérêt pour les praticiens qu'une démarche théorique, malheureusement au moment où l'oeuvre de Taylor aurait pu être appréciée pour ce qu'elle est, elle sera dépassée par la géométrie projective naissante (50).

3. Des constructions aux transformations.

On peut considérer le Brouillon Project de 1639 comme le premier ouvrage où l'on déduit de nouvelles propriétés géométriques à partir de propriétés connues en transformant une figure (ainsi les propriétés des coniques

s'obtiennent à partir des propriétés du cercle par projection), ce qui deviendra la méthode des transformations. Celle-ci n'est autre que la lecture d'une situation géométrique à travers une autre situation géométrique (sa transformée), ce qui s'appuie sur la définition des invariants (c'est-à-dire, de ce qui est commun aux deux situations).

La question que nous posons ici, du point de vue de l'histoire, est celle de la place des constructions perspectivistes dans l'élaboration des notions de transformation et d'invariant.

On ne peut définir les constructions perspectivistes comme des transformations géométriques au sens moderne du terme (celui du Programme d'Erlangen de Felix Klein). Au contraire le projet perspectiviste est de représenter le monde tel que nous le voyons (cf la fenêtre ouverte d'Alberti ou la vitre de Leonardo da Vinci), le problème est alors moins de transformer que de définir ce qui est commun à l'objet et à sa représentation, ainsi les constructions perspectivistes concernent plus l'explicitation d'invariants que la notion de transformation. Ceci apparaît dans les problémes de report de mesure à travers les constructions d'échelles et la mise en place des lignes coordonnées via les dallages (cf ci-dessus), problèmes qui sont encore au coeur de la construction arguésienne.

Nous distinguerons deux grandes classes de constructions perspectivistes; d'une part les constructions qui s'appuient sur une structuration de l'espace via les dallages (et nous verrons le rôle qu'elles ont joué dans la construction de la notion d'espace), constructions qui sont celles des premiers perspectivistes du Quattrocento, et dont le principe est résumé dans l'opuscule de Desargues de 1636; d'autre part les constructions qui s'appuient sur le théorème fondamental de la perspective et qui seront systématisées par Taylor et Lambert, Chasles y reconnaîtra les premières formes de l'homologie (cf la note XVIII de l'Aperçu historique de 1837 (51)).

La première construction perspectiviste: la construction légitime est exposée par Alberti dans son Trattato della Pittura publié en 1435, puis par Piero delle Francesca dans son ouvrage déjà cité De Perspectiva Pingendi (52). Le principe de la construction s'appuie sur la donnée préalable d'une double projection orthogonale: projection sur un plan horizontal et projection sur un plan vertical (que Vitruve (1er siècle avant J.C.) appelle respectivement ichnographia et ortographia au premier de ses Dix Livres d'Architecture (53)); l'objet et l'oeil étant représentés par la double projection, on peut alors construire l'intersection de la pyramide visuelle avec le plan du tableau (supposé orthogonal aux deux plans de projections), plan qu'il suffira de rabattre sur le plan vertical pour obtenir la représentation cherchée. Le principe de la construction légitime est résumé dans la figure ci-dessous (extraite de

l'ouvrage cité de Vignola Le due regole della prospettiva pratica)

fig 14

En fait Alberti et Piero della Francesca donnent une construction abrégée qui consiste à représenter un dallage situé sur le plan horizontal de référence

fig 15

La représentation du dallage joue un rôle fondamental dans la mise en place des éléments du tableau, définissant ce qu'on appelle aujourd'hui un système de lignes coordonnées, il suffit alors de reporter sur le tableau les positions des points remarquables déterminées par rapport au dallage pour obtenir la représentation cherchée. Ainsi pour les besoins de la représentation perspectiviste se met en place une première structuration de l'espace via la construction d'un réseau de lignes coordonnées, ce qui permet de mettre en relation les divers lieux de l'espace; c'est en ce sens que la perspective intervient dans la mise en place de la notion d'espace (cf ci-dessous).

A coté de la construction légitime apparaît une autre méthode de représentation dont nous avons déjà parlée: la méthode des points de distance (cf ci-dessus p 5), le principe de la construction est expliqué dans la figure suivante (extraite de l'ouvrage cité de Vignola),

fig 16

Vignola montrera dans son ouvrage l'équivalence des deux constructions par des considérations de géométrie plane s'appuyant sur les Eléments d'Euclide; cette démonstration peut nous paraître aujourd'hui redondante dans la mesure où l'on sait que l'on représente le même objet par la même transformation, mais de telles considérations n'existent pas pour Vignola et ses contemporains et le problème est de montrer que les deux constructions (essentiellement planes) donnent le même résultat.

Desargues utlisera systématiquement la méthode du dallage (qu'on pourrait appeler la méthode des lignes coordonnées en la distinguant de la méthode des coordonnées inventée à la même époque par Descartes et Fermat). Nous avons vu le rôle qu'elle a joué dans la définition des points à l'infini, il faudrait souligner le rôle qu'elle a pu jouer dans la mise en place de la notion d'invariant via les constructions d'échelles; en effet ce sont les relations métriques invariantes par perspective (qui deviendront les propriétés métriques projectives des géomètres du XIXème siècle (54)) qui ont permis d'expliciter le caractère commun à deux figures qui se déduisent l'une de l'autre par une transformation.

Se pose alors la question de l'origine de ces invariants projectifs que sont l'involution de six points et l'involution de quatre points (cette dernière étant la

division hamonique d'aujourd'hui) definies par Desargues dans le Brouillon Project de 1639. Ceci renvoie aux grands traités grecs sur lesquels se sont appuyés les géomètres du projectif; il s'agit d'une part des Coniques d'Apollonius, d'autre part du livre VII de la Collection Mathématique de Pappus, plus particulièrement de la partie consacrée aux Porismes (55), un ouvrage d'Euclide aujourd'hui perdu. Mais il n'y a pas de point de vue projectif chez les Grecs, même si Apollonius peut donner lieu à une relecture projective, ce qu'a fait Desargues écrivant le Brouillon Project en 1639, ce que fera queques années plus tard Philippe de La Hire publiant en 1673 ses Nouvelles méthodes en géométrie plane pour les sections des superficies coniques et cylindriques (56) contenant deux parties, la première étudiant les coniques comme sections planes d'un cône ou d'un cylindre, la seconde intitulée Planiconiques consacrée à une construction plane des coniques sur laquelle nous reviendrons.

Rappelons que l'on trouve dans la partie de la Collection Mathématique consacrée aux Porismes des énoncés qui deviendront des théorèmes de géométrie projective, ainsi la proposition 129

Menons transversalement, sur trois droites **AB, CA, DA**, les droites **TE, TD**; je dis que le rectangle compris sous les droites **TB, DC** est au rectangle compris sous les droites **TD, BC** comme le rectangle compris sous les droites **TE, HZ** est au rectangle compris sous les droites **TH, ZE.**

fig 17

que l'on peut lire comme l'invariance projective du birapport, mais cette interprétation si elle prend sens aujourd'hui après le développement de la géométrie projective, est étrangère au contexte grec. On pourrait citer aussi le théorème de Menelaüs-Ptolémée, exemple canonique de propriété métrique projective, dont l'origine relève de questions d'astronomie de position (57); Pappus démontre ce théorème au début du livre VIII de son ouvrage à propos d'un problème de statique.

Le problème reste donc ouvert d'expliciter comment la perspective a conduit les premiers géomètres du projectif à cette lecture projective des géomètres grecs, donnant à la notion de transformation l'importance qu'on lui connaît aujourd'hui.

Si les constructions précédentes (celles de la première classe) s'appuient sur la représentation des lignes coordonnées et le report des données métriques sur le tableau, les constructions de la seconde classe peuvent être considérées comme plus spécifiquement graphiques (au sens des géomètres du XIXème siècle (58)) et s'appuient sur le théorème principal de la perspective (cf ci-dessus p). Les premières constructions sont celles de Guido Ubaldo et Stevin rappelées ci-dessus. Elles seront systématiquement étudiées par s'Gravesande dans son Essai de Perspective de 1711. Enfin la mise en place de certains éléments de référence dans le

plan du tableau permettront de se passer du plan horizontal de référence (plan géométral) ce que feront Taylor puis Lambert, définissant ainsi la géométrie propre du tableau.

Taylor, nous l'avons vu (cf p), introduit un changement dans la construction perspectiviste en rabattant le plan géométral sur le plan du tableau, il construit alors sur le tableau les éléments qui serviront de référence, ainsi le rabattement de l'oeil (cf ci-dessus fig 12); cela lui permet de construire le point de fuite d'une direction horizontale donnée, cette direction étant représentée par une droite passant par le rabattement de l'oeil (rabattement de la droite passant par l'oeil et parallèle à la direction donnée), le point de fuite est alors l'intersection de cette droite avec la ligne d'horizon.

On peut ainsi effectuer des constructions sur le tableau sans référence à un objet original, ainsi dans l'ouvrage de 1715 la construction de la perspective d'un cercle de centre donné (en perspective) passant par un point donné (en perspective)

fig 18

O est le rabattement de l'oeil, **ED** la ligne d'horizon, **C** le centre d'un cercle en perspective passant par le point **A**, on veut construire un point **B** du cercle sur le diamètre **CE**, il suffit de remarquer que le triangle CAB est isocèle auquel cas les angles **CAB** et **CBA** sont égaux entre eux, chacun étant égal à la moitié de l'angle **ECD**, il suffit alors de construire la bissectrice de l'angle en vraie grandeur **EOD**, le point **F** intersection de cette bissectrice avec la ligne d'horizon est le point de fuite de la droite **AB**.

L'idée de rabattre le plan horizontal sur le plan du tableau qui caractérise la construction taylorienne se relie aux travaux de Philippe de La Hire sur les coniques (cf son ouvrage cité de 1673). Philippe de La Hire, définissant une conique comme section plane d'un cône à base circulaire, rabat le plan de la base sur le plan de la conique ce qui lui permet d'étudier celle-ci comme transformée du cercle rabattu par une transformation plane qui n'est autre qu'une homologie.

La transformation de La Hire peut être ainsi décrite: la formatrice est la droite d'intersection des deux plans,la directrice est le rabattement sur le plan de section de l'intersection du plan de base avec le plan parallèle au plan de section passant par le sommet du cône, on note **P** le rabattement du sommet du cône dans le plan de section; soit **M** un point du plan du cercle rabattu sur le plan de section, le transformé **M'** est alors d'une part sur la droite **PM**, d'autre part si l'on mène une droite quelconque passant par **M** coupant la formatrice en **F** et la directrice en **D**, le point **M'** est sur la parallèle menée par **F** à la droite **DO**,

fig 19

fig 20

La figure 19 décrit la situation dans l'espace, la figure 20 montre la construction plane indépendamment de toute référence à l'espace; on comparera avec la figure 13 correspondant à la seconde construction de Taylor (lequel ne cite jamais La Hire).

Nous terminerons cette partie sur les constructions et les transformations avec l'oeuvre de Lambert. Lambert publie en 1752 un Essai sur la Perspective(59) dans lequel il met au point un instrument à dessiner en perspective, le perspectographe; la construction qu'il définit a encore un caractère métrique en ce sens qu'elle s'appuie sur des calculs de longueur. Dans un second ouvrage La Perspective affranchie de l'embarras du plan géométral (60) qu'il publie en 1759, Lambert se propose de se passer d'un plan horizontal de référence en faisant ses constructions directement sur le tableau, pour cela il va mettre en place les éléments remarquables du tableau qui serviront de référence; c'est ce qui le conduit à définir la géométrie propre du tableau qu'il appelle la géométrie perspective, géométrie qu'on a vu apparaître chez Taylor (cf ci-dessus) et même chez Desargues travaillant directement sur la représentation du dallage (cf l'ouvrage déjà cité d'Abraham Bosse (61)).

Lambert commence par définir les divers éléments de la représentation perspectiviste et justifie la notion de point de fuite.

fig 21

Il va alors préciser la distribution des points de fuite sur la ligne d'horizon en définissant ce qu'il appelle le transporteur perspectif (qui n'est autre que l'échelle des angles)

fig 22

Soit **P** le point de fuite principal, Lambert construit le point **Q** sur la perpendiculaire en **P** à la ligne d'horizon situé à une distance de **P** égale à la distance de l'oeil au tableau, une direction horizontale étant donnée par sa déclinaison sur le plan vertical passant par l'oeil et perpendiculaire au tableau, on considère sur le plan du tableau la droite passant par **Q** et faisant l'angle avec la droite **QP** (à droite ou à gauche selon que la déclinaison est à droite ou à gauche), cette droite coupe la ligne d'horizon au point de fuite de la direction donnée.

On peut ainsi, à partir de la graduation du demi-cercle (**AB**), graduer la ligne d'horizon (échelle des angles) et repérer ainsi sur le tableau les directions horizontales. On peut alors mesurer les angles représentés sur le tableau, ou mener par un point d'une droite donnée, une droite faisant un angle donné avec la droite donnée (62).

On peut aussi, une échelle étant donnée sur une parallèle à la ligne d'horizon, déterminer l'échelle de mesure sur une droite donnée; nous montrons ici comment on peut construire sur une droite donnée un segment ayant même longueur qu'un segment donné sur une parallèle à la ligne d'horizon (63).

fig 23

Soit à construire sur la droite **gh** un segment égal au segment **lm**, soit α la déclinaison de la direction définie par **h**, on construit le point de fuite **k** correspondant à la déclinaison $\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$, **h** et **k** étant de part et d'autre du point **P**, on vérifie aisement que le triangle **jgl** est isocèle (les segments **jg** et **jl** sont de même longueur), le point **i** est alors l'intersection des droites **mk** et **gh**.

Nous ne développerons pas plus l'oeuvre de Lambert, renvoyant à l'ouvrage de Roger Laurent et Jeanne Peiffer La place de J.H. Lambert dans l'histoire de la perspective (64).

Avec Taylor et Lambert s'achève la théorisation de la perspective, elle aura mis en évidence la géométrie propre du tableau, systématisant ainsi ce qui constitue l'un des caractères essentiels de la méthode des transformations, savoir, la lecture d'une situation spatiale à travers une représentation de cette situation, ce qui deviendra non seulement transfert de lecture, mais aussi transfert de méthode voire transfert d'intuition (65).

Lambert l'avait compris lorsqu'il utilisait, dans les Notes et Additions de 1774 (66), les méthodes perspectivistes pour résoudre certains problèmes de la géométrie de la règle dont nous citons l'un des plus caractéristiques (problème V)

AC, BD sont des lignes qui se coupent en un point en dehors de la table, tracer à l'aide d'une règle seulement et sans prolonger ces lignes, une ligne passant par un point E donné et coupant BD, AC au même point d'intersection.

fig 24

On trace deux droites **AH** et **GB** passant par **E** puis on trace **AB** et **GH** qui se coupent en **K**. On trace une droite passant par **K** qui rencontre les droites données en **C** et **D**, les droites **HC** et **GD** se coupent en **F**, la droite **EF** est la droite cherchée.

En fait il faut lire **AC** et **BD** comme des droites parallèles, de même **AB** et **GH** comme des droites parallèles (autrement dit le point d'intersection des droites **AC** et **BD** et le point **K** sont sur la ligne d'horizon). Les points **E** et **F** sont respectivement les points d'intersection des parallélogrammes **ABHG** et **GHDC** et dans ces conditions la droite **EF** est parallèle aux droites **AC** et **BD**.

Avec la mise en place des éléments constitutifs du projectif (points à l'infini considérés comme points ordinaires, rôle des propriétés d'incidence (qui déterminent les propriétés graphiques), méthodes des transformations reliée à la notion d'invariant) pourra se développer au XIXème siècle la géométrie projective proprement dite; il nous reste à remarquer, pour terminer ce chapitre, que ce développement commence encore une fois avec un problème de représentation qui a conduit à la géométrie descriptive de Monge. Mais ce n'est pas le lieu ici d'en dire plus.

4. La notion d'espace.

Si la perspective a conduit au renouvellement de la pensée géométrique, ce n'est pas seulement avec la mise en place du point de vue projectif dont nous venons de parler, c'est aussi, et c'est peut-être l'apport le plus important, par sa contribution à l'émergence du concept d'espace, concept fondamental de la physique mathématique telle qu'elle s'élabore au XVIIème siècle.

Il n'y a pas d'espace dans la géométrie grecque, l'objet de la géométrie est l'étude, du point de vue de la grandeur, de situations spatiales locales dont on se propose d'expliciter diverses propriétés, essentiellement métriques (67), étude qui s'insère dans les conceptions de la philosophie classique grecque, essentiellement le platonisme et l'aristotélisme. Il faudrait mettre à part le courant issu de Leucippe et Démocrite (68), mais il ne semble pas qu'il ait eu d'influence dans l'élaboration de la géométrie grecque, du moins celle que nous connaissons et sur laquelle s'est construite la tradition scientifique occidentale, des Arabes du IXème siècle à nos jours.

La première mention de la géométrie comme étude de l'espace, se trouve, à ma connaissance, dans un texte de Pascal, fragment retrouvé (dans les papiers de Leibniz) d'un traité de géométrie aujourd'hui perdu(69). Pascal écrit

Principe 1. L'objet de la pure géométrie est l'espace, dont elle considère la triple étendue en trois sens divers qu'on appelle dimensions, lesquelles on distingue par les noms de longueur, largeur et profondeur, en donnant indifféremment chacun de ces noms à chacune de ces dimensions, pourvu qu'on ne donne pas le même à deux ensemble; elle suppose que tous ces termes-là soient définis d'eux-mêmes.

Principe 2. L'espace est infini selon toutes dimensions,

Principe 3. et immobile en tout et chacune de ses parties.

Le problème se pose alors d'expliciter les raisons qui font apparaître, à un moment donné de l'histoire, la notion géométrique d'espace et les problématiques qui la

portent, problème que nous n'aborderons pas ici; nous nous contenterons d'insister sur le rôle qu'y ont joué les constructions perspectivistes à travers ce que nous avons appelé, d'une façon quelque peu ambigüe, la structuration de l'espace. C'est que, si la notion d'espace se met en place à travers cette structuration, ce que l'on structure, savoir, les relations de situation entre les différents objets de l'espace, se définit au fur et à mesure qu'on le construit. On ne saurait, si ce n'est par une reconstitution artificielle et arbitraire, déterminer une donnée première, antérieure à l'espace, dont la structuration conduirait à la notion d'espace, autrement dit la notion d'espace est née moins des objets que des problèmes que l'on se pose par rapport à ces objets.

Il est clair qu'il n'y a pas d'autre perception effective de l'espace que celle des corps qui le remplissent.

écrivait en 1912 Léon Brunschvicg dans Les Etapes de la Philosophie Mathématique (70).

C'est dire que l'espace n'est pas une donnée immédiate de l'expérience, c'est un concept élaboré de la géométrie qui s'est construit à travers l'explicitation des relations de situation entre les corps, cela nous renvoie aux deux grandes problématiques que sont la représentation perspectiviste et la mécanique, problématiques qui se développent et se mathématisent à peu près à la même époque (71).

Le problème de l'espace se pose dès qu'il s'agit de mettre en relation plusieurs situations spatiales, ainsi la perspective qui doit, d'une part, déterminer les relations entre les trois composantes que sont l'objet à représenter, le tableau et l'oeil du spectateur, d'autre part, déterminer les relations entre les divers objets que l'on veut représenter, et ainsi coordonner les diverses parties du tableau. C'est cette double détermination qui conduit à ce que nous avons appelé la structuration de l'espace, que l'on peut essayer d'expliciter à travers les deux grandes classes de constructions perspectivistes.

Les constructions via les lignes coordonnées permettent par la détermination, dans le réseau ainsi défini (le dallage), des positions des objets à représenter, l'unification des diverses parties du tableau, ce qu'on appelle la construction de l'espace unifié (72); nous pourrions ici renvoyer à ces monuments théoriques de la construction perspectiviste que sont les classiques panneaux représentant des perspectives architecturales, panneaux qui résument l'idéal perspectiviste (73).

La seconde classe de construction (les constructions graphiques!) met l'accent sur les objets élémentaires (droites, points) de la géométrie dans leurs relations mutuelles, il ne s'agit plus de configurations locales étudiées pour elles-mêmes à la façon des géomètres grecs, mais d'une mise en relation de configurations, et l'acte de dessin pose le problème de l'explicitation de cette

mise en relation, ceci conduira à préciser le rôle des propriétés d'incidence. Ces propriétés d'incidence d'abord implicites, peut-être parce que allant de soi dans la problématique de la fenêtre ouverte ou de la vitre, matérialisées par les portillons des gravures de Dürer, seront explicitées par Taylor en 1719 (cf ci-dessus p), acquérant ainsi le statut de propriétés fondatrices de la géométrie.

Ainsi la structuration de l'espace se présente sous un double aspect, le réseau des lignes coordonnées et les propriétés d'incidence, permettant une appréhension globale du domaine géométrique; c'est dans cette appréhension globale que se situe le renouvellement du paysage géométrique dont nous avons parlé au début de cet article, et dont l'expression anachronique d'espace euclidien montre l'importance, la notion d'espace s'intégrant aujourd'hui, à la fois signe d'ignorance et signe de reconnaissance, dans la tradition canonique de la géométrie issue des Grecs.

5. Conclusion

Naissance du projectif, émergence de la notion géométrique d'espace, le courant perspectiviste a joué un rôle important dans le développement de la géométrie; il a été pourtant occulté par le courant analytique issu de la méthode des coordonnées fondée à partir de l'oeuvre de Viète par Descartes et Fermat. Pourtant cette histoire de la naissance du projectif qui va depuis les premières théorisations de Guido Ubaldo et Simon Stevin jusqu'à Taylor et Lambert montre que ce courant perspectiviste reste vivace pendant ces deux siècles, sans parler de l'influence sur des mathématiciens comme Newton (cf ci-dessus) et Leibniz, grand lecteur de Pascal et qui connaissait l'oeuvre de Desargues (74).

Mais si, dans les années trente du XVIIème siècle, Desargues et Descartes cherchaient chacun à développer une méthode universelle pour la géométrie, la méthode dite analytique avait l'avantage de la réduction au calcul conduisant à l'idée d'un développement autonome du calcul sans référence au sens des lettres ou signes utilisés, méthode qui s'est révélée féconde avec le développement de l'analyse et qui par cela-même prenait le pas sur une méthode qui restait engagée dans le sens (et en cela plus proche de la tradition grecque).

De l'histoire des relations entre les deux méthodes, marquée par des incompréhensions (Desargues et Descartes se lisant et s'appréciant mutuellement sans que chacun d'eux ait vraiment compris la signification de l'oeuvre de l'autre) et des conflits (comme la querelle entre partisans de la méthode analytique et partisans de la méthode synthétique au XIXème siècle), nous retiendrons ces deux points d'apparence paradoxale.

C'est peut-être Leibniz, fervent partisan de la réduction au calcul avec ce que j'appellerai le fantasme de la caractéristique universelle, qui comprit le mieux la portée de l'oeuvre de Pascal dans laquelle il voyait aussi se mettre en place un calcul géométrique. Mais c'est peut-être que Leibniz, et en cela il n'est pas formaliste au sens moderne du terme, ne détachait pas le calcul du sens; la caractéristique universelle ne devait pas être un langage réduit à sa syntaxe, bien au contraire (75).

Second paradoxe, c'est au moment où le réductionnisme analytique se radicalise avec Lagrange (le modèle de cette radicalisation étant la Mécanique Analytique (76)), que le courant issu de la perspective atteint son plein développement avec Monge (qui est au coeur des deux méthodes), puis Carnot et Poncelet.

C'est que les deux méthodes, qui se veulent chacune universelles, se complètent plus qu'elles ne s'opposent. Nous donnerons un seul exemple; si la notion d'espace s'est mise en place à partir des constructions perspectivistes, c'est la méthode analytique, qui l'ignore à ses débuts (il n'y a pas d'espace chez Descartes et Fermat), qui va en permettre l'étude, et ce, grâce à la rencontre de deux méthodes, la méthode des lignes coordonnées et la méthode des coordonnées, ou si l'on veut, l'unification des coordonnées comme repère et des coordonnées comme mesure.

Lille, janvier 1990

Ce texte, qui reprend en grande partie l'exposé que j'ai fait au colloque Les Mathématiques de l'Antiquité à l'Age classique, fait partie d'un travail en cours sur l'histoire de la pensée géométrique, travail qui s'appuie sur ma participation à la Commission Inter-IREM d'Epistémologie et au Séminaire d'Histoire,Théorie et Pratique de la Perspective et des Modes de Représentation (Institut Henri Poincaré). Je remercie mes collègues Didier Bessot, Christian Guipaud, Roger Laurent, Jean-Luc Lechevalier, Jean-Pierre Legoff, Joël Sakarovitch pour les nombreuses discussions sur l'histoire de ce riche domaine qu'est la perspective, ainsi que Kirsti Andersen de l'Université d'Aarhus.

Ce texte paraîtra dans les Actes du colloque "Les mathématiques de l'antiquité à l'âge classique. (Marseille, janvier 1989)."

NOTES

1 - Denis Lanier, Jean-Pierre Legoff L'héritage arguésien in La Naissance du Projectif. Actes du Colloque de Lille Mai 1989 (à paraître)

2 - Rudolf Bkouche La construction du rationnel in Les Cahiers de Philosophie (à paraître)

3 - Johann Kepler Paralipomènes à Vitellion (traduction et notes par Catherine Chevalley) Vrin, Paris 1980

4 - Apollonius de Perge Les Coniques (traduction par Ver Eecke) Blanchard, Paris 1979

5 - Pappus d'Alexandrie Collection Mathématique (2 volumes) (traduction par Ver Eecke) Blanchard, Paris 1982 ; Livre VII, propositions 235 à 238

6 - Thomas L. Heath A History of Greek Mathematics (2 volumes) Dover Publications New-York, 1981 ; Chapter XXI

7 - Alexandre Koyré Du monde clos à l'univers infini (traduit de l'anglais par Raissa Tarr) Gallimard. Paris 1973. Chapitre III

8 - Girard Desargues Brouillon Project d'une Atteinte aux Evènemens des Rencontres du Cône avec un Plan (1639) in René Taton L'oeuvre mathématique de Desargues Vrin Paris 1981

9 - Jean-Pierre Legoff Une oeuvre aux confins de l'Art et de la Science : "De Prospectiva Pingendi" de Piero della Francesca in Les Cahiers de la Perspective n° 4, 1987

10 - Jean Pèlerin dit Viator De Artificiali Perspectiva (2ème édition 1509) Librairie des Arts et Métiers. Nogent le Roi 1978

11 - Guido Ubaldo del Monte Les Six Livres de Perspective (traduction française et notes par Christian Guipaud) (à paraître) ; traduction italienne par Rocco Sinisgalli, L'Erma di Bretschneider Roma

12 - Simon Stevin De Sciagraphia (1605) ; traduction française par Albert Girard in Les Oeuvres Mathématiques de Simon Stevin Leyde 1634 ; traduction italienne par Rocco Sinisgalli in Il contributo de Simon Stevin allo sviluppo scientifico della prospettiva artificiale. L'Erma di Bretschneider Roma 1978

13 - Jacomo Barozzi da Vignola Le due regole della prospettiva pratica (commentaires de E. Danti) Bologne 1582

14 - Girard Desargues Exemple de l'une des manières universelles du S.G.D.L. touchant la perspective... (1636), réédité par Abraham Bosse in Manière Universelle de Mr Desargues pour pratiquer la perspective... Paris 1648, et fac-similé in J.V. field and J.J. Gray The Geometrical Work of Girard Desargues Springer Verlag, New-York Berlin Heidelberg 1987

15 - René Taton L'oeuvre mathématique de Desargues Vrin Paris 1981

16 - Blaise Pascal Traité des coniques in Oeuvres complètes (présentation et notes de Louis Lafuma) Le Seuil Paris 1963

17 - Isaac Newton Enumeratio linearum tertii ordinis (1701) ; english translation in D.J. Struick A source-book in mathematics 1200-1800 Princeton University Press 1986

18 - Jean Victor Poncelet Traité des Propriétés Projectives des Figures (2 volumes) Gauthier-Villars Paris 1865, Section I Chapitre III n° 103 à 107

19 - René Taton o.c.

20 - Jean-Pierre Legoff o.c.

21 - Blaise Pascal De l'Esprit géométrique et de l'Art de persuader in Oeuvres complètes o.c.

22 - Guido Ubaldo del Monte o.c. Livre I

23 - Simon Stevin o.c.

24 - euclide Les oeuvres d'Euclide (traduction française par Peyrard 1817) Blanchard Paris 1966

25 - Euclide The Thirteen Books of the Elements (translated with introduction and commentaries by sir Thomas L. Heath) (3 volumes) Dover Publications New-York 1956 Book I and Book XI

26 - Willi Kurth The complete woodcuts of Albrecht Dürer Dover Publications New-York plate 338 and 339

27 - Kirsti Andersen Brook Taylor's role in the history of linear perspective preprint february 1989 University of Aarhus Danemark

28 - J.V. Field, J.J. Gray The Geometrical Work of Girard Desargues Springer Verlag, New-York Berlin Heidelberg 1987

29 - Abraham Bosse Manière universelle de Mr Desargues pour pratiquer la Perspective... Paris 1648 et René Taton o.c.

30 - Blaise Pascal Essay pour les Coniques in Oeuvres complètes o.c.

32 - Pierre Costabel Traduction française des notes de Leibniz sur les Coniques de Pascal in l'Oeuvre scientifique de Pascal PUF Paris 1964 chapitre V

33 - Blaise Pascal Adresse à l'Academie Parisienne in Oeuvres complètes o.c.
L'Académie Parisienne fondée par Mersenne en 1635 a continué son activité après la mort de Mersenne (1648) ; dans son Adresse, Pascal annonce plusieurs de ces travaux, en particulier en géométrie ; les textes de ces derniers ne nous sont pas parvenus. Cette adresse est analysé par René Taton au chapitre III de l'ouvrage déjà cité L'Oeuvre Scientifique de Pascal (32)

34 - René Taton L'oeuvre de Pascal en géométrie projective in L'Oeuvre scientifique de Pascal o.c. Chapitre III

35 - Brook Taylor Linear Perspective London 1715

36 - Brook Taylor New Principles of Linear Perspective London 1719 ; Nouveaux principes de la Perspective linéaire (traduction française par le R.P. Rivoire) Amsterdam, Lyon 1789

37 - Kirsti Andersen o.c.

38 - Michel Chasles Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie Bruxelles 1837 ; réédition Editions Jacques Gabay, Paris 1989

39 - G.J. s'Gravesande Essai de Perspective La Haye 1711

40 - Antoine Arnauld, Pierre Nicole La logique ou l'Art de Penser Flammarion Paris 1970

41 - Antoine Arnauld Nouveaux Elémens de Géométrie Paris 1667

42 - Evelyne Barbin La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques Bulletin APMEP n° 366 Décembre 1988

43 - Aristote Les Seconds Analytiques (traduction Tricot) Vrin Paris 1979

44 - Rudolf Bkouche Un peu d'histoire Appendice in Daniel Lehmann, Rudolf Bkouche Initiation à la géométrie PUF Paris 1988

45 - John Locke Essay concerning Human Understanding London 1690 ; Essai Philosophique concernant l'Entendement Humain (Traduction de Coste) Amsterdam, Leipzig 1755, Réédition Vrin Paris 1983

46 - George Berkelay An essay towards a New Theory of Vision 1709 ; Essai d'une théorie nouvelle de la vision in Oeuvres choisies de Berkeley (traduction, préface et note de André Leroy) Aubier Montaigne Paris 1944

47 - Federigo Enriques Les concepts fondamentaux de la Science (traduit par Louis Rougier) Flammarion Paris 1913

48 - Kirsti Andersen o.c.

49 - Jean-Henri Lambert Notes et Additions de 1774 in Roger Laurent, Jeanne Peiffer La place de Lambert dans l'Histoire de la Perspective Cedic/Nathan Paris 1987

50 - Phillip S. Jones Brook Taylor and the Mathematical Theory of linéar Perspective American Mathematical Monthly Volume 58, 1951

51 - Michel Chasles o.c.

52 - Jean-Pierre Legoff o.c.

53 - Vitruve Les dix livres d'Architecture (traduction par Claude Perrault), Paris 1684, réédition Pierre Mardaga Bruxelles 1979

54 - Jean-Victor Poncelet o.c. Section I chapitre I n° 7

55 - Pappus d'Alexandrie o.c. Livre VII propositions 127 à 164

56 - Philippe de la Hire Nouvelles Méthodes en géométrie plane pour les sections des superficies coniques et cylindriques Paris 1673 ; voir aussi Denis Lanier, Jean-Pierre Legoff o.c.

57 - Thomas L. Heath o.c. chapter XIX

58 - Jean-Victor Poncelet o.c. Section I Chapitre I n° 6

59 - Jean-Henri Lambert Essai sur la Perspective (traduction de Jeanne Peiffer, commentaires de Roger Laurent) Monom Coubron 1981

60 - Jean-Henri Lambert La Perspective affranchie de l'embarrras du plan géométral Zurich 1759 réédition Alain Brieux Paris 1977

61 - Abraham Bosse o.c. Planches 141-148 Aux Théoriciens

62 - Jean-Henri Lambert La Perspective affranchie... Paragraphe 33

63 - Jean-Henri Lambert o.c. paragraphe 52

64 - Roger Laurent Jeanne Peiffer La place de Lambert dans l'histoire de la perspective Cedic Nathan Paris 1987

65 - Jean Dieudonné The Universal Domination of Geometry International Congress of Mathematical Education Berkeley 1980; Rudolf Bkouche Un peu d'histoire o.c.

66 - Jean-Henri Lambert Notes et Additions o.c.

67 - Rudolf Bkouche Quelques grandes problèmatiques de l'histoire de la géométrie Université d'Eté d'Histoire des Mathématiques Toulouse Juillet 1986. IREM de Toulouse

68 - Jean-Paul Dumont, Daniel Delattre, Jean-Louis Poirier Les Présocratiques Gallimard 1988

69 - Blaise Pascal Introduction à la géométrie in Oeuvres complètes o.c. voir aussi Jean Itard "L'Introduction à la géométrie" de Pascal in L'oeuvre scientifique de Pascal o.c.

70 - Léon Brunschwicg Les Etapes de la Philosophie Mathématique Blanchard Paris 1972 Ch XXII

71 - Pierre Thuillier La Naissance de la Perspective in La Recherche n° 160 1984

72 - Erwin Panofsky, La perspective comme forme symbolique (traduction française Guy Ballanger) Les Editions de Minuit Paris 1975
Hubert Damish L'origine de la perspective Flammarion Paris 1977

73 - La cité idéale panneau dit d'Urbino, Galerie Nationale des Murches, Urbino

Perspective architecturale panneau dit de Baltimore, Walters Art Gallery, Baltimore

Perspective architecturale panneau dit de Berlin, Staatliche Museen,

Ces panneaux sont étudiés dans l'ouvrage cité de Damish (72)

74 - Javier Echevarria Recherches inconnues de Leibniz sur la géométrie projective in Leibniz et la Renaissance Franz Steiner Verlag Wiesbaden 1983

75 - Louis Couturat La logique de Leibniz Felix Alcan Paris 1901, réédition Georg Olms Verlag Hildesheim, Zurich, New-York

76 - Joseph-Louis Lagrange Mécanique Analytique (1788) réédition Blanchard Paris 1965 ; Gabay Paris 1989

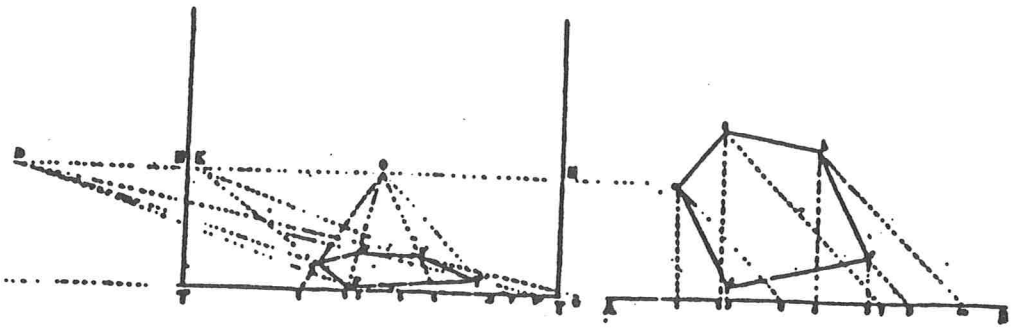


fig 1

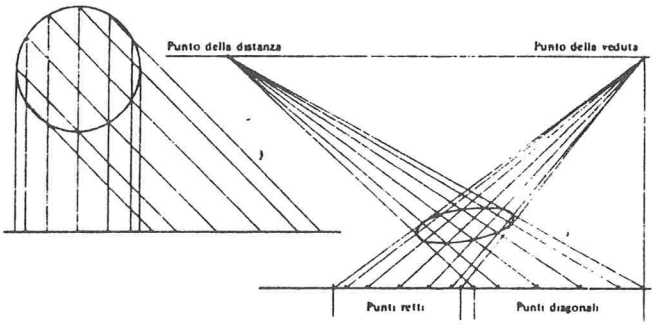


fig 2

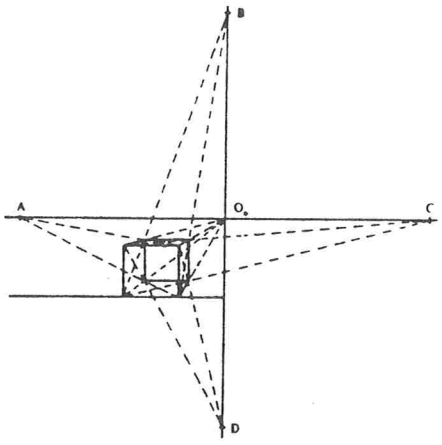


fig 3

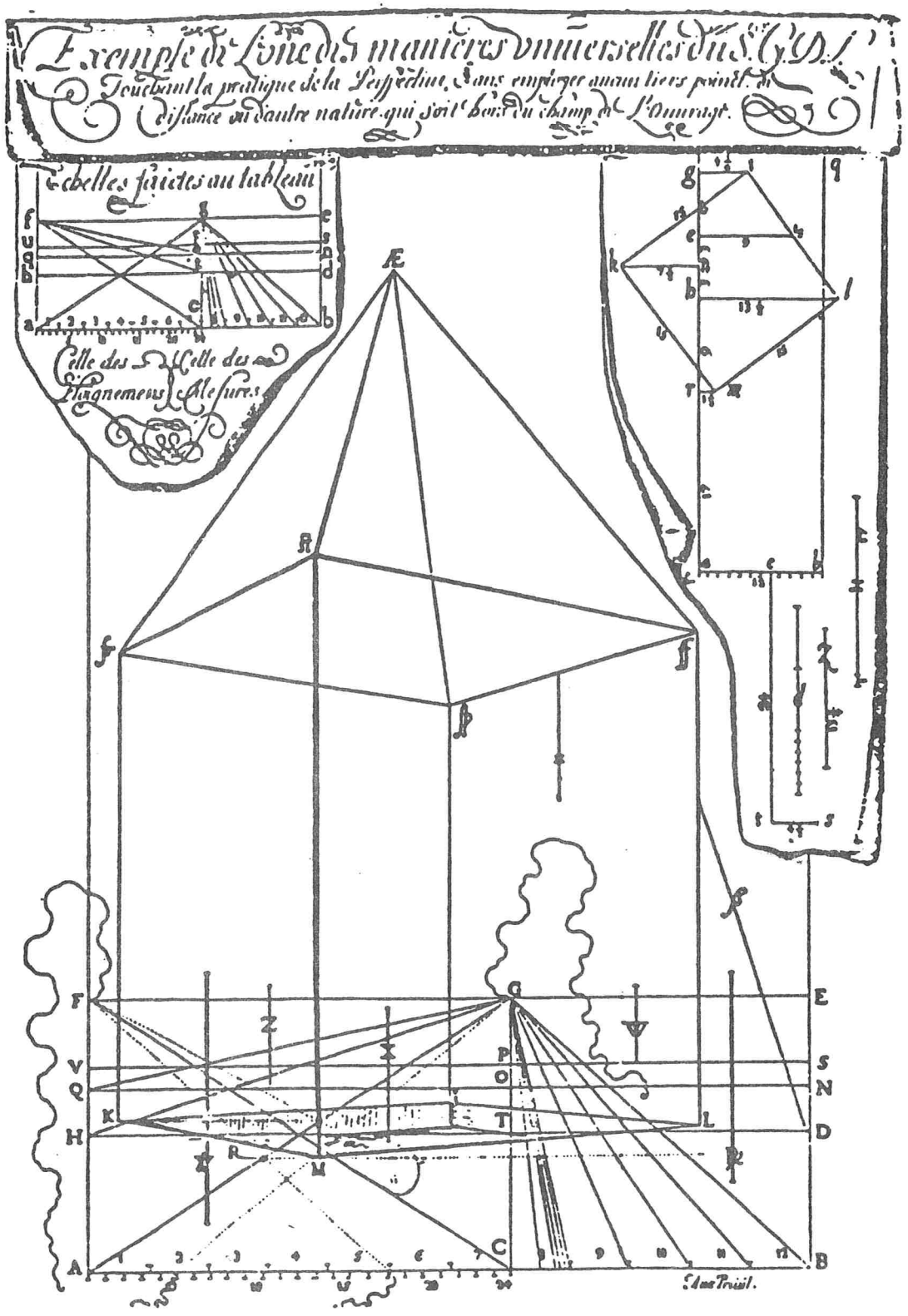

Exemple de l'une des manieres universelles du S.G.D.L.
Echelles faictes au tableau
Celle des Eloignemens
Celle des Mesures
Æ
R
f
g
k
l
F
E
V
S
Q
N
K
T
L
H
D
M
C
A
B
P
O
Z

fig 4

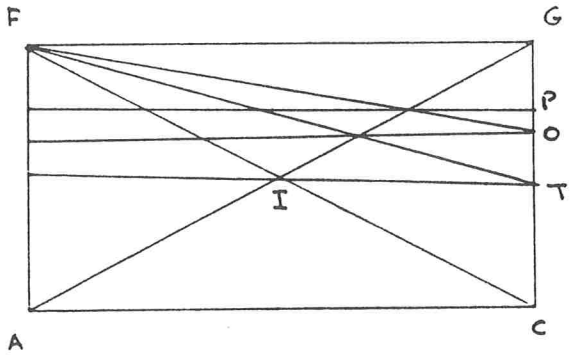


fig 5

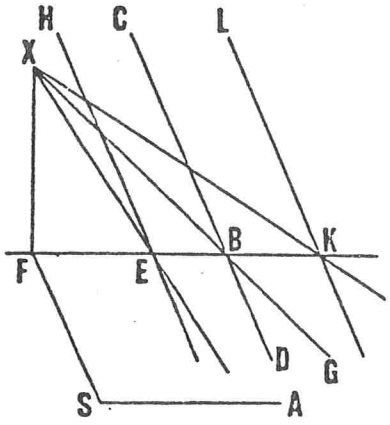


fig 6

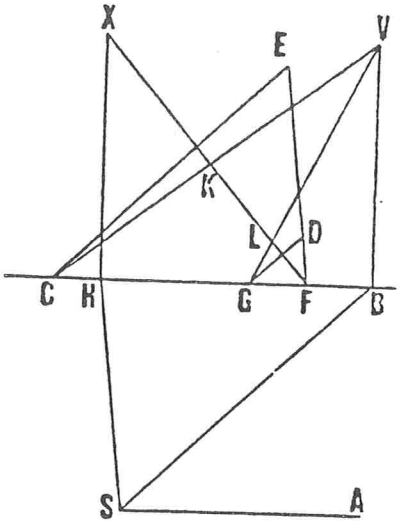


fig 7

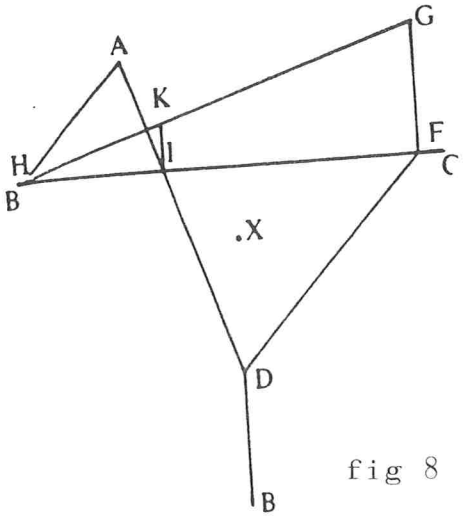


fig 8

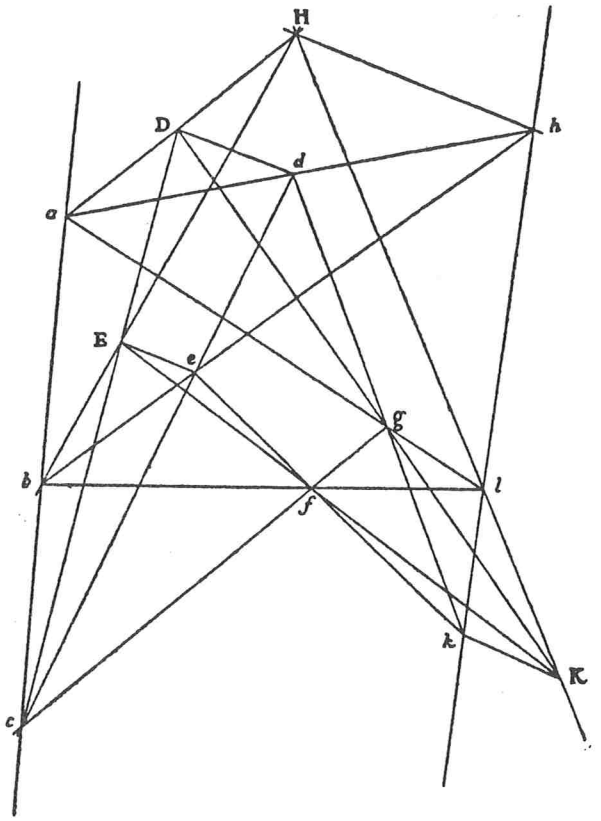


fig 9

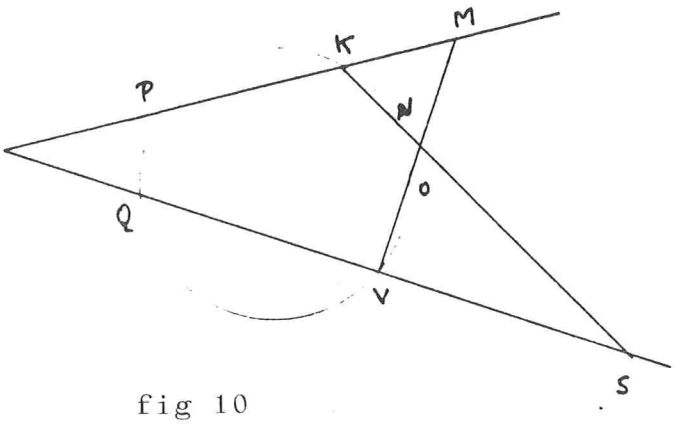


fig 10

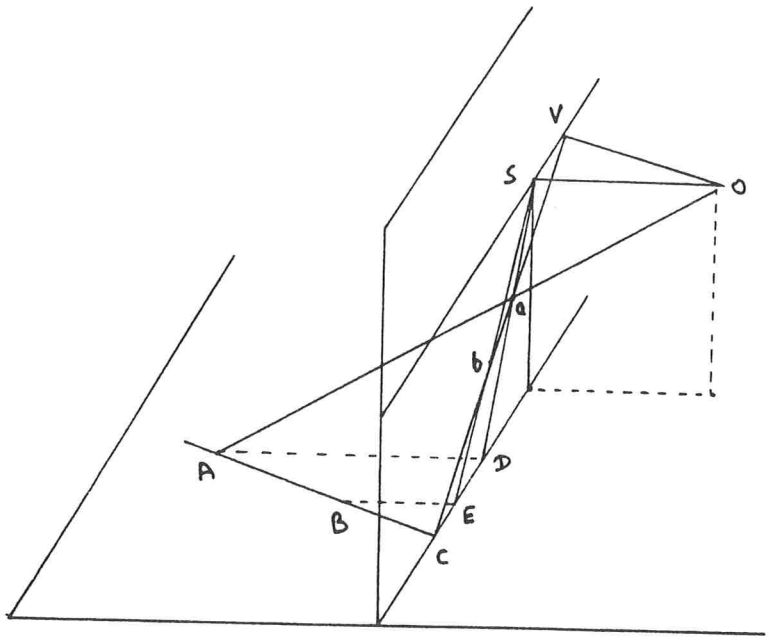


fig 11

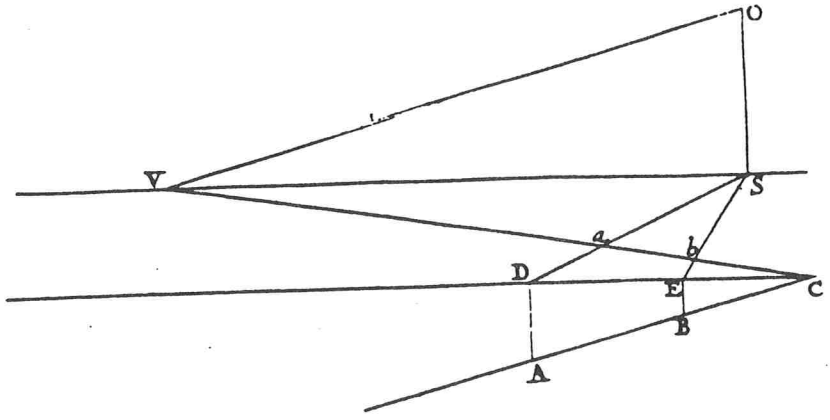


fig 12

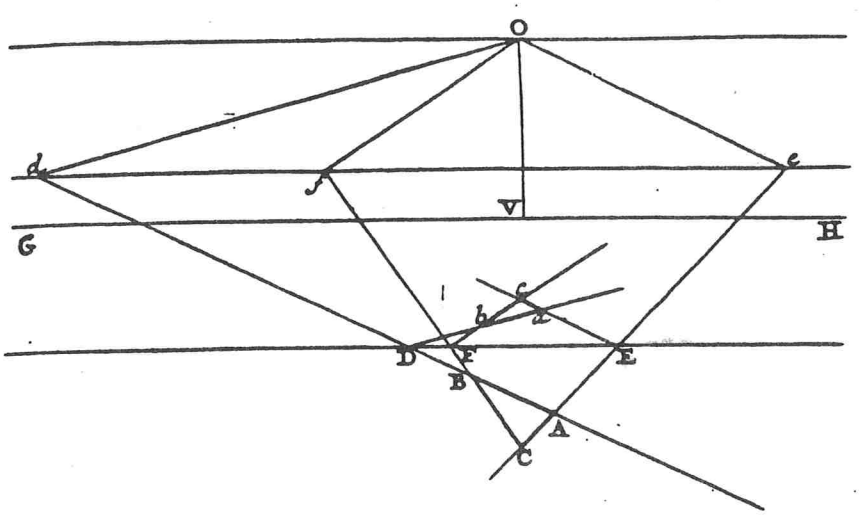


fig 13

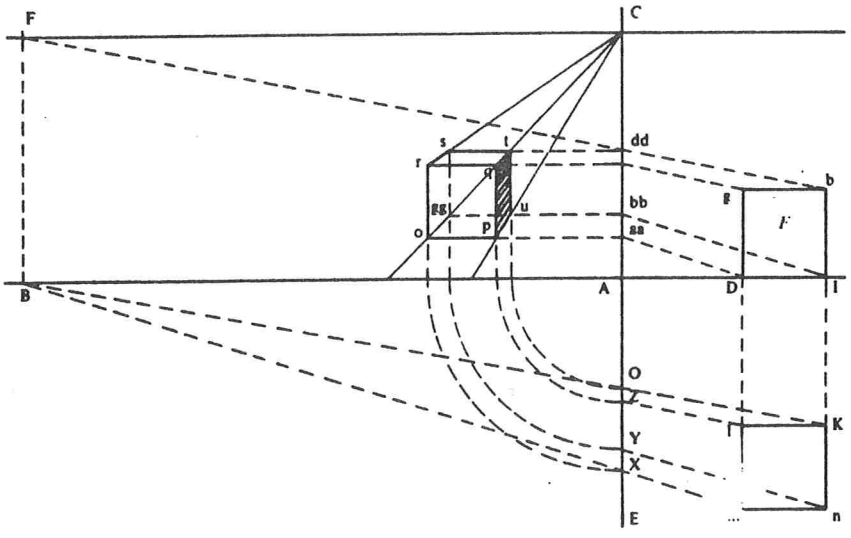


fig 14

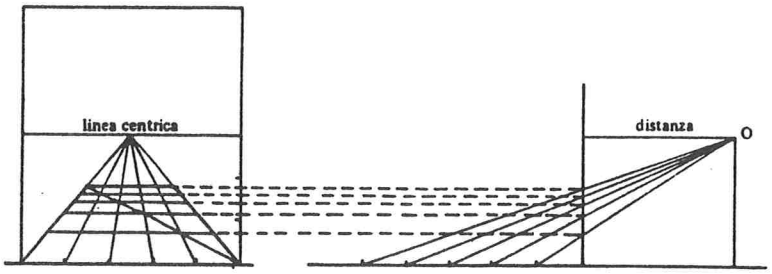


fig 15

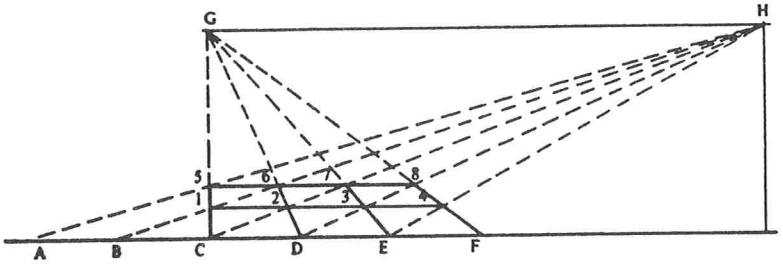


fig 16

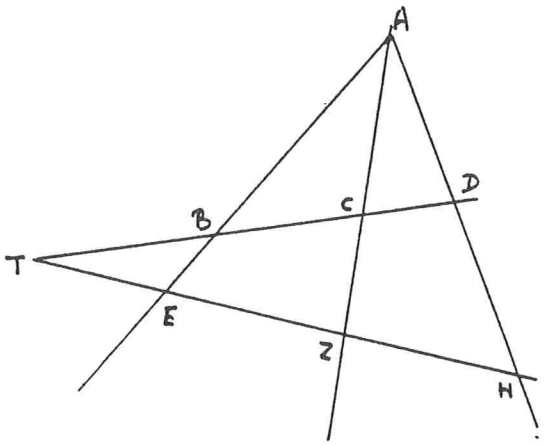


fig 17

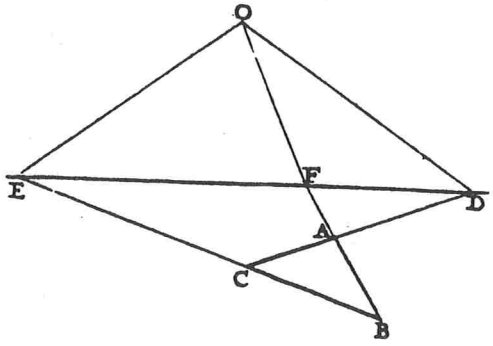


fig 18

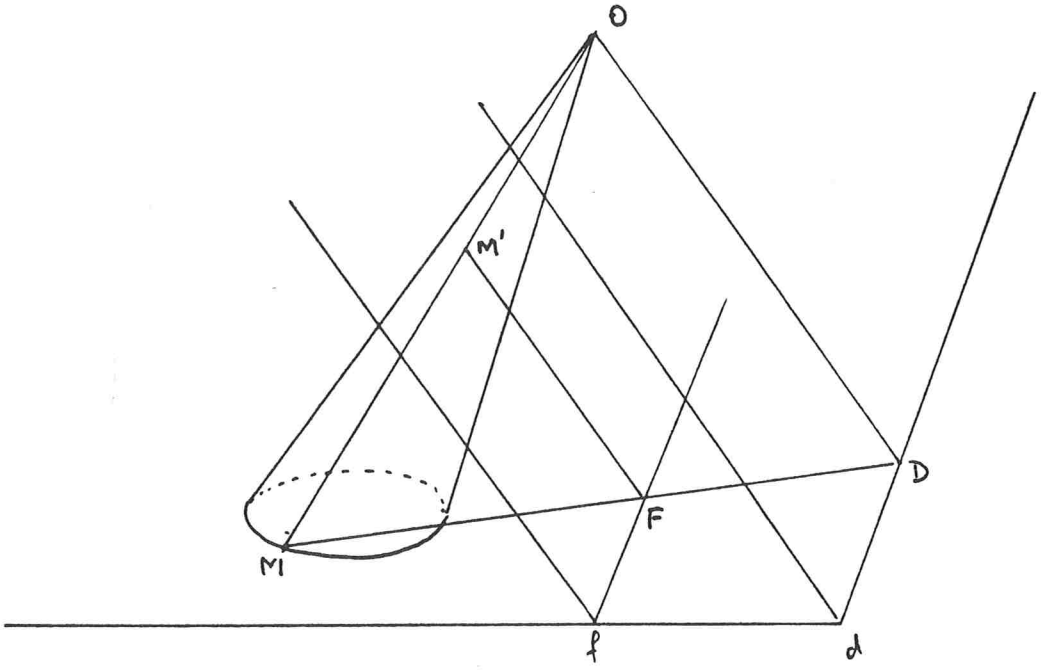


fig 19

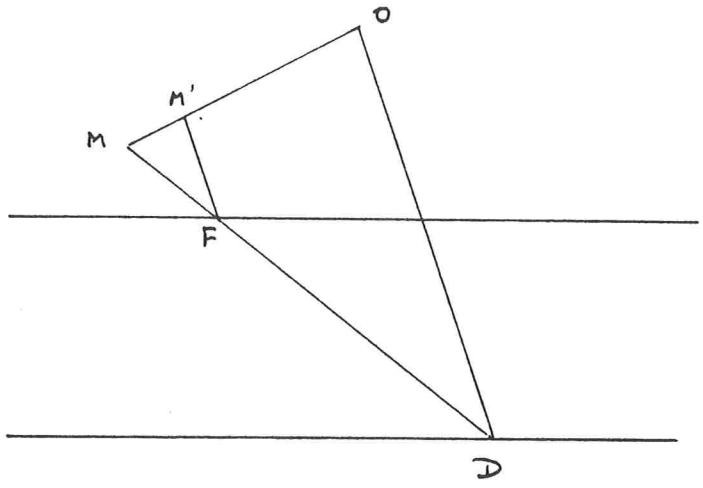


fig 20

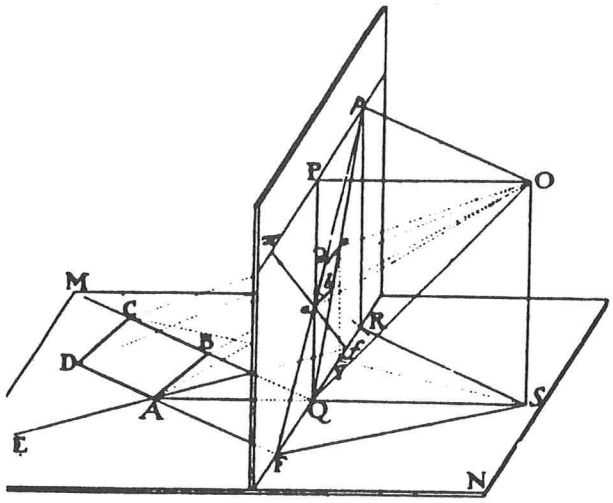


fig 21

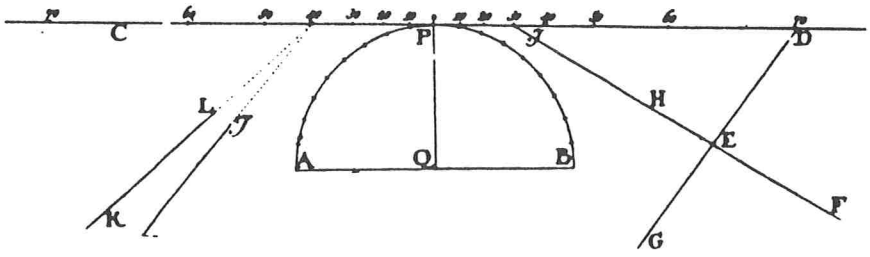


fig 22

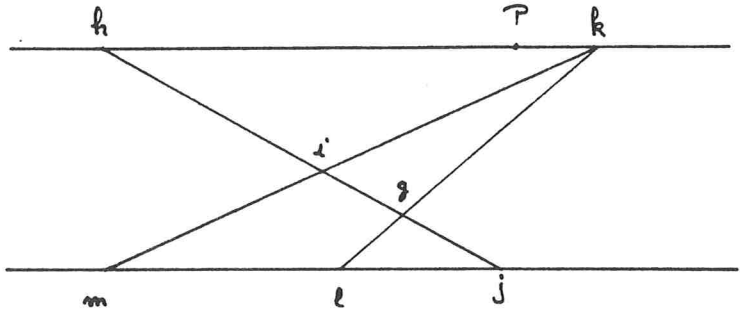


fig 23

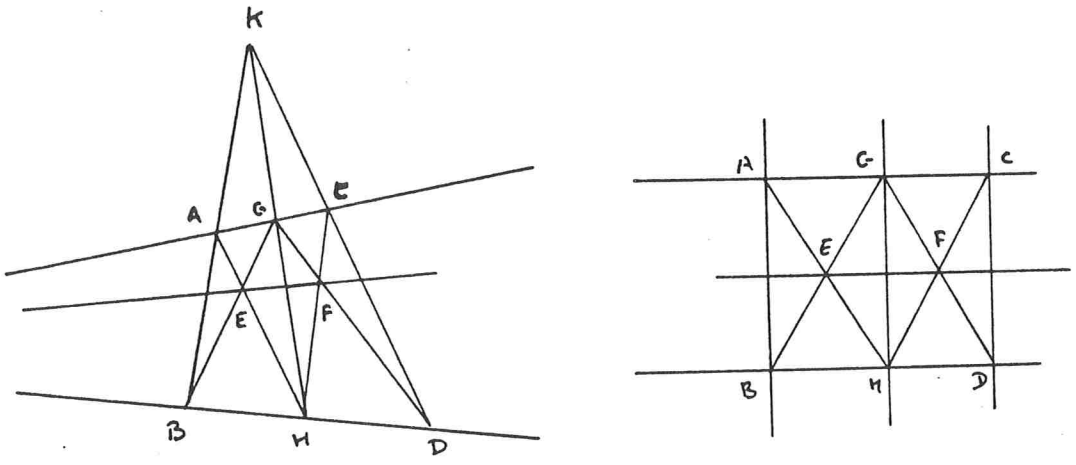


fig 24

Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

L'INFINI EN MATHEMATIQUES
Une question de l'Académie de Berlin pour l'année 1784

Jean-Pierre FRIEDELMEYER
IREM de Strasbourg

Les dernières décennies ont connu de nombreux changements dans les programmes d'enseignement des mathématiques, à tous les niveaux. Ces changements sont compréhensibles et nécessaires, adaptant l'enseignement aux grandes évolutions de la science et de la société qui ont marqué le monde d'après la seconde guerre mondiale. Ils peuvent cependant révéler aussi d'autres symptômes, liés à des difficultés d'ordre épistémologique ou pédagogique. Exemplaire de ce point de vue me paraît être l'évolution des programmes d'enseignement qui concernent les premières notions d'analyse en classe de lycée.

Les modifications les plus frappantes à première vue(1) ne sont pas spécifiques à l'analyse mais concernent tout le programme : c'est l'apparition au milieu des années 60 du discours formaliste, sous l'influence du groupe BOURBAKI (aussi appelé "mathématiques modernes"). Celui-ci se limite d'abord timidement à l'introduction de quelques termes de vocabulaire et de notions de logique (1966) pour exploser littéralement en 1970 dans la présentation axiomatique de la géométrie. A la lecture des programmes, l'analyse paraît relativement épargnée ; mais dans la pratique, la plupart des manuels utilisent un langage très formalisé et abstrait pour les notions de différentielle et de limite, avec force quantificateurs, ε et valeurs absolues. Et puis viens le reflux, à partir des années 80, avec le rejet des "maths modernes" remplacé par l'invasion des "nouvelles technologies" : calculatrices et ordinateurs.

Le second phénomène marquant de l'évolution des programmes concerne alors plus spécifiquement l'analyse où l'on voit apparaître à partir de 1982 l'étude des suites numériques et une pratique par inégalités et approximations ou encadrements ; en même temps disparaît le formalisme qui est remplacé par la description, l'expérimentation, l'observation ; la notion de limite est réduite à un **langage des limites**. Tout ceci est bien évidemment lié étroitement à la possibilité d'utiliser en classe des calculatrices de plus en plus performantes.

(1) *On trouvera en annexe ces programmes d'analyse pour les années 1945 (où elle est encore qualifiée d'algèbre) 1961, 1966, 1970, 1982, 1985*

Mais ces deux phénomènes : formalisation et utilisation de calculatrices, pour important qu'ils soient risquent d'occulter d'autres variations dans le libellé des programmes, reflétant une difficulté réelle pour définir le contenu et les méthodes d'un premier enseignement de l'analyse. Plus exactement, ces deux phénomènes ne sont, chacun à sa manière, qu'une tentative de résolution de cette difficulté. Comment comprendre, sinon, les faits caractéristiques suivants :

— jusqu'en 1966 l'analyse (longtemps encore appelée algèbre) se réduit à la notion de dérivée pour le calcul des tangentes ou l'interprétation cinématique
— la continuité apparaît à ce moment là, pour disparaître à nouveau en 1985
— la notion différentielle n'est mentionnée qu'une fois en 1966
— les développements limités (d'ordre 0 ou 1) ont une existence éphémère entre 1982 et 1985
— la notion de limite reçoit les traitements les plus divers pour finir en simple langage :

"Après observation des suites de terme général $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2}$, $\frac{1}{\sqrt{n}}$, $\frac{1}{b^n}$, **on dit** que ces suites tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$). Le **sens** est totalement évacué, et les mathématiques donnent l'impression de devenir une science expérimentale.

Que ce soit comme élève, ou que ce soit comme professeur, j'ai eu l'occasion d'expérimenter tous ces changements. Cela procure un grand sentiment d'inconfort mais aussi un certain sentiment de liberté par rapport aux directives officielles. Inconfort, car comment concilier ces changements de programmes avec l'idée d'une mathématique science exacte par excellence ? Liberté, parce que s'il y a tant de variations au fil des années dans les instructions officielles, c'est que chacune isolément n'a pas ce caractère de vérité absolue et péremptoire, à suivre à la lettre, que l'on voudrait quelquefois leur attribuer. Seulement ces deux sentiments : inconfort et liberté (qui, au fond vont toujours de pair également dans la vie de tous les jours) supposent que l'on mène sa propre réflexion sur la question[1].

Mais comment mener à bien cette réflexion ? M'intéressant à l'histoire des mathématiques, outre la satisfaction d'une curiosité intellectuelle, j'y ai souvent trouvé un support pédagogique pour l'enseignement, en même temps qu'une meilleure compréhension des difficultés de mes élèves. Je me suis donc tourné vers l'histoire du calcul infinitésimal : quelle ne fut pas ma surprise d'y retrouver les mêmes incertitudes, des évolutions comparables, voire le même in-

(1) *N'est-il pas significatif, à cet égard, que le libellé du programme augmente d'année en année en nombre de pages passant de une page et demi en 1945 à plus de dix pages en 1985 (programme plus commentaires) ?*

confort en ce qui concerne les façons d'introduire ce nouveau calcul, d'en définir les bases. Ainsi LAGRANGE, après avoir passé en revue les diverses manières élaborées par ses prédecesseurs pour fonder le calcul infinitésimal, est amené à dire ceci (Introduction à la "Théorie des fonctions analytiques" 1797). [1]

"Ces variations dans la manière d'établir et de présenter les principes du Calcul différentiel, et même dans la dénomination de ce Calcul, montrent, ce me semble, qu'on n'en avait pas saisi la véritable théorie, quoiqu'on eût trouvé d'abord les règles les plus simples et les plus commodes pour le mécanisme des opérations".

Et de proposer lui-même de "nouveaux principes" qui hélas se révéleront aussi incertains que les précédents.

Ne peut-on dire de même que les grandes variations dans la manière d'introduire l'enseignement de l'analyse au lycée montrent qu'on n'a pas vraiment trouvé la bonne approche, et que la difficulté à trouver celle-ci tient peut être à la théorie même que l'on veut enseigner ? Autrement dit, cerner les difficultés rencontrées par les mathématiciens du 18e siècle dans la compréhension et la fondation du calcul différentiel nous aidera peut être

1° à mieux cerner les difficultés de nos élèves devant la même question
2° à trouver des idées et des approches qui tiennent compte de ces difficultés, puisque les mathématiciens eux, ont réussi en fin de compte à les résoudre.

Quelles sont donc ces difficultés, rencontrées par les mathématiciens du 18e siècle, au sujet du Calcul Différentiel ? On a dit quelquefois (voir par exemple Moritz CANTOR) [2] que les créateurs du calcul infinitésimal s'étaient plus préoccupés de développer cette nouvelle théorie plutôt que d'en asseoir les fondements. En réalité le souci de rigueur était présent, il suffit pour s'en convaincre de regarder le nombre de textes qui s'en préoccupent et que nous aurons l'occasion d'étudier. Mais ce sont les critères de la rigueur qui étaient inadaptés. La référence, l'idéal de la rigueur était resté ce qu'on appelait alors **le modèle des Anciens**. Or ce modèle, élaboré par EUCLIDE et ARCHIMEDE essentiellement, concernait presque uniquement la géométrie. Et le vocabulaire comme les concepts nouveaux de l'analyse restaient englués d'images et de références géométriques. On parlait de grandeurs (réelles ou imaginaires), de raisons etc... Les mathématiciens eux-mêmes étaient qualifiés de **géomètres**, alors qu'ils ne faisaient plus guère de géométrie(1), et EULER appelait l'analyse : **géométrie sublime**. C'est donc d'abord cette inadéquation entre un nouvel outil scientifique extrêmement performant, et un modèle de rigueur parfait mais étranger à ce nouvel outil qui va se traduire dans une crise des fondements. On y verra s'exprimer des thèses aussi contradictoires que va-

(1) Plus précisément ils faisaient de la géométrie différentielle.

riées concernant le statut de ces nouveaux objets du calcul, tellement efficaces mais tellement insaisissables que sont les infiniment -petits et les infiniment-grands.
Cette crise trouvera son expression ultime dans une question mise à prix en 1784 par l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres : [3]

La classe de Mathématique propose la question pour le Prix qui sera décerné en 1786.

L'utilité qu'on retire des Mathématiques, l'estime qu'on a pour elles, et l'honorable dénomination de *Sciences exactes* par excellence qu'on leur donne à juste titre, sont dues à la clarté de leurs principes, à la rigueur de leurs démonstrations, et à la précision de leurs théorèmes.

Pour assurer à cette belle partie de nos connaissances la continuation de ces précieux avantages, on demande **une théorie claire et précise de ce qu'on appelle Infini en Mathématique.**

On sait que la haute Géométrie fait un usage continuel des infiniment grands et des infiniment petits. Cependant les Géomètres, et mêmes les Analystes anciens, ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini ; et de grands Analystes modernes avouent que les **termes grandeur infinie** sont contradictoires.

L'académie souhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire, et qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être susbtitué à l'Infini, sans rendre trop difficiles, ou trop longues, les recherches qu'on expédie par ce moyen. On exige que cette matière soit traitée avec toute la généralité, et avec toute la rigueur, la clarté et la simplicité possibles.

Chaque expression, chaque phrase de ce texte mériterait une explication, un développement, tant il résume bien la situation et la problématique. Je vous propose d'étudier plus particulièrement

1. Comment "la haute géométrie" (faisait) un usage continuel des infiniment petits et des infiniment grands" au 18e siècle et les problèmes que cet usage soulevait.
2. Pourquoi et comment "les Analystes anciens ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini".
3. Quelles réponses ont été apportées à cette question et quel "principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique" a-t-on tenté de "substituer à l'Infini" ?

Mais d'abord quelques mots sur le contexte historique et sur l'auteur présumé de cette question. Nous sommes en 1784. Le calcul différentiel avait connu un essort considérable depuis sa création par Newton et Leibniz et il avait soulevé un enthousiasme extraordinaire qui éclate par exemple dans cette "Préface des Elements de la Géométrie de l'Infini" de Fontenelle, dès 1727. [4]

"Dès que le calcul différentiel eut paru, BERNOULLI, le marquis de L'HôPITAL, VARIGNON, tous les grands géomètres entrèrent avec ardeur dans les routes qui venaient d'être ouvertes, et y marchèrent à pas de géant. L'infini éleva tout à une sublimité, et en même temps amena tout à une facilité, dont on n'eût pas osé auparavant concevoir l'espérance ; et c'est là l'époque d'une révolution presque totale arrivée dans la géométrie".

Pas de géant, dont l'oeuvre d'EULER est le meilleur exemple, chez qui l'on assiste à une véritable boulimie de création et dont l'édition des oeuvres complètes ne comprend pas moins de 70 gros volumes, sans compter la correspondance ! Mais en 1784 EULER est mort depuis un an déjà, ainsi que D'ALEMBERT. GAUSS est encore enfant (1777), CAUCHY n'est pas né (1789). La grande figure mathématique qui domine cette période est LAGRANGE qui se trouvait à Berlin depuis 1766, succédant à EULER, et c'est très certainement lui qui a posé la question de l'Académie.

Dès le début de sa brillante carrière, LAGRANGE s'était préoccupé des fondements du calcul infinitésimal, et il n'abandonnera jamais cet objet de réflexion jusqu'à la fin de sa vie, sans d'ailleurs trouver une solution satisfaisante. Alors qu'il essayait au début de défendre la rigueur du Calcul infinitésimal tel qu'il était pratiqué, il en vint plus tard à l'idée de remplacer ce calcul par un autre, plus algébrique et "dégagé de toute considération d'infiniment petits, d'évanouisssans, de limite, de fluxions et réduit à l'analyse algébrique des quantités finies".
Le fait qu'il ait posé la question de l'Académie de Berlin en 1784, prouve assez que sa nouvelle solution ne le satisfaisait guère. Mais aussi, quoique l'Académie ait couronné un des mémoires présentés, la méthode que celui-ci proposait le satisfaisait si peu qu'il est revenu bientôt à son ancienne idée, en publiant en 1797 sa **Théorie des fonctions analytiques.**
Voyons donc

L'usage des infiniment grands et des infiniment petits dans la haute Géométrie

Les infiniment petits

Mettons-nous d'emblée dans le bain du calcul infinitésimal naissant en rapportant la façon dont BARROW (1630-1677) calcule la pente de la tangente en un point du folium de DESCARTES d'équation $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.(cf. [5])

Soit M d'abscisse x, d'ordonnée y
N d'abscisse x + e, d'ordonnée y + a
Ces nombres vérifient donc
en M : $x^3 + y^3 - 3xy = 0$
en N : $(x + e)^3 + (y + a)^3 - 3(x + e)(y + a) = 0$
d'où par différence :
$3x^2e + 3e^2x + 3y^2a + 3ya^2 + a^3 - 3xa - 3ye - 3ae = 0$
ou encore, en négligeant e^2 "petit" par rapport à e
et pour des raisons analogues les termes en e^3, a^2, a^3, ae

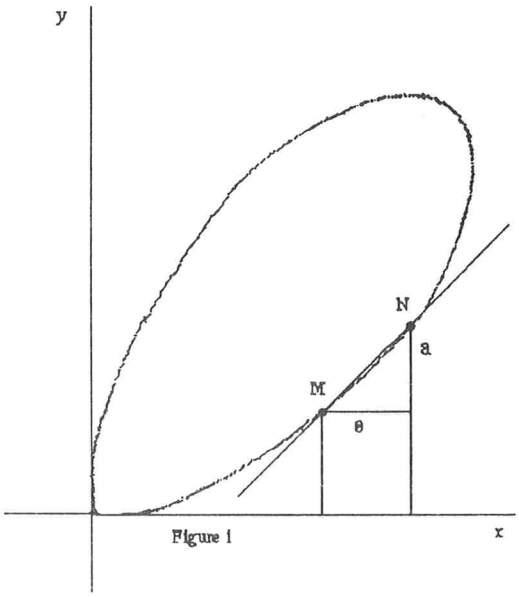


Figure 1

$3x^2e + 3y^2a - 3xa - 3ye = 0$ soit $m = \frac{a}{e} = \frac{y - x^2}{y^2 - x}$

résultat qui correspond bien à la pente de la tangente en M, comme on peut le vérifier en remarquant que

$$m = \frac{-\frac{\delta f}{\delta x}}{\frac{\delta f}{dy}} \quad \text{avec} \quad f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

en notation moderne.

Les savants des 17e et 18e siècles seront fascinés par une méthode aussi simple et expéditive. Eduqués aux longues et pénibles méthodes d'EUCLIDE et D'ARCHIMEDE, ils ne pouvaient manquer d'être éblouis par une telle efficacité, là où la géométrie des Anciens n'arrivait à traiter, difficilement, que quelques situations particulières.

"Ce que nous avons des Anciens sur ces matières- dit le marquis de L'Hôpital- principalement d'ARCHIMEDE, est assurément digne d'admiration. Mais outre qu'ils n'ont touché qu'à fort peu de courbes, qu'ils n'y ont même touché que légèrement ; ce ne sont presque partout que propositions particulières et sans ordre, qui ne font apercevoir aucune méthode régulière et suivie".

sous-entendu : alors que la méthode de BARROW, avec les améliorations apportées par LEIBNIZ s'applique sans difficulté aucune à n'importe quelle courbe

"M. BARROW n'en demeura pas là, il inventa aussi une espèce de calcul propre à cette Méthode ; mais il lui fallait (...) ôter les fractions et faire évanouir tous les signes radicaux pour s'en servir.

Au défaut de ce calcul est survenu celui du célèbre M. LEIBNIZ ; et ce savant Géomètre a commencé où M. BARROW et les autres avaient fini. Son calcul l'a mené dans des pays jusqu'ici inconnus ; et il y a fait des découvertes qui font l'étonnement des plus habiles Mathématiciens de l'Europe. Messieurs BERNOUILLI ont été les premiers qui se sont aperçus de la beauté de ce calcul : ils l'ont porté à un point qui les a mis en état de surmonter des difficultés qu'on n'aurait jamais osé tenter auparavant".[6 préface]

Reste que la méthode des Anciens était rigoureusement fondée, alors que ce calcul, pour efficace qu'il soit, laisse planer un doute sur sa légitimité, doute que -il est vrai- le Marquis de L'Hôpital balaye en quelques phrases. Plus précisément, dans la tradition de l'époque il fait deux **demandes ou suppositions**, au début de son Traité :

"Demande ou Supposition

On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pour l'autre deux quantités qui ne diffèrent entr'elles que d'une quantité infiniment petite : ou (ce qui est la même chose qu'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une autre quantité infiniment moindre qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même. On demande par exemple qu'on puisse prendre Ap pour AP, pm pour PM, l'espace Apm pour l'espace APM, le petit espace MPpm pour le petit rectangle MPpR, le petit secteur AMm pour le petit triangle AMS, l'angle pAm pour l'angle PAM, et c.

Demande ou Suppostion

On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité de lignes droites, chacune infiniment petite : ou (ce qui est la même chose) comme un poligône d'un nombre infini de côtés, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne. On demande par exemple que la portion de courbe Mm et l'arc de cercle MS puissent être considérés comme des lignes droites à cause de leur infinie petitesse, en sorte que le petit triangle mSM puisse être censé rectiligne.

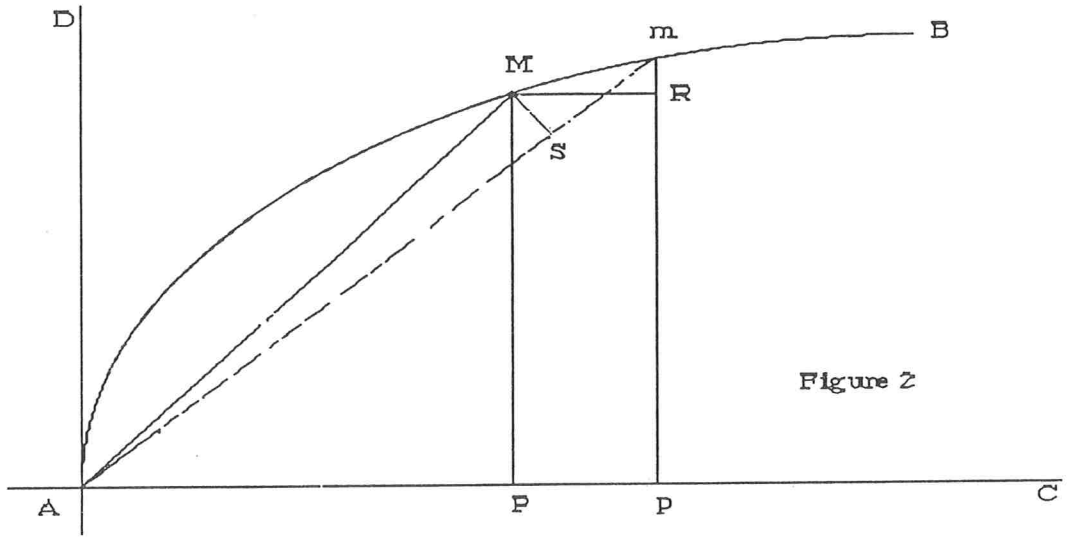


Figure 2

Et de justifier ces demandes :

"D'ailleurs les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commencement de ce Traité, et sur lesquelles seules il est appuyé, me paraissent si évidentes, que je ne crois pas qu'elles puissent laisser aucun doute dans l'esprit des lecteurs attentifs. Je les aurais même pû démontrer facilement à la manière des Anciens, si je ne me fusse proposé d'être court sur les choses qui sont déjà connues, et de m'attacher principalement à celles qui sont nouvelles".

La notion de quantité infiniment petite est considérée dans ce contexte comme notion première, intuitivement évidente, et son caractère flou, voire contradictoire, ne paraît nullement émouvoir le Marquis de L'HOPITAL qui donne les définition suivantes :

Définition

"La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, est en appelée **Différence**".

Ainsi sur la figure 2, "Pp sera la différence de AP, Rm celle de PM, Sm celle de AM et Mm celle del'arc AM. De même le petit triangle MAm qui a pour base l'arc Mm, sera la différence du segment AM ; et le petit espace MPpm, celle de l'espace compris par les droites AP, PM, et par l'arc AM".[6, p2]

Plus loin (section IV intitulée : "usage du calcul des différences pour trouver les points d'inflexion et de rebroussement". [6, p 55]

"La portion infiniment petite dont la différence d'une qualité variable augmente ou diminue continuellement, est appelée la **différence de la différence** de cette quantité, ou bien la **différence seconde**. Ainsi si l'on imagine une troisième appliquée nq infiniment proche de la seconde mp, et qu'on mène mS parallèle à AB, et mH parallèle à RS ; on appellera Hn **la différence de la différence** Rm, ou bien **la différence seconde** de PM".

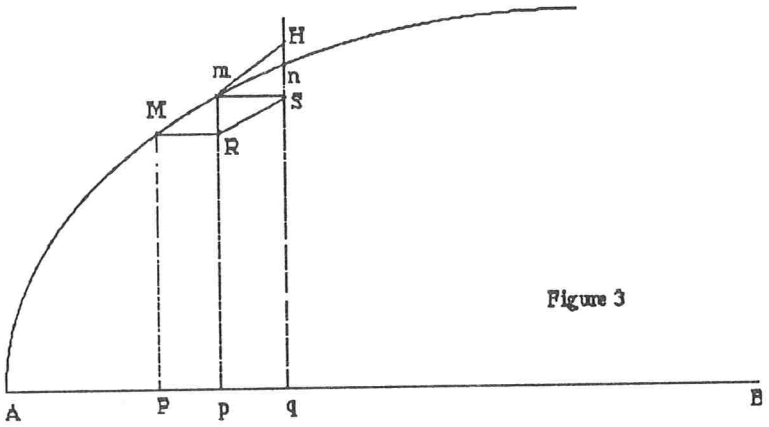


Figure 3

et cette remarque

"On doit bien remarquer, qu'il y a différents ordres d'infiniment petits : que Rm par exemple, est infiniment petite par rapport à PM, et infiniment grande par rapport à Hn ; de même que l'espace MPpm est infiniment petit par rapport à l'espace APM, et infiniment grand par rapport au triangle MRm".

C'est avec cela que la Marquis de L'HÔPITAL va traiter l'enssemble des problèmes de géométrie différentielle imaginables pour l'époque : "De là naissent une infinité de découvertes surprenantes par rapport aux tangentes tant courbes que droites, aux questions **De maximis et minimis**, aux points d'inflexion et de rebroussement des courbes, aux développées, aux caustiques par réflexion ou par réfraction, etc..." [6, préface]

Les infiniment grands

Voyons de même comment EULER jongle avec les infiniment grands (et petits) dans son "**Introduction à l'analyse infinitésimale**" (1748) [7]

Comme i est un nombre infiniment grand ; il s'ensuit que $\frac{i-1}{i} = 1$; car il est évident que plus le nombre qu'on substituera à i sera grand, plus la valeur de la fraction $\frac{i-1}{i}$ approchera de l'unité ;

nombre qu'on substituera à i sera grand, plus la valeur de la fraction $\frac{i-1}{i}$ approchera de l'unité ;

Par une raison semblable ; $\frac{i-2}{i} = 1$; $\frac{i-3}{i} = 1$ & c.

Concluons de là que : $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$; $\frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$; ainsi des autres.

Alors : $\cos. n z = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^n + (\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z)^n}{2}$ &

$$\sin. n z = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^n - (\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Donc en développant ces binômes en séries, nous aurons

$$\cos. n z = (\cos. z)^n - \frac{n.(n-1)}{1.2}(\cos. z)^{n-2}(\sin z)^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(\cos. z)^{n-4}(\sin z)^2 +$$

$$\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(\cos. z)^{n-4}(\sin. z)^4 \ldots$$

$$\frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6}(\cos. z)^{n-6}(\sin. z)^6 + \& c.$$

$$\& \sin. nz = \frac{n}{1}(\cos. z)^{n-1} \sin. z - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.2.3}(\cos. z)^{n-2}$$

$$(\sin. z)^3 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5.}(\cos. z)^{n-5}(\sin. z)^5 - \&c.$$

Soit z un arc infiniment petit, alors sin. z = z, & cos. z = 1 ; soit en même temps n un nombre infiniment grand, pour que l'arc nz soit d'une grandeur finie, pour que nz, par exemple, = v ;

à cause de $\sin. z = z = \frac{v}{n}$, on aura

$$\cos. v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \& c. \&$$

Soit z un arc infiniment petit, alors sin.z = z, & cos. z = 1 ; soit en même temps n un nombre infiniment grand, pour que l'arc nz soit d'une grandeur finie, pour que nz, par exemple, = v ; à cause de

$$\text{sin. } z = z = \frac{v}{n}, \text{ on aura :}$$

$$\text{cos. } v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ \& c. \&}$$

$$\text{sin. } v = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ \& c.}$$

Ainsi l'arc v étant donné, on pourra, à l'aide de ces séries, trouver son sinus et son cosinus."

Comme pour la notion d'infiniment petit chez L'HOPITAL, on chercherait en vain chez EULER une définition d'un nombre infiniment grand. Pour lui, il n'y a là aucune difficulté, et la meilleure preuve en est les extraordinaires relations numériques qu'il met en évidence, lesquelles sont incontestablement vraies, et représentent donc une sorte de preuve a posteriori de la légitimité de la méthode.

On pourrait multiplier les exemples, mais les deux qui sont présentés ici doivent suffire à illustrer aussi bien les méthodes utilisées, que les concepts sur lesquels elles reposent. En particulier, pour ne pas allonger encore cette étude, nous avons laissé de côté le calcul des fluxions de Newton, qui présente encore une autre approche du Calcul infinitésimal. Cette mise à l'écart de Newton ne devrait pas trop porter à conséquence, car peu à peu, au 18e siècle, le calcul des fluxions sera rejeté par les mathématiciens du Continent au bénéfice du calcul différentiel de Leibniz, et n'y aura donc guère d'influence sur son évolution.

Les critiques apportées à l'Analyse des infiniment petits et grands

Les premières critiques viendront très vite, presqu'en même temps que les première publications. Déjà le 23 février 1697 Philippe LA HIRE avait donné à l'Académie un petit mémoire intitulé : "**Remarque sur l'usage qu'on doit faire de quelques suppositions dans la méthode des infiniment petits**", critiquant principalement le bien-fondé, dans un cercle, de l'assimilation de la corde et de l'arc. Mais les principales objections seront élevées par Michel ROLLE (1652-1719) dans un écrit "**contre les suppositions fondamentales de la géométrie des infiniment petits**" lu à partir du 17 juillet 1700 à l'Académie royale des Sciences de Paris(1).

(1) *L'essentiel de cette partie concernant les critiques apportées au calcul différentiel s'inspire d'un article de Michel BLAY. Revue d'Histoire des Sciences n° 39-3 1986 [8].*

La critique de ROLLE va s'appuyer sur deux types d'arguments :

— Les uns s'interrogeant sur la cohérence et la validité des principes et suppositions à la base du nouveau calcul.
— Les autres cherchant à montrer que ce calcul conduit à des erreurs.

Le premier type concerne essentiellement les différentes définitions et surtout "**demandes**" que le Marquis de L'HOPITAL a mis comme fondement à son "Analyse des infiniment petits" et que ROLLE regroupe en trois difficultés :

Difficulté 1 : "Si en géométrie il y a des infiniment grands, infinis les uns des autres ; et des infiniment petits, infinis les uns des autres"

Difficulté 2 : "Si une grandeur plus ou moins sa différentielle peut être prise pour égale à cette même grandeur"

Difficulté 3 : "Si les différentielles sont des zéros absolus".

Car alors, les différentielles secondes sont elles-mêmes infiniment petites en comparaison des différentielles premières, de sorte que voilà des grandeurs : les différentielles, qu'on peut négliger dans des égalités comme si elles étaient assimilées à zéro, alors qu'elles doivent être considérées comme infiniment grandes à l'égard de différentielles d'ordre supérieur.

Sans aller très loin dans son analyse, ROLLE met ici le doigt sur la difficulté véritable du calcul différentiel naissant : l'impossibilité de donner un statut logique et rigoureux à ces objets insaisissables que sont les différentielles, tant qu'on les considèrera dans un cadre et un vocabulaire géométrique, comme "portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement". De tels objets, dira plus tard CARNOT [9] "comme tout ce qui est extrême, échappe(nt) aux sens et à l'imagination, (et) on n'a jamais pu se former qu'une idée imparfaite de ces éléments, **espèces d'êtres singuliers, qui tantôt jouent le rôle de véritables quantités, tantôt doivent être traités comme absolument nuls, et semblent, par leurs propriétés équivoques, tenir le milieu entre la grandeur et le zéro, entre l'existence et le néant**".

Plus explicites apparemment seront les exemples que donnera ROLLE pour montrer que le calcul différentiel conduit à des erreurs. Il considère par exemple "la courbe géométrique DD qui se forme par le moyen de l'égalité B sur un axe AP", (figure 4).

$$(B): \quad y - b = \frac{(x^2 - 2ax + a^2 - b^2)^{2/3}}{a^{1/3}}$$

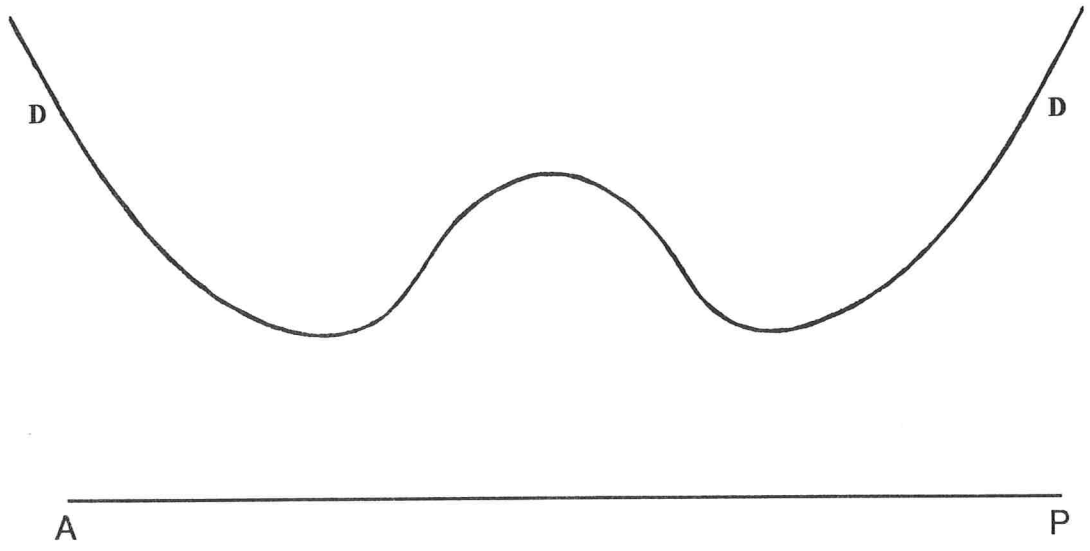


Figure 4

Si l'on veut calculer les maxima et minima de cette courbe par la méthode des infiniment petits,

"la méthode veut que l'on prenne la différence de l'égalité proposée, et si l'on suit les règles de l'analyse des infinis pour prendre cette différence, on la trouvera de même qu'on la voit en C"

$$(C) \qquad dy = \frac{4x\,dx - 4a\,dx}{3\sqrt[3]{ax^2 - 2ax^2 + a^3 - ab^2}}$$

"Cela posé, la méthode veut que la valeur de dy soit égale à zéro, et l'on suppose dans cette méthode que cela arriverait toujours si l'on détruisait le numérateur".

Mais en procédant ainsi, on ne trouve qu'une valeur qui est x = a, là où des méthodes algébriques (1) en donnent trois. L'équation (B) peut en effet s'écrire :

(1) *ROLLE fait référence à la méthode de HUDDE, mais pour ne pas trop alourdir ce texte, nous pouvons sans dommage faire l'économie de son étude, l'exemple étant suffisamment simple pour se prêter à un calcul élémentaire.*

$$a(y - b)^3 = (x^2 - 2ax + a^2 - b^2)^2 = [b^2 - (x - a)^2]^2$$

qui donne effectivement un maximum relatif pour **x = a**.

Mais aussi

$$a(y - b)^3 = [x - (a - b)]^2 [x - (a + b)]^2 \geq 0$$

le minimum zéro étant atteint pour deux valeurs de x : **x = a - b** et **x = a + b** valeurs que l'on ne trouve pas par la méthode des différences !

VARIGNON répondra à ROLLE sur cet exemple, en expliquant que ce dernier ne prend pas la règle du calcul différentiel en entier.

"L'on aura 1° x = a en faisant dy = 0 ; et 2° x = a - b ou x = a + b en faisant dy infinie par rapport à dx, ou dx = 0.(...) Ce qui donne à la courbe cherchée la forme qu'on lui voit ici ... jusqu'aux points d'inflexion δ, δ ; au lieu que Mr. ROLLE la croit faite comme dans la Figure (4)".

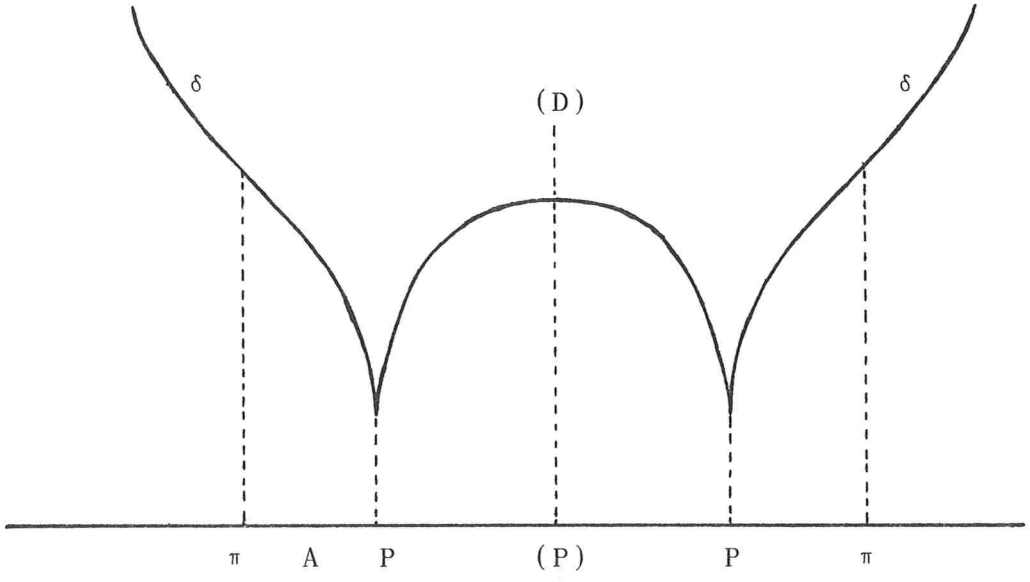


Figure 5

Et VARIGNON d'expliquer que non seulement le nouveau calcul permet bien de trouver tous les extréma, mais qu'il permet également de mieux cerner les propriétés de la courbe.

Ainsi les arguments de ROLLE ne paraîtront guère convaincants, même si les difficultés qu'il aura soulevées sont réelles. Le calcul différentiel était né, ses succès et ses découvertes incontestables, qu'importe que les fondements n'en soient pas clairs.

-"Malgré tout cela - dira Fontenelle [4] - l'infini a triomphé, et s'est emparé de toutes les hautes spéculations des géomètres. Les infinis ou infiniment petits de tous les ordres sont aujourd'hui également établis ; il n'y a plus deux partis dans l'Académie. (...)
Il faut convenir cependant que toute cette matière est environnée de ténèbres assez épaisses ; et de là vient que quelques-uns de ceux qui embrassent les idées de l'infini, ne les prennent pourtant que pour des idées de pure supposition sans réalité, dont on ne se sert que pour arriver à des solutions difficiles, qu'on abandonne dès qu'on y est arrivé, et qui ressemblent à des échafaudages qu'on abat aussitôt que l'édifice est construit. C'est là une façon de penser mitigée, qui rassure un peu contre la frayeur que l'infini cause toujours."

C'est pourquoi, dans un second temps, n'attaquera-t-on plus les conclusions et les résultats du calcul infinitésimal, si performant, et qui va tellement plus loin que ne le permettait la méthode des Anciens. On en contestera seulement les principes et la démarche. Tandis que les mathématiciens avancent et explorent avec enthousiasme ce nouveau champ d'activité si fécond, les philosophes vont s'emparer du problème. En 1734 George BERKELEY publie **"l'Analyste ou Dissertation Adressée à un Mathématicien Incrédule**(1) où l'on examine si l'objet, les principes et les inférences de l'Analyse moderne sont conçus plus distinctement, ou déduits avec plus d'évidence que les Mystères de la Religion et les règles de la Foi."
Les objectifs de cette Dissertation sont d'abord d'ordre philosophique et théologique, mais ils donneront l'occasion à BERKELEY d'exprimer une vigoureuse et profonde critique des méthodes infinitésimales. Celle-ci concernera essentiellement le calcul de Newton son compatriote, mais elle s'applique aussi bien au calcul différentiel dont la similitude avec le premier ne fait pas de doute, pour le philosophe.

"Je ne discute en rien vos conclusions -dira-t-il- mais seulement votre logique et votre méthode. Comment démontrez-vous ? De quels objets vous occupez-vous et les concevez-vous clairement ? Avec quels principes progressez-vous ? Quelle en est la validité ? Et comment les mettez-vous en oeuvre ? Il faut bien rappeler que je ne m'occupe pas de la vérité de vos théorèmes, mais seulement de la manière d'y parvenir ; est-elle légitime, claire ou obscure, scientifique ou tâtonnante ?"

Reste la question d'expliquer comment, avec une démarche aussi douteuse et des principes si obscurs, on peut néanmoins arriver à des résultats exacts :
"Et comme cela peut paraître un paradoxe inexplicable que les mathématiciens puissent déduire des propositions vraies de principes faux, qu'ils soient corrects dans leurs conclusions et pourtant s'égarent dans les prémisses, j'essaierai avec un soin particuleir d'expliquer pourquoi cela peut se produire et de montrer comment l'erreur peut engendrer la vérité, bien qu'elle ne puisse engendrer la science."

La thèse de BERKELEY pour expliquer cette situation paradoxale est celle de la

(1) Il s'agissait de HALLEY qui aurait traité les dogmes religieux d'incompréhensibles et obscurs

compensation des erreurs : dans un calcul infinitésimal, le mathématicien commet en réalité deux erreurs de sens contraires qui de ce fait s'annulent. L'argumentation du philosophe serait trop longue à développer ici et son intérêt très limité, car développée seulement sur la situation très simple du calcul de la sous- tangente à une parabole. Or comme le dira LAGRANGE dans la préface à la nouvelle édition de sa **théorie des fonctions analytiques** (1813), à propos de la compensation des erreurs : "C'est ce qu'on peut faire voir aisément dans des exemples, mais dont il serait peut -être difficile de donner une démonstration générale".

Ce thème de la compensation des erreurs aura pourtant une certaine faveur tout au long du 18e siècle. LAGRANGE lui-même l'adoptera un certain temps, au début de ses travaux sur le calcul différentiel. C'est ainsi qu'il expliquera dans une note parue dans les **Miscellanae Taurinensis** (Tome II 1760-1761) [10].

*"Dans la méthode des infiniment petits (...) le calcul redresse de lui-même les fausses hypothèses que l'on s'y fait. On imagine par exemple qu'une courbe soit un polygone
d'une infinité de petits côtés, dont chacun étant prolongé devienne une tangente à la courbe. Cette supposition est réellement fausse ; car le petit côté prolongé ne peut jamais être autre chose qu'une véritable sécante ; mais l'erreur est détruite par une autre erreur qu'on introduit dans le calcul en y négligeant comme nulles des quantités, qui selon la supposition ne sont qu'infiniment petites."

Une telle explication avait visiblement l'avantage de tranquiliser les esprits de mathématiciens soucieux avant tout d'exploiter les possibilités mirifiques ouvertes par ce nouveau calcul. Elle est cependant significative du fait que, en l'espace de près de 80 ans (le premier texte fondateur du calcul différentiel de LEIBNIZ date de 1684) on a l'impression de n'avoir pratiquement pas avancé d'un pouce quant à la mise en place d'un fondement précis et cohérent de ce calcul.

Inventaire des difficultés

Les choses sont en réalité plus complexes. Certes l'efficacité du calcul infinitésimal est devenue au fil des années plus patente, et la valeur heuristique des notions d'infini qui lui sont liées ne peut être mise en doute. Néanmoins les principes et les méthodes de calcul, au fur et à mesure des progrès réalisés, vont soulever des difficultés variées et redoutables. Suivons J.L. OVAERT et J.J. SANSUC dans **Philosophie et calcul de l'infini** [11] pour en faire l'inventaire.

Difficultés intrascientifiques

* Le **langage** utilisé dans le calcul infinitésimal est essentiellement **géométrique** et **mécanique** ; le calcul porte non pas sur des nombres mais sur des grandeurs ou des rapports de grandeurs. En cela il est tributaire de la géométrie des Anciens, alors que son champ d'investigation dépasse très largement cette géométrie.

* Le **concept de fonction** disponible est trop étroit, limité aux fonctions "analytiques" composées à l'aide des opérations et des fonctions élémentaires. Paradoxalement, cet ensemble réduit de fonctions confèrera une sécurité relative aux calculs, qui sans cela auraient pu se trouver en défaut (comme cela se passera plus tard au 19e siècle avec la découverte de toutes sortes de fonctions "pathologiques").

* Les contenus du calcul infinitésimal sont difficiles à **classer et à organiser** - d'ailleurs les domaines de l'algèbre et plus encore ceux de géométrie ne sont guère séparés de celui de l'analyse.

* La manipulation des **infiniment petits d'ordre supérieur** est peu sûre, et conduit quelquefois même à des erreurs (chez Newton, chez Euler, chez Lagrange) notamment lorsqu'on néglige au cours d'un calcul des infiniment petits du même ordre que celui qu'on veut étudier.

Difficultés d'ordre pédagogique

Tant qu'une science est l'objet de recherches individuelles on peut avancer, poussé par une dynamique créatrice sans se préoccuper beaucoup de la clarté et de la rigueur des principes de bases. Or le 18e siècle verra se développer quelque chose de nouveau : la nécessité de diffuser la science. Peu encore dans les écoles en ce qui concerne du moins le nouveau

calcul, mais par l'édition de livres de plus en plus nombreux (il suffit de considérer les nombreuses éditions de l'"**Analyse des infiniment-petits**" de L'HOPITAL chaque fois enrichies de notes supplémentaires), par les échanges entre les Académies de plus en plus fréquents en Europe, par les salons. Pour enseigner une science nouvelle on est obligé d'être clair soi-même, si l'on veut que l'élève comprenne. Cette nécessité nouvelle de diffuser le savoir sera d'ailleurs une des sources majeures d'approfondissement et de résolution de la crise.

Difficultés d'ordre philosophique

L'infini avait été jusque là essentiellement un objet de réflexion philosophique. Or voilà qu'il devient objet de calcul. Il n'était pas facile d'éviter les interférences entre les deux domaines, d'autant moins que les savants n'étaient guère séparés comme aujourd'hui en scientifiques et philosophes - la science étant longtemps considérée comme une pratique du philosophe. D'où la nécessité de bien distinguer le type d'infini intervenant dans chaque domaine spécifique. Dans [10], le Père GERDIL (1718-1802), de l'ordre des Barnabites, essaiera de préciser les choses, en reprenant la distinction aristotélicienne de l'infini en acte (actuel) et l'infini en puissance, dans un article intitulé : "**De l'infini absolu considéré dans la Grandeur**".

Le mot infini appliqué à la quantité peut être pris en deux sens : tantôt il signifie une propriété essentielle à la grandeur, par laquelle on conçoit qu'elle est susceptible d'augmentation et de diminution sans fin ; tantôt il exprime l'élévation actuelle d'une grandeur à la dernière période, pour ainsi dire, de l'augmentation, dont elle est susceptible, ou son abaissement jusqu'à la dernière période de sa diminution possible. Une quantité infinie dit-on communément, est celle qui a reçu tous les accroissements finis possibles : une quantité infiniment petite, celle qui a reçu tous les décroissements finis possibles.

Locke distingue très nettement ces deux significations. Il désigne la première par le mot d'infinité, qu'il substitue à celui d'infini en puissance, employé par les anciens pour marquer qu'il n'est aucun terme qui borne l'augmentation,ou la diminution possible de la grandeur. Il exprime la seconde par le mot simple d'infini, c'est à dire de l'infini absolu et en acte : et il ajoute que cette sorte d'infini dans la quantité est impossible à concevoir, car dit-il, une)répétition à l'infini ne saurait jamais représenter l'infini.

La première idée est très claire. C'est une suite de la notion même de la grandeur ; quelque augmentation que la grandeur ait reçue, on conçoit, qu'elle peut être encore augmentée, et l'esprit ne voit aucune borne à cette suite possible d'augmentation. Mais pour former la notion de l'infini absolu, il faudrait allier ces deux idées, qu'une suite d'augmentation ne peut avoir aucune fin, et que pourtant cette augmentation peut parvenir à son comble. Aussi Chambers raisonnant sur les principes de Locke n'hésite pas de dire, que l'idée d'un nombre actuel infini est un absurdité.

Les anciens géomètres scrupuleusement attachés à la rigueur de la démonstration, et à la clarté des idées, qui en est inséparable, ont heureusement employé la première notion de l'infini dans leurs recherches, et en ont sévèrement écarté l'idée de l'infini absolu, dont les résultats paradoxes sont plus faits pour étonner une imagination

avide du merveilleux, que pour satisfaire un esprit ami du vrai".

Encore une fois, la géométrie des Anciens apparaît le modèle de la science mathématique, et ce thème parcourt tout le 18e siècle, apparaissant peu à peu, au fur et à mesure du développement grandissant du calcul infinitésimal comme une sorte de paradis perdu. Aussi est-il temps de faire un retour en arrière, et de voir quelle est cette méthode des Anciens tant louée. Quelles furent les raisons de son invention et pourquoi avait-elle gardé un tel caractère contraignant de modèle insurpassable pendant deux mille ans ?

La méthode des Anciens (1)

Si peu que nous sachions de PYTHAGORE et de son école, dans le détail, nous pouvons cependant considérer comme certains les faits suivants :

- Ils ont créé les bases de la mathématique grecque en démontrant des propriétés connues empiriquement jusque là. De cette façon, ils ont fait des mathématiques une science **déductive.**
- Cette science originelle était essentiellement *arithmétique* et non géométrique : s'il y a une proposition qui émerge de l'ombre entourant l'école pythagoricienne, c'est bien celle-ci *"Tout est nombre"* .(2) Avec ce corollaire : "Si deux objets quelconques se comportent comme deux nombres, alors ils sont eux-mêmes deux nombres cachés. Par exemple, deux sons différents sont définis, en musique, par un rapport de nombres.
- Cette conception d'une arithmétique universelle a été confrontée à une véritable crise tragique, par la découverte de l'incommensurabilité de la diagonale du carré avec le côté. On peut d'ailleurs penser que l'origine de cette découverte se situe également dans la musique. Si l'on cherche une fréquence sonore f_1 comprise entre f_0 et $f_2 = 2f_0$ correspondant à une octave, f vérifie :

$$\frac{f_0}{f_1} = \frac{f_1}{f_2} \text{ ou } f_1^2 = 2f_0^2$$

- On peut imaginer que les pythagoriciens n'ont pas tout de suite capitulé devant cette découverte. Ils ont dû essayer de sauvegarder leur idéal d'une *Arithmétique universelle*, et chercher comment adapter celle-ci à cette nouvelle découverte. On a, en effet, un certain nombre d'indications - datant des années 450-400 av. J.C., pour étayer la conjecture d'une utilisation d'infiniment petits (le sophiste ANTIPHON, ANAXAGORE, DEMOCRITE).

(1) *Pour ce paragraphe, je me suis appuyé essentiellement sur l'article de HASSE et SCHOLZ : "Die Grundlagen Krisis der Griechischen Mathematik " dans KANT Studien 1928 [12].*

(2) *Nombre entier naturel bien entendu.*

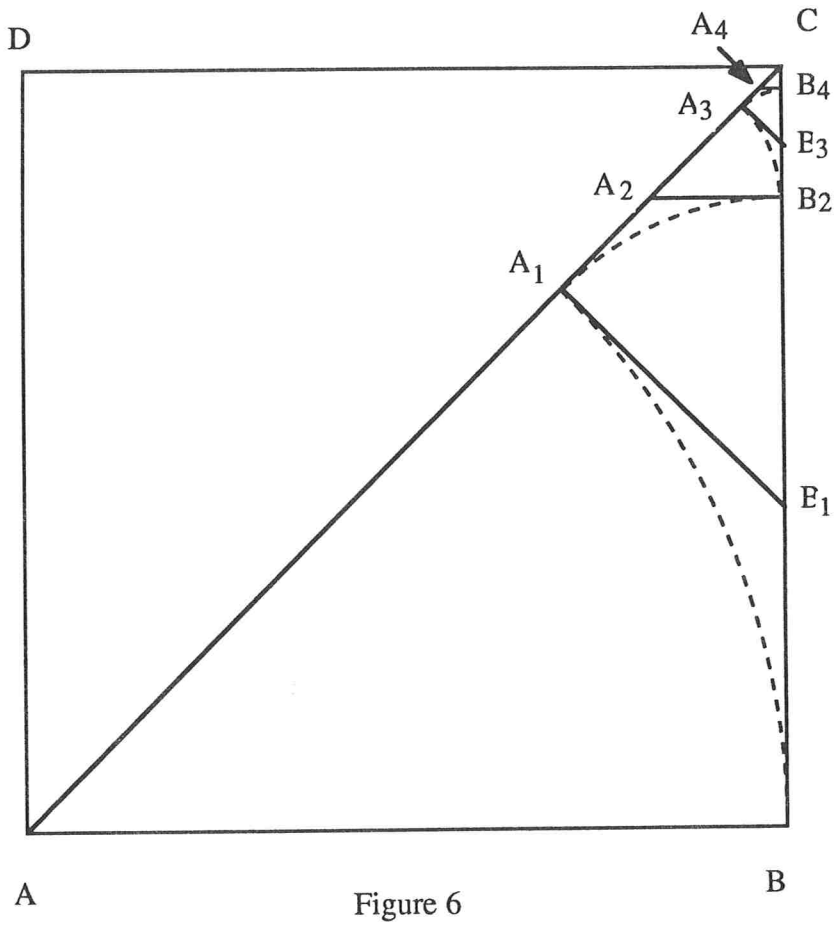


Figure 6

Pour nous limiter à l'exemple de la diagonale du carré, on peut imaginer les pythagoriciens disant : "La proposition de l'incommensurabilité de ces deux longueurs (diagonale et côté) est certes incontestablement vraie, aussi longtemps que l'on opère avec des unités, **de longueurs finies ;** mais elle n'est plus vraie si l'on va jusqu'à des unités de longueur inifiment petite. Et de présenter un processus de mise en évidence de cette commensurabilité : **l'antiphaïrèse.** On trouve deux expressions de ce processus chez EUCLIDE :

. **La proposition I du livre VII** s'applique aux entiers :

"Deux nombres inégaux étant proposés, le plus petit étant toujours retranché du plus grand, si le reste ne mesure celui que est avant lui que lorsque l'on a pris l'unité, les nombres proposés seraient premiers entre eux."

. **La proposition II du livre X** concerne les grandeurs incommensurables :

"Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent, ces grandeurs seront incommensurables."

On aura bien sûr reconnu ce qu'il est convenu d'appeler aujourd'hui l'algorithme d'EUCLIDE. Montrons comment il permet de mettre en évidence l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré (cf SZABO : **les débuts des mathématiques grecques p. 215 [13] et CAVEING : Zénon d'Elée, prolégomènes aux doctrines du continu [14]).**

Considérons le carré ABCD de côté a = AB, de diagonale d = AC et effectuons l'algorithme d'EUCLIDE, c'est-à-dire retranchons AB de AC qui donne comme reste $A_1C = BB_1$ puis BB_1 de AB = BC, puis $B_2C = A_1A_2$ de BB_1 etc... (figure 6) déterminant ainsi une suite de points A_n sur AC et de point B_n sur BC tels que, si l'on pose $A_nB_n = a_n$ on ait, successivement :

$d = a + a_1$; $a = 2a_1 + a_2$; $a_1 = 2a_2 + a_3$; $a_2 = 2a_3 + a_4$; et généralement $a_{n-1} = 2a_n + a_{n+1}$.

De sorte que, si l'on négligeait à un rang n donné, le reste a_{n+1}, on aurait les approximations suivantes de d :

$$d = a \; ; \; d = a\left(1 + \frac{1}{2}\right) ; \; d = a\left(1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2}}\right) \text{ etc...}$$

$$d = a\left[1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{2+\frac{1}{2}}}}}\right] \text{ avec n traits de fraction}$$

la fraction continue entre crochet convergeant vers $\sqrt{2}$, car le processus engagé par cet algorithme est bien sûr infini.

On a de sérieuses raisons de penser que le processus utilisé ici était certainement conne des Pythagoriciens, mais l'absence à leur époque d'un principe de convergence tel qu'il est formulé par EUCLIDE dans la proposition 1 du libre X les empêche de conclure vraiment : "on avait le commencement d'une démonstration (...) laquelle se perdait dans les sables de la régression à l'infini, comme d'ailleurs les approximations de mesure qu'on pouvait en tirer".[14 - p.122]

Mais EUCLIDE écarte soigneusement toute référence à l'infini et tout calcul sur des infiniment petits.Se pose alors la question : comment se fait-il que ces tentatives n'aient pas été acceptées, mais qu'au contraire elles aient été considérées comme franchement mauvaises et non rigoureuses ; comment se fait-il qu'en deux générations se soit créée une mathématique fondée sur des bases considérées encore aujourd'hui comme parfaitement rigoureuses, mais excluant tout recours à un calcul sur des infiniment-petits ? La réponse est certainement à chercher du côté d'un certain ZENON d'ELEE. Sans entrer dans le détail de l'examen de ses paradoxes qui sont connus, relevons que ceux-ci rendent patente l'impossibilité de penser la grandeur continue. Cette impossibilité est rapportée de la façon suivante par un commentateur d'ARISTOTE, du 5e siècle après J.C., nommé SIMPLICIUS qui dit ceci :

"En tout cas dans son ouvrage (celui de ZENON) qui contient de nombreux épichérèmes(1), il montre en chacun d'eux que l'affirmation de l'existence de la pluralité conduit à affirmer des conséquences contraires. Parmi ces arguments, il y en a un dans lequel il montre que si les étant sont pluralité, ils sont à la fois grands et petits : grands au point d'être illimités en grandeur, petits au point de ne pas avoir de grandeur du tout."

Ce que HASSE et SCHOLZ interprètent ainsi :

"Si l'on admet qu'un segment est un agrégat composé d'une infinité de segments élémentaires infiniment petits, de deux choses l'une :

- ou bien chaque segment élémentaire a une longueur finie, différente de zéro. Alors le segment obtenu en mettant bout à bout ces segments élémentaires aura une longueur infinie.
- ou bien les segments élémentaires ont une longueur nulle au sens strict du terme. Alors le segment qu'ils engendrent en les mettant bout à bout aura aussi une longueur nulle."

Aussi, convaincus par les arguments de ZENON du caractère contradictoire de la divisibilité à l'infini d'une grandeur, mais en même temps mis en présence de cet infini dans l'existence de grandeurs incommensurables, les mathématiciens grecs n'avaient d'autre ressource que de chercher une autre voie. Selon la belle formule de J.T. DESANTI [15, p. 446].

(1) arguments

"Il faudra, **faute de calculer "l'impensable", apprendre à penser "l'incalculable"**"

Pour cela, ils quitteront l'arithmétique universelle des Pythagoriciens pour se réfugier dans la géométrie. Ils abandonneront le nombre au profit de la *raison* = rapport de grandeur. D'où cette extraordinaire construction du livre V d'EUCLIDE (attribuée à EUDOXE) dont il suffira ici d'en donner la définition 6 :

"Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois".

Ce qu'en termes modernes nous écririons : Si A, B, C, D sont quatre grandeurs alors A/B = C/D si et seulement si pour tout entier m et tout entier n on a les implications :

$$nA > mB \Rightarrow nC > mD$$
$$nA = mB \Rightarrow nC = mD$$
$$nA < mB \Rightarrow nC < mD$$

L'infini est ainsi écarté du calcul. Il est mis dans les quantificateurs : **pour tout entier m et n**, ce qui permet effectivement de penser l'incalculable (par exemple $\sqrt{2}$) comme une sorte de classe d'équivalence de rapports égaux, cette égalité pouvant se définir et se penser par un ensemble d'inégalités portant uniquement sur des entiers. On ne manquera pas de relever les analogies entre cette construction d'EUDOXE et celle de DEDEKIND, vingt siècles plus tard [16]. Cette définition sera parfaitement opératoire chez EUCLIDE et ARCHIMEDE. C'est elle qui permet par exemple de démontrer en toute rigueur que "Les cercles sont entr'eux comme les carrés de leurs diamètres" (EUCLIDE Livre XII proposition II). Ce rapport commun à tous les cercles permet ainsi de parler du nombre π (ce qu'EUCLIDE ne fait pas) de le penser, sans avoir besoin de le calculer.

Pourtant il faut calculer, il faut mesurer : l'aire d'un cercle, d'un segment de parabole ; le volume d'une sphère, d'un cylindre, d'un cône. Mais comment mesurer des grandeurs qui échapent à tout calcul fini, à cause de lignes et de surfaces courbes ? L'outil sera peu à peu mis en place par EUCLIDE et surtout ARCHIMEDE, qui deviendra la fameuse **méthode des Anciens** que GREGOIRE de St VINCENT appellera bien plus tard (vers 1647) la **méthode d'exhaustion**.

Rappelons en le principe. Soit à comparer par exemple l'aire a d'une surface curviligne avec l'aire S d'une surface connue. (N'oublions pas qu'en accord avec l'axiomati-

que du livre V, le calcul se fait toujours sur des **rapports** de grandeurs, et non sur les grandeurs elles-mêmes.) La méthode d'exhaustion consiste alors à construire deux surfaces d'aires U et V encadrant à la fois la surface dont on cherche à déterminer l'aire A et la surface donnée d'aire S, de telle sorte que la différence U - V soit suffisamment petite pour aboutir à une contradiction. On démontre ensuite par une double réduction à l'absurde que A ne peut être ni strictement supérieure ni strictement inférieure à S et donc que A = S (cf. [17] p 131 et [18] p 72) ARCHIMEDE en particulier, utilisera cette méthode si précise et si rigoureuse avec beaucoup d'élégance et de génie. Mais elle a cependant un immense défaut : sa valeur heuristique est quasi nulle. Elle suppose en effet connu le résultat dont elle ne fait qu'administrer la preuve, certes avec une force de conviction infaillible. C'est pourquoi les grandes découvertes d'ARCHIMEDE sont établies en deux temps :

Par des procédés essentiellement mécaniques, en utilisant le principe du levier et en considérant la surface (par exemple) composée de lignes en équilibre avec les lignes d'une autre surface dont on connaît l'aire, il découvre un certain rapport numérique. On connaît cette méthode parce qu'ARCHIMEDE l'a lui-même expliquée dans une lettre à ERATOSTHENE.
Signalons que ce procédé de considérer une surface comme composée d'une infinité de lignes sera repris par les mathématiciens de la Renaissance italienne sous le vocable "géométrie des indivisibles" et sera une des étapes vers l'invention du calcul différentiel. Mais pour ARCHIMEDE il n'a aucune valeur démonstrative et est la plupart du temps coupé du deuxième moment, qui reste seul : la démonstration par la méthode d'exhaustion.

On comprend alors la fascination exercée par cette méthode sur l'esprit des mathématiciens de tous temps et singulièrement ceux du 18 e siècle : eux aussi ont mis au point un outil de découverte infiniment plus efficace que celui d'ARCHIMEDE : le calcul infinitésimal, lequel leur permet de mesurer toutes sortes de grandeurs tout à fait inaccessibles aux méthodes des Anciens. Mais leur manque en contrepartie une méthode de démonstration aussi convaincante qu'est la méthode d'exhaustion. D'où cette référence continuelle, comme un leit-motiv, à travers tous les textes du 18e siècle à cette "méthode des Anciens," qu'aucune théorie, apparemment n'est arrivée jusqu'à présent, à égaler dans sa clarté et sa rigueur.

En 1784, cela fait exactement cent ans que LEIBNIZ a publié son texte fondateur du calcul différentiel ("**Acta Eruditorum**" (1684)) ; un siècle de découvertes et de développements extraordinaires qui pourtant laissent partout et toujours un malaise : celui qui naît du sentiment qu'ils sont fondés sur des notions peu claires, voire contradictoires. Il fallait en finir et proposer enfin :

"Une théorie claire et précise de ce qu'on appelle INFINI en Mathématique."

Les réponses à la question de l'Académie

Bien que les fondements du calcul différentiel ne fussent toujours pas très sûrs, la situation avait tout de même pas mal évolué par rapport aux polémiques du début du siècle. Les contributions immenses d'EULER, D'ALEMBERT et LAGRANGE vont élargir le champ de réflexion, tout en compliquant davantage encore la situation.

La situation avant 1784

EULER adopte une position formaliste où les problèmes sont résolus par le calcul. Celui-ci s'occupe de quantités finies, les différentielles ne sont pas des grandeurs et doivent être interprêtées comme des zéros absolus. Voici ce qu'il en dit dans un teste de 1765 : "De l'utilisation des fonctions discontinues en Analyse" [19].

"Alors que pour la plupart des hommes cette notion de différentielle, et de rapport liant ensemble des quantités évanouissantes, semble habituellement au plus haut point suspecte, tous les doutes sont réduits en fumée sur un seul exemple. Que l'on se donne donc une fonction de ce genre, $y = ax^2 + bx + c$. Voyons d'abord quelle augmentation cette fonction reçoit lorsqu'on donne à la quantité x un accroissement quelconque ω. Posons $x + \omega$ à la place de x. Notre fonction devient $axx + 2ax\omega + a\omega^2 + bx + b\omega + c$; elle reçoit donc un accroissement = $2ax\omega + a\omega^2 + b\omega$ que nous désignons par le signe Δy et, semblablement, nous désignerons également la quantité ω, comme accroissement de x lui-même par le signe suivant Δx.

Donc comme on avait

$$\Delta x = \omega \text{ et } \Delta y = 2a \times \omega + a \omega \omega + b \omega,$$

on aura

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 a x \omega + a \omega^2 + b \omega}{\omega} = 2 a x + a \omega + b$$

Ainsi nous obtenons le rapport entre les accroissement Δx et Δy, qui est vrai quel que soit l'accroissement que la quantité x prend. Donc le même rapport correspondra à la vérité si nous prenons l'accroissement comme tout à fait évanouissant, et en ce cas les accroissements Δx , Δy sont désignés habituellement par les symboles dx et dy et appelés différentielles. D'où, très évidemment, si l'on pose $\omega = 0$, il vient

$$\frac{dy}{dx} = 2 a x + b$$

Ce rapport est vrai, même si les termes entre lesquels il existe sont évanouissants. Ce seul exemple suffit, semble-t-il, à lever tous les doutes que l'on oppose couramment à la notion d'infiniment petit utilisée en Analyse et à mettre ce calcul hors de tout soupçon".

D'ALEMBERT reprend une idée de NEWTON qui avait défini le rapport différentiel $\frac{dy}{dx}$ (noté chez Newton $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$) comme la "raison ultime", reliant par là le nouveau calcul à la méthode des Anciens. Cette méthode de NEWTON appelée aussi **"méthode des premières et dernières raisons"** devient alors une **méthode des limites.**
C'est pourquoi il dira dans l'article "LIMITE" de l'Encyclopédie [20]

"La théorie des **limites** est la base de la vraie métaphysique du Calcul Différentiel. Voyez DIFFERENTIEL, FLUXION, EXHAUSTION, INFINI. A proprement parler, la **limite** ne coïncide jamais, ou ne devient jamais égale à la quantité dont elle est la **limite** ; mais celle-ci s'en approche toujours de plus en plus, et peut en différer aussi peu qu'on voudra. Le cercle, par exemple, est la **limite** des polygones inscrits et circonscrits ; car il ne se confond jamais rigoureusement avec eux, quoique ceux-ci puissent en approcher à l'infini".

La conception de d'ALEMBERT donnait le sentiment qu'elle était toute proche de la méthode des anciens. Elle calcule non avec des infiniment petits mais avec des rapports de grandeurs non nulles dont on cherche, comme dans la méthode d'exhaustion la "raison ultime". En réalité il y a eu tout de même un glissement de sens. On chercherait en vain chez ARCHIMEDE l'image du cercle comme limite de polygones. Chez lui, ce qui joue ce rôle de limite est toujours un terme "butoir" **extérieur** à la suite qui converge vers lui ; et les démonstrations sont basées sur l'idée d'une différence que l'on peut rendre aussi petite que l'on veut. Chez NEWTON ou D'ALEMBERT ce terme "butoir" devient un **terme ultime** ("ultima ratio") même s'il est situé à l'infini, et qui fait partie de la suite. De plus les démonstrations de convergence sont la plupart du temps abandonnés.

Ces deux tentatives de fondement : celles d'EULER et D'ALEMBERT restent liées à une problématique de l'infini. LAGRANGE essaiera, quant à lui à sortir de ce piège de l'infini et à créer une théorie du calcul différentiel dégagée "**de toute** considération d'infiniment-petits, d'évanouissement, de limites, de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités **finies.**"

Une telle théorie reposera essentiellement sur le développement en série entière des fonctions, lequel développement était supposé exister assez généralement pour la conception que l'on avait alors des fonctions. Ce point de vue sera défendu par plusieurs mathématiciens comme par exemple CONDORCET ou ARBOGAST. Empruntons à ce dernier une des définitions les plus claires et les plus fermes qui puissent en être données, dans une lettre à un de ses amis [21] :

"Dans ma théorie dx, dy, d^2y etc... sont de véritables quantités, toujours assignables, jamais évanouissantes, jamais infiniment petites, mais variables ou plutôt variantes : dy/dx est une quantité finie et constante ou **non variante**, et d^2y/dx^2 de même.

Pour éclaircir ce que je viens de dire, soit y une fonction de x, j'aurai Δy de cette forme :
$a\Delta x + b\Delta x^2 + \Delta x^2 F : \Delta x$; $\Delta x^2 F : \Delta x$ exprimant tout ce qui reste après Δx^2 ; ici x est la variable, Δx la variante, c'est-à-dire que Δx peut recevoir toutes sortes de valeurs, toujours assignables, mais que Δx n'a point de valeur fixe, ainsi que les constantes qui entrent dans a et b. J'aurai : $(\Delta y / \Delta x) = a + b\Delta x + \Delta x F : \Delta x$ où l'on voit que $(\Delta y/\Delta x)$ est composée de deux sortes de quantités, les unes variant avec Δx, que je nomme dépendantes de Δx, l'autre qui ne varie pas avec Δx et qui en est indépendante.
Actuellement, si l'on demande la partie $\Delta y/\Delta x$ qui est indépendante de Δx, je peux représenter cette partie par dy/dx et j'aurai : dy/dx + **une quantité dépendante de** $\Delta x = a + b\Delta x + \Delta x F : \Delta x$.
Or suivant le **principe dont je vous ai parlé**, il est nécessaire que les quantités dépendantes et les quantités indépendantes de Δx soient égales entre elles séparément, parce qu'il ne peut pas exister de rapport entre des quantités variantes et celles que l'on conserve des valeurs fixes, il faut donc qu'on ait $(dy/dx) = a$, ensuite quantité dépendante de $\Delta x = b\Delta x + \Delta x F : \Delta x$ (...)
Ainsi quelle idée attachera-t-on à l'expression dy/dx.
Je dis que (dy/dx) est la partie indépendante de Δx dans ($\Delta y/ \Delta x$). Qu'est-ce que dy ? L'équation $(dy/dx) = a$ donne $dy = adx$; **ainsi dy est la partie de Δx qui est affectée de la première puissance de Δx."**

Cette définition présente un avantage immense par rapport aux précédentes : elle fait référence à un calcul purement algébrique sur des quantités finies écartant du coup toute difficulté qui proviendrait soit de la considération d'expressions du type 0/0 comme chez EULER, soit ferait référence à l'infini par l'intermédiaire du concept de limite comme chez D'ALEMBERT. Seulement comment trouver les coefficients a et b et éventuellement la fonction $F : \Delta x$ de ce développement sans justement utiliser le concept de limite ? Tant que la fonction y est un polynôme, il n'y a pas de difficulté à cela. Mais si y est une fonction irrationnelle, voire transcendante (sans même évoquer une fonction arbitraire -qu'on ne considérait pas à l'époque comme susceptible d'un calcul) la détermination du développement en série entière de y -même en admettant qu'il existe- nécessite soit la formule du binôme pour des exposants réels quelconques soit des considérations d'ordre géométrique.

Si l'on suppose, comme le fait ARBOGAST, reprenant une idée d'EULER, que toute fonction y peut s'écrire (sauf pour quelques valeurs exceptionnelles de x) sous la forme

$$y = Ax^{\alpha} + Bx^{\beta} + Cx^{\gamma} + \ldots \text{ etc...}$$

où α, β, γ,... sont des exposants réels quelconques, alors en donnant à x un accroissement Δx, y aura un accroissement $\Delta y = A(x + \Delta x)^{\alpha} + B(x + \Delta x)^{\beta} + \ldots - \Delta x^{\alpha} - Bx^{\beta} \ldots$

Et si on veut alors avoir Δy en série de puissance de Δx il faut savoir calculer le développement en série entière de $(x + \Delta x)^{\alpha}$, $(x + \Delta x)^{\beta}$, ... Or le développement de $(x + a)^{\alpha}$, s'il était connu depuis longtemps, et pour un exposant réel quelconque, n'avait pourtant pas trouvé de démonstration satisfaisante. Une telle démonstration n'interviendra que bien plus tard lorsque CAUCHY et ABEL auront mis en place des méthodes d'analyse rigoureuse intégrant les concepts de fonction continue et de domaine de convergence.

Restent les considérations d'ordre géométriques. Celles-ci, on l'aura remarqué dans les citations d'EULER, de D'ALEMBERT, d'ARBOGAST, semblent avoir disparu, et c'est effectivement une modification qui se produit peu à peu dans la façon d'approcher le calcul infinitésimal.
On a l'impression que les mathématiciens du 18e siècle se rendent compte peu à peu, que la difficulté de concevoir clairement les notions d'infiniment-petit et d'infiniment-grand, vient d'une approche trop géométrique des problèmes, et que la voie menant à des méthodes rigoureuses passe par une algébrisation de l'analyse. C'est ce que tentent LAGRANGE et tous ceux qui veulent exclure définitivement les considérations d'infiniments petits. Il n'empêche qu'occasionnellement la géométrie resurgit pour fonder des relations purement analytiques. Témoin cet extrait de la **"Théorie des fonctions analytiques"** de LAGRANGE [1].

"Tout se réduit à prouver que dans l'expression de sin x en série le premier terme doit être simplement x, au lieu que nous l'avons supposé en général Ax . En employant la considération des infiniment petits, cela est évident, car on voit que, dans le cercle, le sinus, à mesure qu'il diminue, s'approche de plus en plus de l'arc, jusqu'à s'y confondre dans l'infiniment petit. Ainsi, en supposant l'arc x infiniment petit, on a sin x = x ; par conséquent, A = 1.

Mais, comme nous avons cherché à rendre notre analyse indépendante de la considération des infiniment petits, nous devons aussi en affranchir la démonstration du point dont il s'agit.

Pour cela, nous ne supposerons que le principe, établi par Archimède, que le sinus, qui est la moitié de la corde de l'arc double, est moindre que l'arc auquel il répond, et que la tangente est plus grande que ce même arc. Nous aurons ainsi

$$\sin x < x \text{ et } \operatorname{tang} x > x.$$"

Cette démarche représente pourtant une avancée considérable, surtout si on la replace dans l'intégralité du texte de LAGRANGE. Pour la première fois l'analyse est traitée par un travail sur des encadrements et des majorations. Le texte de LAGRANGE date de 1797, soit treize ans après sa question posée à la communauté mathématique par l'intermédiaire de l'Académie de BERLIN. Ce qui montre bien qu'il a poursuivit sa propre réflexion amorcée dès son Mémoire **"Sur une nouvelle espèce de calcul"** [22] de 1772, et que les réponses apportées par d'autres mathématiciens ne l'ont pas satisfait.

Vingt trois mémoires furent présentés à l'Académie. Ils étaient anonymes, avec un numéro et une devise pour l'identification de l'auteur

"L'Académie a reçu beaucoup de pièces sur ce sujet. Leurs auteurs ont tous oublié d'expliquer **comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire**, comme l'est celle d'une quantité infinie. Ils se sont tous, plus ou moins, écartés de la **clarté**, de la **simplicité**, et surtout de la **rigueur** qu'on exigeait. La plupart n'ont pas même vu que le principe demandé devait être, non pas borné au calcul infinitésimal, mais étendu à l'Algèbre et à la Géométrie traitée à la manière des Anciens.

Le sentiment de l'Académie est donc que sa demande n'a reçu aucune réponse complète.

Cependant elle a trouvé que celui qui a le plus approché de ses intentions, est l'Auteur de la Pièce française qui a pour devise

L'infini est le gouffre où s'absorbent nos pensées

L'Académie lui a donc adjugé le Prix. L'ouverture du billet a montré que cet Auteur est M. L'HUILIER de Genève, Membre de la Société d'éducation à Varsovie."[3]

D'après YOUSCHKEVITCH qui a pu avoir connaissance des 23 mémoires (cf.[23]) l'appréciation donnée par l'Académie (en fait LAGRANGE) est justifiée pour l'essentiel, et "parmi ces (autres) mémoires, celui de L'HUILIER se distinguait, sans aucun doute, par ses hautes qualités, bien que son idée fondamentale ne fut guère originale".

Les mémoires présentés étant, comme on l'a vu, anonymes, on ne connaît pas les autres auteurs. L'un d'eux a cependant pu être identifié car il contient presque mot à mot les "Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infitésimal" [9] édité en 1797. Il s'agit donc de Lazare CARNOT. Son mémoire intitulé "**Dissertation sur la théorie de l'Infini en Mathématique** avait pour devise :

"Celui-là seul peut juger sainement des choses qui sait éviter l'abus des mots"

Où l'on retrouve la compensation des erreurs.

Ce qui est étonnant, c'est que encore à la fin du 18e siècle, 60 ans après BERKELEY, CARNOT lui reprenne sa théorie de la compensation des erreurs, certes en la précisant et en essayant d'en faire un principe général d'explication du calcul infinitésimal. Je propose que nous nous y attardions, non pas tant pour l'intérêt intrinsèque de cette méthode, que pour ce qu'elle peut nous révéler de la façon de concevoir les nombres réels, la notion de variable. On trouvera en annexe la photocopie de quelques pages extraites des "Réflexions..." et présentant sur un exemple, le sens à donner au thème de la compensation des erreurs. Ce qu'il me paraît important de souligner c'est la "métaphysique" sous-jacente. Ainsi cette définition

"J'appelle **quantité infiniment petite**, toute quantité qui est considérée comme continuellement décroissante, tellement qu'elle puisse être rendue aussi petite qu'on le veut, sans qu'on soit obligé pour cela de faire varier celles dont on cherche la relation" [9, p 13].

Ce qui ressort de cette définition c'est

1) qu'une quantité (ce que nous appelons "**réel**" aujourd'hui) est toujours **positive**.
2) qu'une variable ne peut tendre vers zéro qu'en "**décroissant** continuellement" ce dernier mot n'étant d'ailleurs pas précisé.

De fait, les infinitésimaux sont pour CARNOT des "objets de raison" tout comme les nombres imaginaires, ou même les nombres négatifs. Ils ne sont utilisés que comme intermédiaires de calcul, mais doivent disparaître lorsque le calcul est achevé.

"Avancer qu'une quantité négative isolée est moindre que 0 c'est couvrir la science des mathématiques, qui doit être celle de l'évidence, d'un nuage impénétrable, et s'engager dans un labyrinthe de paradoxes tous plus bizarres leus uns que les autres".

Et il donna ailleurs [cf. 17, p. 111] un exemple d'un tel paradoxe :

"(-3) serait moindre que 2, cependant $(-3)^2$ serait plus grand que $(2)^2$; c'est-à-dire qu'entre ces deux quantités inégales 2 et (-3) le carré de la plus grande serait moindre que le carré de la plus petite et réciproquement, ce qui choque toutes les idées claires qu'on peut se former de la quantité."

On trouve là toute la difficulté de l'articulation entre le sens des objets définis mathématiquement et leur usage formel. Faut-il s'étonner que nos élèves butent sur une telle difficulté lorsque de grands savants ne pouvaient eux-mêmes la surmonter, à une époque donnée ?

On retrouve les mêmes blocages dans le mémoire de L'HUILIER qui a finalement gagné le prix.

L'exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs [24]

Quoique, comme on a pu s'en apercevoir, celui-ci n'ait pas entièrement satisfait le jury, il avait du moins sur ces concurrents l'avantage de la rigueur, se référant d'ailleurs explicitement à celle des Anciens :

"Je me propose de montrer (...) que la **méthode des Anciens, connue sous le nom de Méthode d'Exhaustion, convenablement étendue, suffit pour établir d'une manière certaine les principes des nouveaux calculs".**

Pour cela, L'HUILIER reprendra

"Le développement des idées (que M. D'ALEMBERT n'a fait qu'ébaucher et comme proposer dans l'article "Différentiel" de l'Encyclopédie")[20 p 22].

Et effectivement il basera l'essentiel de ses "principes" sur l'idée de **limite** démontrant pour la première fois des résultats comme

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}$$

Là aussi il est intéressant de constater comment ce concept de limite qui va devenir au 19e siècle effectivement le concept clef de l'analyse, reste englué dans un vocabulaire géométrique et imagé.

"***Première définition :*** Soit une quantité variable, toujours plus petite ou toujours plus grande qu'une quantité constante proposée ; mais qui puisse différer de cette dernière moins que d'aucune quantité proposée plus petite qu'elle : cette **quantité** constante est dite **limite** en grandeur ou en petitesse de la quantité variable.

Deuxième définition : Soit un rapport variable toujours plus petit qu'un rapport assigné, mais qui puisse être rendu plus grand qu'aucun rapport assigné plus petit que ce dernier : le **rapport** donné est appelé **limite en grandeur** du rapport variable. Item, soit un rapport variable toujours plus grand qu'un rapport donné ; mais qui puisse être rendu plus petit qu'aucun rapport assigné plus grand que ce dernier : le **rapport** donné est appelé la limite en petitesse du rapport variable."

On trouvera en annexe le théorème et sa démonstration que nous énoncerions sous la forme

$$\lim \frac{a}{x} = \frac{a}{\lim x}$$

Signalons à ce propos que c'est L'HUILIER qui a introduit pour la première fois dans un ouvrage imprimé, le signe "**lim**" pour limite.

Pour le reste, il me semble avoir suffisamment montré où en étaient les fondements du calcul infinitésimal. En résumé :

— Des idées, des méthodes nouvelles s'étaient développées mais exprimées dans le langage archaïque de la géométrie.

— Ce langage modèle l'appréhension du concept de nombre (réel) lequel reste une quantité (positive) liée à une grandeur géométrique.

— Ces idées nouvelles et ce langage sont confrontés à un modèle de rigueur : la "méthode

des Anciens" qui pour être parfait n'en est pas moins inadapté au champ de recherche ouvert par le calcul infinitésimal. De même que EUCLIDE avait réussi à juguler l'infini en quittant l'arithmétique pour construire une géométrie basée sur un calcul sur les raisons (rapports de grandeurs) de même DESCARTES le réintroduisait en traitant les problèmes de géométrie par l'algèbre.

"Des malheurs et des paradoxes la méthode d'exhaustion avait sur se garder tant que réservée à la géométrie, garantie contre les absurdités par l'intuition sensible. La révolution cartésienne, en assurant un parallélisme complet entre nombre et étendue, en inaugurant l'étude des variations de fonctions, incorporait le continu à l'algèbre : celle-ci devenue autonome, devait définir par ses propres moyens les objets employés, préciser, étendre elle-même les modes d'emploi. D'où deux sortes de problèmes : donner un fondement purement analytique aux notions et propriétés assurées jusque-là seulement par l'évidence de leur corrélat géométrique, developper les unes et les autres hors des limites arbitraires imposées par l'intuition."

(CAVAILLES : Philosophie mathématique p 31 [25]).

C'est ce qui commence à se faire avec LAGRANGE et ses disciples chez qui on veut rompre avec la considération d'infiniment -petits ou grands qui véhiculent cette intuition géométrique, et qui tenteront autant que faire se peut de la remplacer par un **calcul algébrique**. Le chemin sera long de CAUCHY à WEIERSTRASS pour éloigner à nouveau le spectre de l'Infini en le canalisant dans des relations d'inégalités, de majorations, d'encadrements, en le contenant dans des "quelque soit" et des expressions comme : "plus petit que ..., plus grand que tout nombre donné à l'avance", comme l'avait déjà fait EUCLIDE, deux mille ans auparavant dans le livre V de ses Eléments.

En guise de conclusion : Quelles leçons pouvons-nous tirer de cette excursion chez les savants du 18e siècle ?

J'en vois au moins de deux types :

1. Une meilleure compréhension des difficultés des élèves, sur lesquelles des difficultés analogues pour les hommes du 18e siècle peuvent attirer notre attention.
2. Une meilleure stratégie globale dans l'organisation de notre enseignement, et dans l'utilisation des moyens modernes à notre disposition.

Les difficultés rencontrées par nos élèves

— **Elles peuvent venir du langage d'abord.**

En effet, les mots utilisés en mathématiques sont aussi et étaient d'abord des mots déjà utilisés dans le langage courant. Ainsi des mots : "limite", "voisinage", "continu" etc... Ces mots sont utilisés en un certain sens dans la vie quotidienne, et véhiculent par conséquent chez les élèves des images, des intuitions qui recouvrent rarement le sens précis, univoque qui leur est donné en mathématiques. Ce que dit BACHELARD dans "La formation de l'esprit scientifique" [26] à propos de l'apprentissage de la physique peut très bien être pris en compte égalment pour l'apprentissage des mathématiques et particulièrement l'analyse :

"Dans l'éducation, la notion d'obstacle pédagogique est également méconnue. Les professeurs de sciences imaginent que l'esprit commence comme une leçon, qu'on peut toujours refaire une culture nonchalante en redoublant une classe, qu'on peut faire comprendre une démonstration en la répétant point par point. Ils n'ont par réfléchi au fait que l'adolescent arrive dans la classe de physique avec des connaissances empiriques déjà constituées : il s'agit alors non pas d'**acquérir** une culture expérimentale, mais bien de **changer** de culture expérimentale, de renverser les obstacles déjà amoncelés par la vie quotidienne."

Les hommes du 18e siècle étaient en butte au même problème. Leurs recherches s'appuyaient sur une intuition, essentiellement géométrique, qu'ils essayaient de conceptualiser, de formaliser avec le langage dont ils disposaient : leur langage de tous les jours. On pourrait illustrer cela longuement en étudiant le sens du mot "fonction continue" chez EULER (Voir par exemple [19]). Plus rapidement, constatons la difficulté signalée, encore chez CAU-

CHY à propos de cette définition du mot "**limite**" donnée dans son "Analyse algébrique de 1821 [27].

"Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer d'aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres".

Et CAUCHY distingue alors deux notations : **Lim sin x**

"lorsqu'une quantité variable converge vers une limite fixe et Lim$((\sin\frac{1}{x}))$ qui admet une infinité de valeurs **comprise entre les limites -1 et +1**".

Très nettement, dans cette dernière expression (soulignée par moi) le mot "**limites**" est utilisé dans son sens courant, comme par exemple dans la phrase "Ma patience a des limites dont les bornes marquent la fin !", alors que dans les lignes précédentes, CAUCHY cherche à donner un sens mathématique plus précis, sans ambiguïté, au même mot. Comment l'élève n'aurait-il pas, au début, des difficultés pour écarter spontanément un sens -qu'il est habitué à utiliser- au profit d'un sens nouveau et d'une certaine manière différent ? D'autant plus que nous ne facilitons pas les choses puisque nous écrivons également

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ pour une fonction f qui justement devient infinie et donc n'a pas de limite !

A l'inverse, qui est encore capable aujourd'hui d'expliquer le sens de cet énigmatique "**Théorème des Accroissements finis**", à moins de se référer au vocabulaire du 18e siècle, tel qu'il est utilisé par exemple dans ce texte déjà cité (p. 17) de GERDIL et dont nous reprenons juste cette phrase significative :

"Une quantité infinie (...) est celle qui a reçu tous ses accroissements finis possibles"

La lecture d'un tel texte a l'avantage d'attirer notre attention sur d'autres difficultés, d'ordre conceptuelles cette fois, et qui concernent pour l'essentiel les notions de **nombre** et de **fonction.**

Les difficultés conceptuelles

Nous avons déjà eu l'occasion de signaler qu'une des difficultés essentielles pour penser l'anlayse au 18e siècle, venait du fait d'un langage géométrique ou mécanique. Il n'y avait pas de concept de nombre réel. Les mathématiciens travaillaient sur des grandeurs et des rapports de grandeurs (raisons). Tant qu'ils en restaient à l'étude purement géométrique de ces grandeurs, telle que les Anciens l'avaient mise au point, il n'y avait pas de problème. L'intuition sensible garantissait contre les paradoxes et les absurdités. Mais DESCARTES a appris aux

mathématiciens à traiter les problèmes de géométrie par l'algèbre, introduisant du coup le nombre dans la géométrie, avec ses corrélats : le continu et l'infini, qui eux échappent à l'intuition sensible.

De fait c'est toute l'analyse du 19e siècle, dans son effort d'un fondement purement analytique, qui va construire et étoffer le concept de nombre réel.

La même difficulté se présente pour nos élèves. Ils connaissent l'expression "nombre réel" depuis la quatrième au moins, mais que recouvre ce vocable dans leur esprit ? Comment ce concept se construit-il d'abord chez eux, sinon par l'intermédiaire de la mesure des grandeurs ? Par la comparaison d'une grandeur à une autre grandeur prise pour unité ?

Mais alors, s'il n'y a pas de nombres réels, s'il n'y a que des grandeurs que l'on mesure, pourquoi parlerait-on de grandeur nulle ? Il faut faire attention au fait que visiblement le zéro n'a pas le même statut que pour nous, aujourd'hui, en analyse. Il ne peut être envisagé que comme le stade ultime d'un rapport **évanouissant**, comme une limite, rejoignant du même coup, et sur le même plan l'autre stade ultime, l'infini. C'est pourquoi, dira COUTURAT dans "De l'infini mathématique" [28]

"La grandeur nulle et la grandeur infinie constituent les deux états extrêmes de la grandeur ; ce sont les limites de l'infiniment grand et de l'infiniment petit, et pour ainsi dire les deux pôles entre lesquels la grandeurs finie oscille indéfiniment".

Il est significatif à cet égard que le concept **d'existence** est utilisé au 18e siècle en mathématiques dans le sens "n'est pas nul". Une quantité devient inexistante lorsqu'elle s'évanouit et s'annulle.
Par exemple chez L'HUILIER [24] existent les grandeurs qui "sont réellement et actuellement assignées". Et, parlant du triangle caractéristique

"Ils [les côtés du triangle] se sont approchés différemment de non-existence ; ils ont évanoui différemment ; mais une fois évanouis, ils ont tous la même manière de ne pas exister" Et ROLLE utilisera une lettre spéciale θ "pour marquer le rien".[2]

Le concept de fonction

Au 18e siècle, le concept de fonction reste très étroit, limité au "fonction analytiques" c'est-à-dire composées à l'aide d'opérations sur les fonctions élémentaires. La notion même de variable reste également grossière, comme il apparaît dans le texte de L'HUILIER sur la définition de la limite (voir p.29). L'auteur, comme la plupart de ses contemporains n'envisage pas qu'une variable puisse osciller autour d'une valeur définie. Non : elle reste "toujours plus petite ou toujours plus grande qu'une quantité constante proposée".

En sorte que les propriétés des fonctions que nous considérons comme des "plus", comme des qualités supplémentaires, telles la continuité, la différentiabilité, étaient constitutives de l'ensemble des fonctions étudiées, sauf éventuellement en des points isolés. Mais cela n'est-il pas le concept que se fait un élève de lycée, d'une fonction ? A-t-il les moyens, l'occasion de penser autre chose ?

Cette courte traversée du 18e siècle nous aura montré, je l'espère, que les concepts, que les méthodes se construisent à travers la résolution de problèmes ; qu'ils s'affinent dans la controverse, les paradoxes, les nouveaux problèmes qui surgissent de l'application de nouvelles méthodes. Surtout elle nous aura montré que la **question du sens** est à la fois moteur et obstacle du développement mathématique :

— **moteur** car le sens seul permet de donner prise sur les objets mathématiques, lui seul permet l'activité mathématique.

— **obstacle** car le sens est lié à une perception toujours trop intuitive, géométrique ou mécanique, donc imparfaite des objets qu'elle explore et construit. Cette perception est incapable de cerner un champ conceptuel en réalité beaucoup plus riche. La formalisation apparaît alors comme un moment nécessaire pour surmonter cet obstacle ; pour, à la fois, préciser le sens et y lever toute ambiguïté, pour finalement l'enrichir.

La question du signe

Tant que l'infini était rigoureusement écarté de toute étude mathématique, il n'y avait évidemment aucun signe pour le représenter. Il faudra attendre l'irruption du calcul infinitésimal pour qu'un tel signe apparaisse. Ce sera en 1655 avec John WALLIS dans un ouvrage intitulé "De sectionibus conicis" en ces termes : **Esto enim∞ nota numeri infiniti**. Mais il ne sera vraiment utilisé qu'au début du 18e siècle avec l'essor du calcul infinitésimal. (cf. CAJORI [29]). Comme souvent le signe deviendra objet lui-même, nombre avec lequel les gens calculerons, oubliant son sens : FONTENNELLE par exemple qui en prendra des puissances fractionnaire $\infty^{1/4}$, $\infty^{3/4}$, et jusqu'à cette surréaliste égalité que n'hésitera pas à écrire WRONSKI [31] encore au début du 19e siècle :

$\frac{2\infty}{\sqrt{-1}}\{(1+\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}} - (1-\sqrt{-1})^{\frac{1}{\infty}}\} = \pi$ et qui ferait la joie de beaucoup de nos élèves.

Ne sont-ils pas tentés, eux-aussi, d'écrire des égalités du style $\frac{1}{\infty} = 0$; $\frac{1}{0} = \infty$ etc... ?

Où l'histoire des mathématiques peut nous aider.

Deux tentations opposées me paraissent guetter le professeur de mathématique, tentations auxquelles une connaissance de l'histoire l'empêchera de céder.

La première consiste à nier purement et simplement l'histoire : "Du passé faisons table rase". Elle veur faire l'économie des hésitations, des détours, des impasses que celle-ci a fait faire à la science, pour jeter d'emblée l'élève dans l'abstraction des mathématiques d'aujourd'hui. C'est ce qui a été fait avec les programmes de 1970, ou du moins c'est ce que les auteurs de manuels en ont fait. L'échec fut retentissant : on avait oublié que - tout comme les générations de mathématiciens passées- l'élève doit d'abord rencontrer un concept nouveau dans une situation de problèmes, l'expérimenter, se heurter à des difficultés, avant d'être à même de saisir toute la richesse, la subtilité, la puissance d'une définition d'une théorie qui est le fruit de dizaines parfois de centaines d'années de travail de réflexion mathématique. Les hommes du 18e siècle étaient familiers avec cette idée, surtout ceux qui ont oeuvré à la mise en place d'une véritable instruction publique par la Révolution Française, idée qui veut que l'enseignement doit se faire dans une progression qui va du sensible, du concret vers l'abstrait. Ecoutons une dernière fois, à ce propos, un homme du 18e siècle.

Le 12 octobre 1792 le député du département du Bas-Rhin L.F.A. ARBOGAST présentait à la convention un "Rapport et projet de décret sur la composition des livres élémentaires destinés à l'instruction publique " [31]. En voici deux courts extraits :

"La méthode qui nous fait arriver aux découvertes est aussi celle qui est la plus propre à les communiquer aux autres ; car la chaine d'idées qui conduit l'inventeur peut faire comprendre, même aux esprits d'une capacité médiocre, l'objet inventé, pourvu qu'on le ^proportionne à l'intelligence de chacun, en développant toutes les idées intermédiaires entre le connu d'où l'on est parti, et l'inconnu où l'on veut atteindre" et plus loin :

"Que par une pente douce, on marche des idées sensibles aux idées abstraites ; qu'on place les jeunes gens dans les mêmes circonstances où nous nous sommes trouvés nous-mêmes, lorsque nous nous sommes formé des idées exactes, et alors les progrès deviendront rapides, parce que le travail, rendu plus facile, sera toujours accompagné de ce plaisir qui, des succès obtenus, porte vers des succès nouveaux".

L'apparition des calculatrices de poche, et maintenant des logiciels didactiques, devraient nous aider beaucoup dans cette voie. D'abord simples instruments de calcul, ils sont devenus des outils d'investigation, d'exploration qui en font des éléments irremplaçables dans la pédagogie des mathématiques. Mais ils représentent un danger qui se traduit par une autre tentation, à l'opposé de la précédente : celle de se cantonner à une sorte de mathématique expé-

rimentale d'observation, où la part de raisonnement est limitée à la portion congrue. Cette tentation est surtout celle de l'élève fasciné par un outil qui lui donne un sentiment extraordinaire de puissance, mais elle peut être plus ou moinss favorisée par le professeur. Il me semble alors que le rôle de celui-ci devra être avant tout de démolir les intuitions premières et si faciles qui sortent de la calculatrice, d'en faire sentir à l'élève les insuffisances et de l'amener ainsi à la conviction que le raisonnement absrait et rigoureux est nécessaire pour contrôler son intuition et structurer son savoir. De même qu'ARCHIMEDE découvrait avec son levier, et démontrait avec la méthode d'exhaustion, l'élève, après avoir observé, pourra conjecturer, mais surtout devra démontrer, sans quoi il n'y aurait plus de mathématiques. Le rôle d'un programme ne serait-il pas alors de mettre l'accent, moins sur un contenu, un ensemble de résultats à savoir, que sur des méthodes : méthodes de recherche et d'investigation en vue de la résolution de problème, méthodes de raisonnement et de démonstration, qui aideraient peut être mieux nos élèves à faire face aux nouvelles exigences d'un monde où le savoir spécialisé et inerte est si vite dépassé et inutile ? Ne devrait-il pas attacher une très grande attention à la question du sens des objets mathématiques, un sens non pas donné une fois pour toutes, mais qui au contraire se construit, s'étoffe, s'enrichit, un sens qui part de l'intuition sensible pour se préciser et se développer dans le raisonnement plus formalisé ?

BIBLIOGRAPHIE

[1] LAGRANGE. Théorie des Fonctions Analytiques 1797

[2] CANTOR Moritz. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik - réédition TEUBNER 1965

[3] Mémoires de l'Académie de BERLIN 1784

[4] FONTENELLE. Géométrie de l'Infini 1727

[5] EDWARDS. The Historical Development of the Calculus. 1979, SPRINGER-VERLAG

[6] L'HOSPITAL. Analyse des infiniment-petits pour l'intelligence des lignes courbes Réédition ACL Editions 1988

[7] EULER. Introduction à l'Analyse infinitésimale.Réédition ACL Editions 1987

[8] BLAY. Revue d'Histoire des Sciences n° 39-3 (1986)

[9] CARNOT. Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal 1797. Réédité chez Blanchard 1970

[10] MISCELLANAE TAURINENSIS. Tome II 1760-1761

[11] HOUZEL-OVAERT et RAYMOND-SANSUC. Philosophie et Calcul de l'Infini. Maspero 1976.

[12] KANT. Studien. 1928. Article de HASSE-SCHOLZ "Die Grundlagen Krisis der Grie chischen Mathematik"

[13] SZABO. Les débuts des mathématiques grecques. VRIN 1977

[14] CAVEING. Zénon d'Elée, polégomènes aux doctrines du continu. VRIN 1982

[15] DE SANTI JT : "Une crise de développement exemplaire : La Découverte des nombres irrationnels.Encyclopédie de la PLEIADE Logique et Connaissance Scientifique 1967

[16] GARDIES. Revue d'Histoire des Sciences n° 37 année 1984 : Eudoxe et Dedekind

[17] Groupe Inter-Irem d'Histoire des mathématiques : Mathématiques au fil des âges. Gauthiers-Villars 1987

[18] DHOMBRES. Nombre et Mesure et Continu. Cédic-Fernand Nathan 1978

[19] EULER. "De l'utilisation des fonctions discontinues en Analyse. Traduction DHOMBRES. Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques 1987

[20] D'ALEMBERT. Dans l'Encyclopédie 1768 réédition ACL Editions 1988.

[21] ARBOGAST. Lettre manuscrite. Archives départementales du Bas Rhin.

[22] LAGRANGE. "Sur une nouvelle espèce de calcul ..." 1772

[23] GILLISPIE-YOUSCHEKEVITCH. Lazare Carnot Savant. VRIN 1970

[24] L'HUILIER. Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs 1786

[25] CAVAILLES. Philosophie Mathématique. HERMANN 1962.

[26] BACHELARD. La formation de l'esprit scientifique. VRIN 1986

[27] CAUCHY. Analyse Algébrique 1821

[28] COUTURAT. De l'infini mathématique. Réedition chez Blanchard 1973

[29] CAJORI. A history of mathematical notations. Réimp. Open Court La Salle 1974

[30] WRONSKI. Réfutation de la théorie des fonctions analytiques. 1815

[31] ARBOGAST. Rapport et projet de décret sur la composition des livres élémentaires destinés à l'instruction publique - publié par ACL Editions avec CONDORCET : Moyens d'apprendre à compter sûrement et avec sécurité. 1989

PRIX
proposés par l'Académie Royale des Sciences & Belles-Lettres pour l'Année 1786.

La Classe de Belles-Lettres avoit proposé pour le sujet du prix de l'année 1784 la Question suivante:

Qu'est-ce qui a fait de la Langue françoise la Langue universelle de l'Europe?
Par où mérite-t-elle cette prérogative?
Peut-on présumer qu'elle la conserve?

Les Pieces envoyées au concours ayant été examinées par Mrs. les Membres de la Classe de Belles-Lettres, l'Académie, en conséquence de leur rapport, a déclaré dans l'Assemblée publique du 3 Juin 1784, que le Prix seroit partagé entre deux Mémoires, l'un en Allemand, ayant pour devise,

Gallis ingenium, Gallis dedit ore rotundo Musa loqui;

& l'autre en François, avec la devise,

Tu regere eloquio populos, o Galle, memento.

L'Auteur du premier est M. *Jean Christophle Schwab*, Professeur de Philosophie à l'Académie Caroline de Stuttgard; celui du second, M. le Comte *de Rivarol*, à Paris.

La Classe de Mathématique propose la question pour le Prix qui sera décerné en 1786.

L'utilité qu'on retire des Mathématiques, l'estime qu'on a pour elles, & l'honorable dénomination de *Sciences exactes* par excellence qu'on leur donne à juste titre, sont dues à la clarté de leurs principes, à la rigueur de leurs démonstrations, & à la précision de leurs théoremes.

Pour assurer à cette belle partie de nos connoissances la continuation de ces précieux avantages, on demande

Une théorie claire & précise de ce qu'on appelle Infini *en Mathématique.*

On sait que la haute Géométrie fait un usage continuel des *infiniment grands* & des *infiniment petits.* Cependant les Géometres, & même les Analystes anciens, ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini; & de grands Analystes modernes avouent que les termes *grandeur infinie* sont contradictoires.

L'Académie souhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théoremes vrais d'une supposition contradictoire, & qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être substitué à l'*Infini*, sans rendre trop difficiles, ou trop longues, les recherches qu'on expédie par ce moyen. On exige que cette matiere soit traitée avec toute la généralité, & avec toute la rigueur, la clarté & la simplicité possibles.

On invite les Savants de tout pays, excepté les Membres ordinaires de l'Académie, à travailler sur cette Question. Le Prix, qui consiste en une Médaille d'or du poids de cinquante Ducats, sera donné à celui qui, au jugement de l'Académie, aura le mieux réussi. Les Pieces, écrites d'un caractere lisible, seront adressées franches de port à Mr. le Conseiller privé *Formey*, Secrétaire perpétuel de l'Académie.

Le terme pour les recevoir est fixé jusqu'au 1. de Janvier 1786; après quoi on n'en recevra absolument aucune, quelque raison de retardement qui puisse être alléguée en sa faveur.

On prie les Auteurs de ne point se nommer, mais de mettre simplement une Devise, à laquelle ils joindront un Billet cacheté, qui contiendra, avec la Devise, leur nom & leur demeure.

On a été averti par le Programme de l'année précédente, que la Classe de Philosophie expérimentale avoit proposé pour le prix de 1785 la Question suivante:

Établir par des expériences exactes, décrites avec clarté & précision, la théorie de la fermentation, de la décomposition qu'elle fait éprouver aux corps qui la subissent, & de la nouvelle composition des principes qui en résultent dans ses différents périodes.

Le terme pour recevoir les Pieces est fixé jusqu'au 1 de Janvier 1785.

La Classe de Philosophie spéculative avoit proposé pour le sujet du Prix de l'année 1783 la Question suivante.

On demande:

Quelle est la meilleure maniere de rappeler à la raison les nations tant sauvages que policées, qui sont livrées à l'erreur & aux superstitions de tout genre?

Ce Prix a été renvoyé à l'année 1785: les Pieces seront reçues jusqu'au 1 Janvier de ladite année.

On trouvera dans le Programme susdit les Observations qui concernent la maniere de traiter ces deux dernieres Questions.

La Classe de Philosophie expérimentale a proposé pour l'année 1785 une nouvelle Question relative au prix fondé par feu M. *Eller*. En voici l'énoncé.

A proprement parler, il n'y a point de mauvaises herbes ou d'ivroie dans la nature, c'est à dire, qu'il n'y a point de végétal qui soit tout à fait inutile, ni à tous égards nuisible. Cependant

On demande:

1. *Ce qu'on entend par ivroie en général, & surtout en fait d'agriculture, pour les champs, jardins, prairies, pâturages & forêts?*

Evolution des programmes d'analyse en Première C ou scientifique depuis 1945

PROGRAMMES DU 15 SEPTEMBRE 1945

Classes de 1ère C et Moderne

Algèbre

I. Etude de l'équation et du trinome du second degré ; existence et calcul des racines ; signe des racines. Inéquation du second degré.

Recherche de deux nombres dont on donne la somme et le produit.

II. Variation du trinome du second degré. Représentation graphique.

Variation de la fonction homographique. Représentation graphique.

III. Définition et signification de la dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable.

Application à la détermination des tangentes aux courbes représentatives du trinome du second degré et de la fonction homographique.

(L'étude du sens de variation d'une fonction au moyen du signe de la dérivée n'est pas au programme).

Equation horaire d'un mouvement rectiligne. Mouvement rectiligne uniforme ; valeur algébrique de la vitesse. Mouvement rectiligne uniformément varié défini par une équation horaire ; valeur algébrique de la vitesse à un instant donné.

Diagrammes de ces mouvements.

IV. Problèmes conduisant à la résolution d'une équation du premier ou du second degré ou d'un système de deux équations du premier degré.

PROGRAMMES DU 2 MAI 1961 : ALGÈBRE, TRIGONOMÉTRIE ET NOTIONS D'ANALYSE

I. — Polynome du second degré et fonction homographique.

1° Revision de l'étude, faite dans la classe de Seconde, du polynome du second degré, de l'équation et de l'inéquation du second degré, de la fonction : $y = ax^2 + bx + c$ et de sa représentation graphique.

Comparaison d'un nombre aux racines d'une équation du second degré.

2° Transformation de la fraction rationnelle $\frac{ax+b}{cx+d}$ conduisant à la forme $\frac{a}{c} + \frac{k}{x-h}$.

Fonction (homographique) $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ de la variable x : existence, sens de variation, étude lorsque x tend vers l'infini ou vers $\left(-\frac{d}{c}\right)$; représentation graphique dans un système de coordonnées cartésiennes (non nécessairement normé) ; symétries de la courbe représentative.

II. — Dérivées.

En ce qui concerne la notion de limite, déjà rencontrée dans l'étude des fonctions précédentes, on se bornera à donner les définitions indispensables, ainsi que l'énoncé des propriétés utilisées ; la démonstration de ces propriétés est en dehors du programme.

1° Dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable ; fonction dérivée.

Dérivée d'une fonction constante, d'une somme de fonctions dérivables, du produit et du quotient de deux fonctions dérivables ; dérivée d'un polynome.

2° Interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction dont la courbe représentative est rapportée à un repère cartésien (non nécessairement normé) ; équation de la tangente en un point de cette courbe.

3° Énoncé, sans démonstration, du théorème permettant de déduire le sens de variation d'une fonction sur un intervalle du signe de sa dérivée.

Application aux fonctions $y = ax^2 + bx + c$, $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ déjà étudiées.

Étude, uniquement sur des exemples numériques, de fonctions de la forme :

$$y = x^3 + px + q \quad \text{et} \quad y = ax^4 + bx^2 + c ;$$

courbes représentatives (repère orthonormé).

4° Définition de la dérivée seconde (en vue de l'étude des mouvements rectilignes).

III. — Fonctions circulaires.

1° Extension de la notion d'arc de cercle. Arc orienté. Mesure algébrique d'un arc orienté sur un cercle orienté.

Extension de la notion d'angle de deux demi-droites (ou de deux vecteurs) dans un plan. Angle orienté de deux demi-droites. Mesure algébrique d'un angle orienté de deux demi-droites dans un plan orienté.

PROGRAMME DE MATHÉMATIQUES

classe de 1re C

Arrêté du 8 juin 1966

NOTIONS GÉNÉRALES

Un certain nombre des notions qui suivent auront été, bien entendu, dégagées peu à peu au cours des années précédentes ; la présente énumération fixe le bilan de ce qui doit être définitivement acquis à la fin de l'année de Première C.

Ensembles ; sous-ensemble, ensemble vide ; inclusion, intersection, réunion ; sous-ensembles complémentaires ; algèbre des parties d'un ensemble fini. Produit cartésien de deux ensembles.

Relation binaire entre éléments de deux ensembles ; relation d'équivalence entre éléments d'un ensemble, classes d'équivalence, ensemble-quotient ; relation d'ordre entre éléments d'un ensemble.

Application d'un ensemble dans un ensemble ; application injective, surjective ; application bijective ; application réciproque ; composition de deux applications.

Vocabulaire de la logique ; implication, équivalence logique, réciproque. Signification des quantificateurs « quel que soit » et « il existe ».

ALGÈBRE ET NOTIONS D'ANALYSE

I. - Généralités sur les fonctions numériques d'une variable réelle.

Ensemble d'existence ; fonction croissante sur un intervalle, fonction décroissante, fonction constante.

Représentation graphique d'une fonction.

Continuité d'une fonction en un point ; notion de limite (on admettra sans démonstration tous les théorèmes utilisés).

Dérivée d'une fonction pour une valeur donnée de la variable ; différentielle. Fonction dérivée. Calcul de la dérivée d'une fonction constante, de la somme, du produit, du quotient de deux fonctions dérivables (le théorème sur la dérivée d'une fonction composée est hors du programme).

Interprétation géométrique de la dérivée d'une fonction dont la courbe représentative est rapportée à un repère cartésien ; équation de la tangente.

Définition de la dérivée seconde.

Énoncé, sans démonstration, du théorème permettant de déduire le sens de variation d'une fonction, sur un intervalle, du signe de sa dérivée.

II. - Fonctions polynômes, fonctions rationnelles.

(coefficients réels et variables réelles).

1° Fonctions polynômes : forme réduite, degré.

Identité (on pourra admettre que l'égalité numérique pour toutes les valeurs des variables entraîne l'égalité des coefficients des formes réduites). Polynôme nul.

2° Polynômes à une variable x ; division par $x - a$; application aux polynômes $x^n \pm a^n$.

3° Fonction rationnelle définie comme fonction quotient d'un polynôme par un autre ; domaine d'existence.

4° Étude et représentation graphique des fonctions définies par

$$y = ax^2 + bx + c, \quad y = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad y = x^3 + px + q, \quad y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

$$y = ax^4 + bx^2 + c, \quad y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'} \quad (a' \neq 0 \text{ et } a'^2 + b'^2 \neq 0),$$

uniquement sur des exemples numériques.

III. - Fonctions circulaires.

1° Extension de la notion d'arc de cercle. Arc orienté, somme de deux arcs orientés. Mesure algébrique d'un arc orienté sur un cercle orienté.

Extension de la notion d'angle de deux demi-droites (ou de deux vecteurs) dans un plan. Angle orienté de deux demi-droites. Mesure algébrique d'un angle orienté de deux demi-droites dans le plan orienté.

Formule de Chasles pour les arcs de cercle orientés et pour les angles orientés de deux demi-droites. Arcs (ou angles) opposés, supplémentaires, complémentaires.

Cercle trigonométrique. Sinus, cosinus, tangente, cotangente d'un arc (ou d'un angle de demi-droites) orienté.

2° Fonctions circulaires $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ de la variable numérique x : définition, existence, périodicité.

Relations entre $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$. Relations entre les fonctions circulaires de

$$x, \quad -x, \quad \pi \pm x, \quad \frac{\pi}{2} \pm x.$$

3° Équations $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\operatorname{tg} x = a$.

MATHEMATIQUE/CLASSES DE PREMIERE C, D, E

1970 (extrait)

Horaire hebdomadaire :

section C : 6 heures,
section D : 5 heures,
section E : 6 heures.

Programme :

Arrêté du 19 mars 1970.

SECTION C

I. — Notions générales.

1. Applications injectives, surjectives, bijectives; composition des applications.

2. En vue de la statistique et du calcul des probabilités : ensemble des parties d'un ensemble (cf. chap. VII).

3. Application d'un ensemble fini vers un ensemble fini; cas des applications injectives et bijectives, leur dénombrement; parties à p éléments d'un ensemble fini, leur dénombrement.

II. — Fonctions numériques d'une variable réelle.

1. Continuité « en un point » d'une fonction. Limite d'une fonction.
(On se bornera aux définitions indispensables, illustrées d'exemples et de contre-exemples; à l'énoncé, sans démonstration, des théorèmes relatifs aux limites de somme, produit, quotient de fonctions.)

2. Fonction linéaire tangente en un point à une fonction donnée; dérivée en ce point.
Fonction dérivée; calcul de la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient de fonctions dérivables.
Interprétation géométrique de la dérivée (repère cartésien); équation de la tangente.
Interprétation cinématique de la dérivée : mouvement rectiligne du point; définition de la vitesse et de l'accélération.

3. Applications.
En s'appuyant sur le théorème énoncé sans démonstration, permettant de déduire, du signe de la dérivée d'une fonction dans un intervalle, le sens de variation de cette fonction sur cet intervalle :
a) étude, uniquement sur des exemples, de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles. Représentation graphique. On pourra faire constater aux élèves, à propos d'exemples numériques, l'existence d'asymptotes obliques; aucune méthode de recherche n'est au programme;
b) étude de mouvements rectilignes : mouvement rectiligne uniforme, uniformément varié, vibratoire simple.

III. — Équations et inéquations.

1. Sur des exemples : étude d'équations et d'inéquations du premier et du second degré; étude de systèmes d'équations à plusieurs inconnues.
Étude de problèmes dont la résolution conduit à des équations ou des inéquations du premier et du second degré.

2. Usage de tables numériques, de la règle à calcul et de machines à calculer.

IV. — Géométrie vectorielle et géométrie affine.

1. Espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$; définition et exemples (révision). Sous-espace vectoriel. Vecteurs linéairement dépendants, indépendants. Base.

2. Coordonnées d'un vecteur dans une base donnée; coordonnées d'une somme de vecteurs, du produit d'un vecteur par un nombre réel.
Condition de dépendance de deux vecteurs.

3. Si un espace vectoriel admet une base de n éléments, toute autre base possède n éléments; dimension d'un espace vectoriel, plan vectoriel.
Dimension d'un sous-espace vectoriel; intersection de deux sous-espaces vectoriels. (On se bornera à $n = 1$, 2, ou 3.)

4. Matrice, dans une base donnée, d'une application linéaire d'un plan vectoriel dans lui-même. Composition de ces applications linéaires et multiplication des matrices 2×2; déterminant d'une matrice 2×2.

5. Espace affine de dimension 2 ou 3. Translations.
Droites et plans affines, intersections, parallélisme.
Repère cartésien; changement d'origine; représentations paramétriques de droites et de plans. Équation cartésienne du plan.

V. — Produit scalaire et fonctions circulaires.

1. Produit scalaire (espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 2 ou 3).
Norme d'un vecteur : inégalité de Cauchy-Schwarz; inégalité triangulaire.
Orthogonalité de deux droites vectorielles, d'une droite et d'un plan vectoriels.
Bases orthonormées; existence. Expression analytique du produit scalaire de deux vecteurs définis par leurs coordonnées dans une telle base.

2. Applications linéaires du plan vectoriel dans lui-même conservant le produit scalaire. Leurs matrices dans une base orthonormée sont du type : (1) $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ou (2) $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ avec $a^2 + b^2 = 1$. Les matrices du type (1) forment un groupe commutatif; a et $|\, b \,|$ ne dépendent que de l'application et non du choix de la base : groupe des rotations vectorielles. Étant donné deux vecteurs unitaires $\vec{x}$ et $\vec{y}$, il existe une rotation vectorielle unique φ telle que $\vec{y} = \varphi(\vec{x})$.

3. Bases orthonormées donnant la même valeur au coefficient b de la matrice d'une rotation vectorielle φ. Orientation du plan vectoriel euclidien. Le plan vectoriel euclidien étant orienté, cosinus et sinus d'une rotation vectorielle; notations cos φ et sin φ.
Cosinus et sinus de la composée de deux rotations vectorielles.

4. Angle de deux demi-droites vectorielles D, D′ (unique rotation vectorielle amenant D sur D′) dans le plan vectoriel euclidien. Angle de deux vecteurs. Calcul du cosinus et du sinus de l'angle de deux vecteurs donnés par leurs coordonnées (base orthonormée, plan vectoriel euclidien orienté). Rotations vectorielles et angles remarquables. Formules d'addition, le groupe des angles étant noté additivement.

5. Cercle trigonométrique U. Définition. Bijection du groupe

Premières S et F - Programme 1982 (extrait)

I. SUITES NUMÉRIQUES

a) Exemples de suites définies par des procédés divers : valeurs d'une fonction; méthodes itératives faisant intervenir la différence ou le rapport de deux termes consécutifs.

Suites monotones. Suites périodiques.

Exemples de suites tendant vers l'infini ; cas de la suite $(n\ a)$, $a \in \mathbb{R}^+_*$ donné. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$p\,a \leqslant x < (p+1)\,a$$

b) Suites arithmétiques. Suites géométriques :

Sur les exemples types $n \longmapsto n$, $n \longmapsto a^n$, on calculera les sommes de rang n, en vue d'applications numériques.

c) Convergence d'une suite vers 0 : définition ; les suites qui convergent vers 0 sont bornées ; stabilité de la convergence vers 0 pour l'addition et pour la multiplication par une suite bornée (énoncés admis).

Convergence d'une suite : on dira que l est limite de la suite (u_n) si $\lim (u_n - l) = 0$. La limite d'une suite convergente de réels positifs est positive.

Justification d'une convergence vers 0 à l'aide d'une majoration ; des exemples simples, tels que $|u_n| \leqslant \frac{k}{n'}$ $|u_n| \leqslant \frac{k}{10^{n'}}$ permettront d'apprécier la rapidité de diverses convergences.

Thèmes (à titre indicatif) :

Exemples d'encadrements d'un nombre réel exprimant une mesure (aire, volume,...).

Exemples d'approximation (notamment par des suites adjacentes) d'un nombre réel solution d'une équation.

Développements décimaux ; un développement décimal périodique caractérise un rationnel.

II. FONCTIONS NUMÉRIQUES

Les premiers éléments de l'étude d'une fonction (majorations, minorations, monotonie; sens de variation) ont été mis en place en Seconde; on fera ressortir toute l'importance de l'étude numérique et de la représentation graphique.

On illustrera l'étude des propriétés qui vont suivre au moyen des fonctions déjà étudiées en Seconde, et d'exemples numériques de fonctions affines par morceaux, de fonctions polynômes ou encore de fonctions telles que $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ *et* $x \longmapsto \sqrt{ax+b}$.

a) Applications définies sur un intervalle ; opérations sur ces applications.

Notation $f \geqslant 0$, $f \geqslant g$; applications bornées.

Notion d'application bijective (liée à la discussion d'une équation $f(x) = y$, où x est l'inconnue).

b) Exemples d'étude conjointe de deux fonctions : l'une d'elles étant f, l'autre est par exemple : $|f|$, λf, $x \longmapsto f(x-\lambda)$, $x \longmapsto f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$.

Fonctions composées.

c) Limite d'une fonction en un point : on commencera par le cas de la limite au point 0 ; on définira $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ par $\lim_{h \to 0} f(a+h) = 0$; on dira que l est limite de la fonction f au point a si $\lim_{x \to a} (f(x) - l) = 0$; on admettra des énoncés analogues à ceux qui ont été cités en I c.

Continuité en un point (développement limité d'ordre zéro) ; continuité sur un intervalle. Toute étude systématique de la continuité est hors du programme.

d) Développement limité d'ordre un ; nombre dérivé, interprétations cinématique (vitesse) et géométrique (tangente) ; fonction dérivable sur un intervalle.

Règles de dérivation de la somme, du produit de deux fonctions, de l'inverse d'une fonction (cette dernière règle pourra être admise).

Dérivée de $x \longmapsto f(ax+b)$.

e) Applications des dérivées à l'étude du sens de variation d'une fonction, à la recherche d'extremums, à la résolution d'équations et inéquations. On s'appuiera sur les trois propositions suivantes, qu'à ce niveau il est hors de propos de démontrer :

Si f est dérivable sur l'intervalle I et si sa dérivée f' est nulle sur I, alors f est constante sur I ;

Si f est dérivable sur I et si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.

Si f est dérivable sur $[a, b]$ $(a < b)$ et si f' est à valeurs strictement positives sur $]a, b[$, alors f établit une bijection strictement croissante de $[a, b]$ sur $[f(a), f(b)]$.

Primitives d'une fonction continue : on admettra qu'une fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I, et on démontrera que chacune d'elles est déterminée par sa valeur en un point de I.

Cette notion de primitive permettra d'introduire la fonction logarithme népérien dès le début de la classe Terminale.

f) Etude des fonctions sinus et cosinus : périodicité, parité, dérivées et primitives, représentations graphiques.

Thèmes (à titre indicatif) :

Problèmes simples d'optimisation se ramenant à la recherche d'extremums de fonctions d'une variable.

Recherche de limites de suites ou de fonctions à l'aide de développements limités d'ordre un.

Programme	Commentaire
b) *Majorations ; encadrements*	
Terminologie concernant les approximations d'un nombre réel a : Un encadrement de a est un couple (b, c) tel que $b \leqslant a \leqslant c$; On dit que a' est une valeur approchée de a à la précision 10^{-p} lorsque $a' - a \leqslant 10^{-p}$; Ecriture de a en notation scientifique : $a = \alpha . 10^k$, où $1 \leqslant \lvert\alpha\rvert < 10$. Positions relatives des nombres $x, x^2, x^3, \sqrt{x}$ selon que $x \geqslant 1$ ou $0 \leqslant x \leqslant 1$ (en relation avec la représentation des fonctions).	Pour les équations linéaires, il convient de se limiter à des systèmes de taille très modeste. La méthode du pivot de Gauss est à pratiquer sur des exemples, mais sa description générale n'est pas au programme. Ces notions ne sont pas des objets d'étude en soi : elles interviennent dans les problèmes d'approximation. On pourra évaluer, sur des exemples, la précision obtenue pour une somme ou un produit ; mais toute étude générale du calcul des approximations est exclue et aucun énoncé de résultats à ce propos n'est exigible des élèves.
Travaux pratiques Exemples de majorations, d'encadrements et d'approximations portant sur des nombres, des suites ou des fonctions sur un intervalle donné.	Il est souhaitable de choisir des situations simples mettant en valeur l'utilité des majorations et des encadrements obtenus.

II. SUITES ET FONCTIONS NUMÉRIQUES

1. Suites numériques

L'objectif principal est de familiariser les élèves avec la description de situations discrètes simples à l'aide de suites, de mettre ainsi en évidence quelques modes de génération de suites et quelques résultats sur le comportement global et asymptotique des suites.

Programme	Commentaire
a) *Exemples de modes de génération de suites*	
Suite des valeurs $f(n)$ d'une fonction ; Suite définie par une relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et la valeur initiale u_0. Suites croissantes, suites décroissantes.	Un élève doit savoir : Dans une suite $u_n = f(n)$, exprimer des termes tels que u_{n+1}, u_{n+3}, u_{2n} en fonction de n : Dans une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ et u_0, calculer les premiers termes.
Suites arithmétiques et géométriques, définies respectivement par $u_{n+1} = u_n + a$ et $u_{n+1} = bu_n$. Calcul de $1 + 2 + \ldots + n$ et de $1 + b + b^2 + \ldots + b^n$.	L'étude des opérations sur les suites est en dehors du programme. Aucune connaissance n'est exigible sur les suites récurrentes. En dehors du cas des suites arithmétiques et géométriques, tout exemple de suite définie par additions ou multiplications répétées, telles que $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ ou $u_n = n!$, est exclu.
b) *Etude d'une suite pour les grandes valeurs de n, langage des limites*	
α) Après observation des suites de terme général $n, n^2, n^3, \sqrt{n}, b^n$, où b est un entier strictement supérieur à 1, on dit que ces suites tendent vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. Lorsqu'on a établi une minoration de la forme $u^n \geqslant \lambda a^n$ à partir d'un certain rang, où (a^n) désigne une des suites de référence ci-dessus et λ un réel strictement positif, on dit que la suite (u^n) tend vers $+\infty$, ce qu'on note $\lim_{n \to +\infty} u^n = +\infty$. β) Après observation des suites de terme général $\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{\sqrt{n}}, \frac{1}{b^n}$, on dit que ces suites tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Si on a établi une majoration de la forme $\lvert u^n - L\rvert \leqslant \lambda \alpha^n$ à partir d'un certain rang, où (α^n) désigne l'une des suites de référence convergeant vers zéro, on dit que la suite (u^n) converge vers L, ce qu'on note $\lim_{n \to +\infty} u^n = L$. (l'unicité de la limite est admise).	La définition des limites par (A, N) ou (ε, N) est en dehors du programme ainsi que le théorème de convergence des suites croissantes majorées. Il est important que les élèves sachent classer entre elles les suites de référence, mais aucune démonstration n'est exigible à ce sujet. Les élèves n'ont pas à connaître l'étude du comportement asymptotique des suites géométriques (b^n) lorsque b n'est pas entier. Dans les problèmes de limites, les seules capacités exigibles des élèves portent sur l'étude de suites $u^n = f(n)$ pour lesquelles une des minorations ou majorations indiquées dans le programme permet de conclure et est facile à obtenir.
Travaux pratiques Exemples d'étude de problèmes conduisant à des suites arithmétiques ou géométriques. Exemples d'étude du comportement de suites de la forme $u^n = f(n)$ (encadrements, monotonie, limite).	

comme un vrai polygone, quel que puisse être le nombre de ses côtés, il a dû résulter de cette hypothèse une erreur quelconque dans l'équation

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO},$$

et que le résultat $TP = \frac{y^2}{a-x}$ étant néanmoins certainement exact, comme on le prouve par la comparaison des deux triangles CPM, MPT, on a pu négliger MO et NO dans la première équation, et même on a dû le faire pour rectifier le calcul, et détruire l'erreur à laquelle avait donné lieu la fausse hypothèse d'où l'on était parti. Négliger les quantités de cette nature est donc non seulement permis en pareil cas, mais il le faut, et c'est la seule manière d'exprimer exactement les conditions du problème.

9. Le résultat exact $TP = \frac{y^2}{a-x}$ n'a donc été obtenu que par une compensation d'erreurs, et cette compensation peut être rendue plus sensible encore, en traitant l'exemple rapporté ci-dessus d'une manière un peu différente, c'est-à-dire en considérant le cercle comme une véritable courbe, et non pas comme un polygone.

Pour cela, par un point R, pris arbitrairement à une distance quelconque du point M, soit menée la ligne RS parallèle à MP, et par les points R et M soit tirée la sécante RT'; nous aurons évidemment T'P : MP : : MZ : RZ, et partant T'P, ou

$$TP + TT = MP\,\frac{MZ}{RZ}.$$

Cela posé, si nous imaginons que RS se meuve parallèlement à elle-même en s'approchant continuellement de MP, il est visible que le point T' s'approchera en même temps de plus en plus du point T, et qu'on pourra par conséquent rendre la ligne T'T aussi petite qu'on voudra, sans que la proportion établie ci-dessus cesse d'avoir lieu. Si donc je néglige cette quantité T'T dans l'équation que je viens de trouver, il en résultera à la vérité une erreur dans l'équation $TP = MP\,\frac{MZ}{RZ}$, à laquelle la première sera alors réduite; mais cette erreur pourra être atténuée autant qu'on

6. Quelque vagues et peu précises que puissent donc paraître ces deux expressions de *très grand* et de *très petit*, ou autres équivalentes, on voit, par les deux exemples précédents, que ce n'est pas sans utilité qu'on les emploie dans les combinaisons mathématiques, et que leur usage peut être d'un grand secours pour faciliter la solution des diverses questions qui peuvent être proposées; car leur notion une fois admise, toutes les courbes pourront aussi bien que le cercle être considérées comme des polygones d'un grand nombre de côtés, toutes les surfaces pourront être partagées en une multitude de bandes ou zones, tous les corps en corpuscules, toutes les quantités, en un mot, pourront être décomposées en particules de même espèce qu'elles. De là naissent beaucoup de nouveaux rapports et de nouvelles combinaisons, et l'on peut juger aisément, par les exemples cités plus haut, des ressources que doit fournir au calcul l'introduction de ces quantités élémentaires.

7. Mais l'avantage qu'elles procurent est bien plus considérable encore qu'on n'avait d'abord eu lieu de l'espérer, car il suit des exemples rapportés que ce qui n'avait été regardé en premier lieu que comme une simple méthode d'approximation conduit, au moins en certains cas, à des résultats parfaitement exacts. Il serait donc intéressant de savoir distinguer ceux où cela arrive, d'y ramener les autres autant qu'il est possible, et de changer ainsi cette méthode d'approximation en un calcul parfaitement exact et rigoureux. Or, tel est l'objet de l'analyse infinitésimale.

8. Voyons donc d'abord comment dans l'équation

$$TP = \frac{y(2y + NO)}{2a - 2x - MO}$$

trouvée (3) il a pu se faire que, en négligeant MO et NO, on n'ait point altéré la justesse du résultat, ou plutôt comment ce résultat est devenu exact par la suppression de ces quantités, et pourquoi il ne l'était pas auparavant.

Or, on peut rendre fort simplement raison de ce qui est arrivé dans la solution du problème traité ci-dessus, en remarquant que l'hypothèse d'où l'on est parti étant fausse, puisqu'il est absolument impossible qu'un cercle puisse être jamais considéré

le voudra, en faisant approcher autant qu'il sera nécessaire R de MP, c'est-à-dire que le rapport des deux membres de cett équation différera aussi peu qu'on voudra du rapport d'égalité

Pareillement nous avons $\frac{MZ}{RZ} = \frac{2y + RZ}{2a - 2x - MZ}$, et cette équation est parfaitement exacte, quelle que soit la position du point R, c'est-à-dire quelles que soient les valeurs de MZ et de RZ. Mais plus RS approchera de MP, plus ces lignes MZ et RZ seront petites, et partant, si on les néglige dans le second membre de cette équation, l'erreur qui en résultera dans l'équation

$$\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x},$$

à laquelle elle sera réduite alors, pourra, comme la première, être rendue aussi petite qu'on le jugera à propos.

Cela étant, sans avoir égard à des erreurs que je serai toujours maître d'atténuer autant que je le voudrai, je traite les deux équations

$$TP = MP\,\frac{MZ}{RZ} \text{ et } \frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$$

que je viens de trouver comme si elles étaient parfaitement exactes l'une et l'autre; substituant donc dans la dernière la valeur de $\frac{MZ}{RZ}$ tirée de l'autre, j'ai pour résultat $TP = \frac{y^2}{a-x}$ comme ci-dessus.

Ce résultat est parfaitement juste, puisqu'il est conforme à celui qu'on a obtenu par la comparaison des triangles CPM, MPT; et cependant les équations $TP = y\,\frac{MZ}{RZ}$ et $\frac{MZ}{RZ} = \frac{y}{a-x}$, d'où il a été tiré, sont certainement fausses toutes deux, puisque la distance de RS à MP n'a point été supposée nulle, ni même très petite, mais bien égale à une ligne quelconque arbitraire. Il faut par conséquent de toute nécessité que les erreurs se soient compensées mutuellement par la comparaison des deux équations erronées.

3. Par exemple, soit proposé de mener une tangente au point donné M de la circonférence MBD (Fig. 1).

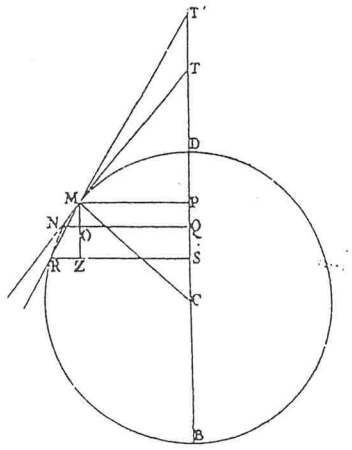


Fig. 1.

Soit C le centre du cercle, DCB l'axe ; supposons l'abscisse $DP = x$, l'ordonnée correspondante $MP = y$, et soit TP la sous-tangente cherchée.

Pour la trouver, considérons le cercle comme un polygone d'un très grand nombre de côtés ; soit MN un de ces côtés, prolongeons-le jusqu'à l'axe ; ce sera évidemment la tangente en question, puisque cette ligne ne pénétrera pas dans l'intérieur du polygone ; abaissons de plus la perpendiculaire MO sur NQ, parallèle à MP, et nommons a le rayon du cercle ; cela posé, nous aurons évidemment

$$\text{MO} : \text{NO} : : \text{TP} : \text{MP} \text{ ou } \frac{\text{MO}}{\text{NO}} = \frac{\text{TP}}{y}$$

D'une autre part, l'équation de la courbe étant pour le point M, $yy = 2ax - xx$, elle sera pour le point N

$$(y + \text{NO})^2 = 2a(x + \text{MO}) - (x + \text{MO})^2 ;$$

ôtant de cette équation la première, trouvée pour le point M, et réduisant, on a

$$\frac{\text{MO}}{\text{NO}} = \frac{2y + \text{NO}}{2a - 2x - \text{MO}} ;$$

égalant donc cette valeur de $\frac{\text{MO}}{\text{NO}}$ à celle qui a été trouvée ci-dessus, et multipliant par y, il vient

$$\text{TP} = \frac{y(2y + \text{NO})}{2a - 2x - \text{MO}}.$$

Si donc MO et NO étaient connues, on aurait la valeur cherchée de TP ; or ces quantités MO, NO sont très petites, puisqu'elles sont moindres chacune que le côté MN, qui, par hypothèse, est lui-même très petit. Donc (2) on peut négliger sans erreur sensible ces quantités par comparaison aux quantités $2y$ et $2x - 2a$ auxquelles elles sont ajoutées. Donc l'équation se réduit à $\text{TP} = \frac{y^2}{a - x}$, ce qu'il fallait trouver.

4. Si ce résultat n'est pas absolument exact, il est au moins évident que dans la pratique il peut passer pour tel, puisque les quantités MO, NO sont extrêmement petites ; mais quelqu'un qui n'aurait aucune idée de la doctrine des infinis serait peut-être fort étonné, si on lui disait que l'équation $\text{TP} = \frac{y^2}{a - x}$, non seulement approche beaucoup du vrai, mais est réellement de la plus parfaite exactitude ; c'est cependant une chose dont il est aisé de s'assurer en cherchant TP, d'après ce principe que la tangente est perpendiculaire à l'extrémité du rayon, car il est visible que les triangles semblables CPM, MPT donnent CP : MP : : MP : TP ; d'où l'on tire $\text{TP} = \frac{\text{MP}^2}{\text{CP}} = \frac{y^2}{a - x}$, comme ci-dessus.

5. Pour second exemple, supposons qu'il soit question de trouver la surface d'un cercle donné.

Considérons encore cette courbe comme un polygone régulier d'un grand nombre de côtés ; l'aire d'un polygone régulier quelconque est égale au produit de son périmètre par la moitié de la perpendiculaire menée du centre sur l'un des côtés, donc le cercle étant considéré comme un polygone d'un grand nombre de côtés, sa surface doit être égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon, proposition qui n'est pas moins exacte que le résultat trouvé ci-dessus.

L'HUILIER

Exposition élémentaire des principes supérieurs

§. I.

1ª *Définition.* Soit une quantité variable, toujours plus petite ou toujours plus grande qu'une quantité constante proposée; mais qui puisse différer de cette dernière moins que d'aucune quantité proposée plus petite qu'elle: cette *quantité* constante est dite la *limite* en grandeur ou en petiteſſe de la quantité variable.

2ª *Définition.* Soit un rapport variable toujours plus petit qu'un rapport donné, mais qui puiſſe être rendu plus grand qu'aucun rapport aſſigné plus petit que ce dernier: le *rapport* donné eſt appelé la *limite en grandeur* du rapport variable. Item; ſoit un rapport variable toujours plus grand qu'un rapport donné; mais qui puiſſe être rendu plus petit qu'aucun rapport aſſigné plus grand que ce dernier: le *rapport* donné eſt appelé la *limite en petiteſſe* du rapport variable.

§. II.

Théorème 1ᵉʳ. Soit une quantité conſtante; & ſoit une quantité variable toujours plus petite ou toujours plus grande que la première, mais qui puiſſe en différer moins que d'aucune quantité aſſignée plus petite qu'elle. Le rapport d'égalité eſt la limite en petiteſſe ou en grandeur du rapport de la quantité conſtante à la quantité variable. Et réciproquement, ſi le rapport d'égalité eſt la limite, ſoit en grandeur ſoit en petiteſſe, du rapport d'une quantité conſtante à une quantité variable plus grande ou plus petite qu'elle, la quantité variable peut différer de la quantité conſtante moins que d'aucune quantité aſſignée.

Soit a une quantité conſtante; ſoit x une quantité variable, toujours plus petite ou toujours plus grande que a; mais qui puiſſe en différer moins que d'aucune quantité aſſignée. Je dis que le rapport de a à x peut approcher du rapport d'égalité plus près que n'en approche aucun rapport aſſigné de plus grande ou de plus petite inégalité. Et réciproquement, ſi le rapport de a à x peut approcher du rapport d'égalité plus près que n'en approche aucun rapport aſſigné, je dis que la quantité x peut différer de la quantité a moins que d'aucune quantité aſſignée.

Pour la Directe. Soit changé le rapport aſſigné dans le rapport de a à $a + \nu$; & ſoit faite x plus grande que $a - \nu$ dans le premier cas, & plus petite que $a + \nu$ dans le ſecond cas: ce qui eſt poſſible (par ſuppoſition).

Dans le 1ᵉʳ cas; puiſque $x \rhd a - \nu$; $a : x \lhd a : a - \nu$: donc le rapport de a à x approche du rapport d'égalité plus près que n'en approche le rapport aſſigné de a à $a - \nu$ de plus grande inégalité.

Dans le 2ᵉ cas; puiſque $x \lhd a + \nu$; $a : x \rhd a : a + \nu$: donc le rapport de a à x approche du rapport d'égalité plus près que n'en approche le rapport aſſigné de a à $a + \nu$ de plus petite inégalité.

Pour l'Inverſe. Que la quantité aſſignée ſoit ν.

Dans le 1ᵉʳ cas; par ſupp. le rapport de a à x peut être fait plus petit que le rapport de a à $a - \nu$; en ſorte qu'on ait $a : x \lhd a : a - \nu$; & partant $x \rhd a - \nu$; ou $a - x \lhd \nu$.

Dans le 2ᵉ cas; par ſupp. le rapport de a à x peut être fait plus grand que le rapport de a à $a + \nu$; en ſorte qu'on ait $a : x \rhd a : a + \nu$; & partant, $x \lhd a + \nu$; ou $x - a \lhd \nu$.

Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

LUDWIG WITTGENSTEIN ET LE FONDEMENT DE LA CERTITUDE

Jacqueline GUICHARD
Lycée E. Pérochon - 79200 Parthenay

SOMMAIRE

INTRODUCTION : à propos de certitude

1. UNE CLE : L'ANALYSE DES LANGAGES

- deux philosophies du langage ou l'unité d'un approfondissement ?
- une conception originale de la philosophie
- la nécessité de repenser le problème du fondement

2. D'OU VIENT DONC LA CERTITUDE ?

- la réponse de WITTGENSTEIN : l'application d'une règle
- ce qu'elle évacue :
  - une perspective psychologique
  - une perspective transcendante de type platonicien
  - une perspective empiriste
  - une perspective logiciste
- les questions classiques : mathématiques - langage - sens- réalité et vérité

3. QUELQUES AXES D'APPROFONDISSEMENT

- sur les rapports mathématiques - réalité
- sur le statut des objets et opérations mathématiques
- sur les rapports mathématiques - logique
- sur les problèmes du fondement des mathématiques

CONCLUSION : un peu plus qu'un jeu qui exclut l'arbitraire

ANNEXES :

- Annexe 1 : aperçu du parcours de WITTGENSTEIN
- Annexe 2 : deux textes sur les jeux de langage
- Annexe 3 : bibliographie

INTRODUCTION : à propos de certitude

La certitude : à la différence de la conviction et de la persuasion qui n'ont qu'un sens subjectif - ils ne s'appliquent qu'à l'état d'esprit d'un sujet -, la *certitude* s'emploie aussi bien pour qualifier ce qui a une existence objective, c'est-à-dire extérieure à l'esprit du sujet : "*c'est* certain" (connaissance, événement...), que pour qualifier l'état d'esprit qui exclut tout doute : "*je suis* certain".

Chercher à prouver ou à démontrer la vérité d'une idée, c'est viser à exhiber les raisons dont la nécessité est capable de faire passer l'esprit de la simple conviction qui quelle que soit sa force peut être démentie, à la certitude qui exclut la possibilité du contraire : ce que signifie *"nécessité"*.

Si la certitude est, en tant qu'état d'esprit, distincte de la conviction, c'est dans la mesure où elle n'est pas comme cette dernière un simple état d'esprit, mais où elle renvoie à quelque chose qui apparaît d'un autre ordre d'où viendrait la nécessité :

- s'agit-il de l'ordre des faits où des choses (la réalité) dont la nécessité s'imposerait à l'esprit quand il raisonne ?

- ou encore d'un ordre qui structurerait toute pensée, toute connaissance : la nécessité logique, forme de toute pensée cohérente qui contraint l'esprit à la reconnaissance du vrai?

- ou bien s'agit-il seulement d'une contrainte psychologique excercée sur l'esprit par des habitudes de penser et de raisonner dont nous ne reconnaissons pas la nature parce que nous avons oublié son origine, ce qui nous conduit à y voir une nécessité logique ou ontologique c'est-à-dire inscrite dans l'être des choses ?

Les analyses de WITTGENSTEIN envisagent ces questions à travers une description des activités de preuve et de démonstration, d'une part, telles qu'on peut les observer dans le travail mathématique, et d'autre part, à travers une mise à plat des expressions par lesquelles nous les désignons et par lesquelles nous parlons d'une façon générale de la certitude.

Analyse du déroulement des activités, analyse des expressions langagières, l'objectif est le même : mettre en évidence ce que les habitudes masquent dans les premières, et les fausses pistes - fausse conceptions, faux problèmes - sur lesquelles les secondes nous engagent ; méconnaissance, aveuglement dans les deux cas.

Si on peut dire que la philosophie de WITTGENSTEIN est centrée sur une analyse du langage, ses réflexions sur l'activité mathématique n'y sont pas marginales. Les deux sont nécessairement liées puique les mathématiques sont un langage particulier, parmi d'autres langages spécifiques, mais que le fonctionnement de ce langage et son apprentissage ne sont pas fondamentalement différents de ceux du langage commun : il s'agit toujours de *l'apprentissage et de l'utilisation de règles plus ou moins rigides*. Les analyser l'un et l'autre dans l'apprentissage de leur utilisation, c'est éclairer mutuellement leurs fonctionnements respectifs, et, à partir de là, la nature commune de ceux-ci et le fondement de la certitude.

On trouvera un aperçu du parcours de WITTGENSTEIN et des principaux écrits qui l'ont jalonné en annexe 1, et des indications sur leurs dates et publications en annexe 3.

1. UNE CLE : L'ANALYSE DU LANGAGE

Le point sur lequel cette philosophie se concentre et qui détermine la conception originale de la philosophie qui est celle de WITTGENSTEIN, c'est une analyse du langage, en tant qu'elle contient la clé des problèmes auxquels la pensée peut se trouver confrontée dans ses différents champs d'activité : aussi bien la pensée du vécu que la pensée mathématique ou métaphysique.

Démonter le fonctionnement du langage, c'est mettre en évidence les faux problèmes et les illusions que les formes habituelles de son utilisation peuvent projeter dans la pensée.

Nous sommes "spontanément" portés par nos façons de parler à *croire qu'il y a du réel dans les mots* par lesquels nous pensons et parlons des choses, ou encore, que les mots disent l'être ou l'essence des choses.

En fait, nous sommes piégés par l'apparence "subtantielle" de certaines tournures de la forme générale "S est P" qui donnent l'apparence de dire ce qu'est le Sujet alors qu'elles ne font qu'exprimer une dénomination. C'est la différence entre :

- *"Ceci est un plateau"*, qui semble par sa forme exprimer la nature ou l'essence de la chose ; et :
- *"Il y a ici un plateau"*, qui ne fait que désigner cette chose que nous nommons un plateau.[1]

Il y a ici deux utilisations différentes du mot "plateau" déterminées par des structures linguistiques différentes : deux jeux de langage différents dont l'un est trompeur :

> "Un concept n'est pas essentiellement un prédicat... Fais justement attention à la façon dont on utilise un terme conceptuel (par exemple "plateau") dans un jeu de langage.
> Par exemple l'existence d'une proposition "ceci est un plateau" ne serait pas nécessaire ; seulement celle de : "ici il y a un plateau ". "[2]

La première formulation est trompeuse parce qu'elle annonce dans sa forme grammaticale qu'elle dit l'être et risque de faire perdre de vue ce qu'est le langage, c'est-à-dire une pluralité de systèmes de communication humaine, faits de *symboles que nous avons appris à utiliser* : les mots ne sont que des outils de communication que nous utilisons de façons différentes selon certaines règles. Ces différents usages réglés constituent autant de *jeux de langages* différents.[3]

Ce sont ces jeux qui déterminent le sens et la fonction des mots et non une éventuelle correspondance avec la réalité qu'on peut nommer et décrire par eux.

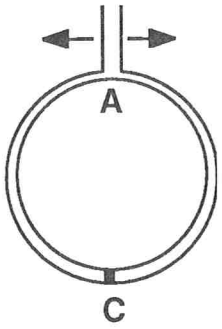
---

1 *WITTGENSTEIN, L. Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 250, § 47, éd. GALLIMARD 1983*

2 *Idem*

3 *WITTGENSTEIN, L. Le cahier brun, 1, § 1 à 5, p. 141 à 148, éd. GALLIMARD 1965, cf. annexe 2, Investigations philosophiques § 1 à 22, § 23, in. Tratatus logico- philosophicus, éd. GALLIMARD 1988, p. 115 à 126, cf. annexe 2.*

"... C'est, selon la règle, une expression tout aussi naturelle de dire que C se trouve à la droite du point A , que de dire qu'il se trouve à sa gauche. En accord avec cette règle



qui dit qu'un lieu se trouve dans la direction de la flèche si la route qui commence dans cette direction y conduit.
Regardons cela du point de vue du jeu de langage. - A l'origine nous n'avons joué à ce jeu qu'avec des routes rectilignes."[4]

Faut-il alors parler d'une coupure dans l'évolution de la philosophie de WITTGENSTEIN et **de l'existence de deux philosophies du langage ?**

La première, celle du ***Tractatus Logico-Philosophicus*** (1918-1922) caractérisée par le langage comme image articulée ou miroir du monde, dont les structures logiques sont celles mêmes du monde, et dont les éléments composants sont les noms des choses :

"Le nom signifie l'objet. L'objet est la signification du nom("A" est le même signe que "A")"[5]

Cette référence du langage à un au-delà - une extériorité - formé d'objets qui constitueraient l'être ou la substance du monde[6] , autorise à parler d'une perspective "ontologique" , c'est-à-dire qui trouve son fondement dans l'être - essence, structure - des choses.

"Le jeune WITTGENSTEIN tente de construire une ontologie en s'appuyant sur les notions clés de la sémantique frégéienne[7 - 8] .

De fait, il n'en sera plus de même dans la deuxième œuvre qu'il a destinée à la publication : ***les investigations philosophique*** (1936-1949), qui s'attachent à analyser le langage dans ses multiples utilisations et non plus à chercher la forme générale de la proposition pourvue de sens telle qu'on peut la trouver dans les jeux d'un langage formalisé comme celui de la science. Dans l'étude des multiples jeux du langage, se manifeste la multiplicité des fonctions du langage dans laquelle la fonction de vérité n'est qu'un cas.

---

4 *WITTGENSTEIN, L. Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 184, § 79*

5 *Tractatus...§ 3.203, p. 38*

6 *Idem, § 2.021, p. 31. ..."Les objets forment la substance du monde, c'est pourquoi ils ne peuvent être composés"*

7 *ARABI, O. WITTGENSTEIN, Dictionnaire des philosophes, Tome 2, p. 2665 à 2672, PUF 1984.*

8 *FREGE Gottlob, mathématicien, logicien et philosophe allemand, 1848-1925 ; a repris le projet de LEIBNIZ de construire une langue symbolique et a tenté de fonder l'arithmétique sur la logique (logicisme). Cf. note 87*

> "Leur introduction sert à différencier l'homogénéité apparente du langage qui est à la base du modèle logiciste de FREGE (voir note 8). (***Investigations...*** § 23) (Annexe 2). Du même coup cette fragmentation du langage rend très problématique l'applicabilité de ce modèle à la pratique linguistique. Car les jeux de langage ne pourraient être expliqués à partir de la notion de vérité". (Voir note 7).

Faut-il cependant parler de deux philosophies distinctes ? Ou plutôt de l'évolution d'une pensée qui par "une méditation sur les difficultés non résolues du ***Tractatus***"..., progresse par un changement de style d'un système à une méthode d'analyse, laquelle "suppose certes l'abandon de certaines thèses proposées dans le ***Tractatus*** et WITTGENSTEIN lui-même les indique. Mais elles ne constituent pas un renouvellement complet, encore moins un désavœu total. Tout au contraire, il faudrait dire que ce nouveau style d'activité philosophique prolonge directement le premier qu'il corrige mais qu'il suppose".[9]

Pour soutenir sa thèse de l'unité entendue en ce sens qui n'exclut pas évolution et reprise, G.G. GRANGER rappelle ce que dit WITTGENSTEIN lui-même dans la préface aux ***Investigations***... à propos de sa volonté de publier les deux œuvres à la suite, et aussi les textes de la période intermédiaire entre ces deux œuvres, mais surtout les notes préparatoires des CARNETS (1914-1916).

Il s'agirait donc plutôt que d'une rupture dans sa philosophie du langage, d'un élargissement qui revient à situer l'objet d'étude du ***Tractatus*** comme un de ces jeux de langage dont les ***Investigations*** montrent la multiplicité indéterminée. Ce qui conduit à remettre en question la référence "ontologique" du ***Tractatus*** puisqu'il y a des jeux de langage qui ne renvoient pas à un référent extérieur, à un objet existant en dehors d'eux : ceux du discours mathématique, mais aussi ces usages du langage courant où les expressions ne sont plus que des "roues qui tournent à vide" [10] , et que de toute façon ce qui assure aux mots et expressions leur sens, ce n'est pas leur référent éventuel, mais le jeu de langage dans lequel ils sont utilisés et qui est joué selon des règles *conventionnelles.*

> "L'on pourrait dire ici également que l'importance de la considération des jeux de langage réside dans le fait que les jeux de langage ne cessent de fonctionner. Que donc leur importance réside dans le fait que les hommes se laissent dresser à réagir de telle façon à ces sons...
> ... Le calcul est un phénomène que nous connaissons par le calcul. Tout comme le langage est un phénomène que nous connaissons par notre langage."[11] .

Ce qui demeure à travers cette évolution c'est **une conception originale de la philosophie** qui tient à sa fonction : mettre en évidence, décrire les multiples jeux du langage pour *purifier la pensée* des faux problèmes qu'ils peuvent engendrer.

Ce n'est pas une sagesse au sens classique du terme, puisqu'elle ne comporte ni système de valeur, ni principe d'action ; donc pas de morale.

---

9 *GRANGER, G. WITTGENSTEIN, p. 17, éd. SEGERS 1969.*

10 *Idem (GRANGER) p. 67*

11 *WITTGENSTEIN, L. Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 185-186, § 80*

Ce n'est pas non plus un système du monde qui en proposerait l'explication et des perspectives de transformation.

> "Elle laisse toute chose en leur état" [12]

> "Ce que nous voulons, c'est décrire et non pas expliquer !" [13]

Ni théorie, ni morale, *"la philosophie n'est pas une doctrine mais une activité"*, et cette activité a un but de clarification :

> "Une œuvre philosophique consiste essentiellement en élucidations.
> Le résultat de la philosophie n'est pas un nombre de "propositions philosophiques", mais le fait que des propositions s'éclaircissent"[14]

Si elle peut engendrer une forme de sagesse, c'est celle qui résulte d'un regard "décapé", d'une pensée "assainie" qui parce qu'elle perçoit ce qui se joue dans tel jeu de langage, ne se laisse plus tromper par lui, c'est-à-dire le perçoit, le décrit comme tel.

> "Les problèmes sont résolus non par la communication de nouvelles expériences, mais par l'agencement de ce qui est connu depuis longtemps. La philosophie est la lutte contre l'ensorcellement de notre entendement par les moyens de notre langage".[15]

Dans cette mise à plat du fonctionnement du langage, se *dégonflent les questions métaphysiques*. Ce qu'est le réel en dehors de la pensée que nous en avons, l'existence de l'infini, etc..., ramenés à l'usage que nous faisons des concepts de "réel", d'"essence", d'"infini" dans tel type de langage (langage courant, philosophique, mathématique...), perdent tout aspect problématique :

> "Lorsque les philosophes usent d'un mot - "savoir", "être", "objet", "moi", "proposition", "nom" - et qu'ils aspirent à saisir l'*essence* de l'objet, il faut se demander toujours : "ce mot a-t-il effectivement ce sens là dans le langage qui est son pays d'origine". Nous ramenons les mots de leur usage métaphysique à leur usage quotidien".[16]

La *métaphore thérapeutique* résume la fonction de la philosophie :

> "Le philosophe est celui qui doit soigner en lui de multiples maladies de l'entendement avant de pouvoir parvenir aux notions du sain entendement".[17]

Pour cela il n'y a pas qu'une thérapeutique :

> "Il n'existe pas *une* méthode philosophique bien qu'il y ait effectivement des méthodes, comme différentes thérapies"[18]

L'étude de toute signification, de toute pensée, se ramène donc à l'élucidation des règles du jeu de langage qui la constitue, la pensée pouvant être représentée par un *calcul*, c'est-à-

---

12 *WITTGENSTEIN, L. Investigations, p. 167, § 124 ; cf. aussi § 123, 125, 126*

13 *WITTGENSTEIN, L. Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 183, § 78, cf. aussi p. 252, § 52.*

14 *WITTGENSTEIN, L. Tractatus, § 4.112, cf. aussi § 6.211*

15 *WITTGENSTEIN, L. Investigations, p. 165, § 109*

16 *WITTGENSTEIN, L. Investigations, p. 166, § 116, cf. aussi, p. 165, §110-111.*

17 *WITTGENSTEIN, L. Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 252, § 53.*

18 *WITTGENSTEIN, L. Investigations, p. 169, § 133.*

dire des opérations sur des symboles selon des règles plus ou moins fixées, plus ou moins déterminées et déterminantes, et qui par conséquent laissent plus ou moins de jeu ou d'écarts dans leur utilisation, selon les domaines ; le niveau de détermination maximum caractérisant le discours mathématique. C'est dire que la pensée ne peut se constituer en dehors de ces jeux de langage, qu'elle ne leur est ni antérieure, ni extérieure.

Par conséquent, il faut **repenser tout problème de fondement** et se demander si ce n'est pas un problème mal posé, résultat d'un "mauvais tour" que nous joue quelque jeu de langage, puisque quand nous parlons du fondement de quelque chose, nous pensons en général à quelque chose d'*autre* qui lui servirait d'assise (cf. "*chercher le fondement de* ...") qui par ses valeur et puissance propres l'assurerait, le légitimerait c'est-à-dire lui communiquerait sa propre solidité et par là-même nous assurerait de la solidité de ce que nous cherchions à fonder.

Ce qui est remis en question par l'étude du fonctionnement du langage c'est que la pensée quelles que soient ses formes et spécialisations puisse avoir un fondement extérieur.

Et ce qui est montré, c'est un chemin : c'est du côté de l'utilisation des règles qu'il faut chercher le fondement de la certitude, c'est-à-dire à l'intérieur même d'un certain usage du langage.

2. D'OU VIENT DONC LA CERTITUDE ?

> "*Qu'y a-t-il* d'inébranlablement certain dans ce qui est prouvé ?
> Reconnaître une proposition comme d'une certitude inébranlable - dirai-je - signifie l'appliquer comme règle grammaticale : c'est par là qu'on la soustrait à l'incertitude"[19]

Entre la question et la réponse se trouvent évacués en même temps le psychologique et l'empirique, mais aussi la référence à un ordre rationnel nécessaire.

Evacuée, la perspective psychologique qui consisterait à envisager la certitude sous la forme d'un état de l'esprit provoqué par la nécessité d'un enchaînement de raisons. La "reconnaissance", acte d'entendement est exprimée en terme d'application, laquelle renvoie à *une pratique*, c'est-à-dire à une activité, à un comportement rodés par l'acquisition de techniques.

> "Je demande : quel est le comportement caractéristique d'êtres humains qui "perçoivent immédiatement" quelque chose - quel que soit le succès pratique de cette aperception ?
>
> Ce qui m'intéresse, ce n'est pas la perception immédiate d'une vérité, mais le phénomène de l'aperception immédiate. Non pas (certes) en tant que phénomène mental mais en tant que phénomène de l'activité humaine"[20]

---

19 *WITTGENSTEIN, L. Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 157, § 39*

20 *Idem, p. 208, § 32*

> "Si l'on a compté correctement, ceci doit être le résultat : ceci doit-il *toujours* être le résultat ? Naturellement.
> Dans la mesure où nous sommes entraînés à une technique, nous le sommes également à un mode de considération qui est *aussi solidement* établi que cette technique."[21]

Ce retour à *l'activité* et aux *apprentissages* qui la structurent et l'assurent est constant et ponctue le texte de WITTGENSTEIN qui, en cohérence avec le rôle qu'il assigne à la philosophie ne manque pas d'expliciter les jeux de langage qui pourraient prêter à confusion en la matière :

> "Par : "je ne m'y retrouve pas dans ce calcul" - Je n'entends pas un état d'âme mais une incapacité à *faire* quelques chose."[22]

> "Et si plutôt qu'"intuition" on disait "deviner juste" ? - Cela éclairerait d'une tout autre lumière la valeur de l'intuition. Car le phénomène de la divination est d'ordre psychologique, mais pas celui du deviner juste."[23]

La perspective psychologique est donc rejetée, parce-qu'elle n'est pas explicative : elle ne fait qu'exprimer la nécessité de la certitude en termes de conviction, mais elle ne montre pas ce qui produit la certitude de la *conviction* ou encore elle ne montre pas à quoi tient la nécessité de la preuve.

> "La preuve nous convainc de quelque chose - et ce n'est pas l'état d'esprit de la conviction qui nous intéresse mais les applications qui justifient cette conviction. De ce fait, l'énoncé suivant nous laisse froid : la preuve nous convainc de la vérité de cette proposition, - puisque cette expression est susceptible des interprétations les plus diverses".[24]

Et si WITTGENSTEIN a pu aller jusqu'à "penser que faire de la psychologie c'était perdre son temps (et cependant il était loin de ne rien en savoir...)"[25] , peut-être peut-on trouver une raison dans ces déplacements-rectifications qu'il opére du mental au "comportemental". En parlant de processus mentaux, par exemple la compréhension, ou d'état mental, par exemple la conviction, nous sommes portés à attribuer une existence et une sorte d'autonomie à quelque chose qui ne peut être - et être observé que dans une activité.

> "Suivre une règle est un jeu de langage déterminé. Comment peut-on le décrire ? Quand disons-nous qu'il a compris la description ? - Nous faisons telle et telle chose ; si maintenant il réagit de telle et telle façon, il a compris le jeu."[26]

Si c'est l'application de règles qui fait la certitude et si cette application est acquise dans un apprentissage que WITTGENSTEIN n'hésite pas à qualifier de dressage, c'est dire que la certitude ne trouve pas son fondement dans *un ordre rationnel*, dont la valeur, les

---

21 *Idem, p. 209, § 35*

22 *Idem, p. 186, § 80*

23 *Idem, p. 204, § 22*

24 *Idem, p. 151, § 25*

25 *RHEES,R. Introduction aux conversations sur FREUD, in WITTGENSTEIN. Leçons et conversations p. 87, éd. GALLIMARD, 1982.*

26 *WITTGENSTEIN, L. Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 331, § 52*

principes ou encore la nécessité s'imposeraient à l'esprit dans une intuition ou au terme d'un enchaînement de raisonnements. C'est le **rejet d'un ordre transcendant,** monde des Idées[27] ou ordre des choses, dont la nécessité assurerait la vérité de nos pensées. Mais si c'est par la pratique - l'usage répété - que nous accédons à la certitude en faisant l'expérience de la "force de la règle"[28] , faut-il voir dans l'expérience le fondement de la certitude ? Ou encore, la position de WITTGENSTEIN conduit-elle à un empirisme ?

La position empiriste qui fait dériver la certitude de l'expérience c'est-à-dire de la *constatation répétée qu'"il en est ainsi"* ou que "ça marche ainsi" ne peut pas rendre compte de ce que nous appelons nécessité et qui se traduit en nous par l'assurance de savoir ce que nous devons obtenir en additionnant 2 à 3 . La simple constation d'un fait d'expérience produit la conviction de sa vérité qui est un fait psychologique, lequel peut tout au plus engendrer la croyance qu'il en sera encore ainsi, non la certitude qu'il doit en être ainsi, laquelle renvoie à un *modèle conceptuel.*

> "La limite de l'empirique est la *construction conceptuelle.*
> Quel passage effectué-je de "il en sera ainsi" à "il doit en être ainsi" ? Je construis un autre concept. Un concept dans lequel est construit ce qui ne l'était pas auparavant".[29]

Ce qui est compris et qui produit la certitude, c'est la présence d'une règle qui "guide notre conception de certains états de choses"[30], c'est-à-dire que nous percevons comme preuve ou encore comme modèle ou *paradigme*[31] de nos jugements et actions sur la question.

> "Quand je dis : "cette proposition suit de celle-ci, c'est là la reconnaissance d'une règle. Elle s'effectue *sur la base* de la preuve. C'est-à-dire que j'admets cette chaîne (cette figure) comme *preuve.*[32]
>
> "Comment la preuve justifie t-elle la règle ? Elle montre comment et de ce fait pourquoi on peut l'utiliser"[33]
>
> "Il doit en être ainsi ne signifie pas qu'il en sera ainsi. Au contraire : "il en sera ainsi" sélectionne une possibilité parmi d'autres. "Il doit en être ainsi" ne voit qu'*une* seule possibilité.
> Pour ainsi dire, la preuve canalise nos expériences de certaine façon. Celui qui a constamment tenté telle ou telle chose renonce à ses tentatives après la preuve."[34]

La preuve est donc cette structure qui *donne à voir* ce à quoi on doit aboutir quand on la prend comme règle ; elle est bien par nature modèle ou paradigme. C'est pourquoi :

> "Une preuve mathématique doit être synoptique...

---

27 *Cf. § 3, notes 65, 66 (PLATON)*

28 *BOUVERESSE, J. La force de la règle, WITTGENSTEIN ou l'invention de la nécessité. Les éditions de Minuit, 1987.*

29 *WITTGENSTEIN, L. Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 206, § 29*

30 *Idem, § 30*

31 *Ce qui, selon l'étymologie grecque, "montre"*

32 *Idem, p. 46, § 33*

33 *Idem, p. 254, § 4*

34 *Idem, p. 207, § 31*

> La preuve doit être une image pouvant être reproduite avec sûreté."[35]

> "La preuve nous montre ce qui doit sortir.
> ..."On doit pouvoir avoir une vue d'ensemble de la preuve" : cela dans le but d'attirer notre attention sur la différence entre les concepts "répéter une preuve" et "repéter une expérience". Répéter une preuve ne signifie pas : reproduire les conditions dans lesquelles fut obtenu un résultat particulier, cela signifie répéter chaque étape *et le résultat.* Et bien que la preuve soit aussi quelque chose qui doit se laisser reproduire de façon automatique, toute reproduction de ce genre doit contenir la force de la preuve qui nous contraint à reconnaître le résultat".[36]

En résumé : "la proposition démontrée par la preuve sert de règle, donc de paradigme. Car nous nous guidons d'après la règle."[37]

C'est dire que la preuve est *détermination de sens* et que c'est là ce qui définit la proposition mathématique.

> "La proposition mathématique détermine un chemin ; établit un chemin pour nous".[38]

> "On pourrait dire : une proposition mathématique indique le chemin d'une preuve: Une généralité ne peut être à la fois empirique et susceptible d'être prouvée. Si une proposition doit avoir un sens déterminé (sinon elle est un non-sens) elle doit être maîtresse de tout son sens, l'embrasser en entier ; alors la généralité n'a de sens que si elle est complétement déterminée, c'est-à-dire si toutes les valeurs des variables le sont."[39]

La proposition mathématique est donc par nature de l'ordre de la règle, ou encore elle est *normative* et non pas empirique : loin de dériver de l'expérience elle détermine ce qu'il faut faire pour penser et parler avec certitude.

> "Nous disons : "il faut commencer par compter correctement, ensuite un jugement sur les faits de nature viendra de lui-même".[40]

S'il y a de l'empirique, il est à l'origine, dans notre apprentissage de ce jeu de langage en quoi consiste suivre une règle, apprentissage auquel nous avons été "dressés" étant enfants comme à tout jeu de langage - qui consiste justement à appliquer des règles plus ou moins rigides.[41] L'empirique est dans la répétition que suppose tout entraînement, et aussi dans le premier contact avec ce qui deviendra pour nous une règle. Mais ce n'est pas à la répétition que la règle doit son statut de règle - ou de norme - ni à ses répercussions psychologiques en nous.

---

35 *Idem, p. 137, § 1, cf. page 150, § 22 : "... On peut la voir comme une image cinématographique... (La preuve montre un fait synthétique)."*

36 *Idem, p. 169-170, § 55*

37 *Idem, p. 153, § 28*

38 *Idem, p. 198, § 8 ; cf. aussi, p. 156, § 37 : "ce que je fais constamment semble être de faire ressortir la différence entre détermination de sens et application de sens.*

39 *WITTGENSTEIN, L. Remarques philosophiques, p. 140, § 122, TEL GALLIMARD 1984*

40 *WITTGENSTEIN, L. Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 268, 269, § 24*

41 *WITTGENSTEIN, L. Le Cahier brun, 1, § 1, 2 et 5 p. 141 à 145, 148, cf. annexe 2 et Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 31, § 1 ; p. 185,186, § 80 ; p. 331-332, § 52 et 53 : "la technique (la possibilité) de dresser un autre à l'appliquer ne fait-elle donc pas partie de l'application de la règle ? Et ce, au moyen d'exemples...").*

"Je pourrais donc dire : la preuve ne me sert pas d'expérience, elle me sert plutôt d'image d'une expérience[42].

"La preuve, pourrait-on dire, doit être à l'origine un genre d'expérience - mais on la prend ensuite comme une simple image."[43]

"On fait la preuve une fois pour toutes."[44]

" Si je t'écris un fragment d'une série pour que tu puisses y voir *telle* régularité, on peut appeller cela un fait d'expériences, un fait psychologique. Mais *si* tu as perçu cette loi en elle, de telle sorte que tu poursuives la série *de telle façon*, il ne s'agit plus d'un fait d'expérience.
... C'est ainsi seulement que l'on peut dire qu'il ne s'agit pas d'un fait d''expérience, en déclarant que le pas conduisant à cet état correspond à l'expression de la règle".[45]

Construction de concepts dont le processus est acquis dans un certain usage du langage, la preuve qui fait la certitude est d'un autre ordre que le psychologique ou l'empirique, mais elle n'est pas davantage fondée sur la **nécessité d'un ordre logique** qui existerait en dehors du jeu de langage qu'elle constitue.

"... Nous parlons maintenant de "l'inexorabilité" de la logique ; et nous imaginons les lois logiques comme inexorables, encore plus inexorables que les lois de la nature... C'est *nous* qui sommes inexorables dans l'application de ces lois. Parce que nous *"mesurons"* ; et il appartient à la mesure que les chose aient la même mesure."

""Pourtant je ne peux déduire que ce qui suit réellement" - c'est-à-dire ce que la machine logique produit réellement. La machine logique, ce serait un mécanisme éthéré qui pénétrerait partout. - Il faut se garder de cette image".[46]

La nécessité ramenée à la force d'une règle grammaticale[47] nous renvoie aux **questions classiques** lourdes de présupposés, qu'elle remet en chantier, sur les rapports entre le langage, le sens, la réalité et la vérité, et singulièrement sur les mathématiques ; questions avec lesquelles la réflexion philosophique joue :

- les mathématiques *ne sont-elles qu'un langage*, avec la tonalité réductrice, éventuellement chargée de "regrets" ou de "reproches" de ce "ne... que", et l'arrière plan ou l'horizon du sens ou de l'objet :

- quel est l'objet de ce langage, sa référence et son fondement ?

---

42 *WITTGENSTEIN, L. Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 47, § 36*

43 *Idem, p. 150, § 23*

44 *Idem, p. 150, § 22*

45 *Idem, p. 269-270, § 26, cf. aussi, p. 287, § 1 : "la proposition repose sur une technique. Et si tu veux sur les faits physiques et psychologiques qui rendent cette technique possible. Mais son sens n'est par pour autant d'exprimer ces conditions."*

46 *Idem, p. 78, § 118 et 119*

47 *Cf. fin du § 1 et début du § 2*

- quel est le caractère propre de ce langage par rapport au langage commun.

Ou encore : - *que dit-il et de quoi* ?

N'y-a-t-il pas quelques provocations à dire que les propositions mathématiques ne disent rien, n'expriment pas une connaissance sur quelque chose :

> "celui qui connaît une proposition mathématique doit encore ne *rien* connaître".[48]

- Un langage qui ne dit rien, en quel sens peut-on encore parler de langage ?

C'est au sens où quelque chose se signifie ou se montre et qui est l'indication d'un sens.

> "La proposition mathématique doit nous montrer ce que l'on peut dire avec SENS."[49]

- Si par conséquent les propositions mathématiques ne disent rien de la réalité ou encore n'ont pas leur référence ou leur fondement en elle, peut-on encore parler de vérité ?

- Qu'est-ce qui se joue dans le déplacement du langage, du "théorique" au "pratique", du "vrai" au "vérifié" ?

Du théorique au pratique :

> "Pourquoi veux-tu toujours considérer les mathématique sous l'aspect de la découverte et non sous celui de l'action ?"[50]

Du vrai au vérifié, précisé en "utilisé" :

> "Compter (et cela signifie compter *de cette façon*) est une technique que nous appliquons quotidiennement dans les opérations les plus diverses de notre vie. Et c'est pourquoi nous apprenons à compter comme nous le faisons : en nous exerçant constamment avec une impitoyable précision ; c'est pourquoi nous sommes tous inexorablement contraints de dire "deux" après "un", "trois" après "deux"... - "Mais ce calcul n'est-il qu'un *usage* ; n'*y a-t-il* pas également une *vérité* qui corresponde à cette suite ?" - La vérité c'est que le calcul s'est vérifié - "Veux-tu donc dire qu'"être vrai" signifie être usitisable ou (utile)? " - Non : j'entends qu'on ne peut pas dire de la série des nombres naturels - non plus que de notre langage - qu'ils sont vrais , mais qu'ils sont utilisables, et surtout qu'*ils sont utilisés*".[51]

La nécessité n'a-t-elle été sauvée de la relativité de l'empirique et du psychologique que pour disparaître dans l'arbitraire de règles conventionnelles qui ne font que déterminer un usage ?

Pour démêler ces questions sans se laisser prendre au piège des jeux de langage qui pourraient tourner à vide, c'est-à-dire poser de faux problèmes, la méthode de

---

48 *Idem, p. 288, § 2*

49 *Idem, p. 153, § 28*

50 *Idem, p. 292, § 5*

51 *Idem, p. 33-34, § 4*

WITTGENSTEIN , là comme ailleurs, consiste à revenir sur les activités humaines pour confronter leur description aux jeux de langage par lesquels nous croyons les dire.

A ce propos on pourrait dire qu'il n'y a pas de "petits sujets", que toute activité dans le domaine concerné est bonne à décrire pour faire voir les processus à l'œuvre ; et qu'il est peut être même de bonne méthode de privilégier les moins complexes. Ce sont les opérations "simples" qui montrent le mieux le fonctionnement des processus à l'œuvre. Il peut être irritant et pas seulement pour un mathématicien de voir interrogée la nécessité : "que cinq c'est trois et deux"... que dans le cours de la série + 2 je dois écrire : "20004, 20006" et non pas "20004, 20008" ?"[52]

La modestie de l'objet en question peut décevoir celui qui se préparait à des réflexions d'envergure sur les fondements d'une discipline si riche en théories hautement élaborées et en problèmes complexes. Il peut aussi être dérangeant, insécurisant, de voir mis en question ou en observation plutôt, ce qui par suite d'un usage répété depuis l'enfance va de soi, est passé à l'état de mécanisme et semble bien connu, assuré. Si cela déjà, - les mécanismes de l'inférence par lesquels nous passons d'un terme à un autre, d'une proposition à une autre - demande examen, qu'en sera t-il du reste ? et que va t-il rester comme fondement ?

A cela WITTGENSTEIN répond après HEGEL que :

> "Ce qui est bien-connu en général, justement parce qu'il est bien connu, n'est pas connu"[53]
>
> "Les aspects des choses les plus importants pour nous sont cachés à cause de leur simplicité et de leur banalité. (On ne peut le remarquer parce qu'on l'a toujours sous les yeux).
> ... Ce qui, une fois vu, constitue ce qu'il y a de plus frappant et de plus puissant ne nous frappe pas".[54]

C'est pourquoi le travail de la philosophie est description, "monstration" :

> "La philosophie place seulement toute chose devant nous et n'explique ni ne déduit rien".[55]

Et ce faisant, ce qu'elle nous donne à voir, entre autres, c'est que le problème de la certitude ne se pose pas de façon différente, n'a pas de statut privilégié en mathématiques par rapport aux autres domaines, ni à plus fortes raisons à l'intérieur des mathématiques :

> "Questions similaires : "comment sais-je que cette couleur est le rouge ?""[56]

Ici, comme là, il s'agit toujours d'*un usage réglé du langage*. Si l'on peut dire que le langage mathématique a un caractère propre sans avoir de statut privilégié qui poserait des

---

52 *Idem, p. 54, § 53 et p. 32, § 3*

53 *HEGEL, G.WF. Phénoménologie de l'esprit (1807) ; Préface II § 3 éd. AUBIER MONTAIGNE, Tome 1, p. 28*

54 *WITTGENSTEIN, L. Investigations philosophiques, p. 168, § 129*

55 *Idem, p 168, § 126 ; cf. aussi § 1*

56 *WITTGENSTEIN, L. Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 32, § 3. cf. aussi De la certitude, éd. TEL GALLIMARD, 1987, p. 87, § 374-375 : "nous enseignons aux enfants : "ceci est ta main", non : "ceci est peut-être (ou"probablement") ta main". C'est ainsi que l'enfant apprend les inombrables jeux de langage qui concerne sa main..."*

problèmes fondamentaux particuliers, c'est qu'il n'est qu'un langage particulier parmi d'autres dont l'acquisition, on l'a vu, est à référer comme tout jeu de langage à un apprentissage. Ce qui va différer, ce sont les formes des différents jeux de langage (ordinaires, spécialisés) non la forme générale de l'acquisition :

> "quand des adolescents ou des adultes apprennent ce que nous pouvons nommer des "langages techniques", utilisant des schémas et des diagrammes, des signes de géométrie descriptive, les formules des substances chimiques, etc..., ils apprennent à se servir d'autres formes de "jeux de langage".[57]

> "L'inférence logique est une partie du jeu de langage. Et en vérité, celui qui effectue des inférences logiques suit certaines instructions qui lui ont été données lors de l'apprentissage du jeu de langage".[58]

Le caractère propre du langage mathématique, "l'inexorabilité propre aux mathématiques"[59] tenant à la *rigidité*, c'est-à-dire à la *fixité et à la précision des règles* posées dans l'énoncé des propositions mathématiques, il reste à penser la force d'une règle qui produit de la nécessité alors qu'elle résulte d'un acte de position de l'esprit qui, en tant que tel aurait pu être autre :

> "le piédestal sur lequel reposent les mathématiques à nos yeux leur vient du rôle particulier joué par leurs propositions dans nos jeux de langage.
> Ce que montre la preuve mathématique est érigé en relation interne et soustrait au doute."[60]

3. QUELQUES AXES D'APPROFONDISSEMENT

Ils concernent ces questions classiques que les analyses de WITTGENSTEIN déplacent ou éliminent, sur les rapports entre mathématiques et réalité, sur le statut des objets mathématiques, des opérations de calcul ou de preuve, sur les rapports entre mathématiques et logique.

Ils convergent dans cette idée que les mathématiques sont *fondamentalement autonomes* : elles sont une activité de construction de concepts dont on ne peut a priori fixer les bornes et qui a son fondement en elle-même.

C'est dire qu'il n'y a **pas de dépendance des mathématiques par rapport à la réalité:** qu'on conçoive la réalité dans son existence empirique, c'est-à-dire telle qu'elle se présente dans le champ de l'expérience ; ou bien qu'on la conçoive comme ayant une existence transcendante dans des idées ou essence accessibles seulement à l'esprit : réalité intelligible dans laquelle la vérité aurait son fondement.[61]

---

57 *WITTGENSTEIN, L. Le cahier brun, p. 148, I § 5 (annexe 2)*

58 *WITTGENSTEIN, L. Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 317, § 30*

59 *Idem, p. 33, § 4*

60 *Idem, p. 293, § 6*

61 *Cf. § 2 : rejet d'un ordre transcendant*

On a vu[62] que la proposition mathématique ne peut être réduite à une proposition empirique : qu'elle ne dérive pas de l'expérience de la réalité mais qu'au contraire elle est une norme qui détermine le sens que doit avoir cette expérience :

> "Maintenant quelqu'un dit que dans la série des nombres cardinaux qui obéit à la règle "+1", dont la technique nous fût enseignée de telle et telle façon, 450 suit 449. Mais il ne s'agit pas là de la proposition empirique suivant laquelle nous passons de 449 à 450, lorsqu'il nous arrive d'appliquer l'opération + 1 à 449. C'est bien plus la détermination du fait que nous n'avons appliqué cette opération que lorsque le résultat est 450.
> C'est comme si nous avions durci la proposition empirique en une règle. Et maintenant nous avons non pas une hypothèse prouvée empiriquement, mais un paradigme avec lequel l'expérience est comparée et jugée. Donc un nouveau type de jugement".[63]

> "La preuve est notre modèle d'un *résultat* déterminé qui sert d'objet de comparaison (d'échelle) pour les modifications intervenant dans la réalité".[64]

Les mathématiques sont normatives par rapport à la réalité et cette *norme est un produit de l'activité mathématique* : elle n'a pas d'existence en dehors d'elle dans une réalité transcendante aux sens et à l'esprit qu'on a coutume de référer à Platon et à ce que les commentateurs ont appelé un monde intelligible. Le *Platonisme en mathématiques*[65] qui a son origine dans la conception exposée dans la ***République***[66] , et dans lequel R. THOM voit "l'hypothèse la plus naturelle et philosophiquement la plus économique"[67] se trouve ici récusé, comme n'étant en quelque sorte que le résultat de l'aveuglement du mathématicien quant à son activité.

Il n'y a pas de *préexistence du champ mathématique* par rapport aux **opérations qui donnent sens et existence aux objets mathématiques.** L'activité mathématique n'est pas une activité qui consisterait à découvrir les propriétés d'objets ayant une existence indépendante comme HERMITE l'écrivait à STIELTJES :

"Paris, 13 mai 1894

Mon Cher ami,

Je me sens tout joyeux de vous savoir en si bonne disposition que vous vous transformez en naturaliste pour observer les phénomènes du monde arithmétique. Votre doctrine est la mienne ; je crois que les nombres et les fonctions de l'Analyse ne sont pas le produit arbitraire de notre esprit ; je pense qu'ils existent en dehors de nous avec le même caractère de nécessité que les choses de la réalité objective, et que nous les rencontrons ou les découvrons, et

---

62 *§ 2 : rejet d'une position empiriste*

63 *Idem, p. 267, § 22*

64 *Idem, p. 151, § 24*

65 *BERNAYS, P. Le platonisme dans les mathématiques. in. l'enseignement mathématique. Genève 34 - 1935. 1.2*

66 *Tous ceux qui s'occupent de géométrie, d'arithmétique et autres sciences du même genre... c'est du carré en soi, de la diagonale en soi qu'ils raisonnent et non de la diagonale telle qu'ils la tracent, et il faut en dire autant de toutes les autres figures. ... Ils les emploient comme si c'était aussi des images, pour arriver à voir ces objets supérieurs qu'on n'aperçoit que par la pensée." République livre 6, 510 d.e, traduction CHAMBRY, éd. Les Belles Lettres 1966.*

67 *THOM, R. Les mathématiques "modernes". Une erreur pédagogique et philosophique ? In. Pourquoi la mathématique , p. 65-66, éd. 10/18, 1974.*

> les étudions, comme les physiciens, les chimistes et les zoologistes, etc. Je viens d'observer que ... "[68]

WITTGENSTEIN met en question cette conception qui s'enracine probablement dans l'expérience psychologique de la résistance qu'oppose le "matériau" mathématique et "que connaît bien tout mathématicien lorsqu'il s'épuise en vains efforts pour saisir une démonstration qui semble se dérober sans cesse."[69]

> "Pourquoi veux-tu toujours considérer les mathématiques sous l'aspect de la découverte et non sous celui de l'action ?"[70]

Les nombres, leurs propriétés, n'ont pas d'existence ou de statut, ou encore de sens, indépendamment des *opérations qui les déterminent*. En ce sens, ils sont d'abord le résultat d'un calcul avant d'être ce que l'on calcule ou ce à l'aide de quoi on calcule :

> "(Il m'est arrivé d'écrire (cf. note 71) : en mathématiques, le procédé et le résultat sont équivalents.)"

> "Pourtant, je sens qu'être produit de cette façon ou pouvoir l'être est une propriété de "100". Mais comment être produite de cette façon peut-il être une propriété de la structure "100" quand par exemple elle n'a nullement été produite de cette façon ? Si personne ne multipliait de cette façon ? Ce ne serait une propriété de 100 que si l'on pouvait dire qu'être objet de cette règle est une propriété de ce signe. Par exemple, c'est une propriété de "5" d'être objet de la règle "3 + 2 = 5".
> Car c'est seulement en tant qu'objet de la règle que le nombre est *le* résultat de l'addition de ces autres nombres.
> Mais si je dis maintenant : c'est une propriété du nombre... d'être le résultat de l'addition de... suivant la règle... ? - C'est donc une propriété du nombre de déboucher sur ces nombres après l'application de cette règle. La question est : appellerions-nous cela "application de la règle" si ce nombre *n*'était *pas* le résultat ? Et c'est la même question que : "que comprends-tu par "application de cette règle" : ce que tu fais avec elle (et tu peux l'appliquer tantôt ainsi tantôt autrement) ou bien "son application" s'explique-t-elle autrement ?"

> ""Le fait que ce processus conduise à lui est une propriété de ce nombre;" - Mais d'un point de vue mathématique aucun processus ne conduit à lui : il est la fin d'un processus (il appartient encore au processus)."[71]

Et, corrélativement, toute nouvelle opération de preuve est une *nouvelle construction de concepts et de relations* qui augmente le champ mathématique :

> "La preuve crée un nouveau concept en tant qu'elle crée un nouveau signe. - En tant qu'elle donne une nouvelle place à la proposition qui est son résultat - (car la preuve n'est pas un cheminement mais un chemin)."[72]

Donner une nouvelle démonstration d'un résultat établi modifie - enrichit - le concept de ce qui est démontré :

---

68 *Correspondance d'HERMITE et de STIELTJES. Gauthiers-Villars, 1905. Tome 2, p. 397-398*

69 *BOURBAKI, N. Eléments d'histoire des mathématiques, HERMANN 1969, p. 30*

70 *WITTGENSTEIN, L. Remarques sur les fondements des mathématiques, p. 292, § 5*

71 *Idem, p. 64-65, § 82-83-84. Note 1 : cf. Tractatus... 6.261 : "En logique, processus et résultats sont équivalents." (N. des Ed.)*

72 *Idem, p. 159, § 41*

""Toute preuve montre non seulement la vérité de la proposition prouvée, mais encore le fait qu'elle se laisse prouver *de cette façon*". - Mais cela, on peut le prouver encore autrement. - Oui, mais la preuve le prouve d'une certaine façon et ce faisant elle prouve que cela se laisse démontrer de cette façon. -"Oui, mais *cela* également pourrait être montré par une autre preuve." - Oui, mais justement pas de cette façon.
Cela signifie bien : cette preuve est une entité mathématique qui ne peut être remplacée par aucune autre ; l'on peut dire qu'elle pourrait nous convaincre d'une chose dont rien d'autre ne pourrait nous convaincre, et l'on peut exprimer cela en lui associant une proposition que l'on ne subordonne à aucune autre preuve."

..."Que signifie : "une preuve est une entité mathématique qui ne se laisse remplacer par aucune autre ?" Cela signifie que toute preuve particulière a son utilité propre qui n'est celle d'aucune autre. L'on pourrait dire : Que toute preuve, même d'une proposition déjà prouvée, est une contribution aux mathématiques. Mais pourquoi est-elle une contribution quand il s'agissait simplement de prouver une proposition ? Eh bien, peut-on dire : "la nouvelle preuve montre (ou *crée*) une nouvelle connexion. ... "[73]

Une preuve différente de celle déjà donnée crée ou détermine un sens différent, irréductible à l'ancien :

"Une nouvelle technique de calcul doit justement nous donner une *nouvelle image*, un *nouveau mode d'expression* ; et nous ne pourrions rien faire de plus absurde que de chercher à décrire ce nouveau schéma, ce nouveau type d'armature au moyen des anciennes expressions."[74]

La proposition n'a donc de sens déterminé que dans et par le processus de sa démonstration. Par conséquent une *démonstration n'est pas une opération qui conférerait de l'extérieur la vérité à une proposition* qui aurait déjà un sens avant elle et qui demeurerait inchangée après, c'est-à-dire une opération qui ne déterminerait pas la proposition elle-même, mais établirait sa vérité comme un fait.

De même, les notations, les définitions ne sont pas des opérations extérieures à leur objet : elles les déterminent et sont déterminantes de ce que l'on peut voir et faire avec elles. Une nouvelle notation, une nouvelle définition ouvrent de nouvelles possibilités :

"Je veux dire : si en modifiant sa notation on rend facile à dominer du regard une figure de preuve qui ne l'était pas, on crée une preuve qui n'existait pas.
Imaginons maintenant une preuve pour une addition russellienne du type
"a + b = c" composée de quelques milliers de signes. Tu diras : déterminer si cette preuve est exacte ou non est d'une difficulté purement apparente sans intérêt mathématique. ("Un homme domine facilement ce qu'un autre domine difficilement ou même pas du tout", etc.)
Le présupposé est que les définitions ne servent qu'à abréger l'expression pour la commodité de celui qui calcule, alors qu'en fait elles font partie du calcul. Elles permettent de créer des expressions qui ne pourraient l'être sans elles".[75]

---

73 *Idem, p. 172-173, § 59-60*

74 *Idem, p. 132, § 46*

75 *Idem, p. 137-138, § 2*

Cette analyse invite à relire ce que HEGEL dit de l'extériorité de la démonstration mathématique par rapport à son objet :

> "En ce qui concerne les vérités *mathématiques*, on considérerait encore moins comme un géomètre celui qui saurait (par cœur), *extérieurement*, les théorèmes d'EUCLIDE, sans savoir leurs démonstrations, sans les savoir, pour s'exprimer par contraste, *intérieurement*. On tiendrait également pour non satisfaisante la connaissance de la relation bien connue des côtés d'un triangle rectangle, acquise par la mesure de beaucoup de triangles rectangles. Toutefois *l'essentialité* de la démonstration n'a pas encore dans la connaissance mathématique la signification et la nature qui en feraient un moment du résultat même ; mais dans ce résultat un tel moment est dépassé et a disparu. En tant que résultat, le théorème est bien un théorème *reconnu comme un théorème vrai* ; mais cette circonstance surajoutée ne concerne pas son contenu, elle concerne seulement sa relation au sujet connaissant ; le mouvement de la démonstration mathématique n'appartient pas au contenu de l'objet, mais est une opération *extérieure* à la chose. Par exemple la nature du triangle rectangle ne se dispose pas elle-même de la façon représentée dans la construction nécessaire pour démontrer la proposition exprimant la relation du triangle même ; tout le processus dont sort le résultat est seulement un processus de la connaissance, un moyen de la connaissance. ... Dans la connaissance mathématique, la réflexion est une opération extérieure à la chose ; de ce fait, il résulte que la vraie chose est altérée..."[76]

Le champ mathématique n'est pas un monde clos de concepts et de propriétés préexistant que le mathématicien découvrirait peu à peu en s'assurant de la vérité de propositions qui seraient censées les exprimer. Il est un domaine toujours ouvert qui n'a de sens ni d'existence en dehors des opérations qui le promeuvent.

> "... Dieu lui même ne peut juger des mathématiques que par les mathématiques. Même pour lui la simple règle du développement <décimal de π> ne peut déterminer plus que pour nous."[77]

En mettant l'accent sur le caractère normatif des propositions mathématiques, WITTGENSTEIN rend sans objet le **problème classique de l'applicabilité des mathématiques à la réalité**, auquel la formulation d'EINSTEIN donne la forme du mystère :

> "Comment se fait-il que les mathématiques qui sont pourtant un pur produit de la pensée indépendant de l'expérience, rendent si excellemment compte de la réalité".

---

76 *HEGEL, Idem, Tome 1, préface p. 36.*
Analyse qui, sur fond de lutte de priorité entre mathématiques et philosophie, vise à mettre en évidence la supériorité de la démonstration philosophique, laquelle dans son mouvement dialectique ressaisit le mouvement qui constitue l'essence même de l'être ; mouvement lui-même dialectique, ce qui fait de la philosophie une réflexion qui pense son objet de l'intérieur - donc qui pense en vérité ou qui est la vérité manifestée, "la vérité étant le mouvement d'elle-même en elle même". La conclusion est sans appel : "l'évidence de cette connaissance défectueuse dont la mathématique est fière, et dont elle fait parade contre la philosophie, repose seulement sur la pauvreté de son but et sur la défectuosité de sa matière ; elle est donc d'une espèce que la philosophie doit dédaigner."
On conçoit que cette exécution ne puisse satisfaire le mathématicien et qu'elle ne le laisse pas sans voix. B. RUSSELL (cf. note 89) s'est insurgé contre cette exécution, taxant ces propos "à la fois d'ignorance et de supidité" cité par F. ARMENGAUD in. dictionnaire des philosophes tome 2, article RUSSELL, P; 2269, PUF 1984.

77 *WITTGENSTEIN, L. Idem, p. 325, § 41*

"Pour les mathématiques, il n'y a pas de problèmes d'application"[78]

On peut dire, si l'on veut que les mathématiques sont faites pour s'appliquer à la réalité, ce qui signifie que leur utilisation pour concevoir un état de faits (physiques, biologiques...) détermine une représentation nécessaire de cet état de faits ainsi que les questions que nous nous posons à son propos :

> "Si le calcul est pratique il doit amener des faits au jour. Et cela, seule l'expérience le peut."
> Mais quels sont ces "faits" ? Crois-tu que tu peux montrer quel fait l'on entend en le montrant du doigt ? Cela rend-il déjà clair le rôle que joue la "constatation" d'un fait ? - Et si maintenant les mathématiques seules déterminaient le caractère de ce que tu appelles un "fait" ?
> "Il est intéressant de savoir *combien* de vibrations possède ce son. "Mais c'est l'arithmétique seule qui t'a appris cette question. Elle t'a appris à voir ce genre de faits.
> Les mathématiques - veux-je dire - ne t'apprennent pas seulement la réponse à une question ; mais un jeu de langage tout entier, avec ses questions et ses réponses."[79]

Les propositions mathématiques déterminent une *représentation nécessaire* c'est-à-dire excluant la possibilité de tout autre représentation. C'est ce qui fait la différence entre une proposition mathématique et une proposition empirique et ce qui, on l'a vu, la définit comme règle :

> "la règle est en tant que règle, autonome, elle existe en quelque sorte de façon souveraine bien qu'elle tienne son importance des faits de l'expérience quotidienne".

> "Pourquoi les lois newtoniennes ne sont-elles pas des axiomes mathématiques ? Parce qu'on pourrait très bien imaginer qu'il en aille autrement. Mais - veux-je dire - cela assigne seulement à cette proposition un rôle déterminé par rapport à un autre. C'est-à-dire : dire d'une proposition : "on pourrait imaginer cela encore autrement" ou bien "on peut aussi imaginer le contraire", cela lui attribue le rôle de la proposition empirique.
> La proposition, que l'on ne doit pas pouvoir imaginer autre que vraie, a une autre *fonction* que la proposition pour laquelle il en va différemment."[80]

La preuve a été déterminée comme image qui guide notre jugement : elle nous permet de déterminer ce qu'il doit en être parce qu'elle "montre la *production*"[81] du résultat ; elle est modèle ou paradigme d'après lequel nous jugeons.

> "... Les nombres sont des formes (je ne parle pas des signes numériques) et l'arithmétique nous apprend les propriétés de ces formes. Mais la difficulté est alors que ces propriétés des formes sont des *possibilités*, non les propriétés formelles des choses d'une telle forme. Et ces possibilités à leur tour se révèlent possibilités physiques ou psychologiques (de la décomposition, de l'assemblage, etc.). Mais les formes jouent seulement le rôle des images que l'on emploie de telle et telle façon. Ce que nous donnons, ce ne sont pas des propriétés des formes,

---

78 *Note citée par BOUVERESSE J. Idem, p. 123*

79 *WITTGENSTEIN, L. Idem, p. 305, § 18*

80 *Idem, p. 289, § 3 et p. 196-197, § 4*

81 *Idem, p. 292, § 5*

> mais des transformations des formes, qui se présentent comme n'importe quels paradigmes".
>
> "Nous ne jugeons pas les images, nous jugeons au moyen des images. Nous ne les examinons pas pour elles-même, mais examinons autre chose avec elles."[82]

Les propositions mathématiques ne sont *pas prédictives*, elles ne disent rien, mais à partir d'elles nous pouvons faire des prédictions :

> "...il ne faut pas s'étonner si la preuve nous aide à la *prédiction*. Sans cette image je n'aurais pu dire comment il allait en être, mais quand je la vois je m'en saisis pour la prédiction"[83].

Le chemin qu'elles nous montrent est celui des concepts ou structures qui peuvent servir à penser des contenus différents.

> "Mais nous devons nous rappeler que la preuve mathématique, par ses transformations, prouve non seulement des propositions de la géométrie des signes, mais aussi des propositions aux *contenus* les plus divers..."
>
> "Nous disons : "si en multipliant, vous suivez réellement la règle, vous devez obtenir le même résultat." Maintenant, si c'est là le mode d'expression quelque peu hystérique du langage universitaire, il n'est pas nécessaire que nous nous y intéressions.
> Mais c'est l'expression d'une attitude à l'endroit de la technique du calcul, qui se manifeste partout dans notre vie. L'emphase du Doit correspond à l'inexorabilité de la position comme à la technique du calcul et à de multiples techniques apparentées.
> Le Doit mathématique n'est qu'une autre expression du fait que les mathématiques construisent des concepts.
> Et les concepts servent à concevoir. Ils correspondent à un traitement déterminé des états de fait.
> Les mathématiques constituent un réseau de normes".[84]

C'est dire aussi que les **mathématiques n'ont pas leur fondement dans la logique,** ou encore que la nécessité des propositions mathématiques - l'inexorabilité du "Doit mathématique" - ne vient pas d'une toute puissance que les règles logiques exerceraient sur les mathématiques.
On a vu plus haut[85] comment WITTGENTEIN récusait cette toute puissance d'une machinerie logique qui s'exercerait en quelque sorte de l'extérieur sur la pensée :

> "...C'est *nous* qui sommes inexorables dans l'applications de ces lois".[86]

---

82 *Idem, p. 199-200, § 11 et 12*

83 *Idem, p. 209, § 33*

84 *Idem, p. 201 § 14 et p. 340-341, § 67*

85 *Cf. § 2 : refus d'une perspective logiciste*

86 *Idem, p. 78, § 118*

Bien entendu, les opérations mathématiques ne sont pas étrangères à la logique ; les mathématiques sont de la logique, mais elles ne sont pas que cela. Et toute perspective logiciste qui voudrait fonder les mathématiques sur la logique comme FREGE[87] l'a tenté pour l'arithmétique, apparaît ici réductrice.
L'usage de la logique est interne à l'activité mathématique et les règles logiques n'ont pas un statut privilégié. Elles sont, comme les règles grammaticales, ces règles que les hommes se sont données pour pouvoir parler, penser, calculer..., et qui sont nécessaires pour ces activités.[88]
Mais la logique est par elle-même impuissante à assumer le rôle de la preuve parce qu'elle ne peut faire voir. Une preuve logique reste formelle : muette sur les applications qui lui donne un sens. C'est pourquoi WITTGENSTEIN critique le formalisme de RUSSELL.[89]

> "Quand je dis : "ce qui doit avant tout être évident, c'est que cette substitution donne *cette* impression" - je pourrais dire également : "je dois le considérer comme indubitable" - mais pour cela il me faut de bonnes raisons : par exemple que la même substitution donne pratiquement toujours le même résultat, etc. Et le caractère synoptique ne consiste-t-il pas justement en cela ?
> J'inclinerais à dire que lorsque le caractère synoptique fait défaut, lorsqu'on ne peut avoir de vue d'ensemble de la preuve, lorsqu'on peut douter d'avoir sous les yeux le résultat de cette substitution, la *preuve* est détruite. Et non pas d'une façon idiote et négligeable qui ne concernerait pas *l'essence* de la preuve.
> Ou bien ; la logique comme fondement des mathématiques ne fonctionne pas, et ce parce que la puissance démonstrative de la preuve logique coïncide et se confond avec sa puissance démonstrative géométrique.

---

87 *FREGE.G. Cf. Note 8, et les Fondements de l'arithmétique (1894), éd. Du SEUIL 1969. Conclusion p. 211 § 87 : "J'espère avoir dans cet écrit rendu vraisemblable l'idée que les lois de l'arithmétique sont des jugements analytiques, et par conséquent* a priori. *L'arithmétique serait donc simplement une logique développée, et chaque proposition arithmétique une loi logique, bien que dérivée. L'application de l'arithmétique à la connaissance de la nature serait alors l'élaboration logique des faits d'observation ; et calculer serait déduire. Les lois des nombres n'auraient pas besoin, à l'encontre de ce que pense Baumann, d'être confirmées par la pratique pour qu'on les dise applicables au monde extérieur. Dans le monde extérieur, dans la totalité de l'espace, il n'y a ni concepts, ni propriétés de concepts, ni nombres. Les lois des nombres ne sont donc pas proprement applicables aux choses externes : ce ne sont pas des lois de la nature. Mais elles s'appliquent au jugement qui parle des choses du monde extérieur : elles sont les lois des lois de la nature. Elles n'affirment pas un lien entre les phénomènes naturels, mais entre des jugements parmi lesquels figurent les lois de la nature."*

88 *"N'en va-t-il pas ainsi : tant que l'on pense, on ne peut faire autrement qu'effectuer des inférences logiques. Cela signifie bien : tant que* telle et telle chose n'est pas remise en question.
Les étapes que l'on ne *remet* pas *en question sont les inférences logiques. Mais si on ne les remet pas en question, ce n'est pas parce qu'"elles correspondent sûrement à la vérité", ou autres choses du même genre - mais parce que c'est là précisément ce que l'on appelle "penser", "parler", "argumenter". Il ne s'agit absolument pas là d'une quelconque correspondance entre le dit et la réalité ; la logique* précède *une telle correspondance ; notamment au sens où l'instauration de la méthode de mesure* précède *l'exactitude ou l'inecactitude de la donnée de longueur." WITTGENSTEIN - Idem, p. 91, § 156.*

89 *RUSSEL Bertrand : mathématicien, logicien et philosophe anglais, (1872-1970), considéré comme l'un des fondateurs avec FREGE de la logique moderne. Il a, comme celui-ci et avant d'avoir eu connaissance de ses travaux, eu le projet logiciste le projet de fonder les mathématiques sur la logique. Ce qui le conduira à :*
- développer une théorie des relations, distinguant les relations d'un individu à une classe d'individus, et celles d'une classe à une classe de classes (théorie de la hiérarchie des types) ;
- faire de l'implication c'est-à-dire de la relation entre propositions qui constitue l'inférence, l'objet de la logique, alors que la logique classique prenait comme objet d'étude les principales opérations de l'esprit : concevoir (ou former une idée), juger (ou relier deux idées), raisonner (ou relier des jugements pour en tirer un autre) et ordonner. Antoine Arnauld et Pierre Nicole : La logique ou l'art de penser (1662). PUF 1965 ;
- définir un symbolisme approprié. Les Principia Mathematica qu'il écrit avec A. N. WHITHEHEAD de 1910 à 1912 sont le produit de ces travaux.

Cela signifie : la preuve logique de type russellien n'a de puissance démonstrative que dans la mesure où elle possède également une puissance persuasive géométrique. Et l'abréviation d'une telle preuve logique peut posséder cette puissance de persuasion et être grâce à elle une preuve, alors que la construction entièrement effectuée sur le mode russellien n'en est pas une.
Nous tendons à croire que la preuve logique possède une puissance de démonstration absolue qui lui est propre et qui provient de la certitude inconditionnelle des principes logiques de raison et d'inférence. Alors que les propositions démontrées de cette façon ne peuvent pas être plus sûres que ne l'est l'exactitude de l'*application* de ces lois d'inférence. La certitude logique des preuves - veux-je dire - ne dépasse pas leur certitude géométrique."

"... La question est bien de savoir ce qu'il faut considérer comme le critère de la reproduction de la preuve, - de l'identité de preuves. Comment les comparer pour établir l'identité ? Sont-elles identiques quand elles paraissent identiques ? J'aimerais pour ainsi dire montrer qu'en mathématiques, nous pouvons échapper aux preuves logiques".

"... La logique russellienne ne dit rien sur le type et l'emploi des propositions (je ne veux pas dire les propositions logiques). Et pourtant la logique tire tout son sens uniquement de son application supposée aux propositions".

"Que veut montrer celui qui veut montrer que les mathématiques ne sont pas de la logique ? Il veut bien dire quelque chose comme : - si on enveloppe des tables, des chaises, des armoires, etc., dans autant de papier qu'il faut, ils finiront bien par paraître sphériques.
Il ne veut pas montrer qu'il est impossible de construire pour chaque preuve mathématique une preuve russelienne qui lui "corresponde" (de quelque façon), mais que la reconnaissance d'une telle correspondance ne repose pas sur la logique.
"Mais nous pouvons toujours revenir à la méthode logique primitive !" Oui, mettons que nous le puissions - comment se fait-il que nous ne soyons pas *obligés* de le faire ? A moins que nous ne soyons étourdis, inattentifs quand nous ne le faisons pas. ... "

..."La logique ne me contraint que dans la mesure ou le calcul logique me contraint"[90].

Les mathématiques ne peuvent se réduire à un jeu logique, avec des règles purement formelles. On peut les comparer à un jeu, mais on ne peut les y réduire.
Ramenées à leur activité : construction de concepts c'est-à-dire de normes et de réseaux de normes, **elles ont leur fondement en elles-mêmes.**

"Pourquoi faut-il un fondement aux mathématiques ? ! Elles n'en ont pas plus besoin, crois-je, que n'ont besoin d'une *analyse* les propositions relatives aux objets physiques ou celles qui concernent les impressions sensibles. Mais les propositions mathématiques comme toutes les autres propositions requièrent une mise au clair de leur grammaire.
Les problèmes *mathématiques* des prétendus fondements sont pour nous tout aussi peu au fondement des mathématiques que sur un tableau la colline supporte le château.

---

90 *WITTGENSTEIN, L. Idem, p. 160-161, § 43-44 ; p. 201, § 14 ; p. 186, § 53 et p. 147, § 16*

"Mais la logique de Frege n'est-elle pas devenue impropre au fondement de l'arithmétique à cause de la contradiction ?" Si ! Mais qui disait qu'elle devait remplir cette fonction ? !"

"Je n'ai pas encore élucidé le rôle de l'erreur de calcul. Le rôle de la proposition : "j'ai dû faire une erreur de calcul." C'est en vérité la clé de la compréhension des "fondements" des mathématiques".[91]

CONCLUSION

Un peu plus qu'un simple jeu qui exclut l'arbitraire.

Activité autonome qui construit ses propres règles et qui peut se définir par cette activité elle-même, activité normée c'est-à-dire opérant selon des règles appliquées de façon stricte et acticité normative ne cessant de créer avec ces règles de nouvelles règles, les mathématiques peuvent être comparés à un jeu avec et sur des règles mais elles ne peuvent lui être identifiées à cause justement de leur normativité par rapport à la réalité. Elles sont un peu plus ou, au moins, autre chose qu'un simple jeu qui ne "toucherait" pas à la réalité, qui ne permettrait pas de faire des prédictions.
C'est pourquoi s'il est formateur pour l'esprit qui veut penser le statut des mathématiques, d'envisager que les mathématiques et leurs règles pourraient être autres qu'elles ne sont, pour mettre en évidence qu'elles n'ont ni fondement, ni existence en dehors de l'activité qui les produit et les posent comme règle, il serait *trompeur de les dire arbitraires*, avec les connotations que véhicule ce terme : ce qui peut être l'invention du "n'importe quoi", en fonction de l'idée du moment. Ce qui ne correspond évidemment pas au statut des propositions mathématiques et réduirait à rien leur nécessité, ou plus exactement ne permettrait pas d'en rendre compte :

... "Qualifier "d'arbitraire" les règles du jeu mathématiques est certainement trompeur et d'une certaine façon dangereux".[92]

La règle est bien *ce que l'esprit pose comme telle*, c'est à dire ayant force de loi, force déterminante. Nécessaire dans et par cette position, elle pourrait être autre dans son contenu, et WITTGENSTEIN n'hésite pas à recourir à la *fiction anthropologique ou historique* pour démonter l'activité d'apprentissage de la règle, et par là débarrasser la représentation de la logique de l'absolu que nous lui attribuons, envisager qu'il puisse exister une autre mathématique :

"Mais s'il existait une ethnie dont les membres comprendraient apparemment un genre de régularité qui m'est insaisissable..."

"Il est souvent très utile pour l'élucidation d'un problème philosophique de se représenter le développement historique, en mathématiques par exemple, tout

---

91 *Idem, p. 303, § 16 et p. 194, § 90*

92 *Note citée par BOUVERESSE J. Idem, p. 108 (le chapitre 8 examine la question du conventionnalisme des propositions mathématiques).*

> autre qu'il fut effectivement. S'il avait été différent, il ne viendrait à personne l'idée de dire ce que l'on dit effectivement"[93]

Partant, on peut qualifier la règle d'*invention* ou de *création humaine*, pour signifier ce qui a déja été dit, à savoir qu'elle ne dérive pas de l'expérience et que les mathématiques ne découvrent pas un monde d'idées ou d'objets et de propriétés ou de relations préexistants à l'activité de définition et de démonstration. Mais là encore le terme "d'invention" risque d'être trompeur tout comme celui "d'arbitraire" avec lequel il a des connotations communes ; car nous "n'inventons" pas à proprement parler "1759 + 3822 = 5581" pas plus que " 2 + 2 = 4" au sens ou ce ne sont *pas des fictions* qui résulteraient de l'acte créateur de notre volonté :

> ... "Ce qui me semble en accord avec la règle ne dépend pas de mon vouloir..."[94]

Ce sont des résultats d'opérations qui, compte tenu des règles que nous avons apprises et qui sont celles du système décimal, ne peuvent être autres. Et la "découverte" du résultat est interne à l'opération qui le produit. Elle ne repose sur rien ni ne renvoie à rien qui soit extérieur à cette proposition.

> "Il n'y a pas de découverte du fait que 13 suit 12. C'est notre technique - nous fixons, nous enseignons notre technique de cette façon. S'il y a une découverte - c'est que c'est une chose qui vaut particulièrement la peine d'être faite."[95]

> "Mais le mathématicien ne découvre pas, il invente. "La démonstration a un résultat surprenant !" - S'il te surprend, c'est que tu ne le comprends pas. Car ici la surprise n'est pas légitime comme à l'issue d'une expérience. A ce moment - inclinerais-je à dire - tu dois te rendre à sa séduction, mais pas quand elle t'est communiquée au bout d'un enchaînement déductif. Car alors elle signifie surtout que règne encore l'obscurité ou le malentendu.
> ...
> Si l'on dit que l'on est surpris précisément d'avoir été conduit à *tel point*, ce n'est pas là une exposition tout à fait correcte de la chose. Car l'on n'a cette surprise que lorsqu'on ne connaît pas encore la façon de faire. Mais pas quand elle nous saute aux yeux. Le fait que le chemin que j'ai sous les yeux commence où il commence et finisse où il finit n'est pas une surprise. La surprise et l'intérêt viennent ensuite pour ainsi dire de l'extérieur. J'entends : l'on peut dire "cette investigation mathématique présente un grand intérêt psychologique", ou bien "un grand intérêt physique".[96]

La grammaire du langage, les règles de la logique, les propositions mathématiques qui sont aussi des règles, la représentation du monde, les sciences qui l'objectivent et assurent une certaine maîtrise technique forment système. Un système qui pourrait être autre, perspective anthropologique qui rappelle "qu'un jeu de langage, une règle sont une institution"[97] , mais qu'il n'appartient pas à un individu, ni même à un groupe fusse celui des membres de la cité scientifique de changer radicalement et subitement.

---

93 *WITTGENSTEIN, L. Idem, p. 283, § 45, et p. 187, § 80*

94 *Idem, p.314, § 27*

95 *Note citée par BOUVERESSE J. Idem, P. 111*

96 *WITTGENSTEIN, L. Idem, p. 106-107, § 2*

97 *Idem, p. 274, § 32*

Les propositions mathématiques pas plus que les règles logiques, pas plus que les règles juridiques ne sont des propositions anthropologiques qui diraient respectivement :

> "comment nous les hommes, inférons et calculons,
> comment les gens de ce peuple traitent un voleur.
> ... Le juge n'UTILISE pas le code comme un manuel d'anthropologie"[98]

C'est toute la distance, la différence de statut, entre le fait - ce qui est, ce qui se fait - et le droit - ce qui doit être -, entre l'empirique et le normatif.

98 *Idem, p. 174, § 65*

ANNEXE 1

APERCU DU PARCOURS DE WITTGENSTEIN

Philosophe - logicien, autrichien de nationalité anglaise à partir de l'Anschluss, né à Vienne en 1889 et mort à Cambridge en 1951. A développé une philosophie centrée sur l'analyse du langage et à partir de là une conception originale de la philosophie.

Son parcours commence dans le contexte industriel "fils d'un principaux maître de forge de l'empire d'Autriche, il fut élevé dans le milieu familial jusqu'à l'âge de 14 ans"[99] .

Il étudie la mécanique à Berlin (1906) et à Manchester (1908) où il se spécialise en aéronautique.

Il prend connaissance des travaux de HERTZ en mécanique et de BOLTZAMM en thermodynamique dont le modèle des espaces multidimentionnels aurait influencé son concept d'espace logique.[100] puis il délaisse ces recherches pour s'intéresser au fondement des mathématiques.

Il rencontre le logicien FREGE à Iéna.
Il lit les principes de mathématiques de B. RUSSEL, parus en 1903, considéré comme un pilier de la logique moderne avec FREGE.

Il s'inscrit au Trinity College pour suivre ses cours de 1902 à 1913 et devient son ami. Il rencontre le logicien et mathématicien E.N. WHITEHEAD co-auteur avec RUSSEL des Principia mathematica (1910, 1912) œuvre maîtresse dans l'histoire de la logique, où ils réalisent leur programme logiciste : fonder les mathématiques sur la logique.

Il rencontre aussi le philosophe G.E. MOORE, l'économiste J.M. KENEYS, les mathémathiciens G.H, HARDY et D. PINSENT, le logicien W.E. JOHNSON.

Il s'installe ensuite en Norvège dans une cabane (SKJOLDEN, automne 1913).

Il rédige sa première œuvre pendant la première guerre où il est fait prisonnier par les italiens en 1918 : le Tractatus Logico-philosophicus dans lequel il expose sa conception du langage comme image du monde dont les règles a priori constituent la logique.

> "La proposition est une image de la réalité.
> La proposition est une transposition de la réalité telle que nous la pensons."
>
> "La pensée est la proposition ayant un sens".
>
> "La proposition n'est une image de l'état de choses que dans la mesure où elle est logiquement articulée."[101]

Instituteur de campagne de 1919 à 1926 en Basse Autriche, il démissionne probablement à cause de différends répétés avec les habitants du lieu.

---

99 *ARABI, O. Idem, p. 2665*

100 *WITTGENSTEIN, L. Tractatus, 1.13, 202, 3.4, 3.41, 3.42, 4.04 et ARABI, O. Idem, p. 2667*

101 *Idem, 4.01, 4.001, 4.032*

Il aurait été relancé dans ses réflexions par une série de conférences faites par BROWER à Vienne sur le fondement des mathématiques.[102]

Revenu à Cambridge en 1929, il est fait docteur pour le Tractatus et y enseigne jusqu'en 1936, puis après un séjour en Norvège, de 1937 à 1947, année où il démissionne.
Il termine son second ouvrage les Recherches (ou investigations) philosophiques en 1949, dans lesquelles il reprend le problème du langage dans ses formes concrètes, c'est-à-dire le langage usuel. Ouvrage publié en 1953.

Il meurt d'un cancer en 1951.

Par conséquent, de tous ses écrits, seules ces deux œuvres, le Tractatus et les Recherches - qu'il n'a pas voulu séparer dans la publication[103], ont été écrites pour être publiées, ainsi qu'un article : Quelques remarques sur la forme logique, imprimée en vue d'une intervention au congrès annuel des philosophes de Grande Bretagne de 1929[104] . Tout le reste de l'œuvre est constitué de notes qui seront publiées par ses exécuteurs testamentaires. Certaines le seront telles quelles, c'est le cas par exemple des cahiers : Cahier bleu, Cahier brun, Cahier jaune. D'autres le seront à partir de compilations de fragments : c'est le cas des Remarques sur les fondements des mathématiques qui rassemblent des fragments allant de septembre 1937 à août 1944. Ils poursuivent des réflexions entreprises dans les Remarques philosophiques et la Grammaire philosophique. Ils se présentent sous la forme de paragraphes plus ou moins courts regroupés chronologiquement en sept parties. (voir bibliographie, annexe 3).

---

102 *WRIGH, H. Von, In WITTGENSTEIN, De la certitude, p. 17-20*

103 *WITTGENSTEIN, L. Préface aux Investigations philosophiques, p. 112.*

104 *WRIGH, H. Von In WITTGENSTEIN, de la certitude, p. 21*

ANNEXE 2

WITTGENSTEIN. ***Des jeux de langage***

Saint-Augustin, décrivant la façon dont il apprenait le langage, nous dit qu'il sut parler lorsqu'il eut appris le nom des choses ; ce qui nous fait songer à la façon dont chacun de nous, dans son enfance, apprend à connaître les mots : on apprend des mots comme "homme", "sucre", "table", etc., avant de penser à en connaître d'autres, comme "aujourd'hui", "pas", "mais", "peut-être".

Supposons que quelqu'un nous apprenne à jouer aux échecs, et qu'il ne fasse pas mention de l'existence et du mode de déplacement des pions. Nous pourrons dire que la description du jeu, en tant que phénomène particulier, est incomplète ; mais qu'il a décrit toutefois de façon complète un jeu plus simple. Dans le même sens, nous dirons que Saint-Augustin a décrit correctement l'apprentissage d'un langage plus simple que celui que nous utilisons. Imaginons un tel langage.

1. Ce peut être celui qu'utilisent dans leur travail un maçon A et son apprenti B . B doit approcher à A les matériaux pour la construction : des pavés, des briques, des dalles, des poutres, des colonnes. Le langage se compose des mots "pavé", "brique", "dalle", "poutre", "colonne". A crie l'un de ces mots, sur quoi B lui apporte un matériau d'une certaine forme. Imaginons une société qui connaîtrait uniquement ce système de langage. On apprendrait cette langue aux enfants, en les entraînant à l'utiliser. J'emploie le mot "entraîner" dans un sens absolument analogue à celui que nous lui donnons en disant qu'on entraîne un animal à faire certaines choses. Certains moyens sont utilisés à cet effet, tels que l'exemple, les récompenses, les punitions, et ainsi de suite. On attire l'attention de l'enfant, on montre du doigt un matériau et on prononce un mot, tels sont habituellement les moyens utilisés pour cet enseignement. J'appellerai cette façon de procéder : méthode démonstrative d'enseignement du langage. Dans l'utilisation habituelle de ce type de langage, les mots sont proférés comme des ordres, suivis d'actes appropriés. Mais pour enseigner la langue on procède de la façon suivante : l'instructeur fait prononcer par l'enfant le nom de l'objet qu'il lui montre du doigt. En fait l'exercice peut être encore simplifié : l'enfant répète les mots que l'instructeur prononce.

2. A présent, examinons un développement possible du langage n° 1. L'apprenti maçon connaît par cœur les chiffres de la série de 1 à 10. Quand il entend l'ordre : "cinq carreaux !" il se rend au lieu de stockage des carreaux, compte à voix haute de un à cinq, et à chaque chiffre prend un carreau pour l'apporter au maître maçon. Le langage parlé est ici utilisé par les deux parties. La connaissance de ce type de langage suppose que la série des nombres a été apprise par cœur. En ce cas cette série serait encore apprise par le moyen de la méthode démonstrative. Mais à chaque chiffre, pour le chiffre trois par exemple, on montrera du doigt, soit des carreaux, soit des briques, soit des colonnes, etc. Et d'autre part, on indiquera les valeurs de différents chiffres en désignant des groupements de cailloux de même forme.

5. Questions et réponses. A demande : "combien de carreaux ? "B les compte et annonce le chiffre.

Nous appellerons "jeux de langage" des systèmes de communication comme ceux que nous venons de définir en 1, 2, 3, 4, 5. Ils ressemblent plus ou moins à ce que nous appelons des "jeux" dans le langage ordinaire. C'est en se livrant à ces "jeux" que les enfants apprennent leur langue maternelle, et ils jouent même pour se divertir. Ces "jeux de

langage" ne représentent pas pour nous des fragments incomplets d'un langage donné, mais chacun d'eux nous paraît être un langage complet, un moyen pour des hommes de communiquer entre eux. Gardant cette idée à l'esprit, on imaginera plus aisément qu'à un stade primitif de la société cette forme très simple de langage puisse représenter, à l'intérieur d'une tribu, l'unique mode de communication. Pensez à ce que pouvait être l'arithmétique de ces tribus primitives.

Quand des adolescents ou des adultes apprennent ce que nous pouvons nommer des "langages techniques", utilisant des schémas et des diagrammes, des signes de géométrie descriptive, les formules des substances chimiques, etc..., ils apprennent à se servir d'autres formes de "jeux de langage".

Cahier Brun *1934-35*
*Cf. aussi "**Investigations Philosophiques**" - première partie, § 1 à 22 - Gallimard 1965 , p. 141-142, 144-145, 148*

Mais combien de sortes de phrases existe-t-il ? L'affirmation, l'interrogation, le commandement peut-être ? - Il en est d'innombrables sortes ; il est d'innombrables et diverses sortes d'utilisations de tout ce que nous nommons "signes", "mots", "phrases". Et cette diversité, cette multiplicité n'est rien de stable, ni de donné une fois pour toutes ; mais de nouveaux types de langage, de nouveaux jeux de langage naissent, pourrions-nous dire, tandis que d'autres vieillissent et tombent en oubli. (Nous trouverions une image approximative de ceci dans les changements des mathématiques.)
Le mot jeu de langage" doit faire ressortir ici que le parler du langage fait partie d'une ativité ou d'une forme de vie.
Représentez-vous la multiplicité des jeux de langage au moyen des exemples suivants :

Commander, et agir d'après des commandements.
Décrire un objet d'après son aspect, ou d'après des mesures prises.
Reconstituer un objet d'après une description (dessin).
Rapporter un évènement.
Faire des conjectures au sujet d'un évènement.
Former une hypothèse et l'examiner.
Représenter les résultats d'une expérimentation par des tables et des diagrammes.
Inventer une histoire ; et lire.
Jouer du théâtre.
Chanter des "rondes".
Deviner des énigmes.
Faire un mot d'esprit ; raconter.
Résoudre un problème d'arithmétique pratique.
Traduire d'une langue dans une autre.
Solliciter, remercier, maudire, saluer, prier.

Il est intéressant de comparer la multiplicité des instruments du langage et de leur mode d'utilisation, la multiplicité des espèces de mots et de propositions avec ce que les logiciens ont dit au sujet de la structure du langage (y compris l'autreur du Tractatus logico-philosophicus.

Investigations Philosophiques *1936-1949 - Gallimard 1988, p. 125-126*

ANNEXE 3

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

1. Ecrits de WITTGENSTEIN	Date d'écriture	Date de Publication
Cahier bleu	Notes dictées en compléments de cours 1933-1934	Oxford 1958 Gallimard 1965 Réédition TEL 1988
Cahier brun	Idem 1935	Idem
Carnets (notes - Book)	1914-1916	Oxford 1961
De la certitude	Dernier écrit	Oxford 1969 Gallimard 1965 et 1976 Réédition TEL 1987
Fiches	Etablies par WITTGENSTEIN 1929-1948	Oxford 1967 Gallimard 1970
Grammaire philosophique	1930-1933	Oxford 1969 Gallimard 1980
Investigations philosophiques	1936-1949	Londres 1953 Gallimard 1961 Réédition TEL (avec le Tractatus) 1986
Leçons et conversations sur l'esthétique	1938-1946	Oxford 1966 Gallimard 1971
Les cours de Cambridge	1930-1932	Oxford 1980 Mauvezin TER 1988
Notes sur "l'expérience privée" et les "sense data"		Philosophical Review 1968 Mauvezin TER 1982
Quelques remarques sur la forme logique	1929	Aristotelian Society 1929 Mauvezin TER 1985
Remarques mélées		Oxford 1980 Mauvezin TER 1984
Remarques philosophiques	Manuscrits inachevés 1929-1930	Oxford 1964 Gallimard 1975 Réédition TEL 1984

Remarques sur les couleurs		Oxford 1978 Mauvezin TER 1983
Remarques sur les fondements des mathématiques	manuscrits 1937-1944	Oxford 1956 Gallimard 1983
Tractatus Logico Philosophicus	Achevé en 1918	Leipzig 1921 Londres 1922 Gallimard 1961 Réédition TEL 1986

2. Quelques études sur WITTGENSTEIN

Articles généraux

ARABI, O. WITTGENSTEIN, article dans le dictionnaire des philosophes, tome 2, p. 2065 à 2672, PUF 1984.

GRANGER, G.G. WITTGENSTEIN, article dans Encyclopédie Universalis, tome 16, 1973, p. 997-998,

Ouvrages généraux d'introduction à l'homme et son œuvre

CHAUVIRE, C. Ludwig WITTGENSTEIN, SEUIL (Les contemporains) 1989

GRANGER, G.G. WITTGENSTEIN, SEGHERS 1969 (épuisé)

Ouvrages sur la nécessité des mathématiques

BOUVERESSE, J. La force de la règle (Wittgenstein ou l'invention de la nécessité), Les Editions de Minuit 1987

BOUVERESSE, J. Le pays des possibles (Wittgenstein, les mathématiques et le monde réel), Les Editions de Minuit 1988

SCHMITZ, J. WITTGENSTEIN, La philosophie et les mathématiques, PUF 1988

On trouvera des bibliographies détaillées dans ce dernier ouvrage et dans NICOLET, D. Lire WITTGENSTEIN, Ed. AUBIER 1989.

Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

François BLONDEL
Architecte et Mathématicien

Jean-Paul GUICHARD
Collège Mendès France - 79200 Parthenay

Francois Blondel, né le 15 juillet 1618 à Ribemont près de Saint-Quentin en Picardie et décédé le 21 janvier 1686 à Paris, est le type même de l'honnête homme du XVII^{ème} siècle.

Reçu ingénieur de la marine, il lève le plan de ports et de places fortes pour Mazarin. En 1647, il commande une galère et participe à la bataille navale de Castellamare di Stabia. En 1650-1651 il lève le plan des forteresses maritimes de la Provence. Précepteur du jeune duc de Lomenie de Brienne, il accompagne son élève dans un voyage en Europe en 1652. Puis il est envoyé en mission diplomatique à Berlin en 1657 et à Constantinople en 1659. Il séjourne longtemps à Rome, visite l'Orient et commence à s'intéresser à l'architecture. En 1664 il travaille à l'allongement du pont de Saintes sur la Charente et restaure l'Arc de Triomphe romain. Désigné par Colbert comme membre de la commission chargé d'explorer les côtes de Saintonge, il fait entreprendre, sur ses plans, la construction du Fort de la Prée dans l'Ile de Ré et fournit le tracé du futur arsenal de Rochefort en 1660. Mais Colbert ne lui laisse pas poursuivre ses travaux et l'envoie aux îles d'Amérique pour lever des cartes et repérer les points à fortifier. A son retour, en 1667, il sera nommé membre de l'Académie des Sciences. Successivement conseiller et professeur du Roi en mathématique, maréchal de camp de l'Armée de Terre, commissaire général de la Marine, professeur de mathématiques du Dauphin, il est nommé en 1671 directeur de l'Académie d'Architecture, dès sa fondation. A Paris, il restaure les portes Saint-Antoine (1672) et Saint-Bernard (1674), aujourdh'ui disparues. On lui doit l'Arsenal de Berlin et, à Paris, la porte Saint-Denis. Louis XIV lui remet, en 1685, des lettres de noblesse mais il ne jouira qu'un an de son titre de Seigneur des Croisettes et de Gaillardon.
La bibliographie de ses oeuvres, en annexe 1, traduit bien cet éclectisme.
De sa vie et de ses oeuvres, je n'aborderai que deux moments liés au lieu et au contenu de l'Université d'été :

1. l'architecture de la corderie royale de Rochefort, située à 30km au sud de la Rochelle
2. le professeur de mathématiques du Dauphin qui nous a laissé son cours de mathématiques.

1. Rochefort et la corderie royale

Le problème
1660 : le roi Louis XIV a besoin de créer un arsenal sur la façade atlantique de la France pour construire, armer et entretenir une flotte à la hauteur de ses ambitions et ses besoins. Son chargé des affaires de la Marine, le célèbre Colbert (1619-1683) décide que le nouveau port se situera entre Loire et Charente.

La recherche

De 1661 à 1665, capitaines, ingénieurs, architectes, géographes vont parcourir les côtes. Blondel en fait partie. Voici ce qu'il écrit : "En l'année 1664, j'eu l'ordre du Roi d'aller visiter la côte et sonder les ports et les rades dans la mer océane depuis Dunkerque jusqu'à Bayonne (...) et faire le choix d'un lieu où le Roi pût établir un Arsenal de Marine digne de la majesté de son règne et de la gandeur de ses armées navales" [7].

Le choix

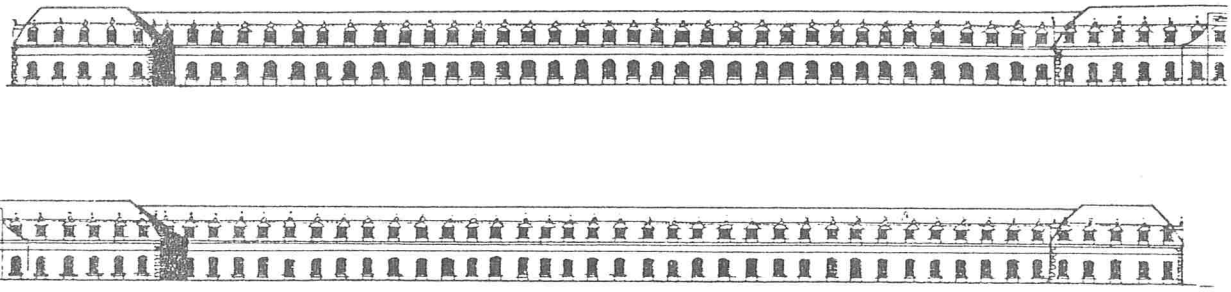
Le 20 décembre 1665, Colbert de Terron, gouverneur de Brouage et cousin de Colbert, convoque à Tonnay Charente un grand conseil réunissant les participants aux recherches. Le choix se porte sur le site de Rochefort. "La rivière de Charente, à sa bouche, était de tous ces lieux que nous avions vus dans ces côtes celui qui a le plus grand avantage pour les desseins du Roi. Nous fûmes d'avis de la proposer à sa Majesté" [7].

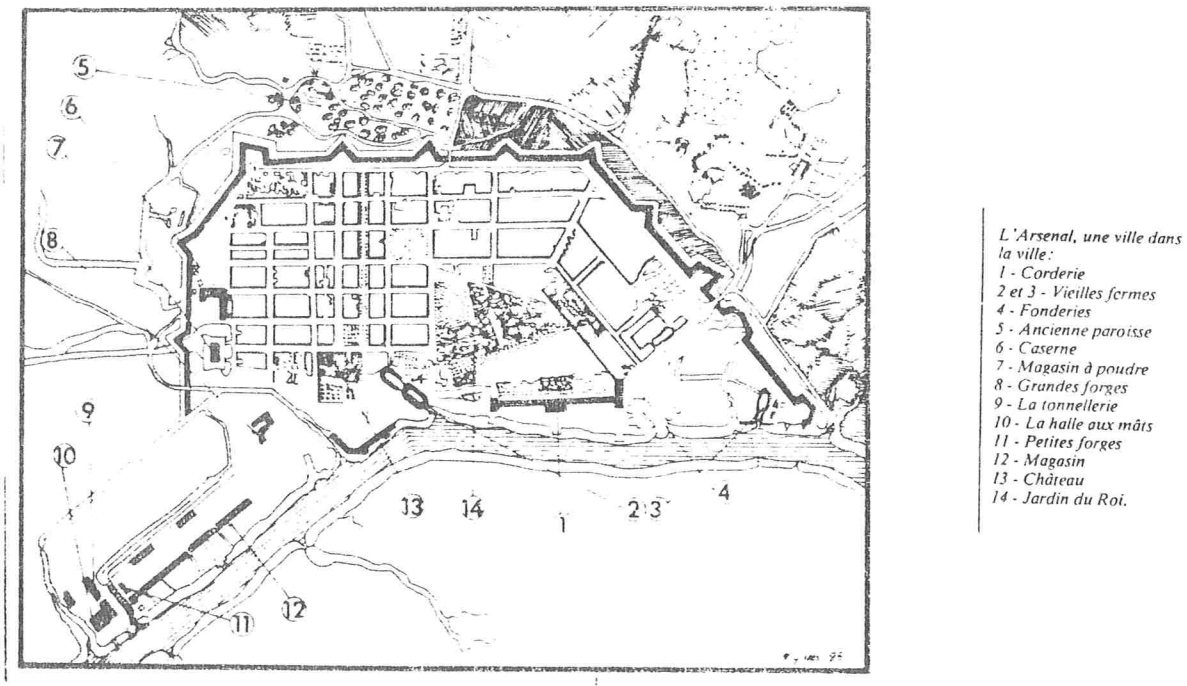


L'accord du roi et le début des travaux

Laissons parler Blondel : "Après avoir mûrement fait examiner à son Conseil les raisons de s'établir à Rochefort, Sa Majesté m'ordonna de m'y arrêter pour en commencer l'exécution. Ce fut au commencement de l'année 1666 que je mis la première pierre au bâtiment de Rochefort, sur la même rivière qui n'était alors qu'une côte déserte, et que je donnais les dessins de ce qui s'y devait construire pour un grand Arsenal de la Marine". Cet arsenal sera le plus grand arsenal maritime de l'Europe du XVIIème siècle et lancera plusieurs centaines de navires.

La corderie royale





L'Arsenal, une ville dans la ville:
1 - Corderie
2 et 3 - Vieilles fermes
4 - Fonderies
5 - Ancienne paroisse
6 - Caserne
7 - Magasin à poudre
8 - Grandes forges
9 - La tonnellerie
10 - La halle aux mâts
11 - Petites forges
12 - Magasin
13 - Château
14 - Jardin du Roi.

Au bord de la Charente se construit donc une ville et, au coeur de cette ville dans la ville qu'est l'Arsenal, se trouve la corderie, un bâtiment exceptionnel à bien des points de vue. 54 fois plus long que large, il mesure 370m et repose sur un radeau formé d'un quadrillage de 14.000 m^3 de madriers de chêne. Son édification a été une prouesse technique (voir en annexe 2 la description faite par Blondel). Son architecture est d'un pur classicisme. Les travaux ont duré de mars 1666 à juin 1669.

Elle est actuellement en fin de restauration après son incendie par les allemands en 1944 et son oubli jusqu'en 1964. Elle abrite maintenant plusieurs organismes dont le Centre International de la Mer, la Chambre de Commerce et d'Industrie, la Bibliothèque Municipale où l'on peut trouver d'anciens ouvrages de mathématiques ...



2. Le cours de mathématiques au Dauphin

Dix ans après la création de Rochefort nous retrouvons Blondel professeur de mathématiques du Dauphin. Quelle sorte de mathématiques Blondel enseignait-il ? C'est la question à laquelle nous allons essayer de répondre en présentant l'ouvrage qu'il a fait imprimer en 1683 à Paris. (voir annexe 3).
Ce qui frappe à la lecture de ce cours de 200 pages et de ses préfaces, c'est le parti pris par Blondel. Homme d'action et de terrain (topographe, architecte, ingénieur militaire) et homme cultivé, il fait un traité pour l'honnête homme du XVIIème siècle. Il privilégie donc ce qui est utile et culturel.

Ses objectifs
Blondel les énonce dans sa préface (voir annexe 3) : il choisit les connaissances les plus utiles et les plus nécessaires mais aussi des connaissances agréables et curieuses. Les trois mots clés que nous retrouvons tout au long de l'ouvrage sont : nécessaire - utile - agréable.
En ce sens, il est à l'opposé d'un bon nombre de traités de la même époque rédigés par des religieux (jansénistes, oratoriens, jésuites). Pour ceux-ci, la géométrie n'a guère d'utilité. Ce qui importe c'est son "bon usage", c'est-à-dire : exercer l'esprit, disposer l'esprit à la religion, détourner des sens, servir de modèle pour la conduite des moeurs.
En voici un exemple dans la préface des **Nouveaux Elémens de Géométrie** d'Arnauld (1667), ouvrage contemporain du Cours de Blondel. "C'est l'unique vue qu'a eue l'Auteur de ces nouveaux Elémens. Il n'a pas tant considéré la Géométrie, que l'usage qu'on pouvait faire ; et il a cru qu'en évitant ces défauts qui n'en sont pas inséparables, on s'en pouvait très utilement servir pour former les jeunes gens, non seulement à la justesse de l'esprit, mais même en quelque sorte à la piété et au règlement des moeurs" (p. 3).

"Ce sont ces réflexions qui ont fait juger à l'Auteur de ces Elémens, qu'on pouvait faire un bon usage de la Géométrie ; mais ce n'est pas néanmoins ce qui l'a porté à travailler à en faire de nouveaux, puisqu'on peut tirer tous ces avantages des livres ordinaires qui en traitent. Ils portent tous à aimer la vérité ; ils apprennent à la discerner ; ils fortifient la raison ; ils étendent la vue de l'esprit et ils donnent lieu d'admirer la grandeur de l'âme de l'homme et de reconnaître qu'elle ne peut être autre que spirituelle et immortelle" (p. 11).

Sa méthode
Cette opposition, cette différence de point de vue se note aussi dans la méthode adoptée pour la rédaction de l'ouvrage. Pour Blondel il s'agit toujours d'utilité (pratique, facilité), alors que pour Arnauld il s'agit d'un exposé logique (rigoureux, voire difficile, abstrait, formel).

Blondel : "'Mais pour ôter les épines qui se trouvent dans les ouvrages de ceux qui en ont écrit, j'ai composé divers Traités de ces différentes parties de Mathématique, dans lesquels j'ai tâché d'aplanir ce qu'il y avait de rude et de difficile, sans rien omettre de ce qu'il y avait d'utile" (Préface p. 8).

Arnauld : "Ce qui lui a donc fait croire qu'il était utile de donner une nouvelle forme à cette science est, qu'étant persuadé que c'était une chose fort avantageuse de s'accoûtumer à réduire ses pensées à un ordre naturel, cet ordre étant comme une lumière qui les éclaircit toutes les unes par les autres (...). On croit seulement devoir avertir le monde qu'il y aura peut être quelques personnes qui pourront trouver les IV premiers Livres un peu difficiles, parcequ'on s'y est servi de démonstrations d'Algèbre, auxquelles on a quelque peine d'abord à s'accoûtumer. La raison qui a obligé d'en user ainsi est, que traitant des grandeurs en général en tant que ce mot comprend toutes les espèces de quantité, on ne pouvait pas se servir de figures pour aider l'imagination ; outre que l'on jugeait qu'il était utile de se rompte d'abord à cette méthode, qui est la plus féconde et la plus Géométrique" (Ibidem Préface, p. 11-14,15).

Son cours

Son traité commence par un Discours au Dauphin sur les Mathématiques de 5 pages dans lequel il met en évidence les avantages procurés par l'étude des mathématiques (voir extrait annexe 4) et en montre l'extension à différents domaines que se doit de connaître un gentilhomme. Ce passage, obligé par les mathématiques dans la formation du gentilhomme, on le retrouve par exemple au début du siècle, dans un tout autre contexte, sous la plume d'Olivier de Serres dans son **Théâtre d'agriculture** (1600). Parmi les exercices, il cite "Aussi l'Arithmétique, la Géométrie, l'Architecture, la Perspective, même la Portraiture, pour représenter forteresses, villes, châteaux, paysages, dignes parties du Gentilhomme".
Utilité et culture vont se retrouver à travers le contenu et l'agencement de l'ouvrage qui est le suivant.

Traité I. De la mathématique en général
Traité II. De la géométrie spéculative
Traité III. De la géométrie pratique.

Le traité I : 55 pages (un quart de l'ouvrage)
C'est un vaste discours culturel qui commence par des généralités sur la nature des mathématiques (voir le schéma du contenu en annexe 5). Les mathématiques englobent toutes les sciences et les autres. Les divisions : pure-mixte, géométrie-arithmétique-algèbre, spéculative-pratique, sont des divisions classiques à l'époque.
En conclusion Blondel explique ses choix pour les parties suivantes avec toujours les mêmes mots clés : nécessaire - utile - agréable - (voir p. 55 annexe 5).

Le traité II : 45 pages (un quart de l'ouvrage)
Blondel commence par des généralités sur le sens et la définition des mots et des objets de la géométrie, puis il fait un raccourci des **Eléments** d'Euclide et dont il se justifie (voir p. 68 en annexe 6). Il ne retient que les propositions essentielles, sans démonstration et quelques problèmes utilisant ces propositions appelés "Pratiques", terme révélateur (voir p. 71-72 en annexe 6). Nous avons là en fait une véritable liste de savoirs et de savoir-faire avec quelques commentaires ce qui n'est pas sans rappeler la rédaction de programmes et manuels actuels. En conclusion, Blondel donne un aperçu de tout ce qui pourrait encore se traiter (voir p. 101 annexe 6).

Le traité III : 100 pages (la moitié de l'ouvrage)
Blondel commence encore par des généralités sur les définitions et figures de base (15 pages), puis il introduit les trois parties de son traité :

- Géométrie des longueurs
- Géométrie des surfaces
- Géométrie des solides.

"Nous avons jusqu'ici rapporté les noms et les définitions des grandeurs qui peuvent être mesurées par la Géométrie ; il nous reste à enseigner les pratiques des mesures" (p. 116-117).

Géométrie des longueurs (36 pages)
Est dit comment on mesure dans la pratique des longueurs et est donné le but de la géométrie des longueurs : calculer les longueurs inaccessibles. Pour cela on utilise des triangles et uniquement deux outils : $\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$ et les proportions de longueurs (Théorème de Thalès). Avec ces deux outils sont résolus, de plusieurs manières (au moins deux), six problèmes types, avec ou sans angles (voir un exemple en annexe 7). Ces six problèmes concernent le calcul de :

- la hauteur d'une tour
- la profondeur d'un puits
- la largeur d'une rivière
- la hauteur d'une tour inaccessible
- la hauteur d'un rocher
- une distance inaccessible.

Il est à noter que les valeurs des sinus sont données avec 5 chiffres. Blondel mentionne l'existence des tables de sinus et tables de logarithmes pour faire les calculs et décrit les instruments de l'époque qui permettent de calculer les angles : graphomètre, quarré géométrique, astrolabe.

Géométrie des surfaces (28 pages)
On explique comment on mesure les surfaces puis sont passées en revue diverses figures : rectangle, parallélogramme, triangle, quadrilatère, polygone régulier et quelconque, cercle, ellipse, parabole, cylindre, cône, sphère. Des formules et des méthodes sont données (parfois plusieurs en particulier pour le triangle) et un exemple numérique est toujours traité. Pour certaines formules, il est fait référence à Archimède. (voir en exemple, p. 159 annexe 7).

Géométrie des volumes (14 pages)
De même on explique la méthode. Là aussi Archimède est cité, les formules sont données et un exemple numérique est traité (voir en exemple, p. 184-185, annexe 7). Les solides traités sont : prismes et cylindres, pyramides et cônes et leurs morceaux, les cinq corps réguliers, la sphère et ses portions, ellipsoïdes, paraboloïdes, hyperboloïdes.
Donc ce troisième traité est essentiellement pratique et utilitaire.

Que peut apporter la lecture d'un tel ouvrage ? Au moins deux choses, à mon avis :

- permettre d'approcher la conception que l'on pouvait se faire des mathématiques au XVII^{ème} siècle et, dans le cas de Blondel, découvrir une mathématique outil ;
- trouver des idées d'exercices et d'activités pour les élèves assez proches de problèmes pratiques : problèmes de construction de géométrie pratique (calcul de longueurs), calculs d'aires avec différentes formules, écritures fractionnaires des nombres... On en trouvera une liste en annexe 8.

D'autres facettes de ce gentilhomme seraient intéressantes à découvrir, par exemple celle de l'architecture militaire. Son traité : sur la **Nouvelle manière de fortifier les places** [9] a été plusieurs fois réédité et même traduit en russe et édité à Moscou en

1711. Pour ceux qu'intéresse la balistique, ils trouveront des références à son traité (**L'art de jeter les bombes** [10] dans un article de E. Barbin et M. Cholière : "La trajectoire des projectiles de Taraglia à Galilée" in **Mathématiques, art et techniques au XVII^{ème} siècle** (§ VI, Chap. 2) (Publication de l'Université du Maine, n° 4, Le Mans 1987). Donc encore beaucoup de choses à découvrir chez cet ingénieur méconnu du XVII^{ème} siècle.

SOURCES

Biographie :
- Dictionnaire général des artistes de l'école française, Paris 1882.
- Dictionnaire de Biographie Française, Paris 1951.
- Dictionnary of Scientific Biography Scribners.

Partie 1
- BITAUBE P., Corderie Royale de Rochefort. Ed. Mer, 1985.
- DUPONT-FARDET, L'arsenal de Colbert. Ed. Centre International de la Mer, 1986.

Partie 2
- BLONDEL F., Cours de mathématique contenant divers traités composés et enseignés à Monseigneur le Dauphin, Paris, 1683.
- ARNAULD A., Nouveaux élémens de Géométrie, Paris, 1667.

ANNEXE 1

Oeuvres de Blondel

[1] La solitude royale ou Description de Friderisbourg, 1653.
[2] Relation d'un voyage de Berlin à Constantinople, 1658.
[3] Lettre à P.W. (Paulum Warzum) en latin à propos des trajectoires parabolique et elliptique de Galilée, 1661.
[4] Comparaison de Pindare et d'Horace en latin, 1673.
[5] L'architecture française des bâtiments particuliers (avec L. Savot), 1673.
[6] Résolution des quatre principaux problèmes d'architecture, 1673.
[7] Cours d'architecture enseigné dans l'Académie royale d'Architecture 1675-1683
[8] Histoire du Calendrier Romain, 1682.
[9] Nouvelle manière de fortifier les places, 1683.
[10] L'art de jeter les bombes, 1683.
[11] Cours de mathématiques contenant divers traitez composez et enseignez à Monseigneur le dauphin, 1683.

Carte marine de la Grenade, 1667.
Carte marine de l'île de la Tortue, 1667.

Ecrits sur Blondel

LUCAS Ch., Voyages et missions de F. Blondel, 1894.
F. Blondel à Saintes, à Rochefort et aux Antilles, 1897.

ANNEXE 2

La construction de la corderie royale de Rochefort

par BLONDEL [7]

"Un édifice de deux étages à quatre toises de largeur entre les murs et 216 toises de largeur, non compris les pavillons des deux bouts (...). J'avais joint à la Corderie, trois autres grands corps de bâtiments dans sa longueur, dont celui du milieu à qui je donnai vingt toises de face et six toises de large dans son oeuvre. Je l'avais séparé du corps de la Corderie par éloignement de quatre toises"...

"Le lieu que j'avais choisi pour assoir cette grande masse était une belle prairie de la longueur d'environ 250 toises sur une largeur de plus de 50 toises au plus étroit, enfermée d'une part par le bord de la rivière de Charente et de l'autre par un canal qui servait de clôture au parc de l'ancien château de Rochefort (...) avant toutes choses, une connaissance parfaite du terrain de cette priairie (...). L'ayant fait sonder en plusieurs endroits, je reconnus qu'au-dessous de la première croûte qui était d'environ deux pieds de terre noire et de gazon, il y avait une couche de glaise très ferme et solide sur le haut, de la hauteur de 10 à 12 pieds, qui s'amollissait petit à petit vers le bas, se terminait en boue ou en vase molle et demi-liquide, de la même nature qu'est celle des bords et des fonds de la Rivière. Et ce terrain, si mauvais sous le lit de glaise, continuait à une si grande hauteur que je ne pus jamais en découvrir le fond, ni trouver d'autre terrain au-dessous. Ce qui me fit aussitôt juger de la pratique des maçons du Pays, qui dans ces situations mettent les premières assises de leurs bâtiments sur l'herbe sans rien creuser pour leurs fondations, parce que ces deux pieds de bonne terre liée et affermie par les racines des herbes suffisent pour soutenir la masse de leurs Edifices, et empêcher qu'ils ne se ressentent des mouvements de la glaise qui est en-dessous (...).

Après avoir tracé sur le terrain les largeurs que je voulais donner aux fondations des murs, tant au contour de la Corderie et des Bâtiments qui la devait accompagner, que de ceux que j'avais résolu d'élever, jusqu'au rez-de-chaussée seulement, en forme de traverses de quatre en quatre toises par le dedans pour lier les principaux murs l'un avec l'autre, je fis creuser environ cinq pieds sous le plan de la prairie, c'est-à-dire trois pieds dans le massif de la glaise. Puis, ayant fait mettre avec une grande exactitude, le fond de ces fouilles partout sur un même niveau, je fis asseoir une grille de longues pièces de bois de chêne de dix à onze pouces de gros, assemblées l'une à l'autre tant plein que vide et à queues d'aronde, dans toute l'étendue des fondations, c'est-à-dire sous les murs de traverse aussi bien que sous les murs principaux. Sur laquelle, ayant fait étendre en plate-forme un lit plat de madriers du même bois de trois à quatre pouces d'épaisseur, bien assis sur un même niveau et bien chevillé sur tous les bois de la grille, je fis coucher les premières assises des fondements faits de beaux quartiers de libages avec de longues boutisses et construire des murs de bonne maçonnerie à plomb par dedans et par retraites en dehors jusqu'à la hauteur de quatre pieds et demi ou cinq pieds au-dessus du plan de la prairie : sur lequel je voulus que celui de la Corderie fût élevé jusqu'à cette hauteur, afin de la tirer des incommodités des Eaux de la Rivière qui, débordant quelquefois et, principalement aux grandes marées, couvrait la plus grande partie des prairies voisines (...).

Sur ce fondement, les murs furent assis et continués uniformément et toujours de même hauteur dans toute son étendue, avec un tel soin que l'on a jamais posé une pierre pour commencer une assise en aucun endroit du pourtour que celle du dessous ne fût entièrement achevée ; afin que toute la masse prenant son faix également partout, le terrain sous la grille ne fût jamais plus pressé d'un côté que de l'autre".

ANNEXE 3

Extraits de [11] - Préface

COURS
DE MATHEMATIQUE
CONTENANT
DIVERS TRAITEZ
COMPOSEZ ET ENSEIGNEZ
A MONSEIGNEUR
LE DAUPHIN.

PAR F. BLONDEL PROFESSEUR ROYAL en Mathematique & en Architecture, de l'Academie Royale des Sciences, Maréchal de Camp aux Armées du Roy, & cy-devant Maître de Mathematique de Monseigneur le Dauphin.



A PARIS,

Chez { L'AUTHEUR au Faux-bourg S. Germain ruë Jacob, au coin de celle de S. Benoist.
Et NICOLAS LANGLOIS ruë S. Jâques à la Victoire.

M. DC. LXXXIII.

AVEC PRIVILEGE DU ROY.

LETTRE A MONSIEUR L'ABBE'**

IE ne ſçaurois ce me ſemble repondre mieux à la confiance que vous avés en moi, qu'en vous diſant MONSIEVR, Quelle eſt ma penſée au ſujet de l'inſtruction de MONSEIGNEUR LE DAUPHIN *dans les Mathematiques & quelle eſt la methode que je me ſuis propoſé d'y tenir, en cette maniere.*

Comme ces Sciences ont pluſieurs parties dont il y en a qui doivent être neceſſairement ſçeües d'un grand Prince ; D'autres qu'il eſt bon qu'il conoiſſe, parce qu'il y a des occaſions où elles peuvent être de grande utilité ; Et d'autres enfin dont il eſt à propos de l'entretenir, parce que la conoiſſance en eſt agreable & curieuſe : I'ai crû qu'aprés avoir donné à MONSEIGNEUR LE DAUPHIN, *comme pour un avantgouſt des Mathematiques, la conoiſſance de la* Tactique, *c'eſt à dire des* Evolutions Militaires, *où il a pris un plaiſir particulier ; je devois en ſuitte lui parler de ces parties qui lui ſont abſolument neceſſaires, qui ſont* l'Arithmetique & les Fortifications : *Et c'eſt principalement en ces deux Sciences qu'il a fait un progres conſiderable. Mais comme il eſt mal aiſé de comprendre ce qui ſe dit de la Fortification que l'on ne ſçache au moins ce que c'eſt que* Lignes, Surfaces, Figures, Perpendiculaires, Paralleles *& mille autres choſes qui s'enſeignent particulierement dans la Geometrie ; Il a falu lui en donner une teinture & lui en apprendre les principales pratiques, reſervant à l'en inſtruire à fonds, lors que nous expliquerons cette partie, Ie veus dire la* Geometrie, & les Elemens d'Euclide, *que je mets au nombre de celles qui, pour n'eſtre pas d'une neceſſité ſi abſoluë, ne laiſſent pas de ſe trouver fort utiles, & que je pretens lui enſeigner incontinent aprés celles que je vous ai nommées les premieres. Enſuitte de la Geometrie je me reſous de lui expliquer à fonds les* Mecaniques, *puis ce qu'il y a de plus beau dans* l'Architecture

ANNEXE 4

Extraits de [11] - Discours à Monsieur Le Dauphin

DISCOURS SUR LES MATHEMATIQUES.

Car MONSEIGNEVR, nous pouvons par avance vous assurer, que vous ſerez avec le temps étonné de voir à combien de differens uſages ces Sciences ſont tous les jours employées, ſoit pour procurer la ſeureté dans le Commerce & la Navigation, la facilité dans tous les Arts & la magnificence dans les Batimens. Elles ont la meilleure part dans les plus nobles & les plus agreables divertiſſemens, & tout ce que produit la Peinture, la Sculpture, le Iardinage, le mouvement des Eaux & ces autres Arts qui donnent tant de plaiſir aux yeux par l'excellence de leurs Ouvrages, eſt entierement ſoumis aux loix de la Mathematique.

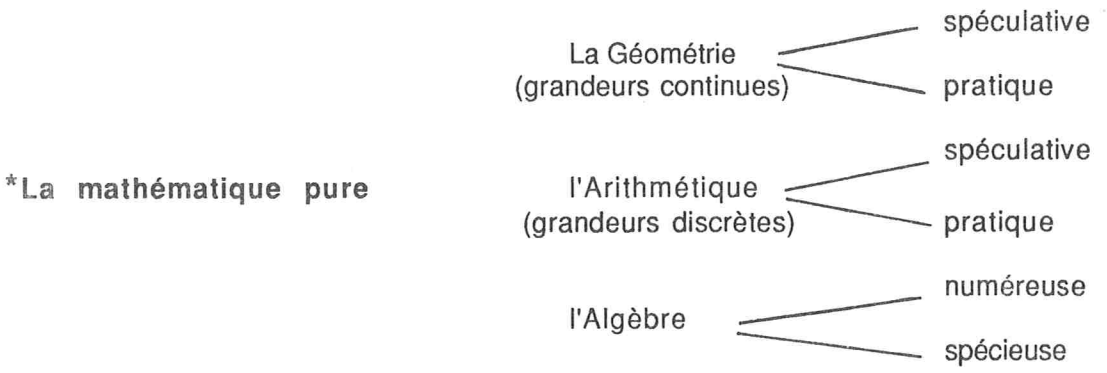
La Muſique même, qui vous paroit maintenant ſi agreable, aura bien d'autres charmes pour vous, lors que vous en conoitrés la nature & que vous ſçaurés la cauſe de ce chatoüillement merveilleux, que l'amas de tant de ſons differens produit dans vôtre oreille par le mêlange & la ſuite de ſes accords.

Dois-je vous dire MONSEIGNEVR, que les Mathematiques donnent mille moyens qui facilitent les Victoires des Conquerans. Quelles leur enſeignent l'Art des campemens & des marches des Armées, les ordres de bataille, les evolutions & ces mouvemens qui ont tant depart au ſuccés des grands Combats. Que c'eſt avec cette Science que les Victorieux attaquent & prennent les Places fortes, & qu'ils ne conſervent leurs conquêtes que par les moyens qu'elle leur enſeigne de les bien fortifier & de les défendre.

ANNEXE 5

Extraits de [11] - Traité I - De la mathématique en général

1 - LES PARTIES DES MATHEMATIQUES selon BLONDEL



p. 6-7 - Géométrie spéculative : les éléments
p. 7-8 - Géométrie pratique : des lignes, des surfaces (arpentage), des corps
p. 8 - Arithmétique spéculative
p. 9 - Arithmétique pratique : logistique ou art de compter
p. 10 - Algèbre ou analyse

***La mathématique mixte ou mêlée**

p. 11 - La cosmographie : Astronomie : le ciel ; Géographie : la terre
p. 12 - L'Astronomie (1 page pour exclure l'Astrologie)
p. 22 - La Gnomonique : les cadrans solaires
p. 24 - La Chronologie
p. 28 - La Doctrine du calendrier
p. 32 - L'Optique
p. 35 - La Perspective
p. 37 - La Géographie
p. 40 - La Navigation
p. 44 - La Mécanique
p. 46 - La Musique
p. 50 - L'Architecture
p. 52 - L'Art Militaire
p. 55 - Conclusion

Au reſte, MONSEIGNEUR, Il ne faut pas que vous attendiés que je vous enſeigne à fonds toutes ces Sciences, non ſeulement parce que le Cours de la vie humaine à trop peu de durée pour arriver à leur conoiſſance parfaite, quelque ſoin & quelqu'Etude que l'on y puiſſe employer ; Mais parce principalement qu'il n'eſt pas à propos d'occuper entierement vôtre eſprit par ces ſeules meditations, & lui ôter le temps de ſe remplir d'une infinité d'autres lumieres, qui vous ſont bien plus neceſſaires, pour pouvoir dignement, dans la conduite de vôtre vie, ſuivre les traces qui vous ſont ſi bien marquées par toutes les actions du Roy.

Je tâcheray donc de vous faire comprendre celles dont la connoiſſance vous eſt en quelque façon neceſſaire ; de vous entretenir de celles qui vous peuvent être Utiles dans les temps, ou qui peuvent vous donner du plaiſir ; & de vous donner quelque lumiere des autres, & autant ſeulement qu'il vous en faut pour ſçavoir ce qu'elles ſont, & quels ſont les ſujets principaux qu'elles conſiderent.

C'eſt dans cette veuë que je vous ay compoſé des Traités particuliers de ces parties des *Mathematiques* dont la conoiſſance vous peut être ou neceſſaire, ou utile, ou même agreable ;

ANNEXE 6

Extraits de [11] - Traité II - De la géométrie spéculative

Au reſte, MONSEIGNEUR, vous avez pû voir dans les ſix premiers livres des Elemens d'Euclide, les propoſitions qui ſervent de fondement pour parvenir à la conoiſſance de toutes ces proprietés, particulierement de celles de la premiere & de la ſeconde eſpece de la quantité c'eſt à dire de la Ligne & de la Surface ; car ce qui regarde la troiſiéme eſpece qui eſt des Solides, il n'en eſt parlé que dans les derniers livres du même Autheur. Mais comme ce qu'il y a de plus neceſſaire à ſçavoir ſe trouve embaraſſé par la longueur des demonſtrations & par la ſuite de pluſieurs propoſitions qui n'y ſont miſes que pour ſervir à la demonſtration des neceſſaires ; J'ay crû que je devois vous marquer en peu de mots ce dont il eſt à propos que vous vous ſouveniez dans chaque livre ; étant perſuadé comme vous l'êtes de la verité de toutes ces propoſitions, dont vous avez examiné les demonſtrations avec ſoin.

Voicy donc ce qu'il y a de plus conſiderable dans LE PREMIER LIVRE.

A l'égard des lignes droites & de l'égalité & deſcription de leurs angles, voici ce qu'il dit.

1. Une droite tombant ſur une autre fait les deux angles ou droits ou égaux à deux droits.

2. Deux lignes qui ſe couppent font les angles oppoſés au ſommet égaux.

3. Une droite coupant deux paralleles fait les angles alternes égaux : l'angle externe égal à ſon interne oppoſé : & les deux internes de même part égaux à deux droits. Et au contraire.

Voici quelques pratiques ſur les mêmes.

4. Couper une droite en deux également.

5. Tirer une perpendiculaire ſur une autre droite d'un point donné ſur la ligne ou hors de la ligne.

6. Couper un angle rectiligne en deux également.

7. Faire un angle égal à un angle donné.

8. D'un point donné mener une ligne parallele à une autre.

A l'égard des plans. Deſcription des triangles, égalité de leurs angles, & puiſſances de leurs côtés.

1. Les angles ſur la baſe d'un triangle Iſoſcele ſont égaux, & ceux ſous la baſe, ſi les côtés ſont prolongés.

2. Les trois angles d'un triangle rectiligne ſont égaux à deux droits.

3. Si l'on continuë un des côtés d'un triangle, l'angle externe eſt égal aux deux internes oppoſés.

PRATIQUES.

4. Décrire un triangle équilateral.

5. Faire un triangle de trois lignes données dont les deux ſont toûjours plus grandes que la troiſiéme.

PUISSANCES *des côtés.*

6. Aux triangles rectangles le quarré du côté qui ſoûtient l'angle droit eſt égal aux quarrés des deux autres côtés. Ceci eſt le fondement de l'addition & de la ſouſtraction des Puiſſances.

Nous pouvons ajouter icy ces deux propoſitions tirées du SECOND LIVRE.

7. Aux triangles Amblygones, le quarré du côté qui ſoutient l'angle obtus ſurpaſſe les quarrés des deux autres côtés, du double du rectangle fait de l'un des côtés qui font l'angle obtus ſur lequel, étant prolongé, tombe la perpendiculaire & la partie du même entre la perpendiculaire & l'angle obtus.

8. Aux triangles Oxygones, le quarré du côté qui ſoutient l'angle aigû eſt moindre que les quarrés des deux autres côtés, du double du rectangle fait de l'un des côtés qui font l'angle aigu ſur lequel tombe la perpendiculaire, & la partie du même entre la perpendiculaire & l'angle aigu.

Egalité des Triangles.

1. Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés & l'angle contenu de ces côtés égal à l'angle; la baſe ſera égale à la baſe, les autres angles aux autres angles, & le triangle égal au triangle.

2. Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés & la baſe égale à la baſe; les angles ſeront égaux aux angles, & le triangle au triangle.

3. Si deux triangles ont deux angles égaux à deux angles & un côté égal à un côté; l'autre angle ſera égal à l'autre angle, les autres côtés aux autres côtés, & le triangle au triangle.

4. Les triangles ſur mêmes baſes ou baſes égales & entre mêmes paralleles ſont égaux entr'eux.

5. Toute figure rectiligne ſe reſout en triangles.

Voila, MONSEIGNEUR, ce qu'il y a de plus conſiderable dans le Livre des Elemens d'Euclide, & dont la connoiſſance vous meneroit facilement à celle de ce qu'il y a de plus caché dans les mathematiques. Mais comme il eſt juſte que vous employés vôtre temps à des occupations plus importantes & qui dans l'avenir puiſſent contribuer au repos public, à vôtre gloire & à celle de nôtre nation; Je ne vous en parleray pas davantage, & je paſſeray à l'explication de la Geometrie pratique, ſans vous entretenir des propoſitions admirables qui ſont dans les Livres des Elemens Coniques d'Apollonius, des Elemens Cylindriques de Serenus, des Elemens Spheriques de Theodoſe, dans les Elemens Geometriques des Proportionalités ou des Medietez que j'ay compoſés, dans les Livres d'Archimede & de Pappus, & dans mille beaux Ouvrages des Modernes, qui ont traité divinement de cette matiere.

ANNEXE 7

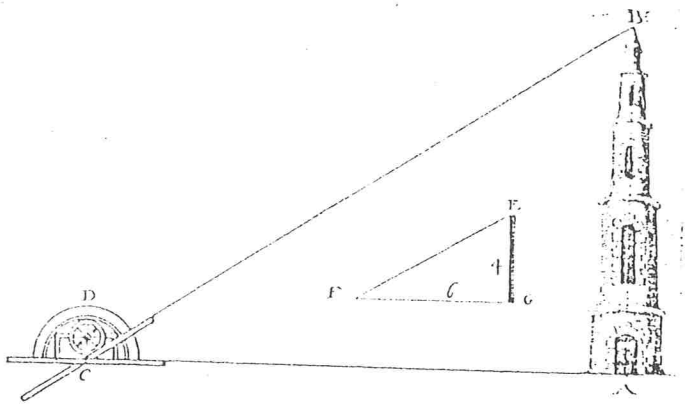
Extraits de [11] - Traité III - De la géométrie pratique

Géométrie des longueurs (p.127-128-129)

I. PROBLEME.

Mesurer une hauteur perpendiculaire à l'horison.

Soit la hauteur comme d'une Tour A B, perpendiculaire à l'horison, qu'il faille mesurer. Prenés telle distance qu'il vous plaira dans le plan horisontal, comme A C, que je supose accessible, afin que vous la puissiés mesurer actuellement depuis le pied de la tour A jusqu'en C, & soit par ex. de 60 toises, puis prenés l'angle



A C B qui est fait par la ligne A C & par le rayon visuel porté du point C vers le sommet B de la hauteur proposée A B, Et cet angle soit par ex. de 30 degrés. Et parce que la Ligne A B est supposée perpendiculaire à l'horison, dans le triangle C A B l'angle A est de 90 degrés. Et partant si j'ôte la somme des angles A 90 & C 30 C'est à dire 120, de 180, Il me restera 60 degrés pour l'angle B ; ainsi tous les angles & le côté A C seront conus dans le même Triangle, & par la regle de trois, nous aurons la mesure de l'autre côté A B en cette maniere,

Sin. de l'angle B —— *Sin. de l'angle* C. || *Le côté* A C —— *au côté* A B.

60. deg. 30. deg.

86602. —— 50000. || 60. *th.* —— 34. *th.* 4 *l.*

Et par l'operation de la regle nous trouvons que la hauteur proposée A B est de 34 toises & peu plus de 4 pieds.

II. PROBLE'ME.

Autrement.

Cette proposition se peut facilement resoudre par le moyen de l'ombre du Soleil en cette sorte. Dressés dans le plan de l'horison où est la Tour A B, un bâton comme G E à plomb, de telle hauteur que vous voudrés, comme de 4 pieds, & mesurés la longueur de l'ombre qu'il jette G F, qui soit comme de 6 pieds ; faites dans le même moment mesurer la longueur A C de l'ombre de la Tour A B dans le même plan qui soit par ex. de 52 toises ; & faites une regle de trois en cette maniere.

Grandeur des Ombres —— *Hauteur des objets.* || *L'ombre de la Tour* —— *Hauteur de la Tour.*

F G —— G E. || A C —— A B

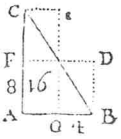
6 *pi.* —— 4 *pi.* 52 *th.* —— 34 *th.* 4 *pi.*

Par laquelle vous trouverés la même hauteur A B de 34 toises 4 pieds.

Géométrie des surfaces (p.159)

III. PROBLEME.

Mesurer l'aire d'un triangle rectangle.



Multipliés les côtés du Triangle qui contiennent l'angle droit, l'un par la moitié de l'autre, & leur produit sera la capacité du triangle proposé. Soit le Triangle propose C A B dont l'angle A est droit, le côté A C soit de 8 to. & A B de 4 to. Il ne faut que multiplier A C 8 to. par la moitié de A B 2 to. ; ou bien A B de 4 to. par la moitié de A C de 4 to. ; afin d'avoir 16 toises quarrées pour l'aire du triangle C A B : car 8 par 2 fait 16, aussi bien que 4 par 4. La raison est que cette multiplication nous donne l'aire du rectangle A E ou A D, qui sont chacun égal au triangle C A B. La même chose arrivera si aprés avoir multiplié un des côtés par l'autre, l'on prend la moitié du produit ; car le produit de 8 par 4 est 32, dont la moitié est encore 16 pour la capacité du triangle proposé.

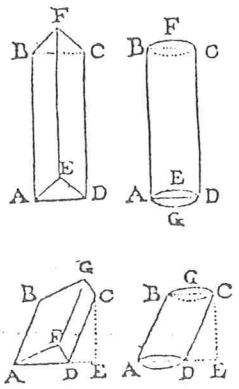
LA GEOMETRIE
DES CORPS OU SOLIDES.

LEs grandeurs Solides, ainſi que nous avons dit, ſont meſurées par des grandeurs Solides, dont la plus ſimple eſt le Cube, qui a les côtés, les angles, & les plans qui le compoſent, égaux. Et comme nous nous ſommes ſervis de Quarrés, qui ſe font par la multiplication du Côté par ſoy-même, pour la meſure des Surfaces; Ainſi en la meſure des Solides, nous employerons des Cubes qui ſe font en multipliant les Quarrés par leur Côté; & nous dirons qu'un Solide contient tant de meſures, qu'il contiendra de Cubes, dont la racine eſt égale à cette meſure propoſée: Comme nous dirons qu'il aura dix toiſes, s'il contient 10 cubes, dont le côté eſt d'une toiſe: & une Colonne aura 100 p. dans laquelle il y aura 100 cubes, dont le côté de côté de chacun eſt d'un pied.

I. PROBLEME.

Meſurer la Solidité des Parallelepipedes, ou Priſmes & des Cylindres.

Les Parallelepipedes ou Priſmes, auſſi bien que les Cylindres, ſont contenus entre deux baſes oppoſées, égales, ſemblables, ſemblablement poſées & paralleles: Ils ſont droits, ſi les côtés ſont perpendiculaires aux baſes, ou obliques. L'on trouve la ſolidité des droits en multipliant ſeulement la capacité de la baſe par la longueur d'un des côtés. Comme au Parallelepipede ou Cylindre droit A B C D, dont les baſes oppoſées A E D G, B F C H ſont égales, ſemblables, ſemblablement poſées & paralleles; & les côtés comme A B, C D ſont auſſi égaux & paralleles, & perpendiculaires aux baſes; ſi le côté A B eſt de 10 p. & l'aire de la baſe A E D G de 16 p. quarrés; Il faut multiplier 16 par 10 pour avoir 160 p. cubiques pour la Solidité du Priſme ou Cylindre A B C D. Je ne dis pas comme on peut connoître la longueur des côtés & l'aire des baſes, parce que cela a été expliqué dans la Geometrie des Longueurs & des Surfaces.



ANNEXE 8

Extraits de [11]- **Idées d'exercices et de problèmes**

1. Faire un parallèlogramme sur un angle donné égal à un triangle donné (p.72)

2. Sur une droite et un angle donné faire un parallélogramme égal à un triangle donné (p.72)

3. Couper une portion de circonférence en deux également (p.74)

4. Dans un cercle décrire un triangle équiangle à un triangle donné (p.76)

5. Autour d'un cercle décrire un triangle équiangle à un triangle donné (p.76)

6. Un même cercle comprend le Pentagone du Dodécaèdre et le Triangle de l'Icosoèdre inscrits en même sphère (p.99)

7. Couper une ligne en la moyenne et extrême raison ; c'est-à-dire en sorte que le rectangle de la toute et de l'un des segments, soit égal au quarré de l'autre segment (p.73-74)

8. Si une droite est coupée comme on voudra, le rectangle de la toute et de l'une de ses parties est égal à celuy des deux parties et au quarré de la partie premièrement prise (p.72)

9. Si une droite est coupée comme on voudra, le quarré de la toute et de l'un des segments, est égal au quadruple de la toute et du même segment, et au quarré de l'autre (p.73)

10. Si une droite est coupée en deux également et en deux inégalement, le quarré de la moitié est égal au rectangle des segments inégaux et au quarré de la partie du milieu (p.72-73)

11. Si quatre lignes sont proportionnelles, le rectangle des extrêmes est égal à celui des moyens (p.92)

12. Ecritures de rapports $\frac{a}{b}$ sous la forme $n + \frac{\alpha}{b}$ avec $\alpha < b$ (p.80-82)

Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

À PROPOS DE QUELQUES ALGORITHMES LIÉS À DES OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES [1]

Michel GUILLEMOT
IREM de Toulouse

Aujourd'hui, les professeurs de mathématiques s'interrogent plus particulièrement sur l'enseignement de deux disciplines : la géométrie et l'informatique. Replacé dans un cadre plus vaste ceci revient à examiner en un certain sens[2], quels rôles doivent être dévolus aux démonstrations et aux calculs algorithmiques.

La question n'est pas nouvelle. Déjà les anciens Grecs distinguaient l'arithmétique de la logistique, c'est-à-dire l'approche théorique des nombres des calculs pratiques. Plus près de nous, il y a une cinquantaine d'années, en réponse à une enquête sur les bases de l'enseignement des mathématiques Henri LEBESGUE (1875-1941) opposait les puissants algorithmes à la géométrie en ces termes :

> *"Se méfier d'ailleurs des notations, des puissants algorithmes si utiles aux mathématiciens parce que, comme la machine outil travaille pour l'ouvrier, l'algorithme raisonne à leur place. [...]. Vive donc la géométrie élémentaire où il faut observer, imaginer-avoir de la chance aussi, mais c'est la vie- tout aussi bien que déduire ; où il n'y a pas de "méthode" qu'il suffise d'appliquer automatiquement.*[3]

Il ne saurait être question, ici, de trancher ce vieux débat, ni de le suivre au cours de son histoire. Une telle étude reste à faire et elle dépasse le cadre de notre propos. Dans sa conférence "La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques" Evelyne BARBIN montre quelques points essentiels de la démonstration au cours du temps. Pour notre part, nous nous limiterons ici à l'introduction de certains algorithmes même si ceux-ci se sont d'abord présentés sous la forme de recette, de procédure, voire de méthode, plus ou moins explicitées sans aucune justification théorique. Pour illustrer notre reflexion nous nous bornerons à l'étude de quelques algorithmes liés à des opérations élémentaires : addition, multiplication, division et extraction de racines. Pour une étude plus complète, nous renvoyons aux ouvrages plus généraux.[4]

---

1 - Cette conférence est un témoignage des travaux du groupe Inter-IREM "Algorithme". Nous remercions Evelyne BARBIN, Jacques BOROWCZYK, Jean-Luc CHABERT, Ahmed DJEBBAR, Jean-Claude MARTZLOFF et Anne MICHEL-PAJUS pour leur collaboration.

2 - Il n'y a pas nécessaire adéquation. Voir, par exemple, la conception qu'ont les Chinois de la géométrie.

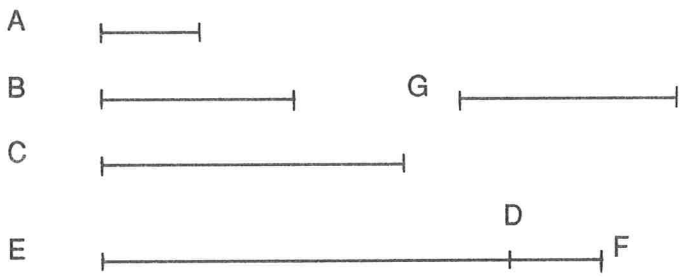
*3 - LEBESGUE, H., Réponse à l'enquête sur les bases de l'enseignement des mathématiques. **L'Enseignement Scientifique** 6 (1933), 290-291. **Oeuvres Scientifiques**, l'Enseignement Mathématique, Genève 1973, tome V, 228-229.*

4 - Nous pouvons citer :

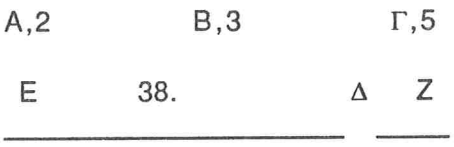
*CAJORI, F., **A history of mathematical notations** (2 tomes), Open Court, Chicago 1952 3ème édition.*
*SMITH, D. E., **History of mathematics** (2 tomes) Dover, New York.*
*TROPFKE, J., **Geschichte der Elementarmathematik** (tome 1) De Gruyter, Berlin 1980 4ème édition.*

1 - Quelques obstacles

Le principal obstacle lié à notre étude tient au fait que les traités arithmétiques originaux que nous possédons ont été écrits ou copiés, pour les plus anciens, il y a à peine un millier d'années. Autant dire que nous devons être très méfiants envers les notations employées par les copistes : elles ne peuvent pas être attribuées de manière certaine aux premiers auteurs. Par exemple, dans les manuscrits relatifs aux Eléments d'EUCLIDE les nombres sont parfois représentés soit par des segments par des segments -ce qui confère une certaine généralité à la démonstration- soit par des expressions particulières. Ainsi nous pouvons trouver comme figure correspondant à la proposition 20 du livre IX -relative à l'infinitude des nombres premiers- ce que Jean ITARD[5] et PEYRARD[6] ont respectivement représenté comme suit :



ITARD



PEYRARD

En ce qui concerne les notations numériques nous pouvons simplement affirmer que les symboles utilisés étaient connus au moment où la copie a été effectuée : d'ailleurs, ils servent parfois à dater les documents. Mais il n'est pas rare de trouver des manuscrits où ils ont été changés ou même laissés en blanc et complétés un ou deux siècles après ![7]

En présence d'un texte les interprétations peuvent être différentes. Ceci est particulièrement sensible lors des traductions. Ainsi, la dernière ligne du **Traité de la mesure du cercle** d'ARCHIMEDE (287-212 avant Jésus-Christ) a pu donner lieu, récemment, à deux traductions différentes. A partir du texte grec :

Ἡ ἄρα τοῦ κύκλου περίμετρος τῆς διαμέτρου τριπλασίων ἐστὶ καὶ ἐλάσσονι μὲν ἢ ἑβδόμῳ μέρει, μείζονι δὲ ἢ ι οα′ μειζων.

---

*5 - ITARD, J., **Les livres arithmétiques d'EUCLIDE,** Hermann Paris 1961 p. 186.*

*6 - PEYRARD, F., **Les oeuvres d'EUCLIDE,** reed. Blanchard, Paris 1966 p. 249.*

*7 - WOEPCKE, M. F., Mémoire sur la propagation des chiffres indiens. **Journal Asiatique** 1 (1863) 27-79, 234-290, 442-529, p.485.*

Charles MUGLER[8] a traduit :

> *Le rapport du périmètre au diamètre est donc inférieur à 3 1/7 et supérieur à 3 10/71.*

Alors que Paul VER EECKE[9] considère que ceci peut être retranscrit comme suit :

> *Dès lors, la circonférence du cercle vaut trois fois le diamètre plus une partie inférieure au septième, mais supérieure au* $\frac{10}{71}$ *au diamètre.*

En termes modernes, ceci correspond à la double inégalité suivante :

$$3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}.$$

Or, dans le texte grec la seule écriture numérique est ῑ ο α' c'est-à-dire, dans la numérotation alphabétique grecque[10] , ce que nous pourrions traduire par dix soixante et onzièmes. Mais les deux traducteurs n'en introduisent pas moins des fractions qui pourraient laisser croire au lecteur peu averti que les anciens Grecs utilisaient le trait de fraction[11] .

Un autre exemple, peut-être plus significatif, nous est fourni par les deux traductions proposées par Léon RODET des **Leçons de calcul d'ARYABHATA**[12] . Rappelons que ce mathématicien indien vivait vers l'an 500 de notre ère et que ses textes mathématiques étaient écrit en vers. Improprement, en 1879, RODET utilise les nombres pour ce que nous nommerions aujourd'hui le "calcul de Π".

> *"Ajoutez 4 à 100, multipliez par 8, ajoutez encore 62 000, voilà pour un diamètre de deux myriades la valeur approximative de la circonférence du cercle"*[13] .

En 1880, il transcrit les nombres en toutes lettres[14]. Nous nous devons de noter qu'entre temps il a changé d'opinion sur le système de numération employé par ARYABHATA ! En effet, ce texte ne nous renseigne nullement, ni sur le système de numération ni sur l'algorithme qui a pu donner naissance à cette approximation de Π : 3,1416. Toutefois l'algorithme de l'extraction de la racine carrée est plus explicite :

> *"On divisera toujours la "tranche non carrée" par le double de la racine de la "carrée" (qui précède) après avoir retranché de cette " carrée" le carré de la racine : le quotient est la racine à distance d'une place"*[15] .

---

*8 - MUGLER, C., **ARCHIMEDE.** Les Belles Lettres, Paris 1970 tome 1, p. 143.*

*9 - VER EECKE, P., **Les Oeuvres Complètes d'ARCHIMEDE,** réed. Blanchard, Paris 1960 tome 1, p. 134.*

10 - Voir annexe 1

11 - Lors de l'atelier "traduction" notre collègue Jean BOYE nous a proposé une traduction plus littérale qui montre bien la présentation difficile du résultat. "Donc, la circonférence du cercle est le triple du diamètre et est plus grand d'une partie plus petite que la septième partie et est plus grand d'une partie plus grande que 10 71ème".

*12 - RODET, L., Leçons sur le calcul d'ARYABHATA - **Journal asiatique** 13 (1879), p. 393-434, sur la véritable signification de la notation inventée par ARYABHATA, Journal asiatique 16 (1880), 440-485.*

13 - Note 12, p. 399.

14 - Note 12, p. 459.

15 - Note 12, p. 397.

Ceci conduit RODET à pencher pour un système écrit de numération de position.

> *"ARYABHATA opérait sur des nombres écrits* ***en chiffres avec valeur de position et zéro****, mais la pratique de ces sortes d'opérations était déjà familière à l'époque où il écrivait, ce qui suppose qu'elle existait déjà depuis un certain temps"*[16] .

Mais, un an après, il invoque l'utilisation d'un **abaque**

> *"les calculs qu'il enseigne à faire peuvent s'effectuer conformément à sa règle sur un abaque"*[17] .

Fragilité des hypothèses historiques lorsque les faits ne sont pas suffisamment établis ! Pour pallier ces difficultés nous pouvons nous tourner vers d'autres horizons. Les textes économiques ou même littéraires peuvent nous fournir d'utiles renseignements. Ainsi, dans ses **Plaidoyers politiques,** DEMOSTHENE -brillant orateur et homme politique athénien qui vécut de 384 à 322 avant Jésus-Christ- nous rappelle comment les Athéniens calculaient la durée des mois de l'année.

> *"Il faut savoir que les Athéniens ne calculaient pas les mois d'après le cours du soleil, comme nous, mais d'après celui de la lune. D'après le cours du soleil, l'année a trois cent soixante cinq jours, d'où il résulte que le mois a 30 jours 1/3 et 1/2. Car 10 fois 30 font 300, 2 fois 30 font 60. Restent 5. Le tiers de 12 est 4. Reste 1 jour ; et 1 est le douzième de 12.*
> *D'après le cours de la lune, l'année a trois cent cinquante quatre jours. D'où il résulte que le mois a 29 jours et demi. Car 10 fois 20 font 200, 2 fois 20 font 40, 10 fois 9 font 90, 2 fois 9 font 18 et la moitié de 12 est 6. En sorte que le total est 354 jours et qu'il manque, d'après le cours du soleil, 11 jours que les Athéniens groupaient tous les trois ans pour en faire le mois intercalaire de 33 jours"*[18] .

L'algorithme qui paraît présider à ces divisions est celui de la division égyptienne replacé dans le cadre du système alphabétique grec de numération[19] . Rappelons en effet que la méthode de division employé par les anciens Egyptiens consiste à multiplier le diviseur à l'aide de duplications -c'est-à-dire de multiplications par 2- successives de manière à approcher le plus possible le dividende. Pour le reste partiel ils utilisent les inverses puisque seuls sont notés outre les entiers naturels non nuls, les inverses de ces entiers et $\frac{2}{3}$[20] .

---

16 - Note 12, p. 408.

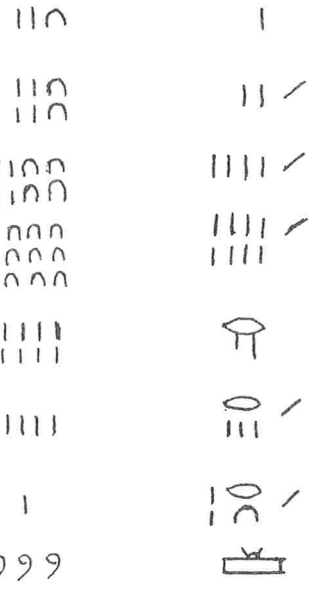
17 - Note 12, p. 443.

18 - NAVARRE, O., ORSINI, P., ***Démosthène, Plaidoyers Politiques tome 1. Contre Antricoton. Contre la loi de Leptine. Contre Timocrate.*** *Les Belles Lettres, Paris 1954, p.12.*

19 - Nous nous opposons ainsi à l'interprétation de Geneviève GUITEL dans son ***Histoire comparée des numérations écrites****. Flammarion, Paris (1975). Elle voit là une multiplication : "le souci qu'à Démosthène de donner la preuve de ce qu'il avance nous vaut donc cette remarquable multiplication de 291/2 par 12", p. 262. Malheureusement, si elle ne "résiste pas au plaisir de transcrire intégralement la suite du discours" elle oublie la première partie qui montre bien l'algorithme de la division.*

20 - Voir annexe 1.

Ainsi, ils auraient pu présenter de manière hiéroglyphique les calculs comme suit[21] :

1	12			
2	24			
4	48			
8	96			
16	182	il reste	5	
$\frac{2}{3}$	8			
$\frac{1}{3}$	4			
$\frac{1}{12}$	1			

Total 365

Dans le cadre du système alphabétique grec de numération[22], la duplication a été abandonnée car elle ne conservait plus son caractère aussi élémentaire et l'utilisation de tables de multiplication[23] a conduit à modifier la pratique égyptienne pour se rapprocher en un certain sens, de notre pratique[24] .

A l'opposé des obstacles et de la prudence qu'ils engendrent, il arrive que, parfois, l'on doive délibéremment aller de l'avant. En effet, certains textes, comme ceux laissés par les scribes égyptiens ou babyloniens ne comportent souvent aucune indication de la mise en oeuvre des méthodes en dehors de quelques données numériques : l'attribution d'une perspective algorithmique est alors laissée à notre initiative. Mieux, nous sommes même amenés à construire divers algorithmes pouvant expliquer les résultats donnés par les scribes. Certes, cela ne va pas sans danger. Mais la confrontation de diverses sources, lorsqu'elles existent, peut permettre d'étayer certaines hypothèses. L'exemple de deux tablettes sumériennes nous paraît être à cet égard, très significatif.

Nous savons que la civilisation sumérienne s'est épanouie d'environ 3 500 à 2 000 avant Jésus-Christ, dans le sud de la Mésopotamie. Elle a adopté un système de numération assez développé, de type additif, avec des signes spécifiques pour 1, 10, 60, 600, 3 600, 36 000, ... Les deux tablettes examinées ont été trouvées à Shuruppak et elles

---

21- Voir GUILLEMOT M., SPIESSER M., Du rouleau de cuir au problème 31 du papyrus Rhind. ***Actes du Colloque Inter-Irem, Histoire et Epistémologie des mathématiques****, Montpellier 1985, p. 179-192.*

22 - Voir Annexe 1.

23 - Le British Museum possède une tablette de cire sur laquelle figure la multiplication des nombres 2 et 3 par les dix premiers nombres entiers (voir GUITEL, note 19, p. 260). Des tables plus complètes ont été publiées par le moine byzantin Nicolas ARTAVAS DE RHABDAS en 1341 ! Voir TANNERY P.. Notice sur les deux lettres arithmétiques de Nicolas Rhabdas ***Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque*** *Nationale 32 (1886) p. 121-252 -* ***Mémoires scientifiques,*** *Gauthier Villars, 1920, tome 4, p. 61-198.*

24 - Voir Annexe 2.

proviennent d'un même lot[25] . Elles datent approximativement de 2 500 avant Jésus-Christ. Toutes les deux sont relatives au même problème : le partage d'un "grenier de grain" entre des hommes, chacun d'eux recevant la même quantité de grain, 7 "silà" c'est-à-dire environ 7 litres.
Mais les résultats sont différents pour les deux tablettes 164 571 hommes et il reste 3 silà de grain pour la tablette n° 50 et seulement 164 160 hommes sans indication du reste pour la tablette n° 671[26] .

1 grenier de grain	36000 36000 36000 36000
silà 7	3600 3600 3600 3600 3600
chaque homme reçoit	600 600 60 600 600 60
ces hommes sont	10 10 10 10 10 1
	il reste 3 silà de grain

(tablette n° 50)

grain silà 7 grenier
chaque homme reçoit

travailleurs				
36000	36000	36000	36000	
3600	3600	3600	3600	3600
600	600	60	60	60
600		60	60	60

(tablette n° 671 verso)

Certes nous pouvons voir là une différence d'attitude entre des régisseurs plus ou moins scrupuleux. Mais nous pouvons aussi essayer de trouver l'algorithme qui a pu conduire à ces résultats. Des diverses tablettes que nous ont laissé les Sumériens nous pouvons en déduire les correspondances suivantes :

1 grenier = 40 x 60 gur = 2 400 gur
1 gur = 8 x 60 silà = 480 silà,
1 grenier = 2 400 x 480 silà = 1 152 000 silà.

Or nous avons l'égalité :

1 152 000 = 7 x 164 571 + 3

qui correspond aux résultats portés sur la tablette n° 50. Se limitant à cette seule tablette GUITEL peut :

> *"considérer cette tablette avec respect, car il s'agit de la plus ancienne division qui soit parvenue jusqu'à nous ; elle remonte en effet à environ quatremille cinq cent ans. Mention est faite du dividende, du diviseur duquotient et même du reste, mais nous ignorons tout de la technique de l'opération"* [27] .

---

25 - Voir JESTIN R., Tablettes sumériennes de Suruppak au Musée d'Istanbul. ***Mémoires de l'Institut Français d'Archéologie d'Istanbul, III****, Brocard, Paris 1937.*
26 - Voir Annexe 3. (A moins de mettre ici la transcription de HØYRUP).
27 - Voir GUITEL Loc.cit p. 311.

Emportée par son enthousiasme, elle continue :

> *"Plus d'un million de silà d'orge et le scribe signale qu'il reste 3 silà d'orge"*[28] .

En 1976, Martin POWELL[29] compare les deux tablettes. Il fonde son argumentation sur le système positionnel sexagesimal adopté par les Babyloniens successeurs des Sumériens. Il propose pour $\frac{1}{7}$ les valeurs sexagésimales suivantes 0 ; 8, 34, 17, 8 et 0 ; 8, 33 qui permettent d'obtenir les résultats précités. Mais cette histoire à rebours n'explique pas le choix de ces valeurs et Jens HØYRUP[30] propose une autre explication, beaucoup plus réaliste et en tout cas intimement liée au système de numération. Nous savons en effet qu'un grenier correspond à 2 400 gur et que l'on a l'égalité

$$2\,400 = 7 \times 342 + 6.$$

Or, si nous omettons le reste, 6, nous obtenons le seul quotient, 342, qui, multiplié par 480 (puisqu'un "gur" vaut 480 "silà") donne 164 160 c'est-à-dire le résultat de la tablette 671 ! Ainsi la scribe a divisé un petit nombre : 2 400 ! Mais la confrontation des diverses sources a pu permettre, jusqu'à preuve du contraire de lever l'ambiguité qui pouvait présider à l'algorithme de la division sumérienne.

2 - La transposition de la notion d'algorithme

Comme de nombreuses notions, celle d'algorithme s'est modifiée au cours du temps. Mieux même, ici, l'origine en a pu être oubliée durant plusieurs siècles. C'est seulement en 1845 que l'orientaliste Joseph-Toussaint REINAUD (1795-1867) en a retrouvé la véritable étymologie :

> *"Je me permettrai ici une conjecture. Dans les traités latins du moyen âge, le nouveau système de numération est désigné par la dénomination d'Algorismus ou* ***Algorithmus.*** *D'un autre côté, les mots* ***Algorismus*** *et* ***Alkhorismus*** *servent à désigner un écrivain arabe surnommé* ***Al-Kharizmy*** *ou le Kharizmin, du nom du Kharizm sa patrie ; et cet écrivain s'était occupé de la science des nombres. Il me paraît que le nom donné au nouveau système de numération n'est autre que celui du personnage dont les écrits, traduits en latin, avaient répandu la connaissance de ce sytème en Occident"*[31] .

Aujourd'hui cette conjecture ne fait plus aucun doute. Déjà, peu après sa formulation, elle fût confirmée par la découverte d'un Codex de Cambridge (University Library li VI, 5) publié par BONCOMPAGNI en 1857[32] . En effet, ce manuscrit, traditionnellement daté du

---

28 - Voir GUITEL loc cit p. 312. Repris aussi par Georges IFRAH ***Histoire Universelle des chiffres*** *Seghers Paris 1981 p. 196.*

29 - POWELL M., The antecedents of old Babylonian place notation and the early history of mathematics. ***Historia Mathematica*** *3 (1976) 417-439.*

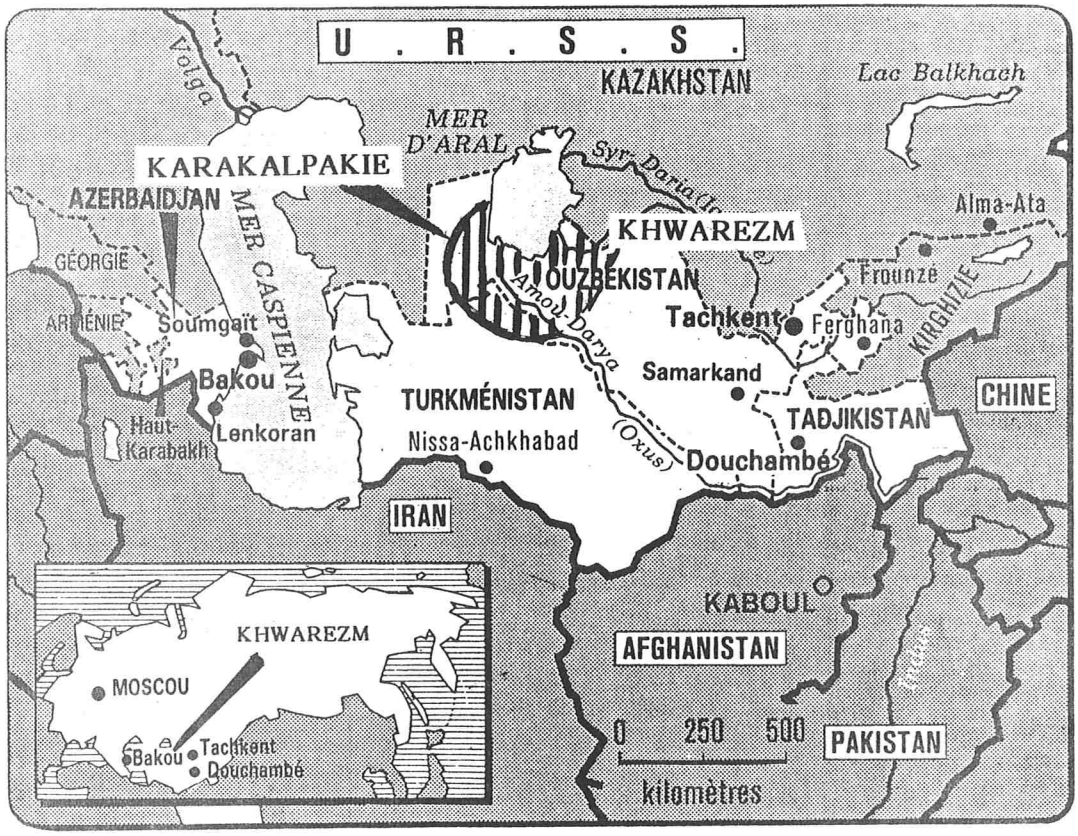
30 - HØYRUP J., Investigations of an early sumeral division problem 25OO B-C. ***Historia mathematica*** *9 (1982) 19-36.*

31 - REINAUD J.T., Mémoire géographique, historique et scientifique sur l'Inde antérieurement au milieu du XIème siècle de l'ère chrétienne, d'après les écrivains arabes, persans et chinois. ***Mémoires de l'Institut National de France, Académie des Inscriptions et Belles Lettres*** *18 (1849) 1-399, p. 303-304.*

32 - BONCOMPAGNI B., ***Trattati d'aritmetica.*** *Algoritmi de numero indorum. Roma (1857).*

treizième siècle mais qui selon de récents travaux de THOMSON[33] , pourrait avoir été copié vers 1150, commence par les mots "Dixit Algorismi" c'est-à-dire "Algorismi a dit". Il s'agit de l'un des nombreux textes latins réflétant différentes versions d'un ouvrage arithmétique d'al-KHWĀRIZMĪ, ouvrage dont l'original arabe ne nous est pas encore parvenu.

Ainsi, l'origine du mot "algorithme" se rattache à Muhammad ibn Musa al-KHWĀRIZMĪ (780-850), soit, littéralement, à Muhammad fils de Musa originaire du Khwarezm. Le Khwarezm est situé en Asie Centrale dans la région de l'Amour Daria en bordure de la mer d'Aral ; les Grecs l'appelaient choresmie et il est partagé de nos jours entre la République autonome de Karakalpakie et les républiques d'Ouzbekistan et du Turkmenistan.



C'est donc cette région qui a donné son nom à l'un des premiers et des plus éminents savants de la civilisation arabo-islamique et, à travers lui, au terme algorithme.

Nous avons peu de renseignements sur la vie d'al-KHWĀRIZMĪ. Il vécut de 780 à 850 et il était l'un des membres les plus importants d'un groupe de mathématiciens et d'astronomes qui, sous le règne d'al-MA'MŪN (813-833) travaillèrent à la Maison de la Sagesse à Bagdad. Cinq de ses ouvrages, en partie remaniés, sont encore conservés. Son traité al

---

33 - Pour tout ce qui concerne les études récentes se rapportant aux versions latines du XIIème siècle de l'arithmétique d'AL-KHWĀRIZMĪ, nous nous sommes appuyés sur les documents de André ALLARD publiés ou inédits qu'il a bien voulu nous communiquer. Nous l'en remercions vivement. Nous pouvons citer en particulier : -L'époque d'Adélard (de Bath) et les chiffres arabes dans les manuscrits latins d'arithmétique dans ***Adelard de Bath. An English scientist and arabist of the early twelfth century.*** *Warburg, London (1987) p.37-43 et l'influence des mathématiques arabes dans l'occident médiéval dans La Science Arabe (à paraître).*

Mukhtasar fī Hisāb al Jabr wa l-Muqābala. (L'abrégé du calcul par l'al-jabr et la muqabala) a donné naissance au mot "algèbre". Bien qu'aucun de ses textes arithmétiques ne nous soit encore parvenu, Roshdi RASHED pense qu'il aurait écrit deux livres ayant trait à l'arithmétique[34]. L'un, **le Kitab al-jam' w'al-tafriq** serait celui cité par ABŪ KĀMIL(850-930) dans son **Algèbre.** L'autre serait celui auquel Adolf YOUSCHKEVITCH[35] attribue le titre **Kitab al-gam'wal tafriq bi hisab al-hind** (livre de l'addition et de la soustraction d'après le calcul des Indiens) dont le Codex de Cambridge précité n'est sans doute pas une traduction fidèle.

Outre ce **Dixit Algorismi** plusieurs textes latins[36] composés entre 1140 et 1150 se situent dans le vaste mouvement qui a conduit à l'introduction des chiffres[37] dit "arabes" dans le monde européen et à se détacher ainsi des comptes digitaux ou sur l'abaque.

> *"Toutes ces versions, sommairement décrites, contiennent un exposé des opérations fondamentales pratiquées sur les nombres entiers (addition, soustraction, duplication, médiation, multiplication, division). Ces chapitres sont suivis d'exposés sur les fractions sexagésimales et les fractions ordinaires, et un dernier chapitre est consacré à l'extraction de racine carrée"*[38] .

Néanmoins, pendant longtemps les comptes sur les doigts et les calculs à l'aide de "tables à poussière" qui permettaient d'éliminer les calculs intermédiaires ont été utilisés même dans la civilisation arabo-islamique[39] · Dans leur conquête, les Arabes ont été amenés à respecter certaines pratiques. Ainsi :

> *"à Damas, le khalife WĀLID qui régna de 705 à 715 défendit de tenir en langue grecque les registres du trésor public et ordonna qu'ils fussent rédigés en langue arabe, mais ils conservèrent la numération alphabétique grecque"*[40].

Dans les textes arabes, cet emploi des lettres grecques durera jusqu'au XII^{e} siècle mais en général les nombres y étaient écrits en toutes lettres même pour les livres d'arithmétique. C'est par exemple le cas pour le livre d'algèbre d'al-KHWĀRIZMĪ ou pour le **Livre sur l'arithmétique nécessaire aux scribes et aux marchands** composé par ABŪ AL-WAFĀ (940-997). A la multiplicité des pratiques répond une multiplicité d'ouvrages : ABOÛL KÂCIM ALI BEN AHMED l'Antiochen (mort en 987) aurait écrit : **Le grand traité de la table relatif au calcul indien, le traité du calcul effectué sur**

---

*34 - RASHED R., **Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes.** Les Belles Lettres, Paris 1984 p.19-20.*

*35 - YOUSCHKEVITCH A., **Les mathématiques arabes (VIIIème - XVème siècles)** trad. CAZENAVE M., JAOUICHE K., Vrin Paris 1976 p. 16.*

*36 - ALLARD André, cite (note 33) le **Liber ysagogarum Alchorismi in artem astronomicam a magistro A.** compositus dont une copie porte la date de 1143. Le Liber **Algorismi de pratica arismetrice et l'Introductoris liber qui et pulueris dicitur in mathematicam disciplinam.***

37 - Voir annexe 4 pour les chiffres trouvés dans les manuscrits latins du XIIème siècle cités dans la note 36.

*38 - ALLARD A., Le traitement des fractions dans les premiers textes latins du XIIème siècle influencés par l'arithmétique arabe. **Actes du colloque "Histoire des fractions, fractions d'histoire"** Paris 1987 (à paraître).*

*39 - L'objet des traités d'al-KHWĀRIZMĪ est lui-même sujet à contreverses Ahmad SAIDAN affirme qu' "on a appris récemment que l'arithmétique indo-arabe exigeait l'utilisation de l'abaque [.....] . Ce livre d'al-KWĀRIZMĪ était de type compte digital. Il semble que ceux qui suivaient cet ouvrage d'al-KHWĀRIZMĪ étaient appelés les algoristes et ceux qui suivaient ses travaux sur l'arithmétique indienne étaient appelés les algoristes" dans l'article al-BAGHDADI du **Dictionary of scientific biography** Scibner, New York 1981 vol 15, p. 10*

40 - WOEPCKE (note 7) p. 237.

la table sans rien effacer, le traité de l'explication de l'arithmétique, le traité des preuves numériques et le traité du calcul manuel sans table[41] .

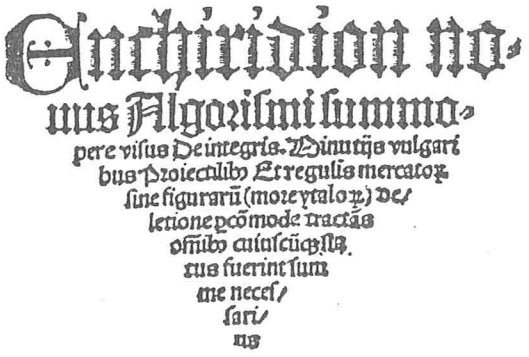
En Europe médiévale, dès le XII^{e} siècle

> *"les traités d'arithmétique, sauf quelques exceptions, ne portent plus le nom d'Albacus, ils prennent tous celui d'Algorisme"*[42] .

Cette différence d'appellation ne doit pas nous abuser : elle concerne en fait l'introduction des chiffres arabes et non pas les modes de calcul.

> *"Les procédés de calcul utilisant neuf chiffres et le zéro et pratiquant l'effacement de nombres sur une "table de poussière", connurent leur plus grande diffusion grâce à deux oeuvres brèves du début du XII^{e} siècle : **l'Algorismus Vulgaris** de Jean de SACROBOSCO (John of Halifax) (+ ca 1256) et le **Carmen de algorismo** d'Alexandre de VILLEDIEU (Alexander de Villa Dei) (+ ca 1240)*[43] .

Ceci perdura quelques temps puisque, par exemple, tant en Allemagne qu'en Pologne, de nombreux traités dits d'Algorithme sont en fait relatifs à des calculs sur l'abaque : c'est le cas du premier traité d'arithmétique polonais : **l'Algorithmus** de Thomas de KLOS publié en 1538. De même, la première arithmétique imprimée à Cologne, en 1501, **l'Enchiridion algorismi** de Johann HUSWIRT[44] comporte un chapitre sur l'abaque. (Voirci-après



Enchiridion no-
uus Algorismi summa-
pere visus De integris. Minutijs vulgari
bus Proiectilib⁹ Et regulis mercator⁹
sine figurarū (mozeytalo⁹) de/
lectione pcō mode tractās
ofīlbo cuiuscūq; ſtā.
tus fuerint ſum
me neceſ/
ſari/
us

Inuide ne latres: linguā compeſce furentem
Nec nimiū rabidis garrulus eſto labris.
Aut pete tartareas (ſuperis incognitus) vmbras
Et phlegetonteos labere aduſq; lacus
Atq; illic potius lites. & iurgia miſce
Et viuis pacem concubitare ſine

---

41 - WOEPCKE (note 7) p. 493.

*42 - CHASLES M., Histoire de l'arithmétique. **Comptes Rendus de l'Académie des Sciences** 16 (1843) 156-173, 218-246, p. 162.*

43 - ALLARD note 33.

*44 - SMITH D.E., **Rara Arithmetica** chelsea. New York 1970 p. 75.*

En fait, sous des noms divers[45] , l'algorisme a pris la place de la logistique méprisée par les Grecs. Robert RECORDE (1510-1558) ne s'y est pas trompé lorsque dans son **Ground of Artes** publié en 1542 il oppose l'arithmétique grecque et l'algorithme arabe[46] . Il n'en demeure pas moins que le mot algorithme ou un de ses équivalents est intimement associé alors aux opérations élémentaires. C'est ce que veut dire François RABELAIS (1484-1553) lorsqu'il écrit au chapitre XII de **Pantagruel :**

"Ces enfants deviendront grands en algorisme"[47] .

Plus précisément, dans son **Dictionnaire de l'ancienne langue française,** GODEFROY cite un ancien comput

"Quatre parties sont d'augorisme, assembler, abattre, diviser, multiplier"[48] .

Lorsque les mathématiciens quitteront l'arithmétique élémentaire, le mot algorithme prendra une autre signification, ou du moins aura un sens beaucoup plus étendu ; on parlera, par exemple, de l'algorithme du calcul intégral. Ainsi, on s'éloignera du domaine arithmétique pour aborder d'autres types de calcul tout aussi efficaces qui selon LEBESGUE "raisonnement à la place des mathématiques". Ceci est très bien exprimé dans **l'Encyclopédie.**

ALGORITHME, ſ. m. *terme Arabe*, employé par quelques auteurs, & ſingulièrement par les Eſpagnols, pour ſignifier *la pratique de l'Algèbre. Voyez* ALGÈBRE. 49

Il ſe prend auſſi quelquefois pour l'*Arithmétique par chiffres. Voyez* ARITHMÉTIQUE.

L'*algorithme*, ſelon la force du mot, ſignifie proprement l'*art de ſupputer avec juſteſſe & facilité*: il comprend les règles de l'Arithmétique vulgaire. Ainſi, l'on dit l'*algorithme* des entiers, l'*algorithme* des fractions, l'*algorithme* des nombres ſourds, &c.

Le même mot ſe prend, en général, pour déſigner la méthode & la notation de toute eſpèce de calcul. En ce ſens, on dit l'*algorithme du calcul intégral*, l'*algorithme du calcul exponentiel*, l'*algorithme du calcul des ſinus*, &c.

Aujourd'hui, avec l'essor rapide de l'informatique la notion d'algorithme est devenue primitive. L'objet essentiel de cette discipline est en effet le traitement de données au moyen d'algorithmes. Certes, d'autres mots auraient pu suffire à définir ce concept : recette, règle, procédé, méthode... Tous ces mots impliquent en effet l'idée de l'utilisation d'un certain nombre d'instructions pour obtenir un résultat (sortie) spécifique à partir d'une situation initiale (entrée) donnée. Mais les algorithmes obéissent, en fait, à trois

---

45 - Le mot algorithme a subi de nombreuses variations dues principalement aux influences des parlers locaux. Ainsi, en France, al étant souvent changé en au nous trouvons "augrisme" ou "augrime". En Espagne, par contre, al a été abandonné et ceci peut donner "guarisma" ou "guarismo". Ce sont toutes ces différentes appellations qui ont empêché de retrouver l'étymologie d'origine et ceci a pu donner lieu à diverses conjectures : voir SMITH (loc. cit. 3) tome II, p. 9-10.

*46 - RECORDE, **The grounde of artes**, London 1542 reimp. Da Capo Press Amsterdam (voir Annexe 5).*

*47 - RABELAIS, **Pantagruel**, Livre de Poche n° 1240, p. 175.*

*48 - GODEFROY F., **Dictionnaire de l'ancienne langue française.** Masson Paris 1987. Article algorithme.*

*49 - **Encyclopédie méthodique. Mathématiques**, Panckouche Paris 1784 reimp. A.C.L. Paris 1987, p. 36-37.*

impératifs absolus :
- la non ambiguïté,
- la finitude
- et l'indépendance des données.

Pour Jacques HEBENSTREIT

> *"Un algorithme est une suite finie de règles à appliquer dans un ordre déterminé à un nombre fini de données pour arriver, en un nombre fini d'étapes, à un certain résultat, et cela indépendamment des données*[50].

Bien entendu, dans le cadre élémentaire où nous nous sommes placés, les algorithmes que nous avons déjà présentés ou que nous allons étudier ne répondent pas toujours à tous ces critères. Néanmoins nous allons essayer d'en considérer quelques uns sous l'un de ces trois aspects tout en sachant combien une telle classification est arbitraire.

3. Quelques algorithmes liés à des opérations élémentaires.

Très tôt l'homme a eu besoin de supports quand ce ne sont pas des instruments auxiliaires pour effectuer ses calculs. Le plus connu nous semble être le boulier chinois et il nous a paru utile de commencer notre brève étude par celui-ci.

Un exemple de division sur le boulier chinois.
L'origine des tables à calcul reste inconnue et nous pouvons nous interroger sur le problème de l'origine du boulier chinois.

> *"Malgré de nombreuses recherches sur le sujet, la question est loin d'être résolue. On sait seulement de manière certaine que le boulier n'a été couramment utilisé en Chine qu'à partir de la deuxième moitié du XVIème siècle"*[51].

Il est cependant probable qu'il existait déjà deux siècles plus tôt comme en témoigne un livre d'images destiné à l'apprentissage de la lecture dont l'exemplaire actuellement conservé semble avoir été xylographié en 1337.

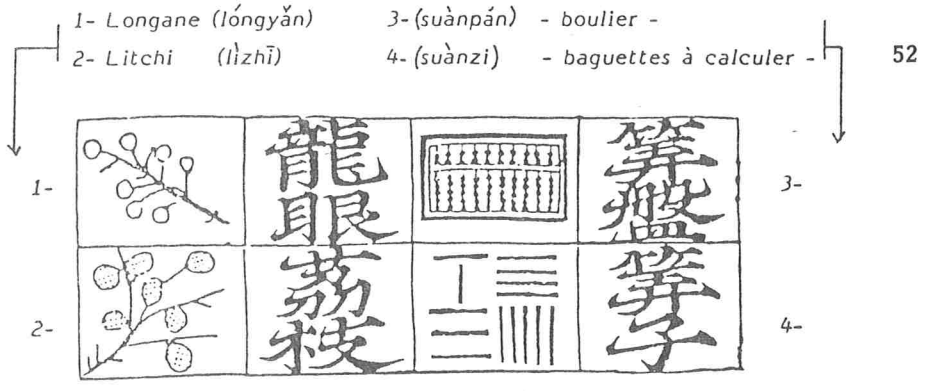
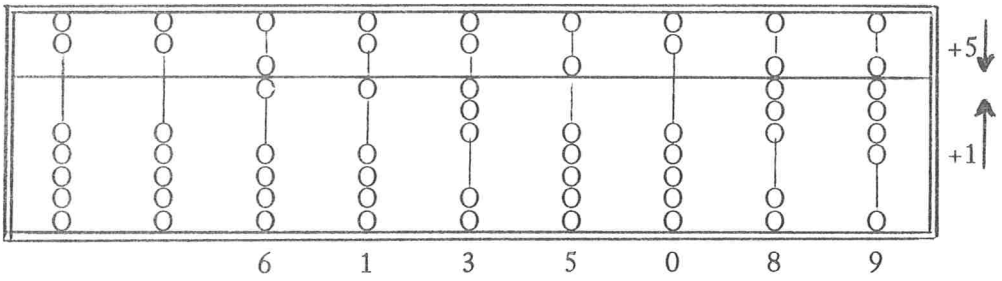


Image d'un boulier figurant dans le livre de lecture intitulé
Duixiang siyan zazi (1337)
(D'après l'édition de ce texte publiée à Tokyo en 1920)

---

50 - HEBENSTREIT J., art. informatique ***Encyclopaedia Universalis*** *1985, t. 9, p. 1144.*
51 - MARTZLOFF J-C., ***Histoire des mathématiques chinoises****. Masson, Paris 1987 p. 199.*

Dans sa version actuelle le boulier chinois se compose d'un nombre de tringles "verticales" serties dans un cadre rectangulaire. Sur chacune de ces tringles deux étages de boules séparées par une barre transversale peuvent coulisser librement. La notation des nombres repose sur le principe de la numération de position. Les deux boules du haut valent chacune cinq et les cinq boules du bas valent chacune 1. Seules comptent les boules situées dans la région transversale[53]. Ainsi 6 135 089 peut être figuré comme suit :



Il existe plusieurs techniques opératoires qui dépendent de la nature du boulier et de la méthode mathématique mise en oeuvre. Nous donnons ici un exemple particulier : celui de la division par 7.
En effet, sur le boulier chinois, la division traditionnelle dépend du diviseur particulier considéré. Ainsi, il existe des règles spéciales de division selon que le diviseur est inférieur à 10 et parfois des règles pour les nombres compris entre 11 et 99 ! Mais il existe aussi des règles plus générales valables pour un diviseur quelconque. Autrement dit, ces diverses règles correspondent, d'une part, à nos tables de division et, d'autre part, à l'algorithme général de la division. Même dans ce cas simple, elles se situent très bien dans le cadre habituel des algorithmes chinois :

> *"Il s'agit plutôt de "stratagèmes d'action" à caractère dogmatique qui, suivis mécaniquement, devraient mener automatiquement au résultat escompté mais qui, dans la pratique, autorisent éventuellement une liberté d'action plus ou moins grande : toutes les étapes des calculs ne sont pas toujours rigoureusement spécifiées comme elles devraient l'être s'il s'agissait de véritables algorithmes"* [54].

L'énoncé de la règle de division par 7 tel que le rapporte LAN CHUNG HIM dans **The principles and practice of the Chinese Abacus** (1958) est, en effet, le suivant :

> *sept-un ? ajouter trois en dessous !*
> *sept-deux ? ajouter six en bas !*
> *sept-trois ? quatre reste deux !*
> *sept-quatre ? cinq reste un !*
> *sept-cinq ? sept reste un !*
> *sept-six ? huit reste quatre !*
> *sept-rencontré ? un monté !*

Les six premières règles correspondent à ce que nous pourrions traduire par l'égalité suivante :

(1) $$\frac{10\ n}{7} = p + \frac{9}{7}.$$

---

53 - Le soroban japonais repose sur le même principe mais il ne comporte que (1+4) boules par tige "verticale" éliminant ainsi les boules "superflues" qui pourraient aider les commerçants dans leurs additions ou autres opérations.
54 - MARTZLOFF J-C., note 51, p. 54.

Certes la première règle qui correspond à

$$\frac{10}{7} = 1 + \frac{3}{7}$$

se situe dans le cadre strict de l'objet opératoire : mathématiquement, on garde le 1 qui signifiait 10 mais on ajoute "en dessous" de la ligne transversale, trois boules à la tige qui se trouve immédiatement après à la droite. Les autres traduisent (1) : par exemple, la sixième correspond à

$$\frac{60}{7} = 8 + \frac{4}{7}$$

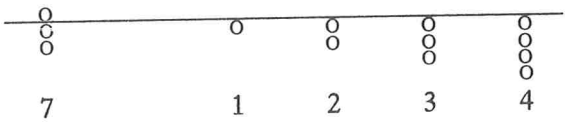
et la règle énonce les chiffres 8 et 4 respectivement du "quotient" et du "reste".
Quant à la dernière règle, elle laisse plus de liberté puisqu'elle couvre le champ des égalités :

$$\frac{7}{7} = 1 \quad ; \quad \frac{8}{7} = 1 + \frac{1}{7} \qquad \text{et} \qquad \frac{9}{7} = 1 + \frac{2}{7},$$

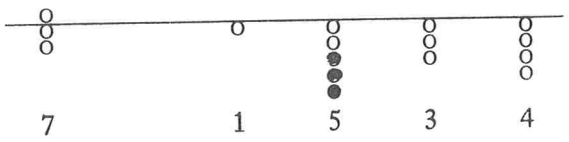
Le reste n'est pas, cette fois, explicité ; seul compte le quotient 1 qui est monté, c'est-à-dire qu'il faut monter une boule des boules situées à la partie inférieure de la tige qui se trouve immédiatement à "gauche".

Expliquons l'application de ces règles sur l'exemple de la division de 1234 par 7. Nous n'indiquons que les boules significatives : celles qui "touchent" la barre transversale et nous avons noirci les nouvelles boules.

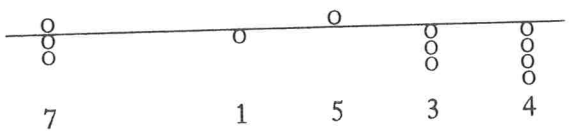
1ère étape. On écrit le dividende et le diviseur.



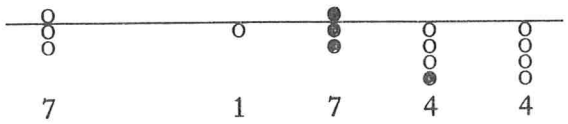
2ème étape. Le premier chiffre du dividende est 1, on applique la première règle



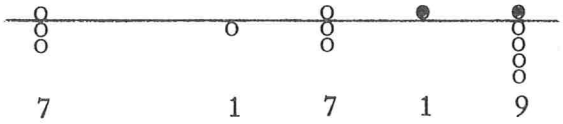
soit après simplification par 5



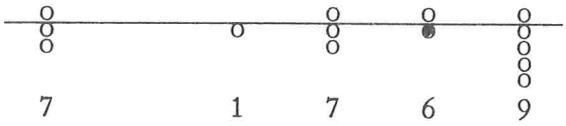
3ème étape. Le deuxième chiffre du nouveau dividende est 5 : on applique la cinquième règle



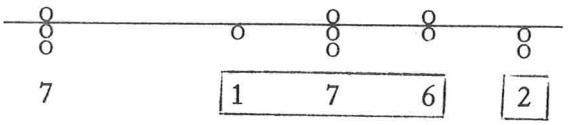
4ème étape. Le troisième chiffre du nouveau dividende est 4 : on applique la quatrième règle



5ème étape. Le quatrième chiffre du nouveau dividende est 9 : on applique la septième règle



6ème étape. On applique la simplification non écrite dans la septième règle c'est-à-dire qu'on enlève les trois boules qui correspondent à 7



qui traduit l'égalité

$$1234 = 7 \times 176 + 2$$

Nous avons ainsi, comme dans l'énoncé de chaque règle, le quotient et le reste. Notons que la preuve de l'opération se fait en appliquant d'autres règles spécifiques valables pour le diviseur 7.

La division par différence sur l'abaque médiéval

Au début du XIIIème siècle, FIBONACCI c'est-à-dire LEONARD DE PISE (1170-1240) indiquait trois manières de compter :

"computatio manibus, algorismus, arcus pictagore" [55]

c'est-à-dire les comptes digitaux, les "calculs indiens" et l'abaque de GERBERT. On attribue en effet à ce moine né à Aurillac vers 94O -qui devint pape en 999 sous le nom de Sylvestre II[56]- l'introduction d'un certain type d'abaque. L'abaque de Gerbert ou arc pythagorique est divisé en trente lignes verticales dont les trois dernières sont réservées aux onces et à ses proportions. Les vingt-sept autres sont groupées aussi trois par trois de manière à bien positionner les chiffres -ou plutôt les apices c'est-à-dire les jetons sur lesquels sont dessinés les symboles numériques- comme nous écrivons, aujourd'hui, les nombres par tranches de trois chiffres. Ce regroupement est marqué par des arcs joignant les colonnes. Pour la conduite des opérations on trace aussi des lignes horizontales de manière à délimiter les cases dans lesquelles on met les apices[57] .

Sur les apices les symboles numériques sont soit ceux des neuf premiers chiffres[58] de la numération alphabétique grecque soit encore des signes particuliers correspondant aux neuf premiers chiffres. Mais, dans les manuscrits, les explications comportent aussi les chiffres romains !

Nous ne connaissons pas l'origine de la division simple par différence que nous allons maintenant considérer. Peut-être doit-on y voir une survivance du compte digital ? En effet une version latine du Liber Ysagorum[59] contient une formule de multiplication des unités que l'on peut traduire selon les égalités suivantes :

$$ab = 10b - b\,(10 - a) = 10\,a - a\,(10 - b).$$

Dans le cas qui nous occupe la division simple par différence repose sur les deux règles suivantes :

$$(2) \qquad \frac{a10^{n+1}+b}{c} = a10^{n} + \frac{a10^{n}(10-c)+b}{c}$$

$$(3) \qquad \frac{a}{c} = 1 + \frac{a-c}{c} \qquad \text{si} \qquad c \leq a < 10 \ .$$

où a et c sont des entiers naturels non nuls structement inférieurs à 10. Ces deux règles utilisent les différences (10-c) et (a-c) . Afin de montrer cet algorithme explicitons-le sur l'exemple de la division de 905 par 8.[60]

		2
		8
9		5

<u>1ère étape.</u> On inscrit la différence (10-8), c'est à dire 2, sur la première ligne, et le diviseur, 8, sur la deuxième ligne, et le dividende, 905, sur la troisième ligne.

---

55 - Cité par Smith (loc. cit 3) t. II, p. 186.

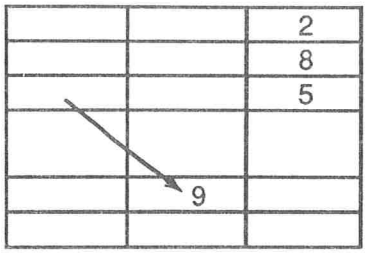
56 - Voir la conférence de Jean Pierre LEVET ***"Gerbert d'Aurillac, le savant, le maître, le mathématicien".***

57 - On doit distinguer l'abaque de GERBERT de l'abaque à lignes horizontales ou chaque ligne horizontale représente les diverses ordres décimaux. C'est ce dernier qui est représenté dans de nombreux ouvrages d'arithmétique circulant encore au XVIème siècle.

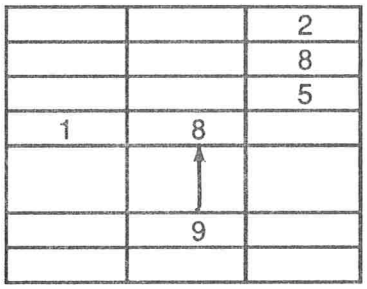
58 - Voir Annexe 6

59 - ALLARD. Notes 33 et 36.

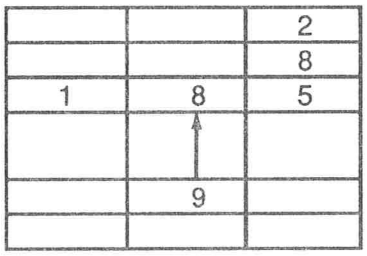
60 - Voir Annexe 6. Pour montrer l'application de la deuxième règle nous avons changé 900 en 905.



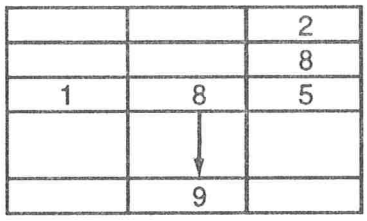
2ème étape. Le nombre 905 étant supérieur à 8, on applique la première règle. Pour écrire ce qui correspond au quotient partiel $a.10^n$, on "pose" le premier chiffre du dividende, a, ici 9, dans la colonne suivante à l'avant dernière ligne.[61]



3ème étape. Le nombre $a10^n(10-c)$ est le produit de $a10^n$ quotient obtenu précédemment par la différence, autrement dit ceci revient à multiplier le chiffre de l'avant-dernière ligne par la différence, c'est-à-dire, ici, 9 par 2. On obtient un nombre, ici 18, que l'on "pose" dans la quatrième ligne, le chiffre des unités étant posé dans la colonne où se trouvait le chiffre de l'avant-dernière ligne.



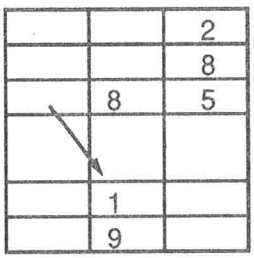
4ème étape. Le nouveau dividende $[a.10^n.(10-c)+b]$ est obtenu en additionnant les chiffres respectifs des troisième et quatrième ligne. On pose le résultat dans la troisième ligne.



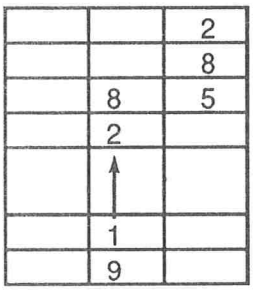
5ème étape. On pose le premier quotient partiel $a10^n$ dans la dernière ligne. Il suffit alors de répéter le procédé ou d'appliquer la deuxième règle. En fait, cette cinquième étape revient, de manière générale, à additionner les quotients partiels comme nous allons pouvoir le constater.

6ème étape. On opère à partir de 185 comme l'on vient d'opérer à partir de 905 et l'on obtient successivement :

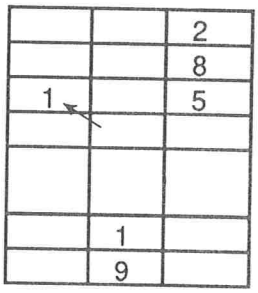
2)



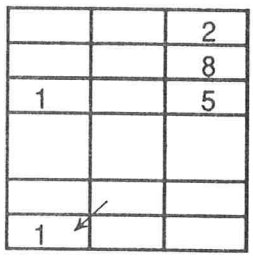
3)



4)



5)

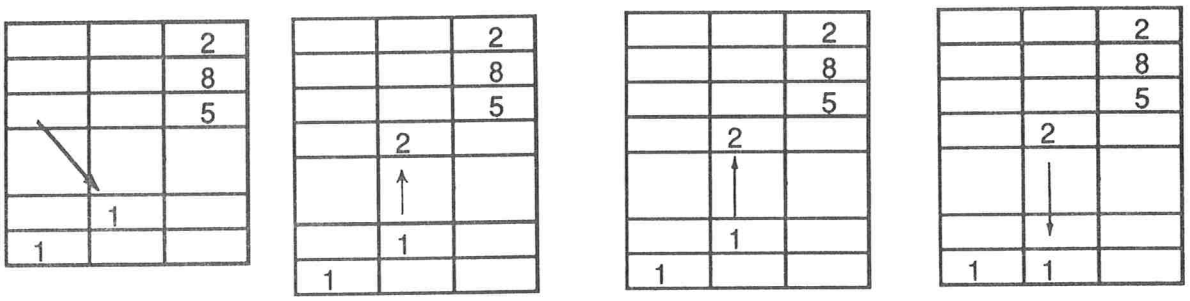


Donc 105 est le nouveau dividende et 100 est le nouveau quotient.

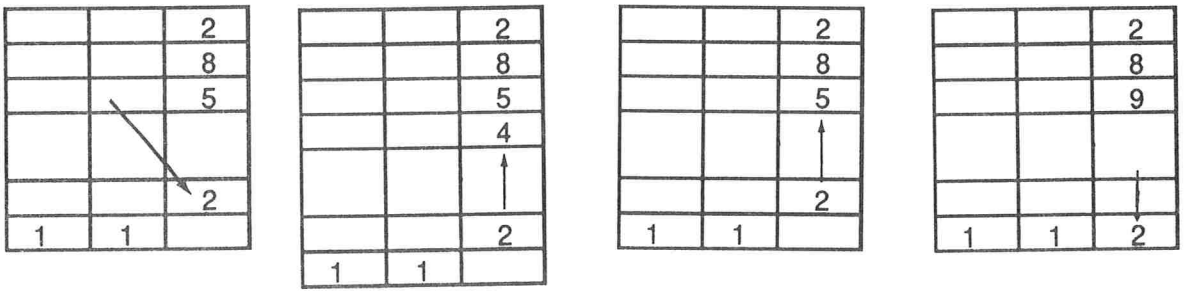
---

61 - Nous avons donné une présentation plus algorithmique permettant une programmation sur un ordinateur.

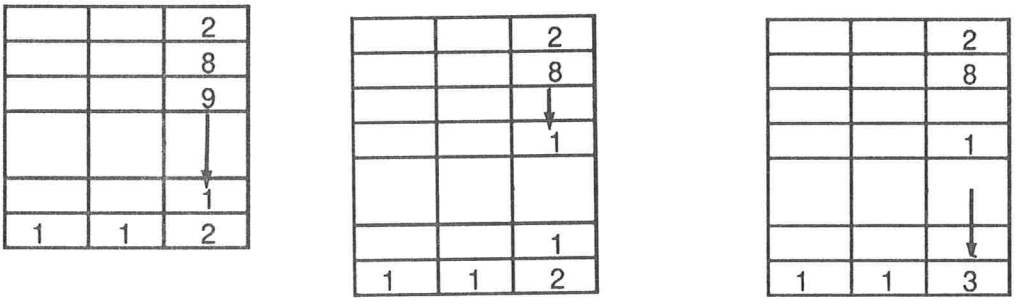
7ème étape. On utilise à nouveau la première règle à partir de 105.



8ème étape. On utilise à nouveau la première règle à partir de 25



9ème étape. On applique cette fois la deuxième règle qui nous donne successivement un quotient partiel égal à 1 puis une différence



Nous avons obtenu ce qui correspond à l'égalité

$$905 = 8 \times 113 + 1.$$

Des approximations babyloniennes ambigues.

Dans le premier chapitre nous avons discuté de la difficulté à percevoir la non-ambiguité de certains algorithmes. Ici, les procédures ne sont sans doute pas ambigues puisqu'elles sont suffisamment explicites. Nous voulons simplement souligner l'ambiguïté qui peut résulter de la confrontation de certaines manières d'opérer. Nous examinerons les problèmes 6 et 7 de la tablette VAT 6598 du Musée de Berlin.[62]

Dans les deux cas, il s'agit de déterminer la diagonale d'une porte dont la hauteur vaut $\frac{40}{60}$ et la largeur $\frac{10}{60}$. Elle est datée de l'ancien âge babylonien, c'est-à-dire du premier tiers du deuxième millénaire avant Jésus-Christ, époque où les Babyloniens utilisaient le système de position sexagésimal et où ils devaient connaître le théorème de PYTHAGORE. Autrement dit, le problème revient à donner une approximation sexagésimale de $\sqrt{(0;40)^2+(0;10)^2}$, c'est-à-dire du nombre irrationnel $\frac{10\sqrt{17}}{60}$. Au lieu de l'approximation 0; 41, 13, 51,[63] le scibe babylonien propose respectivement 0;41, 15, et 0; 42, 13, 20. Si l'on appelle H, L et D respectivement la hauteur, la largeur et la diagonale les procédures indiquées dans les problèmes 7 et 8 peuvent être respectivement traduites par les égalités suivantes :[64]

$$D = H + \frac{1}{2} \times L^2 \qquad\qquad HL = H + 2HL^2$$

Alors que la première égalité correspond à l'approximation bien connue

$$\sqrt{H^2+L^2} \simeq H + \frac{L^2}{2H}$$

la deuxième égalité n'est en un certain sens, valable seulement parceque H et L^2 sont petits. Autrement dit, les deux approximations proposées laissent planer un doute, pour ne pas parler d'ambiguïté, sur la pertinence des méthodes proposées.

La finitude de l'algorithme de l'extraction de la racine carrée selon THEON D'ALEXANDRIE

La finitude d'un algorithme s'inscrit à plusieurs niveaux :

- suite finie de règles
- nombre fini de données
- et nombre fini d'étapes.

Cette "finitude informatique" peut paraître étrangère à quelques algorithmes "mathématiques". C'est, par exemple, le cas pour certains procédés d'extraction de racine carrée d'un nombre irrationnel. Certes le processus n'aboutira jamais à la valeur exacte. Cependant, on conviendra, à l'avance, de s'arrêter lorsque l'on aura obtenu une valeur avec une précision bien déterminée : ainsi on récupèrera la finitude. Par exemple, THEON D'ALEXANDRIE qui vécut vers 370 après Jésus-Christ[65] explique dans le langage géométrique euclidien l'arrêt de l'approximation sexagesimale aux secondes. En l'absence

---

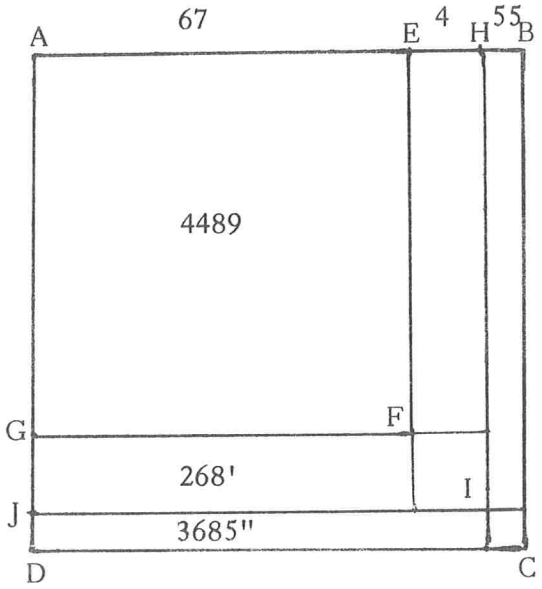
*62 - THUREAU-DANGIN F., **Textes mathématiques babyloniens**, Brill Leiden 1938, p. 130-131.*

63 - Nous avons adopté la notation sexagesimale 0; 41, 13, 51 pour $\frac{41}{61}+\frac{13}{60^2}+\frac{51}{60^3}$

64 - Voir Annexe 7

65 - THEON D'ALEXANDRIE est le père de l'une des premières femmes mathématiciennes HYPATIA.

de traduction du texte grec[66] nous donnons la traduction libre suivante pour le calcul de $\sqrt{4500°}$ puis pour sa généralisation.



"Prendre un carré ABCD contenant 4500 degrés. Le côté du nombre carré le plus près de 4489 est 67°. Prendre AG égal à 67° et AEFG le carré de AG. Le gnomon restant BCD contient 11° ou 660'. Maintenant diviser 660' par 2AG c'es-à-dire 134. Le quotient est 4'. Prendre EH et GJ égaux à 4' et compléter les rectangles HF et FJ. Les rectangles contiennent 536' : il reste 124' soit 7440". De cela nous devons soustraire le carré FI contenant 16". Le gnomon restant BCD contient 7424". Diviser cela par 2AJ soit 134°8'. Le quotient est 55". Le reste est 46"40"', qui est le carré de IC dont le côté est 55"' approximativement. La racine carrée est 67°4' 55"'. [...] . Quand nous cherchons une racine carrée nous prenons d'abord la racine du nombre carré le plus proche. Ensuite nous le doublons et par cela nous divisons le reste réduit en minutes et nous soustrayons le carré du quotient. Ensuite nous réduisons le reste et nous divisons par le double des degrés et des minutes. Nous obtenons ainsi approximativement la racine cherchée.[67]

Si l'on fait exception de la numération sexagesimale nous obtenons le processus classique d'extraction des racines carrées. Comme cela est souvent le cas en astronomie ancienne, la précision est arrêtée aux secondes. Mais le cadre géométrique sert ici seulement de sopport : on ne peut pas apprécier l'approximation sauf à construire une figure très grande : 67°4'55" valant 241495".

La méthode égyptienne des auxiliaires rouges.

L'indépendance des données est intimement liée aux deux autres propriétés caractérisant un algorithme. Nous pouvons dire, qu'en particulier, jointe à la non-ambiguïté, elle permet de préciser le champ de validité de l'algorithme. Nous l'avons souvent constaté, les Anciens n'explicitaient pas le domaine algorithmique dans lequel ils opéraient. Souvent, tant du point de vue historique que mathématique, il est intéressant d'étudier les "limites" de l'algorithme proposé ou supposé.

---

*66 - ROME A., **Commentaires de Pappus et de Theon d'Alexandrie sur l'Almageste.** Biblioteca Apostolica Vaticana, 1936, t. II, pp. 471-472.*

*67 - Voir aussi EELS W., **Greek methods of solving quadratic equations.** The American Mathematical Monthly 18 (1911) 3-14, p. 7.*

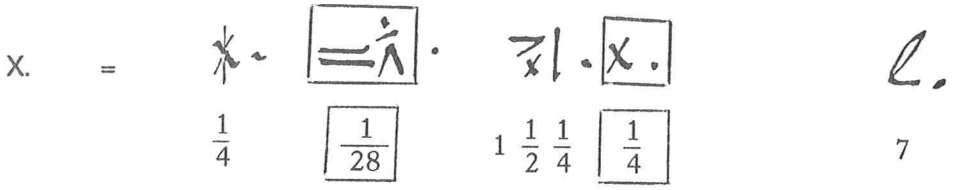
Ici nous avons choisi la méthode des auxiliaires rouges telle qu'elle est pratiquée par les Egyptiens. Disons tout de suite que ce sont les historiens qui dénomment ainsi cette méthode. Elle tire son appellation du fait que dans les papyrus mathématiques les textes qui s'y rapportent sont le plus souvent écrits en rouge.
Nous savons que les scibes égyptiens utilisaient deux sortes d'encre :

> *"L'encre noire était obtenue à partir du noir de fumée, elle servait à écrire la plus grande partie du texte. L'encre rouge était fabriquée avec l'ocre, oxyde de fer tiré de la terre égyptienne. Par contraste avec la noire, elle permettait de distinguer des séries (par exemple dans les premiers documents de comptabilité), d'indiquer des dates, de ponctuer un récit et surtout de marquer les têtes de chapitres, le début des paragraphes et la conclusion d'un long texte. Cette habitude a enrichi notre propre vocabulaire du mot <<rubrique>> (du latin <<ruber>> rouge)".*[68]

Ces dispositions d'écriture sont présentes dans le plus important papyrus mathématique égyptien qui nous soit parvenu : le papyrus RHIND. Il s'agit d'une copie datée de 1650 avant Jésus-Christ d'un texte antérieur de près de deux cents ans. En effet, l'introduction y est écrite en rouge :

> *"Exemple de calcul, afin de sonder les choses et connaître tout ce qui est obscure ainsi que tous les secrets".*[69]

Vaste programme. Mais pour ce qui nous occupe, cette écriture rouge sert aussi pour ce que nous pourrions situer dans le cadre d'une réduction au même dénominateur. Nous savons que les anciens Egyptiens utilisaient en dehors des entiers naturels non nuls et de la fraction $\frac{2}{3}$ les seuls inverses des entiers naturels non nuls que nous appelons quantièmes. Dès lors, l'écriture d'un rationnel devait s'effectuer dans ce cadre. C'est pour celà qu'il était fondamental de connaître certaines relations entre quantièmes et que les papyrus RHIND commence parce que nous appelons "les expressions de 2 à partir de n" pour n compris entre 3 et 101.[70] Ainsi "les expressions de 2 à partir de 7" se présentent comme suit.[71]



---

68 - BENEZATH D., in ***Naissance de l'Ecriture****, Edition de la Renaissance des Musées Nationaux, Paris (1982), p. 343.*

69 - CHOUCHOUD D., ***Recherches sur les connaissances mathématiques de l'Egypte pharaonique.*** *Thèse 3ème cycle, Lyon II, 1983, p. II.*

70 - Il existe d'autres tables "d'expressions de 2 à partir de n". Voir par exemple GRIFFITH F. ***Hieratic papyri from Kahum and Gurob****. Quaritch, London (1898). Kahum IV 2 pour n variant de 3 à 21, p. 15.*

71 - CHACE A., ***The Rhind mathematical papyrus.*** *The National Council of Teachers of Mathematics 1926, reimp. 1979, planche 2.*

où nous avons encadré ce qui est écrit en rouge. Ceci correspond aux égalités suivantes

$$2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

Ainsi l'écriture impossible "$\frac{2}{7}$" était remplacée par $(\frac{1}{4} + \frac{1}{28})$. D'une autre manière les scribes devaient réduire les expressions comportant trop de quantièmes et c'est ici que la méthode dite des auxiliaires rouges prend toute sa valeur. Par exemple, le problème 7 du papyrus RHIND peut se traduire comme suite :

Exemple pour rendre complet

72

$1\ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{28} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{16} \qquad \frac{1}{112}$

$7\ \ 1 \qquad\qquad 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{56}$ total $\frac{1}{2}$

$3\ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}$

En l'absence d'autres indications on peut considérer que ceci correspond au calcul de la somme

$$1\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right)$$

soit encore au calcul de la somme

$$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{28}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{56}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{112}\right).$$

dont le résultat est 2 comme il est indiqué.

Certes, l'addition des "quantièmes binaires" $\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right)$ peut être conservée. Mais les autres quantièmes proviennent par dimidiation, c'est-à-dire par division par 2 , du quantième originel $\frac{1}{28}$. Il est dès lors utile de ramener tout à lui c'est-à-dire de prendre comme dénominateur commun 28 et non pas 112 comme nous opèrerions aujourd'hui. Nous avons en rouge les numérateurs correspondants :

$$\frac{1}{4} = \frac{\boxed{7}}{28}, \quad \frac{1}{28} = \frac{\boxed{1}}{28}, \quad \frac{1}{8} = \frac{\boxed{3+\frac{1}{2}}}{28}, \quad \frac{1}{56} = \frac{\boxed{\frac{1}{2}}}{28}$$

---

72 - CHALE, note 74, planche 39.

$$\frac{1}{16} = \frac{\boxed{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}}}{28} \quad \text{et} \quad \frac{1}{112} = \frac{\boxed{\frac{1}{4}}}{28}$$

Le total s'obtient dès lors aisément puisque l'on additionne les nombres écrits en rouge : on obtient 14 d'où le total $\frac{1}{2}$. Autrement dit, la méthode est intimement liée aux données 4 et 28 . La technique de la multiplication ou de la division à l'aide de la duplication ou de la dimidiation assurent la pertinence du choix opéré par le scribe. La méthode des auxiliaires rouges n'est pas indépendante du champ dans lequel travaille le scribe.[73]

L'itération donnée par HERON D'ALEXANDRIE

A la fin du XIX^{ème} et au début du XX^{ème} siècle, la finitude a beaucoup préoccupé les mathématiciens. Ceci tient au fait que finitude et effectivité sont intimement liées. Dès lors, une querelle a pris corps : elle a opposé les idéalistes et les empiristes et elle a culminé dans les débats engagés à propos de l'acceptation ou du refus de l'axiome du choix.
Dans les années 1930, les logiciens se sont particulièrement intéressés aux "fonctions effectivement calculables". En 1936 Alonzo CHURCH [74] avance la thèse que les fonctions effectivement calculables sont exactement les fonctions récursives. Cette hypothèse mathématique signifie que les fonctions qui peuvent être calculées par un ordinateur sont les fonctions récursives.
A la récursivité sont intimement liées les notions d'itération et de récurrence, notions distinctes qui jouent un rôle fondamental dans le traitement des algorithmes. Jointe à la finitude, l'indépendance des données permet l'itération. Certes cette notion n'apparaît pas dans la définition que nous avons donnée d'un algorithme mais elle est essentielle aux yeux des informaticiens. Dès que l'on tente de formaliser le processus on est amené à écrire des formules de récurrence, et cette récurrence, traditionnellement traitée par l'itération est fréquemment mise en oeuvre aujourd'hui de façon récursive. Cette récursivité est en fait au plus près de la signification de l'algorithme d'EUCLIDE fondé sur le fait que le p.g.c.d. de a et b ($a \geq b$) vaut a lorsque b est nul et sinon est égal au p.g.c.d. de b et r où r désigne le reste de la division de a par b .
En l'absence d'autres documents, le premier à avoir mis l'accent sur une itération ou plutôt sur l'idée qui s'avèra si fructueuse d'approximations successives est HERON d'ALEXANDRIE mathématicien grec qui vécut au premier siècle de notre ère. Le texte qui lui en assure la paternité n'a toutefois été découvert qu'en 1896 ! Preuve, si besoin était, de la fragilité de certaines hypothèses historiques.
Dans ce texte il nous propose l'algorithme bien connu pour approcher une racine carrée d'un nombre irrationnel. Si a est une valeur approchée de $\sqrt{A}$ alors il considère la valeur $\frac{1}{2}(a + \frac{A}{a})$. En l'absence de notations le schéma est proposé sur un exemple, celui de $\sqrt{720}$:

> *"Puisque 720 n'a pas de côté rationnel, nous extrairons le côté avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que 720 est 729 qui a pour côté 27, divise 720 par 27, cela fait 26 et $\frac{2}{3}$, ajoute 27 cela fait $53\frac{2}{3}$; prends-en la moitié, cela fait $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$.*

---

73 - Dans le problème 31 du papyrus RHIND pour "résoudre dans E l'équation $x + \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{7}x = 33$ soit et $\frac{97x}{42} = 33$", le scribe adopte le dénominateur 42. (Voir note 21)

*74 - CHURCH A., An unsolvable problem of elementar number theory, **American Journal of mathematics**, 58, (1936), p. 345-363.*

En fait, 26 $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ multiplié par lui-même donne 720 $\frac{1}{36}$; de sorte que la différence (sur les carrés) est $\frac{1}{36}$. Si nous voulons rendre cette différence inférieure encore à $\frac{1}{36}$, nous mettrons 720 $\frac{1}{36}$ trouvé tout à l'heure à la place de 729 et, en procédant de la même façon, nous trouverons que la différence (sur les carrés) est beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$.[75]

Cette approximation se situe dans le cadre des moyennes chères aux pytagoriciens puisque ceci revient à considérer la moyenne arithmétique de deux approximations, l'une par excès et l'autre par défaut. Le cadre numérique est celui des quantièmes et ceci permet d'expliquer la préférence accordée par HERON à cette approximation plutôt qu'à l'approximation dite newtoniene[76]

$$a + \frac{A-a^2}{2a}$$

qui lui est équivalente quant au résultat obtenu puisque l'on a l'égalité

$$a + \frac{A-a^2}{2a} = \frac{1}{2}\left(a + \frac{A}{a}\right)$$

mais qui en diffère du point de vue du calcul : il est difficile de soustraire des quantièmes pour calculer $(A-a^2)$.
L'examen de l'ouvrage d'HERON D'ALEXANDRIE montre qu'il a plus ou moins appliqué son procédé[77] . Nous pouvons y distinguer trois types d'approximation :

- les approximations grossières où il ne semble pas avoir appliqué l'algorithme, citons :

$$\sqrt{58 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}} \sim 7 + \frac{2}{3}$$

$$\sqrt{356} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$

$$\sqrt{356 + \frac{1}{18}} \sim 18 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$[78]

- les approximations où il a pu appliquer une fois l'algorithme

---

*75 - BOROWCZYK J., Problèmes numériques. **Actes du Colloque Inter-Irem,** Montpellier 1985, 95-111, p. 96.*

*76 - Cette approximation semble être connue des Babyloniens et des Egyptiens de la période "grecque" : voir, par exemple PARKER, R. **Démotic Mathematical Papyri** Brown University, Press Providence 1972, p. 69.*

*77 - GUNTHER S., Die quadratischen Irrationalitäten der Alten und deren Entwickelungsmethode **Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik 4**, (1882), p. 1-13. HOFMANN, J. E., überdie Annäherungvon Quadratwurzeln bei Archimedes und Heron, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 43, (1934), p. 187-210. TANNERY, P., L'arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie, **Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux** 4 (1982) 161-194.*

78 - On peut noter le manque de rigueur dans l'ouvrage puisque $356 < 356 + \frac{1}{18}$ et $\frac{1}{8} > \frac{1}{9}$.

$$\sqrt{63} \sim \frac{1}{2}\left(8 + \frac{63}{8}\right) = 8 - \frac{1}{16}$$

$$\sqrt{1125} \sim \frac{1}{2}\left(33 + \frac{1125}{33} = 33 + \frac{1}{2} + \frac{1}{22}\right)$$

et les approximations où il a pu appliquer deux fois l'algorithme la première application conduisant à une approximation grossière, citons :

$$\sqrt{135} \sim \frac{1}{2}\left(11 + \frac{135}{11}\right) \sim 11 + \frac{2}{3}$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(11 + \frac{2}{3} + \frac{135}{11 + \frac{2}{3}}\right) = 11 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14} + \frac{1}{21}$$

$$\sqrt{2460 + \frac{15}{16}} \sim \frac{1}{2}\left(49 + \frac{2460 + \frac{15}{16}}{49}\right) \sim 49 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}$$

$$\approx \frac{1}{2}\left(49 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{2460 + \frac{15}{16}}{49 + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}}\right) = 49 + \frac{1}{2} + \frac{1}{17} + \frac{1}{34} + \frac{1}{51} \quad .$$

Une généralisation abusive par AS-SAMAW'AL

Les mathématiciens arabes ont perfectionné les méthodes d'approximation. Au lieu de

$$\sqrt{A} \sim a + \frac{A - a^2}{2a}$$

AL-UQLTDIST propose en 952 l'approximation

$$\sqrt{A} \sim a + \frac{A - a^2}{2a+1}.$$

De nombreux mathématiciens arabes adopteront la généralisation suivante pour les racines nièmes

$$\sqrt[n]{A} \sim a + \frac{A - a^n}{(a+1)^n - a^n};$$

elle est même appelée "approximation conventionnelle" pour les racines cubiques. Sans doute pour pallier les efforts de calcul nécessités par l'itération, AS-SAMAW'AL -qui mourut en 1175- remplace la division à l'aide de l'approximation a de la division à l' aide de la partie entière :

$$[a]^2 \leq A < ([a] + 1)^2 \quad \text{et} \quad \sqrt{A} \sim a + \frac{A - a^2}{2\,[a]} \quad .$$

"Si tu extrais la racine irrationnelle du nombre < > et si tu veux l'égaliser <<ta'dil>> [améliorer l'approximation] par ce calcul, multiplie le côté < > par lui-même et cherche combien est la différence, <<al-Tafànt>>, entre le produit et la quantité dont on veut approcher la racine. Divise ensuite cette erreur par le double de la partie entière de la racine. Divise ensuite cette erreur par le double de la partie entière de la racine ; ajoute le quotient de la division au côté, si l'erreur est négative et retranche le du côté si l'erreur est positive. Tu trouves ainsi le côté égalisé [amélioré]. Il est toujours plus proche de la vérité que celui qui le précède ".[79]

Moins performant que l'algorithme héronien, cet algorithme est appliqué effectivement par AS-SAMAW'AL pour le calcul de $\sqrt{5}$.
Il considère la suite définie par récurrence par :

$$x_0 = 2 + \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n + \frac{5-x_n^2}{2[\sqrt{5}]} = x_n + \frac{5-x_n^2}{4}$$

Il obtient :

$$x_1 = 2 + \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{56}{25} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{56}{25} - \frac{11}{2500} = \frac{5589}{2500}$$

Notons que :

$$\sqrt{5} \sim 2{,}236 \quad \text{et} \quad \frac{5589}{2500} = 2{,}2356.$$

Pour les racines n-ièmes AS-SAMAW'AL propose une généralisation curieuse que nous pouvons formuler comme suit :

$$\sqrt[n]{A} \sim a + \frac{A-a^n}{2[\sqrt[n]{A}]^{n-1} + \sum_{i=1}^{n-2} [\sqrt[n]{A}]^i}$$

soit pour n égal à 3

$$\sqrt[3]{A} \sim a + \frac{A-a^3}{2[\sqrt[3]{A}]^2 + [\sqrt[3]{A}]}$$

Il est aisé de voir que cet algorithme n'est pas toujours valide. Par exemple, appliquons-le pour le calcul de $\sqrt[3]{3}$. Nous avons

$$x_0 = 1 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = x_n + \frac{3-x_n^3}{3}.$$

---

*79 - RASHED R., **Entre arithmétique et algèbre. Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes.** Les Belles Lettres, Paris 1984 p. 118.*

On obtient pour les premiers termes :

$$x_1 = 1 + \frac{2}{3} = 1{,}66 \ldots \quad \text{et} \quad x_2 = 1 + \frac{2}{3} - \frac{44}{81} = \frac{91}{81} \sim 1{,}123$$

Mais la suite (x_n) ne converge pas. On a en effet pour tout entier naturel

$$1 \leq x_{2n} < 1{,}19 < 1{,}628 < x_{2n+1} \leq \frac{5}{3}$$

et $\lim(x_{2n+1}) \sim 1{,}6222943$; $\lim(x_{2n+1}) \sim 1{,}187671$.
Autrement dit la généralisation proposée par AS-SAMAW'AL est abusive. Mais en fait, on peut appliquer l'algorithme pour le calcul de $\sqrt[3]{3000}$ car la suite

$$x_0 = 14 \qquad \text{et} \qquad x_{n+1} = x_n + \frac{3000 - x_n^3}{406}$$

converge ! On a :

$$x_{10} \sim 14{,}222 \qquad x_{11} \sim 14{,}223 \quad \text{et} \quad \sqrt[3]{3} \sim 1{,}422\ 496\ .$$

Ceci peut expliquer "l'erreur" d'AS-SAMAW'AL.

4 - CONCLUSION

Même en nous limitant aux algorithmes liés aux opérateurs élémentaires et aux civilisations anciennes notre étude est loin d'être exhaustive. Ce n'était pas notre ambition et nous en avons souligné les limites. Nous nous sommes bornés à expliciter quelques exemples qui nous ont paru significatifs tant du point de vue historique que du point de vue adopté aujourd'hui en informatique.

Dans toutes les civilisations et à toutes les époques les algorithmes jouent un rôle fondamental. Pour mieux les connaître, il est nécessaire de les mettre en situation et de ne pas se limiter à leur énoncé fut-il historique ! Il reste encore beaucoup de travaux à mener, historiques, épistémologique sans oublier le côté didactique. A chacun d'utiliser au mieux ses compétences.

De nombreux textes restent encore à élucider. Nous n'en citerons ici que quelques-uns qui ont déjà donné lieu à une abondante littérature :

- Comment les Babyloniens sont-ils parvenus à l'excellente approximation sexagésimale 1; 24,51,10 de $\sqrt{2}$ donnée dans la tablette YBC 7289 ?

- Existe-t-il un algorithme pour les "expressions égyptiennes de 2 à partir de n ?

- Comment ARCHIMEDE a-t-il trouvé ou connu l'encadrement de $\sqrt{3}$

$$\frac{265}{153} < \sqrt{3} < \frac{1351}{780}$$

dans son <u>Traité de la mesure du cercle</u> ?

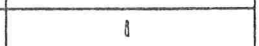
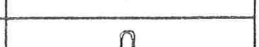
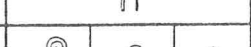
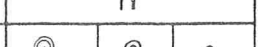
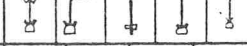
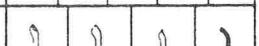
Le cadre mathématique de nombreux algorithmes reste à déterminer. Par exemple, l'étude théorique de l'algorithe d'AS-SAMAW'AL mérite d'être conduite. Dans cette quête les ressources informatiques ne sont pas dénuées d'intérêt et il eut été intéressant de mener à bonne fin des programmes permettant de mieux juger de la pertinence des algorithmes proposés.
Ce n'était qu'un "à propos".

ANNEXE 1

NUMERATION ALPHABETIQUE GRECQUE

UNITÉS				DIZAINES				CENTAINES			
A	α	alpha	1	I	ι	iota	10	P	ρ	rô	100
B	β	bêta	2	K	κ	kappa	20	Σ	σ	sigma	200
Γ	γ	gamma	3	Λ	λ	lambda	30	T	τ	tau	300
Δ	δ	delta	4	M	μ	mu	40	Y	υ	upsilon	400
E	ε	epsilon	5	N	ν	nu	50	Φ	φ	phi	500
Ϝ	ϛ	digamma	6	Ξ	ξ	ksi	60	X	χ	khi	600
Z	ζ	dzêta	7	O	ο	omicron	70	Ψ	ψ	psi	700
H	η	êta	8	Π	π	pi	80	Ω	ω	oméga	800
Θ	θ	thêta	9	Ϙ	ϙ	koppa	90	Ϡ	ϡ	san	900

NUMERATION HIEROGLYPHIQUE

	LECTURE DE DROITE A GAUCHE	LECTURE DE GAUCHE A DROITE
1		
10		
100		
1 000		
10 000		
100 000		
1 000 000		

FRACTIONS

élémentaires

$\frac{3}{4}$: 

$\frac{2}{3}$:  ou  ou 

$\frac{1}{2}$:  ou 

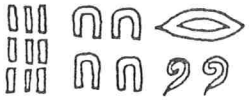
quantièmes


$\frac{1}{3}$


$\frac{1}{5}$


$\frac{1}{6}$


$\frac{1}{10}$


$\frac{1}{249}$

ANNEXE 2

Traduction des "divisions de Démosthème" dans le système alphabétique grec.

$365 : 12 = 30 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$

10 x 30 = 300 2 x 30 = 60 < 12 x 30= 360 > *il reste 5* $\frac{1}{3}$ x 12 = 4 < 12 x $(30+\frac{1}{3})$ = 364 > *il reste 1* $\frac{1}{12}$ x 12 = 1 < 12 x $(30 + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}$ = 365 >	τ ξ ε : β= λ γ ι β′ ι x λ = τ β x λ = ξ < ι β x λ = τ ξ > γ′ x ι β = δ < ι β x λ γ′ = τ ξ δ > *il reste* α ι β′ x ι β = α < ι β x λ γ′ β′ = τ ξ ε >
354 : 12 = 29 + $\frac{1}{2}$ 10 x 20 = 200 2 x 20 = 40 < 12 x 20 = 240 > 10 x 9 = 90 2 x 9 = 18 < 12 x 9 = 108 > < 12 x 29 = 348 > $\frac{1}{2}$ x 12 = 6 < 12 x $(29 + \frac{1}{2})$ = 354 >	τ ν δ : ι β = κ θ < ι x κ = σ β x κ = μ < ι β x κ = σ μ > ι x θ = ϟ β x θ = ι η < ι β x θ = ρ η > < ι β x κ θ = τ μ η > < x ι β = ζ < ι β x κ θ < = τ ν δ >

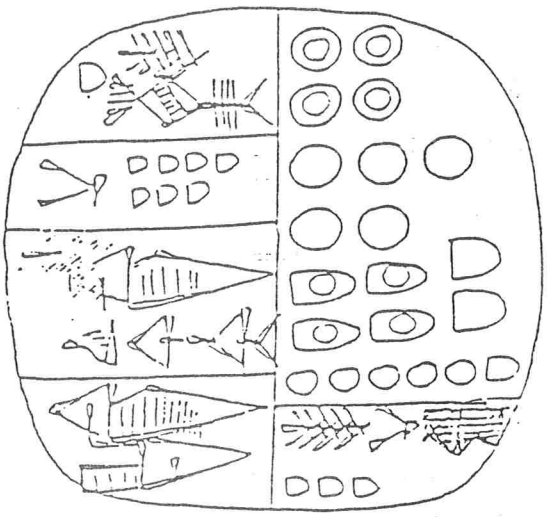
Remarque : Nous avons indiqué entre crochets les totaux dont DEMOSTHENE ne parle pas.

ANNEXE 3

Tablettes sumeriennes[30]

Tablette n° 50

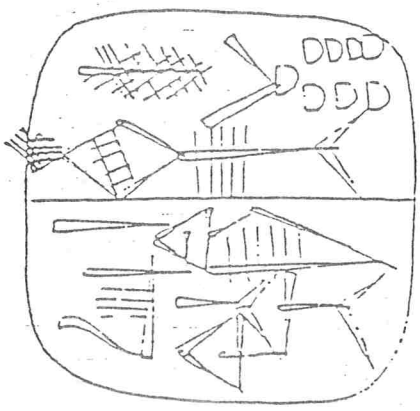


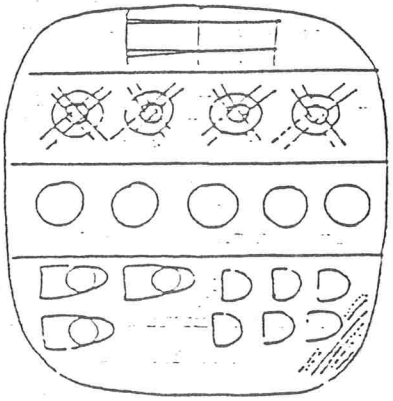


Tablette n° 671



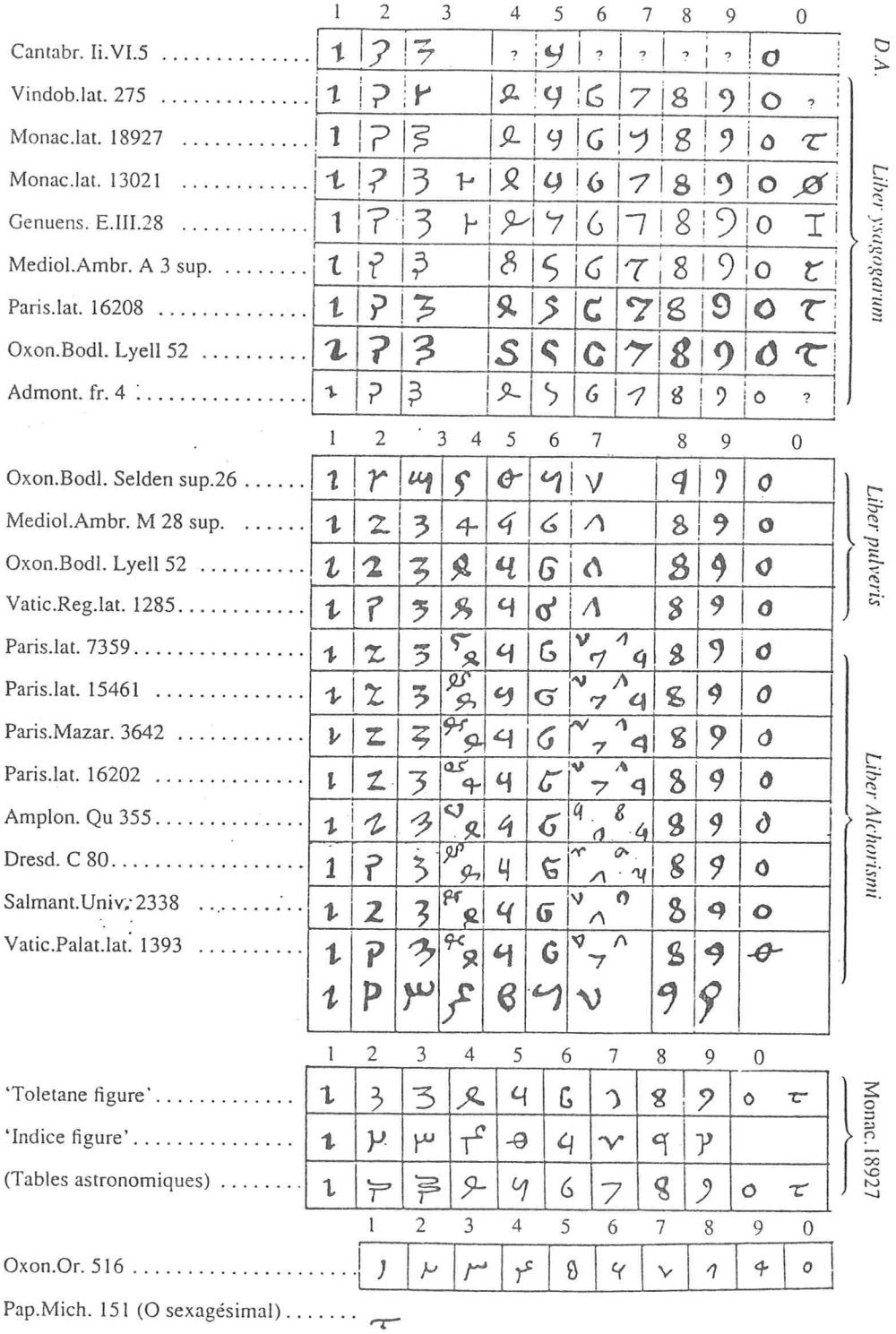






ANNEXE 4

Chiffres trouvés dans certains manuscrits[33]



ANNEXE 5

Recorde The ground of artes [46]

Arithmetik S. Some cal it Arsmetrike, and some Augrime. M. And what dooeth those names betoke? S. That if it please you, of you wold learne, M, Bothe names are corruptely wrytten, Arsmetrike for Arithmetike as the Grekes call it, and Augrym for Algorisme, as Arabians sound it, whiche bothe betoken the science of numbrig, For Arithmos in greke is called numbre, and of it cometh Arithmetike, the arte of numbryng, So that arithmetike is a science or art teachyng the maner and vse of numbryng, and maye bee wrought dyuersely, with penne or counters. But I wil fyrste shewe the woorkyng wythe the penne, and than thother in order, Scho. This I wyll remembre, But how many thinges are to bee learned, to attayn this arte fully? M, There are reckened cõmonly, viii, Numeration, Addicion, Subtraction, Multiplicacion, Diuisiõ, Progression, and Extraction of radicals: to these, some men adde

Ἀριθμητική

Ἀριθμός

S. Certains l'appellent Arsmetrike et d'autres Augrime.
M. Et que signifient ces deux termes ?
S. C'est, si cela vous plait, ce que de vous j'aimerais apprendre.
M. Les deux noms sont écrits incorrectement : Arsmetrike pour Arithmétique comme l'appellent les Grecs et Augrym pour Algorithme telle que les Arabes l'ont découverte et ces deux noms signifient la science du dénombrement car Arithmas désigne en grec le nombre et de là vient Arithmétique l'art du dénombrement...

ANNEXE 6

L'abaque médiéval[42]

I. — *Objet de l'Abacus* (*).

« L'art dont on va parler se nomme *Abacus;* ce nom est arabe et signifie *table,* parce que l'une et l'autre chose ont cela de commun qu'elles sont formées de planches. L'*Abacus* traite de la multiplication et de la division des nombres. En voici l'objet et la méthode. Son utilité est de savoir multiplier et diviser les nombres d'une manière ingénieuse et abrégée. Si l'on ignore comment se fait l'Abacus, on le saura après avoir entendu ce qui va suivre.

II. — *Description du* Tableau à colonnes. *Usage de neuf caractères. Noms et formes de ces caractères. Valeurs de position qu'ils prennent dans les colonnes.*

« On dispose plusieurs espaces, à côté l'un de l'autre, douze ou un plus plus grand nombre, qu'on appelle *arcs* ou colonnes.

« Dans la première colonne, on écrit l'*unité;* dans la deuxième, le nombre qui est décuple de l'unité, c'est-à-dire *dix;* et des autres nombres qui sont écrits dans les autres colonnes, chacun est décuple de celui qui lui est immédiatement inférieur.

« La première colonne, qui contient l'unité, s'appelle elle-même *singularis* (colonne des unités); la deuxième, *decenus* (colonne des dizaines); la troisième, *centenus* (colonne des centaines); la quatrième, *millenus* (colonne des mille), etc.; les suivantes prennent semblablement le nom des nombres qui y sont inscrits.

« Dans ces colonnes, préparées pour multiplier et diviser, on place divers caractères, au nombre de neuf, qui suffisent pour faire toute multiplication et division en nombres entiers. Et ces neuf caractères appartiennent proprement à la première colonne.

« Dans la première colonne on écrit l'unité, dans la deuxième deux, dans la troisième trois, dans la quatrième quatre, dans la cinquième cinq, dans la sixième six, dans la septième sept, dans la huitième huit, dans la neuvième neuf.

« Ces nombres ont la forme et les noms décrits ci-dessous :

Igin	Andras	Ormis	Arbas	Quimas	Calcus	Zenis	Themenias	Celentis
I								

« Après avoir fait connaître les figures et les noms de ces caractères, je dirai qu'on devra mettre I dans la colonne des unités pour exprimer une unité simple; pour deux unités; et en continuant de cette manière on exprimera les autres nombres jusqu'à dix, en posant les autres caractères dans la même colonne.

(*) J'ai marqué les différentes parties de ce Traité par des numéros et des titres qui n'existent pas dans le texte latin, où l'on ne trouve même ni ponctuation ni alinéas, suivant l'état ordinaire des Mss. du XII^e^ siècle. Ces numéros et ces titres faciliteront la lecture de l'ouvrage et l'intelligence des règles qui y sont décrites; ils tiendront lieu, jusqu'à un certain point, de commentaires.

ANNEXE 7

Problèmes 6 et 7 de la tablette VAT 6598[62]

PROBLEME 6.

Une porte. Hauteur : un demi (ninda) et 2 coudées. Largeur deux coudées	$H = 0;40$ $L = 0;10$
Quel est sa diagonale ? Toi carre 10, la largeur. Tu trouveras 1,40 le sol.	$L^2 = (0;10)^2 = 0;1,40$
Dénoue l'inverse de 40 - coudée - la hauteur	$\frac{1}{4} = \frac{1}{0;40} = 1,30$
Porte à 1,40 le sol, tu trouveras <2>30	$L^2 \times \frac{1}{H} = 0;1,40 \times 1,30 = 0;2,30$
Fractionne en deux 2,30. Tu trouveras 1,15	$\frac{1}{2} L^2 \times \frac{1}{H} = \frac{1}{2} (0;2,30) = 0;1,15$
Ajoute 1,15 à <40 la hauteur>. Tu trouveras 41,15. <La diagonale> est 41,15. C'est la façon d'opérer	$D = \frac{1}{2} L^2 \times \frac{1}{H} + H = 0;40 + 0;1,15$ $= 0;41,15$

PROBLEME 7.

Largeur 2 coudées. Hauteur 40 coudées. Qu'est sa diagonale ?	$H = 0;40$ $D = \sqrt{H^2+L^2}$? $L = 0;10$
Toi carre 10 le front, tu trouveras 1,40	$L^2 = (0;10)^2 = 0;1,40$
Porte 1,40 à 40-coudée-la hauteur, tu trouveras 1, 6, 40	$L^2 \times H = 0;1,40 \times 0;40$ $= 0;1,1,6,40$
Double, tu trouveras 2, 13, 20	$2 L^2 H = 2x0;1,6,40$ $= 0;2,13,20$
Ajoute à 40-coudée-la hauteur du trouveras 42,13,20, la diagonale. C'est la façon d'opérer	$D = H + 2 L^2 H$ $= 0;40 + 0;2,13,20$ $= 0;42,13,20$

Remarque. Conformément aux écritures babyloniennes, nous n'avons pas distingué, dans le texte, les divers ordres sexagésimaux. Par contre, dans le commentaire 0;42,13,20 désigne $(\frac{42}{60} + \frac{13}{60^2} + \frac{20}{60^3})$.

Les parties entre crochets sont des restitutions.

Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

UN STAGE D'HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES POUR LA FORMATION CONTINUE DES ENSEIGNANTS DU SECONDAIRE

Michèle GRÉGOIRE
Maryvonne HALLEZ
IREM de Paris VII

1. Présentation.

L'objectif principal du groupe M: A.T.H. (IREM, Paris-7) est de promouvoir l'étude de textes marquants de l'histoire des mathématiques par les professeurs et les élèves du secondaire. Entre autres activités, nous organisons depuis 1984 dans le cadre de la formation continue des stages d'initiation à certains aspects de l'histoire des mathématiques. Nous y présentons des activités consacrées à l'étude de textes, organisées sous forme de séance d'enseignement qui s'intègrent dans le programme, et nous incitons les stagiaires à les expérimenter dans leurs classes. C'est ainsi que s'amorce une initiation à l'histoire des mathématiques. Nous sommes convaincues que, par le biais de cette pratique pédagogique, les professeurs du secondaire, qui n'ont eu que très peu de contact avec l'histoire des mathématiques dans leur formation initiale et qui ont peu de disponibilités pour entreprendre une formation de type universitaire, peuvent s'initier à cette disicpline en même temps (ou presque) que leurs élèves, et mesurer l'intérêt d'une perspective historique dans l'enseignement secondaire des maths.

Le groupe M: A.T.H. (Mathématiques: Approche par les Textes Historiques) est composé de Martine Bühler, Michèle Grégoire, Maryvonne Hallez, Marie-Françoise Jozeau et Catherine Perrineau; il reçoit également la contribution et le soutien important de Jean-Luc Verley (Université de Paris-7).

Nous reprenons, dans cet article, les quatre composantes de l'atelier que nous avons animé durant l'université d'été de La Rochelle:
- le commentaire d'une fiche de travail proposée à des élèves de première: elle porte sur un problème de Diophante "Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit".
- le descriptif du déroulement d'un stage de formation continue.
- la présentation d'un atelier consacré à l'interprétation géométrique des opérations de l'arithmétique par Descartes.
- un exemple d'étude de texte: un extrait du *De quadratura curvarum* de Newton et la discussion sur son utilisation pédagogique.

2. Un exemple de fiche de travail.

Nous présentons d'abord un exemple de fiche de travail élaborée à partir d'un problème court et simple des *Arithmétiques* de Diophante: "Trouver deux nombres connaissant leur somme et leur produit" (Livre I. Problème XXVII, trad. P. Ver Eecke, 1926).

La lecture d'un texte ancien étant presque toujours un exercice ardu pour nos élèves, nous la faisons précéder d'une grille d'exercices préparatoires permettant de résoudre les difficultés proprement mathématiques du texte, de rendre plus familier le

vocabulaire et les notations de l'époque et, autant que possible, de mettre en évidence l'intérêt de celui-ci. La lecture et l'étude du texte sont souvent suivies de questions permettant de vérifier ce que l'élève a compris ou appris du texte ou d'élargir le point de vue développé.

La fiche ci-dessous s'adresse à des élèves de 1ère S, mais elle peut être adaptée pour des élèves de 1ère ou terminale A, pour des élèves de seconde, et même de 3ème, comme un exemple de résolution de système d'équations. Elle est accompagnée d'une notice historique et d'un commentaire pédagogique qui ne sont pas reproduits ici; ils sont disponibles dans la brochure M: A.T.H. n° 2 de l'IREM Paris-7 (à paraître à l'automne 1989); on trouvera dans M: A.T.H. (brochure n° 61 de l'IREM Paris-7) d'autres exemples de fiches. Les notices historiques présentent la vie et l'oeuvre du mathématicien étudié, l'état des connaissances de l'époque, ce qui permet au professeur de mieux situer le texte. Le commentaire pédagogique décrit l'expérimentation, ses prérequis et les objectifs qu'elle cherche à atteindre. Ces fiches sont conçues comme des séances de T.P. d'application, à préparer éventuellement en partie à la maison, ou de T.P. d'introduction à l'étude d'une notion; elles peuvent aussi constituer l'énoncé d'un problème.

TROUVER DEUX NOMBRES CONNAISSANT
LEUR SOMME ET LEUR PRODUIT

I . Soit S et D deux nombres réels donnés. Montrer qu'il existe un couple unique (u , v) de réels tels que $u + v = S$ et $u - v = D$.

II . Lire le texte ci-après.

Notes :

(α) "excédent des nombres" : différence entre le plus grand et le plus petit des 2 nombres.

(β) "arithme" : du grec αριθμοσ , arithmos, nombre. C'est le terme choisi par le traducteur de Diophante pour désigner l'inconnue du problème, égale à la demi-différence des deux nombres cherchés.

1) Traduire la suite des calculs et les résultats obtenus dans ce texte, en utilisant les notations symboliques modernes ; on désignera par u et v les deux nombres cherchés (avec $u \geq v$) et par x l'arithme.

2) En suivant les calculs de Diophante , vous avez posé $u = 10 + x$ et $v = 10 - x$. Expliquez à l'aide des lignes 10 à 17 comment justifier ce changement d'inconnue.

3) Résoudre, par la méthode exposée par Diophante, les problèmes suivants

P_1 : Trouver deux nombres tels que la somme forme 13 unités et le produit 40 unités.

P_2 : Trouver deux nombres tels que la somme forme 12 unités et le produit 40 unités.

III . Diophante ne s'intéresse qu'aux nombres rationnels positifs. Nous nous proposons de montrer, dans cette partie, que la méthode exposée par Diophante peut s'appliquer en général à la résolution dans R^2 d'un système (S).

(S) $u + v = S$, $uv = P$ S et P désignant des réels quelconques vérifiant seulement une condition (C) qu'on précisera.

$u \geq v$

1) Résoudre le système (S) à l'aide de la méthode utilisée plus haut, et énoncer la condition (C) nécessaire pour que le système (S) ait une solution. Comment cette conditon est-elle exprimée par Diophante, qui ne considère que des rationnels positifs?
Comparez avec les résultats trouvés par la méthode du cours.

2) (Pour les élèves ayant étudié les expressions de la somme et du produit des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$)
Comment ramener l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ (a, b , c réels donnés ; $a \neq 0$) à celle d'un système du type (S) ? Résoudre alors le système ; comparer avec les formules du cours.

DIOPHANTE D'ALEXANDRE
XXVII

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.
Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres.(...)
Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités.
Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes. Dès lors, puisque la somme des nombres est 20 unités, si nous la divisons en deux parties égales, chacune des parties sera la moitié de la somme, ou 10 unités. Donc, si nous ajoutons à l'une des parties, et si nous retranchons de l'autre partie, la moitié de l'excédent des nombres, c'est-à-dire 1 arithme, il s'établit de nouveau que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes.
En conséquence, posons que le plus grand nombre est 1 arithme augmenté des 10 unités qui sont la moitié de la somme des nombres ; donc le plus petit nombre sera 10 unités moins 1 arithme, et il s'établit que la somme des nombres est 20 unités, et que leur excédent est 2 arithmes.
Il faut aussi que le produit des nombres forme 96 unités. Or leur produit est 100 unités moins 1 carré d'arithme ; ce que nous égalons à 96 unités, et l'arithme devient 2 unités.
En conséquence, le plus grand nombre sera 12 unités, le plus petit sera 8 unités, et ces nombres satisfont à la proposition.

Les Arithmétiques - Livre I - Traduction P. Ver Eecke 1926

Commentaires sur l'activité proposée:

Cette activité n'est pas difficile dans une classe de 1ère S et s'intègre tout à fait dans le programme.
Ce texte est intéressant à plusieurs titres:
- Diophante y explicite un peu sa démarche heuristique en expliquant pourquoi et comment il définit ce que nous appelons deux inconnues auxilaires.
- les élèves sont généralement surpris qu'on puisse résoudre des équations sans désigner l'inconnue par une lettre, qu'on ait pu faire des calculs et écrire des identités remarquables sans signe d'opération. Ils comprennent alors mieux la fonction du symbolisme.
- avec la présentation de cette résolution des équations du second degré, les élèves mettent en perspective la technique de résolution qu'ils ont apprise en cours et qu'ils appliquent vite machinalement.

- on peut signaler que les Babyloniens, dès le 2° millénaire avant J.C., résolvaient déjà des équations du second degré, à l'aide de méthodes de ce genre. Diophante franchit ici une nouvelle étape en proposant un problème général,bien qu'il ne le résolve que dans un cas numérique particulier.

Ce texte, comme tous, suscite des questions de la part des élèves. Ils ont, par exemple, demandé comment Diophante pouvait connaître ce qui est pour nous la formule $(10 + x)(10 - x) = 100 - x^2$. On peut présenter les démonstrations géométriques des identités remarquables qu'on trouve dans les *Eléments* d'Euclide. Il est intéressant aussi de présenter les résolutions géométriques des équations du second degré euclidiennes ou arabes. Comme à l'occasion de l'étude de tout texte historique, les mathématiques n'apparaissent plus comme un discours figé et immuable.

3. Description du contenu des stages de formation.

Les stages se déroulent sur quatre journées, cinq dès l'année prochaine (les enseignants bénéficiant de cinq journées au maximum par an d'autorisation d'absence pour leur formation).
- deux journées consécutives en octobre pour initier rapidement les stagiaires à nos méthodes de travail et leur faire connaître la brochure M: A.T.H. n° 61 de l' IREM PARIS-7. Nous leur demandons d'y choisir au moins une activité à expérimenter avec leurs élèves et d'en prévoir un rapide compte-rendu pour une séance suivante.
-- une journée en décembre ou janvier,
-- une journée en mars ou avril.
Ces deux dernières journées permettent un suivi des expérimentations des stagiaires et de répondre à leurs demandes au fur et à mesure.

En séance pleinière, nous proposons généralement trois exposés sur l'année, souvent pris en charge par Jean-Luc Verley ou un conférencier invité. Voici quelques uns des sujets traités:
- L'histoire du zéro et des nombres négatifs.
- Présentation des *Eléments de géométrie* d'Euclide
- Les géométries non-euclidiennes.
- L'histoire de la roulette (un parcours à travers les débuts du calcul différentiel au XVII^{ème} siècle).
- L'histoire des logarithmes
- L'histoire des nombres complexes

Nous faisons une présentation commentée d'une chronologie générale des mathématiques et d'une bibliographie d'ouvrages d'initiation à l'histoire et à l'épistémologie, ains que des textes anciens accessibles en réédition ou que nous avons à notre disposition. Cette séance a lieu à la bibliothèque de l'IREM qui possède certaines rééditions ou à l'institut H. Poincaré où la bibliothèque nous a aimablement confié quelques ouvrages en consultation. C'est souvent la première occasion pour les stagiaires d'avoir en main des ouvrages anciens ou originaux.
Il nous est arrivé également de projeter un film vidéo, de présenter une exposition issue d'un PAE à caractère historique, etc. Nous organisons, de plus, une visite de la médiathèque spécialisée de la Cité des Sciences et des Techniques de la Villette et de son fond ancien.
Le nombre des stagiaires, recrutés sur les trois académies de Paris, Créteil et Versailles, varie entre 30 et 45; il nous faut souvent dédoubler le stage et refuser des candidatures. Le fonctionnement et les échanges sont optimaux avec un groupe d'une trentaine de personnes, groupe que nous divisons en général en trois sous-groupes pour les ateliers, ce qui n'est possible évidemment que grâce à un véritable travail d'équipe des animatrices.

L'essentiel du stage est le travail en atelier. Les stagiaires ont le choix entre trois ateliers, ils en suivent 5 au cours du stage. Chaque atelier est consacré à un thème. Il est introduit par un exposé sur le contexte historique et épistémologique du sujet traité.
Le contenu d'un atelier est décrit à titre d'exemple dans la partie 4.
Les principaux ateliers proposés et les niveaux concernés sont les suivants:
- la quadrature du cercle et le volume du cylindre d'après *La divine proportion* de Pacioli ($5^{ème}$)
- les théorèmes de Thalès et de Pythagore d'après les *Eléments* d'Euclide ($4^{ème}$, $3^{ème}$)
- les constructions géométriques élémentaires d'après Euclide et Legendre ($6^{ème}$, $5^{ème}$)
- le planétarium de Huygens (collège)
- les triplets pythagoriciens d'après Diophante ($3^{ème}$)
- *La mesure du cercle* d'Archimède ($3^{ème}$ et terminale)
- les nombres figurés dans l'école pythagoricienne (Nicomaque de Gerase, Theon de Smyrne) (collège ou Terminale A)
- résolution des équations du second degré par les méthodes grecques (Euclide) et arabes (Al Khwarizmi) ($2^{ème}$, $1^{ère}$)
- nombre d'or et pentagone d'après Euclide et Legendre (lycée)
- la résolution des équations du second et du $3^{ème}$ degré par Descartes (lycée)
- recherche d' extremum d'après Fermat et Huygens ($1^{ère}$)
- approximations de racines carrées d'après Euler, Théon de Smyrne, Héron d'Alexandrie, Bombelli ($1^{ère}$ et terminale)
- l'introduction des logarithmes d'après Ozanam (terminales)
- l'histoire des nombres complexes d'après Argand et Tartaglia (terminales)
- le problème des partis de Pacioli à Pascal et Fermat (terminales)
- le calcul du volume de la pyramide d'après les *Eléments de Géométrie* de Legendre ($1^{ère}$)
- la trisection de l'angle d'après Descartes (terminales)
etc...

Le dernier aspect des activités proposées consiste à proposer aux stagiaires des extraits de texte qui nous ont semblé intéressants et qui sont peut-être utilisables en classe, mais que nous n'avons pas encore passé dans notre "moulinette pédagogique". Nous décrivons ce type de travail dans la dernière partie (5).

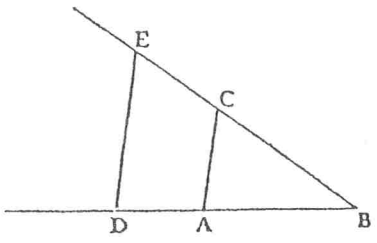
Les stagiaires lisent et étudient le texte en petit groupe; ils discutent des utilisations possibles et certains réussissent à élaborer, dans les semaines qui suivent, une séance de travail ou un problème. Un compte-rendu éventuellement écrit en est fait lors d'une séance suivante.
Nous rassemblons ainsi un certain nombre de nouvelles propositions qui fournissent matière à un petit recueil que nous envoyons en fin d'année à chaque stagiaire et qui enrichit notre recherche de nouvelles pistes.
Il arrive que les stagiaires travaillent à plusieurs sur ces projets ou qu'ils contactent l'une des animatrices pour que nous les aidions à élaborer leur projet; parfois même, nous allons les aider à réaliser l'expérience dans leur classe. Ce suivi est parfois un peu lourd pour nous, il implique un échange de documents, de courrier, de coups de téléphone important, mais il est l'aspect le plus dynamisant de l'entreprise. Cette collaboration incite, chaque année, quelques stagiaires à participer à notre séminaire de travail qui a lieu tous les mois.

Nous présentons dans les deux dernières parties le compte-rendu des deux groupes de travail animés l'un par Maryvonne Hallez et l'autre par Michèle Grégoire.

4. Un exemple d'atelier.

L'atelier proposé à un groupe porte sur l'utilisation d'extraits de *La Géométrie* de Descartes dans une classe de troisième. Ces extraits présentent une construction géométrique des résultats des quatre opérations et de l'extraction de la racine carrée.
L'atelier débute par une présentation de la *Géométrie*, une brève biographie de Descartes, un exposé de son travail mathématique ainsi qu'une petite bibliographie. On trouvera cette présentation dans la brochure à paraître M: A. T. H. n° 2. On peut envisager de ne donner ces indications qu'après l'étude des textes. Nous exposons ensuite les objectifs du livre 1 de *La Géométrie* dont sont extraits les textes donnés aux élèves.
La première fiche de travail concerne les quatre opérations; en voici une présentation:
Nous pouvons fort bien construire à l'aide de la règle et du compas un segment de longueur AB + CD à partir de deux segments donnés [AB] et [CD]; de même nous pouvons construire un segment de longueur CD - AB si CD > AB. Descartes ne fait que mentionner cette posssibilité.
AB x CD est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent AB et CD. Il ne semble pas que nous ayons de représentation géométrique du rapport AB/CD. Descartes propose une construction, à l'aide de cercles et de droites d'un segment de longueur AB x CD et d'un segment de longueur AB/CD en faisant entrer en jeu l'unité: le dessinateur choisit un segment unité "à sa discrétion".
Nous lisons alors les deux textes concernés.

La Multiplication.



Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E eſt le produit de cete Multiplication.

La Diuiſion. Oubien s'il faut diuiſer B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C eſt le produit de cete diuiſion.

Le prérequis est le théorème de Thalès.
Et nous discutons des différentes manières de présenter cet extrait aux élèves.
Les textes sont jugés suffisamment simples pour permettre d'emblée une lecture guidée. Certains participants optent pour cette utilisation. D'autres préfèrent donner la fiche avec des exercices préparatoires à la lecture du texte, demandant par exemple de construire un segment de longueur BC x BD à partir d'un segment [AB] unité et de segments [BC] et [BD] de différentes mesures. Il est même proposé d'utiliser ce texte comme activité préparatoire à l'étude du théorème de Thalès en commençant évidemment par des exemples numériques.

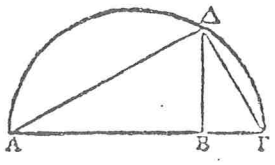
La deuxième fiche est intitulée "moyenne proportionnelle et racine carrée". Le texte de Descartes s'appuie, sans le dire explicitement, sur la construction de la moyenne proportionnelle de la proposition XIII du livre VI des *Eléments* d'Euclide. Nous proposons donc, comme aux élèves, une lecture du texte d'Euclide avant celle du texte de Descartes.

PROPOSITION XIII.

Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle.

Soient AB, BΓ les deux droites données ; il faut trouver une moyenne proportionnelle entre AB, BΓ.

Plaçons les droites dans la même direction, et sur la droite AΓ décrivons le demi-cercle AΔΓ ; du point B menons BΔ perpendiculaire à AΓ, et joignons AΔ, ΔΓ (II. 1).

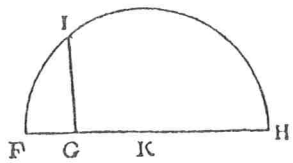


Puisque l'angle AΔΓ est dans un demi-cercle, cet angle est droit (31. 3). Et puisque dans le triangle rectangle AΔΓ on a mené de l'angle droit la droite AB perpendiculaire à la base, la droite AB est moyenne proportionnelle entre les segments AB, BΓ de la base (cor. 8. 6).

Donc les deux droites AB, BΓ étant données, on a trouvé une moyenne proportionnelle BΔ. Ce qu'il fallait faire.

La proposition d'exercices préparatoires et de questions sur le texte remporte l'adhésion des participants. Nous lisons, ensuite, le texte de Descartes et discutons des exercices d'application.

l'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouſte en ligne droite F G, qui eſt l'vnité, & diuiſant F H en deux parties eſgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis eſleuant du point G vne ligne droite iuſques à I, à angles droits ſur F H, c'eſt G I la racine

Vous trouverez en annexe les deux premières pages complètes de *La Géométrie* qui sont toujours relues par les élèves pour conclure ce travail.

Le premier objectif pédagogique de ce travail est de réinvestir les acquis: le théorème de Thalès, les relations métriques dans le triangle rectangle, les théorèmes sur le triangle inscrit dans un demi-cercle; il s'y ajoute le plaisir des élèves qui se découvrent capables d'utiliser ces théorèmes, vue la simplicité du travail demandé. Un deuxième objectif est de montrer une continuité dans les problèmes que se posent les mathématiciens avec les exemples d'Euclide et de Descartes. Un troisième est de donner un exemple de la méthode proposée par Descartes pour tenter de classifier des problèmes mathématiques en partant des plus simples, ici de l'addition à la racine carrée. Nous faisons remarquer la grande originalité de Descartes qui est de résoudre les problèmes géométriques par une utilisation systématique de l'algèbre: un problème géométrique se réduit à la résolution d'une équation. Son apport principal est "la numérisation de la géométrie": par le choix d'une longueur unité qu'il nomme ligne, il peut éviter les exigences de l'homogénéité; le produit de deux longueurs n'est plus nécessairement représenté par l'aire d'un rectangle mais peut être représenté par une longueur. Nous ne résistons pas à l'envie de rapporter le cri du coeur d'un élève de seconde à la lecture du texte de Descartes après celui d'Euclide: "écrire AB = 1, utiliser l'unité, c'est génial !". Cette anecdote permet de signaler que le travail proposé en troisième peut se donner avec profit au début d'une année de seconde.

5. Etude d'un texte.

L' autre groupe a étudié un court extrait du traité *De Quadratura curvarum* de Newton, écrit en 1693 et publié en appendice de son traité d'*Optique* en 1704. Le texte original est en latin, il a été traduit en anglais par J. Stewart en 1745 et nous en proposons une traduction française en essayant de la rendre proche de la langue de Buffon, le traducteur de Newton au XVIII° siècle. Une langue étrangère n'est pas nécessairement un obstacle pour les élèves qui se prennent au jeu et ont plaisir à montrer leurs compétences en anglais, voire en latin.

II.

Recta (Fig. 2.) P B *circa Polum datum* P *revolvens secet aliam Poſitione datam Rectam* A B : *quæritur Proportio Fluxionum Rectarum illarum* A B *&* P B.

Progrediatur Recta PB de loco ſuo PB in locum novum Pb. In Pb capiatur PC ipſi PB æqualis, & ad AB ducatur PD ſic, ut Angulus bPD æqualis ſit Angulo bBC; &, ob ſimilitudinem Triangulorum bBC, bPD, erit Augmentum Bb ad Augmentum Cb, ut Pb ad bD. Redeat jam Pb in locum ſuum priorem PB, ut Augmenta illa evaneſcant, & evaneſcentium Ratio ultima, id eſt, Ratio ultima Pb ad Db, ea erit quæ eſt PB ad DB, exiſtente Angulo PDB recto; & propterea in hac Ratione eſt Fluxio ipſius AB ad Fluxionem ipſius PB.

I I.

Recta (Fig. 3.) P B *circa datum Polum* P *revolvens secet alias duas Positione datas Rectas* A B *&* A E, *in* B *&* E: *quaritur Proportio Fluxionum Rectarum illarum* A B *&* A E.

Progrediatur Recta revolvens PB de loco suo PB in locum novum Pb Rectas AB, AE in Punctis b & e secantem, & Rectæ AE, Parallela BC ducatur ipsi Pb occurrens in C, & erit Bb ad BC, ut Ab ad Ae; & BC ad Ee, ut PB ad PE; &, conjunctis Rationibus, Bb ad Ee, ut $Ab \times PB$ ad $Ae \times PE$. Redeat jam Linea Pb in locum suum priorem PB, & Augmentum evanescens Bb erit ad Augmentum evanescens Ee, ut $AB \times PB$ ad $AE \times PE$, ideóque in hac Ratione est Fluxio Rectæ AB ad Fluxionem Rectæ AE.

Hinc si Recta revolvens PB Lineas quasvis curvas Positione datas secet in Punctis B, & E, & Rectæ jam mobiles AB, AE, Curvas illas tangant in sectionum Punctis B, & E; erit Fluxio Curvæ, quam Recta AB tangit, ad Fluxionem Curvæ, quam Recta AE tangit, ut $AB \times PB$ ad $AE \times PE$. Id quod etiam eveniet, si Recta PB Curvam aliquam Positione datam perpetuò tangat in Puncto mobili P.

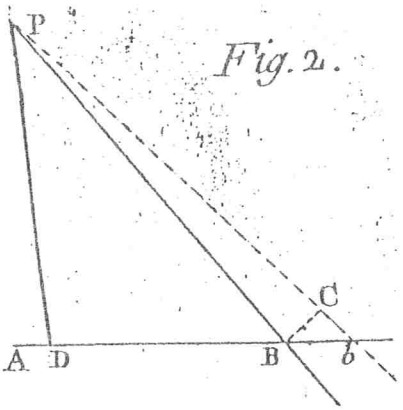


Fig. 2.

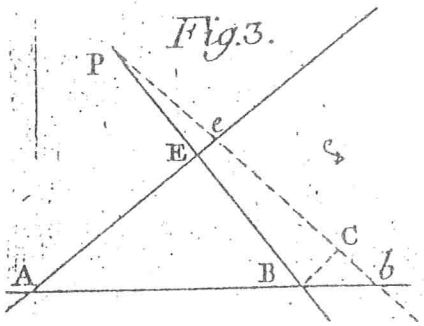


Fig. 3.

I. *Let the right line* PB [Fig. 2], *revolving about the given pole* P, *cut another right line* AB *given in position: it is required to find the proportion of the fluxions of these right lines* AB *and* PB.

Let the line PB move forward from its place PB into the new place Pb. In Pb take PC equal to PB, and draw PD to AB in such manner that the angle bPD may be equal to the angle bBC; and because the triangles bBC, bPD are similar, the augment Bb will be to the augment Cb as Pb to Db. Now let Pb return into its former place PB, that these augments may evanish, then the ultimate ratio of these evanescent augments, that is the ultimate ratio of Pb to Db, shall be the same with that of PB to DB, PDB being then a right angle, and therefore the fluxion of AB is to the fluxion of PB in that same ratio.

II. *Let the right line* PB, *revolving about the given pole* P, *cut other two right lines given in position*, viz. AB *and* AE *in* B *and* E: *the proportion of the fluxions of these right lines* AB *and* AE *is sought.*

Let the revolving right line PB [Fig. 3] move forward from its place PB into the new place Pb, so as to cut the lines AB, AE in the points b and e: and draw BC parallel to AE meeting Pb in C, and it will be $Bb : BC :: Ab : Ae$, and $BC : Ee :: PB : PE$, and by joining the ratios, $Bb : Ee :: Ab \times PB : Ae \times PE$.[1] Now let Pb return into its former place PB, and the evanescent augment Bb will be to the evanescent augment Ee as $AB \times PB$ to $AE \times PE$; and therefore the fluxion of the right line AB is to the fluxion of the right line AE in the same ratio.

I .*Une ligne droite tournant autour d'un point donné P coupe une autre ligne droite fixe AB (fig. 2) : on demande de trouver la raison des fluxions de ces lignes droites AB et PB.*

Soit la ligne PB ,avançant de la position PB à la nouvelle position Pb. Sur Pb prenons PC égal à PB et traçons PD vers AB de façon que l'angle bPD soit égal à l'angle bBC; et puisque les triangles bBC et bPD sont semblables, l'augmentation Bb sera à l'augmentation Cb comme Pb est à Db. Que maintenant Pb revienne à sa position précédente PB, de sorte que ces augmentations s'évanouissent, alors la dernière raison de ces augmentations évanouissantes, c'est à dire la dernière raison de Pb à Db sera la même que celle de PB à DB, l'angle PDB étant alors droit, et par conséquent la fluxion de AB est à la fluxion de PB dans cette même raison.

II. *Une ligne droite PB tournant autour d'un point donné P coupe deux autres lignes droites AB et AE fixes,respectivement en B et E (fig.3) on cherche la raison des fluxions des lignes droites AB et AE.*

Soit la ligne droite PB avançant de sa position PB à la nouvelle position Pb, de façon à couper les lignes AB et AE aux points b et e: traçons BC parallèle à AE rencontrant Pb en C et on aura Bb:BC::Ab:Ae ,et BC:Ee::PB:PE et en combinant les raisons, Bb:Ee::AbxPB:AexPE .Que maintenant Pb revienne à sa position antérieure PB ,et l'augmentation évanouissante Bb sera à l'augmentation évanouissante Ee comme ABxPB est à AExPE ;et par conséquent la fluxion de la ligne droite AB est à la fluxion de la ligne droite AE dans la même raison.

Bref commentaire du texte.

Les éléments mathématiques (droites, points) considérés par Newton dépendent toujours implicitement du temps, considéré comme un référentiel absolu qui s'écoule uniformément. Une courbe apparait engendrée par le mouvement d'un point, une surface engendrée par le mouvement d'une ligne. La fluxion, est définie en référence à la notion intuitive de vitesse. Il emploie la notion de "raison de fluxions" (rapport de petites variations de quantités dépendant du temps) et le principe de "la première et dernière raison" qu'on peut comprendre comme une des origines de notre notion de limite. Pour lever l'indétermination , Newton emploie une technique que François de Gandt appelle la "méthode des témoins finis ", où le rapport de deux côtés d'un triangle qui tendent vers 0 est remplacé par le rapport de deux côtés d'un triangle semblable dont les dimensions, elles, ne tendent pas vers 0.

On peut rapprocher le problème posé par Newton de divers problèmes se posant en physique: le problème classique de cinématique du "chien qui suit son maître", un problème d'optique déjà posé par Alhazen, etc...

L' étude de cet exemple met à jour certaines difficultés de notre démarche. Le groupe de participants a beaucoup discuté sur le danger de "gauchir" un texte pour l'adapter au niveau de compréhension des élèves, sur les inconvénients que peut présenter le fait de ne lire qu'un extrait très court (c'est une nécessité avec les élèves dont l'attention se relâche vite; mais il est vrai que l'enseignant a souvent besoin d'étudier le contexte). Le groupe a aussi exprimé la crainte d'embrouiller les connaisssances fragiles des élèves sur les notions de limite et de dérivée.
Nous avons proposé alors de regarder le texte de problème ci-dessous, qui donne un exemple d'utilisation pédagogique possible.

On considère un axe Δ un point P extérieur à Δ , A le projeté orthogonal de P sur Δ . On pose $a = d(P, \Delta)$. Une droite mobile passant par P coupe Δ en B . On pose $x = \overline{AB}$, $f(x) = PB$. On se propose de déterminer $f'(x)$.

Question 1 : calculer $f(x)$ en fonction de x et a . Etudier la parité de f . Comment s'explique-t-elle géométriquement ? A quel intervalle peut-on réduire l'étude de f ? Vérifier qu'alors f peut être considérée comme une fonction de la variable AB .
On se propose d'utiliser la définition du nombre dérivé en un point (à rappeler...) et d'emprunter la méthode géométrique exposée par Newton dans le texte joint.

Question 2 : soit b une position voisine du point mobile B sur Δ . On pose $\overline{Bb} = h$. Ecrire $\overline{Ab}$ en fonction de x et h . La figure 2 est-elle la seule possible (jointe au texte anglais) ? h garde t-il un signe constant ?
Ecrire pour chaque cas de figure étudié $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ en fonction des longueurs de la figure.

Question 3 : soit D le point Δ tel que $(\overrightarrow{Pb},\overrightarrow{PD}) = (\overrightarrow{BC},\overrightarrow{Bb}) = \alpha$.
Montrer que les triangles bBC et bPD sont semblables. En déduire que $\frac{Cb}{Bb} = \frac{Db}{Pb}$.
Comparer $\widehat{PBC}$ et $\widehat{PDt}$ (on note [Dt) la demi droite [DA)) .

Question 4 : lire le paragraphe I du texte joint en s'aidant éventuellement des remarques suivantes :

* le mot ligne droite désigne parfois la droite parfois la longueur.

* "a est à b comme c à d" se lit $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (ou $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$).

* Newton cherche ici à déterminer le rapport des "fluxions" de PB et AB qui peut apparaître pour nous comme la dérivée de la longueur PB par rapport à la longueur AB (donc la dérivée de la fonction f définie dans ce problème).

* La "dernière raison des augmentations évanouissantes" est à peu près notre notion de limite du taux de variation $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ quand h tend vers 0 .

On se propose d'étudier de près la dernière phrase du paragraphe I . D'après Newton, quand b tend vers B , quelle est la "position limite" du point D et la limite du rapport $\frac{Cb}{Bb}$? Le résultat vous paraît-il convaincant ? démontré ?

Question 5 : sur quelle courbe se déplace le point C quand b tend vers B ? Quelle est la "position limite" de la droite (BC) ? Vers quelle valeur tend l'angle $\widehat{PDt}$? Quelle est donc la "position limite" du point D ? Et que vaut f'(x) ?

Question 6 : Lire le paragraphe II .
Bb:Bc: :Ab:Ae doit se lire $\frac{Bb}{Bc}=\frac{Ab}{Ae}$.
Si on considère la fonction g : AB → AE , quelle est sa fonction dérivée g' ? (on ne cherchera pas à expliciter l'expression de g(AB)).

Ce problème a été posé dans une classe de 1ère S, après l'étude complète du chapitre sur les dérivées, en travaux dirigés, préparés un peu à la maison. Les élèves de 1ère n'ont pas à leur disposition de formule de dérivation de la fonction ($x \rightarrow \sqrt{x^2 + a^2}$). Ce texte suggère une détermination purement géométrique d'une dérivée. Il présente, à ce titre l'intérêt de montrer aux élèves une continuité entre le domaine de l'analyse assez nouveau pour eux et celui de la géométrie. Cette activité a suscité l'intérêt des élèves et beaucoup de questions, amenant la classe à réfléchir sur la définition du nombre dérivé. Une espèce de lumière s'est faite dans leur esprit quand ils ont pu se représenter de façon plus imagée la limite d'un rapport se présentant sous la forme 0/0.
J'ai constaté une meilleure maîtrise de ces notions dans la classe qui avait étudié ce texte que dans une autre classe de 1ère S avec qui je travaillais en parallèle cette année-là et qui n'a pas fait cette activité. J'ai pu comparer leurs résultats en particulier sur un autre exercice demandant également de calculer une dérivée à partir de la définition, pour déterminer l'aire sous une parabole.
Nous avons fait le choix de la variable x = AB, ce qui s'éloigne de l'esprit de Newton pour qui la variable est le temps, mais il serait plus compliqué de faire étudier aux élèves le rapport de deux dérivées. On a proposé de prendre pour variable l'angle APB, ce qui amènerait à des dérivées de fonctions trigonométriques.

Conclusion.

Les bilans de nos stages sont le plus souvent positifs et encourageants: Les stagiaires mettent en pratique nos propositions; ils sont souvent étonnés du plaisir qu'ils y prennent et qu'ils partagent avec leurs élèves. C'est pour eux une incitation à recommencer d'autres expérimentations et à approfondir leurs connaissances. Nous nous proposons actuellement d'effectuer une évaluation de ces activités tant au plan pédagogique qu'au plan de la formation.

Annexe.

L A

G E O M E T R I E.

LIVRE PREMIER.

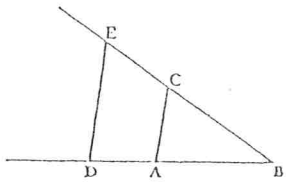
Des problesmes qu'on peut construire sans y employer que des cercles & des lignes droites.

TOus les Problesmes de Geometrie se peuuent facilement reduire a tels termes, qu'il n'est besoin par aprés que de connoistre la longeur de quelques lignes droites, pour les construire.

Et comme toute l'Arithmetique n'est composée, que de quatre ou cinq operations, qui sont l'Addition, la Soustraction, la Multiplication, la Diuision, & l'Extraction des racines, qu'on peut prendre pour vne espece de Diuision : Ainsi n'at'on autre chose a faire en Geometrie touchant les lignes qu'on cherche, pour les preparer a estre connuës, que leur en adiouster d'autres, ou en oster, Oubien en ayant vne, que ie nommeray l'vnité pour la rapporter d'autant mieux aux nombres, & qui peut ordinairement estre prise a discretion, puis en ayant encore deux autres, en trouuer vne quatriesme, qui soit à l'vne de ces deux, comme l'autre est a l'vnité, ce qui est le mesme que la Multiplication ; oubien en trouuer vne quatriesme, qui soit a l'vne de ces deux, comme l'vnité est a l'autre, ce qui est le mesme que la Diuision ; ou enfin trouuer vne, ou deux, ou plusieurs moyennes proportionnelles entre l'vnité, & quelque autre ligne ; ce qui est le mesme que tirer la racine quarrée, ou cubique, &c. Et ie ne craindray pas d'introduire ces termes d'Arithmetique en la Geometrie, affin de me rendre plus intelligibile.

Comme le calcul d'Arithmetique se rapporte aux operations de Geometrie.

La Multiplication.

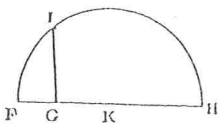


Soit par exemple A B l'vnité, & qu'il faille multiplier B D par B C, ie n'ay qu'a ioindre les poins A & C, puis tirer D E parallele a C A, & B E est le produit de cete Multiplication.

La Diuision.

Oubien s'il faut diuiser B E par B D, ayant ioint les poins E & D, ie tire A C parallele a D E, & B C est le produit de cete diuision.

L'Extraction de la racine quarrée.



Ou s'il faut tirer la racine quarrée de G H, ie luy adiouste en ligne droite F G, qui est l'vnité, & diuisant F H en deux parties esgales au point K, du centre K ie tire le cercle F I H, puis esleuant du point G vne ligne droite iusques à I, à angles droits sur F H, c'est G I la racine cherchée. Ie ne dis rien icy de la racine cubique, ny des autres, à cause que i'en parleray plus commodement cy aprés.

Comme on peut

Mais souuent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces ligne

Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

EXEMPLES DE CALCULS ALGEBRIQUES EN CHINE ANTIQUE ET MÉDIÉVALE

Olivier KELLER
Lycée P. Brossolette - Villeurbanne

Sommaire

I. Mode d'emploi

II. Equations linéaires

III. Equations quadratiques - le triangle rectangle

IV. Extraction de racines cubiques

V. L'algèbre du 13ème siècle

VI. Commentaires

VII. Principaux documents

VIII. Bibliographie

I - MODE D'EMPLOI

On trouvera ici une série de problèmes typiques de l'algèbre chinoise antique et médiévale, dans une forme aussi proche que possible des textes originaux. Tout ce qui est entre guillements provient de la traduction, en langue européenne, du texte original chinois. Les "commentaires" donnent de brefs éclaircissements sur les problèmes et les "principaux documents" indiquent leurs sources.

II - EQUATIONS LINÉAIRES

1. Deux problèmes analogues résolus par des méthodes différentes

Problème 18, Ch. 7 du JZSS

"On a 9 pièces d'or et 11 pièces d'argent ; on les pèse et le poids est le même ; on échange un morceau de chaque et l'or est plus léger de 13 liang.
Question : quel est le poids de chaque ?
Réponse : l'or pèse 2 chin, 3 liang, 18 chu. L'argent pèse 1 chin, 13 liang, 6 chu.

La règle est : en supposant que l'or pèse 3 chin et l'argent 2 5/11 chin, déficit de 49 dans la rangée de droite ; 2 chin l'or et 1 7/11 chin l'argent, excès de 15 dans la rangée de gauche ... Avec l'excès et le déficit multiplier en croix les nombres supposés, ajouter et prendre le résultat comme dividende. Ajouter excès et déficit, c'est le diviseur. Faire la division, tu obtiens le poids de l'or..."

Problème 2, Ch. 8 du JZSS

"7 gerbes d'une bonne récolte sont diminuées de 1 tou ; on ajoute deux gerbes d'une mauvaise récolte, résultat 10 tou. On a 8 gerbes de mauvaise récolte auxquelles on ajoute 1 tou et deux gerbes de bonne récolte, résultat 10 tou.
Question : quel est le produit de chaque gerbe ?
Réponse : le produit d'une gerbe de bonne récolte est 1 18/52 tou. Le produit d'une gerbe de mauvaise récolte est 41/52 tou.

La règle est : Utiliser la méthode Fang Cheng (répartitions en carré). Ce qu'on parle d'enlever, ajoutez le ; ce qu'on parle d'ajouter, enlevez-le. Le 1 tou enlevé s'ajoute au 10 tou ; le 1 tou ajouté s'enlève aux 10 tou".

2. La méthode Fang Cheng (répartitions en carré)

Problème 1, Ch. 8 du JZSS

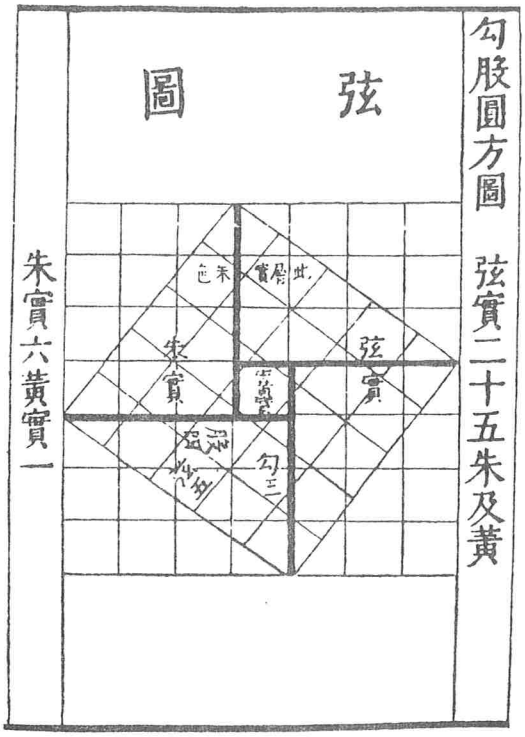
"3 gerbes de bonne récolte, 2 de moyenne récolte et une de mauvaise récolte donnent 39 tou. Deux de bonne, 3 de moyenne, 1 de mauvaise donnent 34 tou. Une de bonne, deux de moyenne et 3 de mauvaise donnent 26 tou.
Question : quel est le produit de chaque type de gerbe ?
Réponse : une bonne gerbe donne 9 1/4 tou ; une moyenne donne 4 1/4 tou ; une mauvaise donne 2 3/4 tou.

La règle est : mettre sur le côté droit 3 gerbes de bonne récolte, deux de moyenne et une mauvaise et leur produit, les 39 tou. Mettre de même, comme sur le côté droit, les récoltes moyennes et mauvaises. Multiplier la colonne du milieu par le nombre de gerbes de bonne récolte de la colonne de droite et prendre le reste l'un de l'autre. De même multiplier le prochain nombre et prendre le reste l'un de l'autre, cependant dans la colonne du milieu la récolte moyenne ne doit pas disparaître.

III - EQUATIONS QUADRATIQUES - LE TRIANGLE RECTANGLE

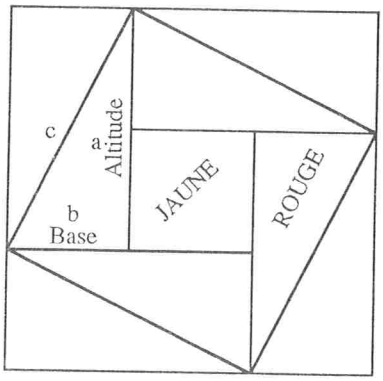
1. Le théorème de Pythagore

La démonstration du Zhoubi suanjing :



"Coupons un rectangle de largeur 3 et de longueur 4 ; la diagonale sera de 5. Après avoir tracé un carré sur sa diagonale, il faut l'entourer de demi-rectangles comme celui qui a été laissé à l'extérieur, de façon à former un carré. Les demi rectangles extérieurs de largeur 3, de longueur 4 et de diagonale 5 font ensemble deux rectangle. Le reste a pour aire 25".

Formulation, démonstration et résultats équivalents par un commentateur du IIIème siècle.
"Base et altitude : multiplier chacune par soi-même ; ajouter pour obtenir résultat hypothénuse. Extraire racine carrée, ainsi hypothénuse".
La démontration est la suivante :



"Du diagramme, multiplier base par altitude pour obtenir deux résultats rouges. Doubler pour obtenir quatre résultats rouges. Mettre la différence altitude base au carré pour obtenir un résultat jaune. Ajouter, même résultat que hypothénuse (au carré)".

Des résultats équivalents donnés par le même auteur se traduiraient par :

$$\frac{b^2}{c-a} = c+a \quad \text{et} \quad \frac{b^2}{c+a} = c-a$$

Toutes ces "identités" très familières aux auteurs chinois étaient évidemment obtenues par des découpages et des recompositions de rectangles.

2. Problèmes du second degré, sans doute résolus avec des figures (manipulations de rectangles)

Problème 6, Ch. 9 du JZSS

"On a un étang (à base carrée), de côté 1 chang. Un roseau pousse exactement en son milieu ; il dépasse de l'eau de 1 ch'ih. Si l'on tire le roseau jusqu'au bord, le bord est atteint exactement.
Question : quelle est la profondeur de l'eau et la longueur du roseau ?
Réponse : profondeur de l'eau, 1 chang 2 ch'ih. Longueur du roseau, 1 chang 3 ch'ih.

La règle est : multiplier par soi-même la moitié du côté de l'étang ; soustraire la partie hors de l'eau multipliée par elle-même. Diviser le reste par le double de la partie émergée. Tu obtiens alors la profondeur ...".

Problème 12, Ch. 9 du JZSS

"On a une porte, de hauteur et de largeur inconnues ; (les deux) sont plus courtes qu'une tige de bambou de longueur inconnue. Si on la met horizontalement, il manque 4 ch'ih ; si on la met verticalement, il manque 2 ch'ih ; si on la met le long de la diagonale, cela va juste.
Question : quelles sont les dimensions de la hauteur, de la largeur et de la diagonale ?
Réponse : largeur, 6 ch'ih. Hauteur, 8 ch'ih. Diagonale, 1 chang.

La règle est : multiplier ce qui manque horizontalement et verticalement ; doubler et extraire la racine carrée. Si on ajoute ce qui manque verticalement, on obtient la largeur de la porte ; si on ajoute ce qui manque horizontalement, on obtient la hauteur de la porte ; si on ajoute les deux manques, on obtient la diagonale".

3. Problèmes du second degré dont les résolutions sont particulièrement remarquables

Problème 11, Ch. 9 du JZSS

"On a une porte, dont la hauteur dépasse la largeur de 6 ch'ih 8 ts'un ; la distance des deux coins est de 1 chang.
Question : quelles sont les dimensions de la hauteur et de la largeur de la porte ?
Réponse : largeur, 2 ch'ih 8 ts'un. Hauteur, 9 ch'ih 6 ts'un.

La règle est : multiplier 1 chang par lui-même, c'est le 'shih'. Multiplier la moitié de la différence par elle-même. Doubler et soustraire le 'shih' ; diviser la différence par deux et extraire la racine carrée. Soustraire du résultat la moitié de la différence pour obtenir la largeur de la porte. Si on ajoute la moitié de la différence, on obtient la hauteur de la porte".

Problème 14, Ch. 9 du JZSS

"Deux personnes sont au même endroit. La vitesse de A est 7, celle de B est 3. B se dirige vers l'est ; A fait d'abord 10 pas vers le sud, puis tourne vers le nord-est jusqu'à ce qu'il rencontre B.
Question : combien a parcouru chaque personne ?
Réponse : B a parcouru 10 pas et demi vers l'est. A a parcouru obliquement 14 pas et demi.

La règle est : multiplier 7 par lui-même et 3 par lui-même ; additionner et diviser par deux. C'est le coefficient de la trajectoire oblique de A. Soustraire ce coefficient de 7 multiplié par lui-même ; le reste est le coefficient du trajet vers le sud. Multiplier 3 par 7, c'est le coefficient du trajet de B vers l'est. Poser les 10 pas du trajet vers le sud ; multiplier par le coefficient du trajet oblique. Poser à nouveau les 10 pas ; multiplier par le coefficient du trajet

vers l'est. Chacun de ces produits est un dividende ; les diviser par le coefficient du trajet vers le sud. Chaque fois on obtient la longueur du chemin".

4. Problème du second degré faisant formellement, et pour la première fois, référence à une méthode générale issue de l'algorithme d'extraction de racines carrées.

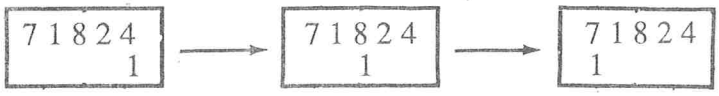
Problème 20 Ch. 9 du JZSS

"On a une ville (à fondations carrées) ; au milieu de chaque côté il y a une porte ouverte. A 20 pas vers le nord, il y a un arbre. Si l'on fait 14 pas vers le sud, puis 1775 pas vers l'ouest, on aperçoit alors l'arbre.
Question : quel est le côté de la ville ?
Réponse : 250 pas

La règle est : multiplier le nombre de pas vers le nord et le nombre de pas vers l'ouest ; doubler, c'est le dividende. Ajouter le nombre de pas vers le nord et vers le sud, c'est le diviseur fixé. Extraire la racine carrée ; c'est le côté de la ville".

5. Extraction de racines carrées (JZSS, Ch. 4) - traduction et commentaire de J-C. MARTZLOFF (Hist. des Maths. chinoises) :

Règle d'extraction de la racine carrée (kai fang shu) :
"Poser l'aire du carré comme dividende (shi). Emprunter une baguette unité (jie yi suan) et "faire marcher" (bu) celle-ci en sautant un rang à chaque fois".



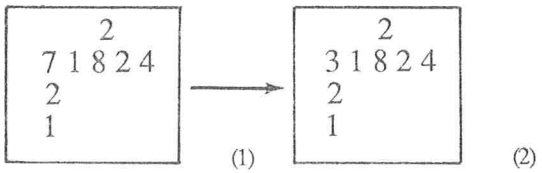
(cela équivaut à séparer le nombre donné en tranches de deux chiffres).

"Discuter de ce que l'on obtient".

i.e. : déterminer le premier chiffre de la racine. Le texte ne donne pas d'autre précision.

"Multiplier ce premier (chiffre) par la baguette empruntée pour en faire le diviseur (fa) et s'en servir pour effectuer la réduction (chu)"

On peut montrer que la "réduction" consiste ici à calculer 71 824 - 2.20000 (on "réduit" le "dividende"). Comme le texte du JZSS n'indique pas la disposition effective des calculs, plusieurs reconstitutions restent possibles. Nous utiliserons ici celle qui consiste à placer la racine au-dessus du "dividende", le "diviseur" au-dessous du dividende et la "baguette unité" au-dessous du diviseur. C'est en effet ce type de disposition qu'utilisent à quelques variantes près tous les arithméticiens post-Han :



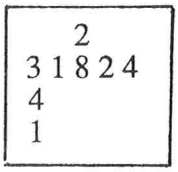
quotient	(shang)
dividende	(shi)
diviseur	(fa)
baguette unité	(jie suan)

"La réduction achevée, doubler le diviseur, ce qui fait le diviseur fixé (ding fa)".

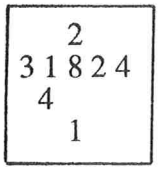
Le "diviseur fixé" vaut 2x20 000 = 40 000.

"Puis "briser-réduire" le diviseur vers le bas" et "faire marcher la baguette comme au début".

On fait reculer le diviseur d'un rang et la baguette unité de deux rangs :



(3)



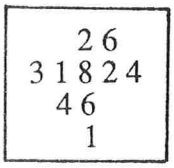
(4)

quotient
dividende
diviseur
baguette unité

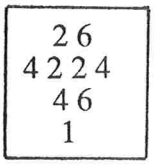
"Multiplier la baguette unité par le chiffre de la racine résultant de la nouvelle discussion et ajouter ce que l'on obtient au diviseur fixe".

Le deuxième chiffre de la racine vaut 6. On multiplie la baguette qui vaut maintenant 100 par 6 et on ajoute le résultat à 4000 ; 4000 + 600 + 4600.

"réduire" au moyen de cela" :

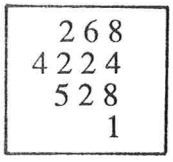


(5)



(6)

"Avec ce que l'on obtient, briser le "diviseur fixe totalisé" (zong ding fa). Puis "briser-réduire" comme avant :



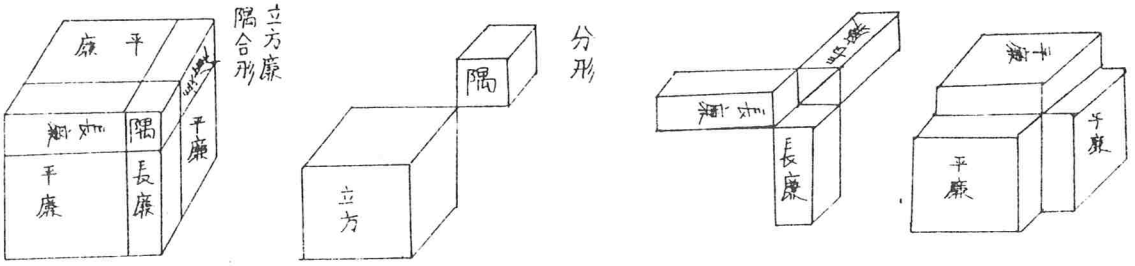
(7)

Il va de soi que le texte de cette règle n'est pas vraiment transparent. Mais peut-il l'être ? Faute de connaître la signification exacte de toutes les expressions techniques d'époque Han, il est difficile de lever certaines obscurités. Mais le lecteur qui désirerait une traduction argumentée jusque dans ses moindres détails et approchant l'original le moins mal possible pourra toujours se reporter à l'article très complet de Wang Ling et de J. Needham qui fait autorité en la matière.
(Fin de l'Extrait de Martzloff : Hist. des maths. chinoises).

IV - EXTRACTION DE RACINES CUBIQUES (JZSS, Ch. 4)

"Poser le volume comme dividende. Prendre une baguette et l'avancer en sautant deux places. Discuter ce que l'on obtient.
Multiplier ce premier (chiffre) en répétant par la baguette ; c'est le diviseur et diviser. Après la division le tripler, ce qui donne le diviseur fixé. Pour la prochaine réduction reculer.
En dessous multiplier le chiffre obtenu par trois et le poser sur la ligne du milieu. Poser à nouveau la baguette sur la ligne du dessous. Les faire reculer, en sautant une place sur la ligne du milieu et deux places sur celle de dessous.
Poser à nouveau le chiffre estimé. Avec lui multiplier le milieu, multiplier le bas en répétant. Ajouter tout cela, c'est le diviseur fixé.
Diviser avec le diviseur fixé. Après la réduction doubler en dessous, ajouter le milieu et ajouter au diviseur fixé.

Pour la prochaine division, reculer. Continuer comme avant ..."



- Visualisation du développement de $(a+b)^3$ -
Extrait de Martzloff : Recherches sur l'oeuvre math. de Mei Wending

V - L'ALGEBRE DU 13ème SIECLE

1. Mise en équation expliquée, résolution non expliquée. Li Zhi (1192-1279)

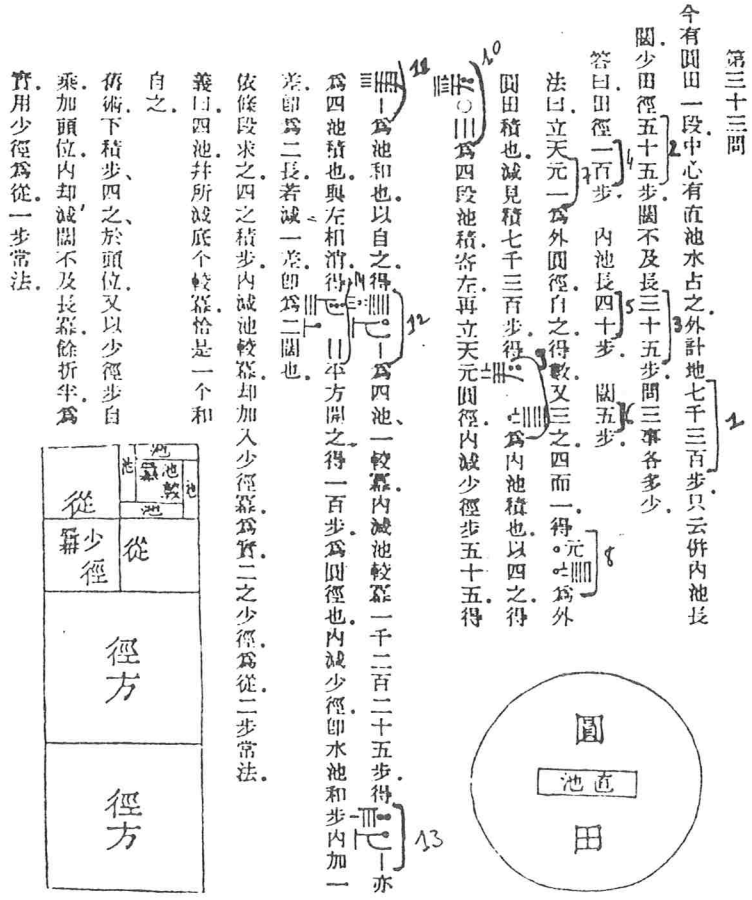
Problème 33 des "Mathématiques anciennes par la méthode des sections".
(suivre avec le texte chinois ci-après)

"Au milieu d'un champ circulaire, une mare rectangulaire. L'aire extérieure à la mare est de 7300 (1). On sait que la somme de la longueur et la largeur de la mare est inférieure de 55 (2) au diamètre du champ, et que la différence entre la longueur et la largeur est de 35 (3). Trouver chacune des trois quantités.
Réponse : le diamètre du champ est de 100 (4), la longueur de la mare est de 40 (5) et la largeur 5 (6).

Méthode : mettre 1 dans la rangée tian yuan (= inconnue céleste, (7)) pour le diamètre du cercle, le carrer, le multiplier par trois et le diviser par quatre pour obtenir (8), qui est l'aire du cercle.
Soustraire 7300 pour obtenir (9), le multiplier par quatre pour obtenir (10) qui est l'aire de quatre mares. Le mettre à gauche.
Prendre à nouveau la représentation tian yuan pour le diamètre et lui enlever 55 pour obtenir (11), qui est la somme de la longueur et de la largeur. Carrer ceci pour obtenir (12), qui est l'aire de quatre mares plus le carré de la différence entre la longueur et la largeur. De ceci enlever le carré de la différence entre la longueur et la largeur qui est 1225 pour obtenir (13), qui est l'aire de quatre mares. Le soustraire de ce qui est à gauche pour obtenir (14).
Quand la racine de l'équation quadratique est extraite, on trouve 100 qui est le diamètre du cercle. Soustraire de ceci la différence entre le diamètre et la somme de la longueur et de la largeur pour obtenir la somme de la longueur et de la largeur ; quand on lui ajoute la différence entre la longueur et la largeur, deux longueurs sont obtenues, et quand on lui soustrait, deux largeurs sont obtenues.

Méthode par sections : multiplier l'aire donnée par quatre, moins le carré de la différence entre la longueur et la largeur et ajouter le carré de la différence du diamètre et de la somme de la longueur et de la largeur, ce qui donne le 'shi'. Multiplier par deux la différence du diamètre et de la somme de la longueur et de la largeur, ce qui donne le 'cong', et poser 2 comme 'chang fa'.
Interprétation : quand l'aire de quatre mares est ajoutée au carré de la différence de la longueur et de la largeur, cela donne exactement le carré de la somme de la longueur et de la largeur".

Ancienne méthode : (même chose que la méthode par sections, sauf que le shi, le cong et le chang fa sont moitiés des précédents).



Texte original du problème 33 (page 7)

2. Mise en équation non expliquée, résolution expliquée : Qin Jiushao (1202-1261) donne la méthode dite de Horner.

Qin Jiushao est le premier, parmi les auteurs dont on possède encore les textes, à résoudre des équations de degré supérieur à trois.
Il résoud par exemple l'équation :

$$-x^4 + 763200\,x^2 - 40642560000 = 0$$

Il donne comme solution 840 (il y en a une autre, 240, non donnée). Il serait sans intérêt de reproduire le texte de la solution, qui est exactement (à la disposition près), la méthode dite de Horner. Les coefficients sont disposés en colonnes ; il appelle 'première transformation', 'deuxième transformation', etc, les restes successifs de la division par (x - 800), ce qui donne comme nouvelle équation :

$$-x^4 - 3200\,x^3 - 3076800\,x^2 - 826880000\,x + 38205440000 = 0$$

Le reste de la division par (x - 40) est nul, la résolution est achevée.
Le même auteur résoud aussi une équation du dixième degré :

$$x^{10} + 15\,x^8 + 72\,x^6 - 864\,x^4 - 11644\,x^2 - 34992 = 0$$

3 - Le premier problème du "Miroir de Jade des quatre inconnues" de Zhu Shijie (1303). Extrait du livre de John Hoe.

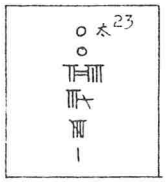
a. Texte chinois du premier problème

一[1]气[2]混[3]元[4]

今有[5]黄方[6]乘[7]直积[8]得[9]二十四[10]步[11]
只云[12]股[13]弦和[14]九步
问句几何[15]

答曰[16] 三步

草曰[17] 立[18]天元一[19]为句
如积求之[20]
得一百六十二个[21]黄方乘直积式



以[24]一百六十二乘原积[25]相消
得开方式[26]



四乘[27]方开之
得句三步

b. Traduction en langage semi-symbolique

La force matérielle[2] surgit de l'inconnue[3] primordiale[4]

Si[5] DIAM[6] fois[7] PROD-VERT[8] égale[9] vingt-quatre[10] pas[11],
et que[12] ALT[13]-HYP-SOMME[14] égale neuf pas,
trouver[15] BASE.

Réponse[16]: Trois pas.

Suggestion[17]: Soit[18] BASE l'INCONNUE[19].
Résoudre par "accumulations égales"[20].
Obtenir EXPR[22] pour cent soixante-deux DIAM fois PROD-VERT:

0	C[23]
0	
729	
-81	
-9	
1	

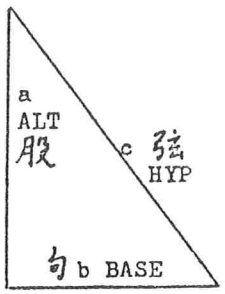
Soustraire[24] cent soixante-deux fois PROD-INIT[25].
Obtenir l'équation[26]:

-3888	C
0	
729	
-81	
-9	
1	

Résoudre l'équation à cinq degrés[27].
Obtenir BASE trois pas.

c. Traduction en langage symbolique moderne

Problème à une inconnue



Soit d(ab) = 24,
et a + c = 9.
Trouver b.
Réponse : 3

Suggestion : Soit b l'inconnue x.
Appliquer la méthode des "accumulations égales"
Obtenir $162d(ab) = 729x^2 - 81x^3 - 9x^4 + x^5$.
Soustraire 162d(ab).
Obtenir $-3888 + 729x^2 - 81x^3 - 9x^4 + x^5 = 0$.
Résoudre l'équation de degré 5.
Obtenir b = 3 .

Note : d est le diamètre du cercle inscrit dans le triangle (d = a+b-c).

d. Commentaire mathématique sur le premier problème

Pour un élève en mathématiques de nos jours, la solution du premier problème, bien que fastidieuse dans la pratique, ne présente aucune difficulté de principe. Ayant défini préalablement les symboles a, b, c et d, comme on a déjà fait dans la traduction symbolique proposée (pages 36, 95), on obtient la solution par l'élimination successive des inconnues supplémentaires a, c et d des quatre équations suivantes :

$$d(ab) = 24 \qquad \text{(i)}$$
$$a + c = 9 \qquad \text{(ii)}$$
$$a^2 + b^2 = c^2 \qquad \text{(iii)}$$
$$d = a + b - c \qquad \text{(iv)}$$

En fait, les équations (iii) et (iv) ne sont pas données explicitement dans l'énoncé du problème, mais sont les équations représentant des propriétés du triangle rectangle que l'élève est censé connaître, à savoir, le théorème de Pythagore, et la formule pour le diamètre du cercle inscrit (voir pages 83 - 90). Une méthode de solution possible est la suivante :
Utiliser d'abord la valeur c = 9-a de l'équation (ii) afin d'éliminer l'inconnue c des deux équations (iii) et (iv), ce qui donne :

$$a^2 + b^2 = (9-a)^2 \qquad \text{(v)}$$

$$d = a + b - (9-a) \qquad \text{(vi)}$$

Simplifier l'équation (v) afin d'obtenir :

$$18a = 81 - b^2 \qquad \text{(vii)}$$

Utiliser la valeur $d = 2a + b - 9$ de l'équation (vi), de façon à éliminer l'inconnue d de l'équation (i), ce qui donne :

$$(2a + b - 9)(ab) = 24 \qquad \text{(viii)}$$

L'élimination de l'inconnue a des équations (vii) et (viii), donne l'équation qu'il faut résoudre, à savoir :

$$-3888 + 729b^2 - 81b^3 - 9b^4 + b^5 = 0 .$$

Dans ce commentaire mathématique du premier problème, nous avons expliqué quelques étapes qu'un lecteur mathématicien trouverait peut-être superflues. Mais nous l'avons fait à dessein, afin de rendre plus aisée la tâche du lecteur qui n'est pas accoutumé à parcourir les textes mathématiques, car il faut remarquer qu'un mathématicien a ,en général, l'habitude de lire ses textes la plume à la main, vérifiant au fur et à mesure qu'il lit les étapes nécessaires qui ont été omises. En conséquence, l'auteur d'articles sur les mathématiques saute souvent les étapes qu'il croît être assez évidentes pour que le lecteur puisse les effectuer lui-même. Malheureusement, le lecteur non mathématicien qui ne connaît pas cette caractéristique du style mathématique risque de croire, quand il ne suit pas immédiatement le raisonnement logique liant deux formules consécutives d'une explications mathématique, que la faute doit être attribuées à ses connaissances limitées en mathématiques plutôt qu'aux omissions de l'auteur et il abandonne en conséquence toute tentative ultérieure pour déchiffrer le texte. C'est pour cette raison que nous avons souvent exposé explicitement plus d'étapes qu'il n'en faut, dans l'espoir que le lecteur non mathématicien sera suffisamment encouragé pour vérifier lui-même les détails des étapes successives du calcul, car ce n'est qu'ainsi qu'il appréciera réellement la simplicité réelle de la méthode. En fait, tout professeur de mathématiques trouve nécessaire de souligner constamment à ses élèves que la compréhension véritable d'un texte mathématique exige la participation active du lecteur. Déjà en 1903, dans la préface du manuel de Zhu Shijié, on lit ce conseil important :

" 明算之君子	Ming suan zhi junzi,
据我言	jù`wo yan,
试为细草	shi wéi xi cao.
然后知诚	Ranhou zhi chéng,
而不妄也	ér bu wàng ye.

"L'homme sage qui veut comprendre les mathématiques, doit, à mon avis, essayer de bâtir des solutions détaillées.
Ce n'est qu'ainsi que ses connaissances seront complètes, et non partielles".

Examinons maintenant, en tenant compte de ce conseil, comment un élève de l'époque de Zhu Shijié aurait trouvé la solution du premier problème même sans aucune connaissance d'une symbolique moderne.

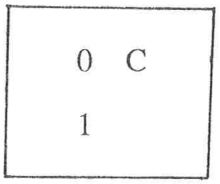
Des données du problème, l'élève sait que :

(i) DIAM fois PROD-VERT = 24
et que (ii) ALT-HYP-SOMME = 9,

et on lui demande de trouver BASE. Dans la notation moderne, ceci signifie qu'on lui donne :

(i) d x ab = 24
(ii) a + c = 9

et qu'on lui demande de trouver b . L'indication de Zhu Shijié pour la solution lui conseille de prendre pour inconnue BASE, c'est-à-dire b en notation moderne. En d'autres mots, il faut représenter BASE sur l'échiquier par la disposition suivante des bâtonnets :



(iii)

Afin de se servir de l'hypothèse (i), il lui faudra trouver tout d'abord les dispositions sur l'échiquier qui représentent :

(1) DIAM c'est-à-dire d
et (2) PROD-VERT c'est-à-dire ab.

Note : "c" indique la ligne du terme constant.

1. Dérivation de la représentation sur échiquier de l'expression DIAM

Ayant étudié "le classique arithmétique du gnomon et des trajectoires circulaires des cieux" et d'autres livres classiques chinois sur les mathématiques, l'élève sera au courant des diverses propriétés du triangle rectangle qui s'y trouvent. Il saura, en particulier, que :

DIAM = BASE moins ALT-HYP-DIFF

c'est-à-dire $d = b - (c - a)$ (iv)

et que :

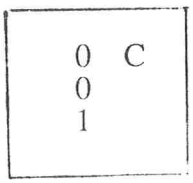
ALT-HYP-DIFF = BASE carrée divisée par ALT-HYP-SOMME

c'est-à-dire $(c - a) = \frac{b^2}{c+a}$

d'où il obtient en sustituant pour ALT-HYP-SOMME la valeur 9 donnée par l'hypothèse (ii) :

9 fois ALT-HYP-DIFF = BASE carrée
$9(c-a) = b^2$.

Il obtient donc la représentation sur l'échiquier de l'expression 9 fois ALT-HYP-DIFF, s'il élève au carré l'expression (iii) représentant BASE, ce qui donne :

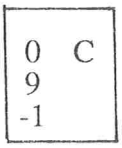


(v)

Par la substitution des dispositions de bâtonnets (iii) et (v) dans l'équation (iv), il obtiendra ensuite la représentation sur échiquier de l'expression 9 fois DIAM en effectuant les opérations :



ce qui donne pour la disposition de bâtonnets pour la représentation de 9 fois DIAM :



(vi)

2. Dérivation de la représentation sur échiquier de l'expression PROD-VERT

Sachant que :

PROD-VERT = ALT fois BASE (vii)

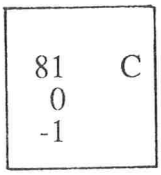
et que BASE se présente sur l'échiquier par la disposition (iii) des bâtonnets, il ne reste à l'élève que de trouver la représentation sur échiquier de l'expression ALT. Ceci s'avère assez simple, puisqu'il saura de ses études précédentes que :

ALT-HYP-SOMME moins ALT-HYP-DIFF = 2 fois ALT
ou (c + a) - (c - a) = 2a.

S'il multiplie maintenant cette expression par 9, il peut ensuite remplacer 9 fois ALT-HYP-SOMME par 81, d'après l'hypôthèse (ii), et remplacer 9 fois ALT-HYP-DIFF par l'expression (v). Il obtient de cette façon la disposition des bâtonnets sur l'échiquier pour la représentation de 18 fois ALT par l'opération :

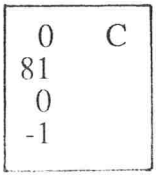


ce qui donne :



(viii)

Ensuite, il obtient la représentation sur échiquier de l'expression 18 fois PROD-VERT par l'application de la formule (vii), c'est-à-dire par la multiplication de la disposition (viii) pour 18 fois ALT par la disposition (iii) pour BASE , ce qui donne :



(ix)

Ayant obtenu ainsi la représentation en bâtonnets (vi) pour 9 fois DIAM et la représentation (ix) pour 18 fois PROD-VERT, la multiplication de ces deux représentations donnera la disposition de bâtonnets pour l'expression 9 DIAM fois 18 PROD-VERT, ce qui permettra à l'élève de tenir compte de l'hypothèse (i). Cette multiplication s'effectue par l'opération :

0	C		0	C
9		fois	81	
-1			0	
			-1	

c'est-à-dire :

0	C					
0						
729	+	0				
-81	+	0	+	0		
	+	0	+	-9		
			+	1		

L'élève obtient ainsi pour la représentation sur échiquier de l'expression 162 fois PROD-VERT, la disposition suivante :

0	C
0	
729	
-81	
-9	
1	

(x)

C'est la même représentation que donne Zhu Shijié dans ses indications pour la solution. Mais en multipliant l'hypothèse (i) par 162, on obtient :

162 fois DIAM fois PROD-VERT = 162 x 24
= 3888 . (xi)

L'application de la méthode des "accumulations égale" ou ruji exige que l'élève élimine maintenant 162 fois DIAM fois PROD-VERT des deux expressions (x) et (xi), ce qui donne l'équation finale à résoudre, à savoir :

-3888	C
0	
729	
-81	
-9	
1	

Comme il importe surtout à Zhu Shijié d'enseigner la méthode d'établir cette équation à partir des données, et non pas d'expliquer la méthode de sa résolution, il ne donne aucune indication sur cette résolution, mais se borne à donner la racine 3 de la solution.

De l'analyse donnée ci-dessus, on voit clairement qu'un élève chinois de l'époque de Zhu Shijié pouvait résoudre un problème de cette sorte par un raisonnement logique, même sans l'appui d'une symbolique algébrique moderne, et qu'il pouvait le faire, non seulement en raison de la simplicité de la notation et des procédés de calcul sur l'échiquier, mais aussi parce que la nature même de la langue chinoise classique lui permettait de s'exprimer avec une concision presque algébrique même sans symbolique moderne. On soutient souvent qu'à part les Grecs, tous les mathématiciens de l'époque pré-moderne, y compris les Chinois, ignoraient le raisonnement logique, et que la formatrion mathématique de cette période ne consistait en autre chose que la transmission des règles mécaniques traditionnelles, qu'on apprenait par coeur. Mais il est évident que la solution obtenue sur l'échiquier que l'on vient d'expliquer ne pouvait être obtenue en aucune façon par une application aveugle de règles mécaniques. La capacité de suivre un chemin logique est essentielle. Il n'y a aucun doute que le premier souci de Zhu Shijié en écrivant son manuel fut d'enseigner comment dériver les équations à partir de certaines données. Mais ceci signifie ni plus ni moins que le but de son texte est d'apprendre à l'élève comment mettre en langage mathématique les hypothèses exprimées en langage de tous les jours, afin d'obtenir une équation que l'on résoudra ensuite par une méthode classique déjà apprise.

Fin du texte de J. HOE.

VI - COMMENTAIRES

II-1. *Problème 18* : unités :

chin	liang	chu
1	16	384
	1	24

L'équation est $\begin{cases} 9x = 11y \\ 8x+y+13 = 10y+x \end{cases}$. Elle est résolue par la méthode "excès et déficit" ou de double fausse position : si x était égal à 3 chin, $8x + y + \frac{13}{16} = 27\frac{47}{176}$ et $10y + x = 27\frac{47}{176}$ d'où un déficit de $\frac{49}{176}$. Si x = 2 chin (donc $y = 1\frac{7}{11}$), excès de $\frac{15}{176}$. On en déduit $x = \frac{3x15 + 2 \times 49}{15 + 49} = 2\frac{15}{64}$ chin.

C'est une méthode d'interpolation linéaire, utilisée pour résoudre des équations plus compliquées linéaires ou non linéaires, comme les problèmes 11, 12, 19 du L7 du JZSS. Mais les chinois, dès cette époque (début de notre ère), savaient parfaitement ramener leurs équations à une forme type et par suite, les résoudre par une méthode générale, comme le prouve la suite.

II-1. *Problème 2* : Equation : $\begin{cases} 7x-1 + 2y = 10 \\ 2x + 8y + 1 = 10 \end{cases}$. La "règle" indique de ramener le système à la <u>forme standard</u> : $\begin{cases} 7x + 2y = 11 \\ 2x + 8y = 9 \end{cases}$, et d'utiliser la méthode type, dite Fang-Cheng.

II-2. *Problème 1* : Donne l'énoncé de la fameuse règle "Fang Cheng" pour un système 3x3 :

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 \\ 2x + 3y + z = 34 \\ x + 2y + 3z = 26 \end{cases}$$

Disposition :

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

puis :

1	0	3
2	5	2
3	1	1
26	24	39

puis :

0	0	3
4	5	2
8	1	1
39	24	39

et :

0	0	0
0	5	2
(36)	1	1
(99)	24	39

diviseur

dividende de la mauvaise récolte, D_1

Dividende de la récolte moyenne : $\frac{36 \times 24 - 99}{5} = D_2$

Dividence de la bonne récolte : $\frac{36 \times 39 - D_2 x 2 - D_1 x 1}{3} = D_3$

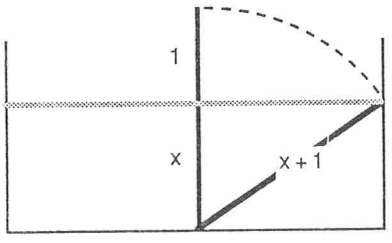
Les résultats sont $\frac{D_1}{36}$, $\frac{D_2}{36}$, $\frac{D_3}{36}$.

II - 3. *Problème 8* : Le texte est clair ; là encore, on est ramené à la forme standard.

III - 1. *Pythagore* : Il faut noter qu'on ne s'est jamais préoccupé, en chine antique et médiévale, de la réciproque de ce résultat.

III- 2. *Problème 6* :

Unités : Chang	ch'ih	ts'un
1	10	100
	1	10

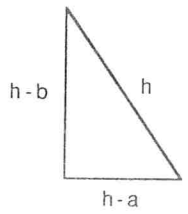


Equation : $(x+1)^2 - x^2 = 25$

soit : $(2x+1)1 = 25$

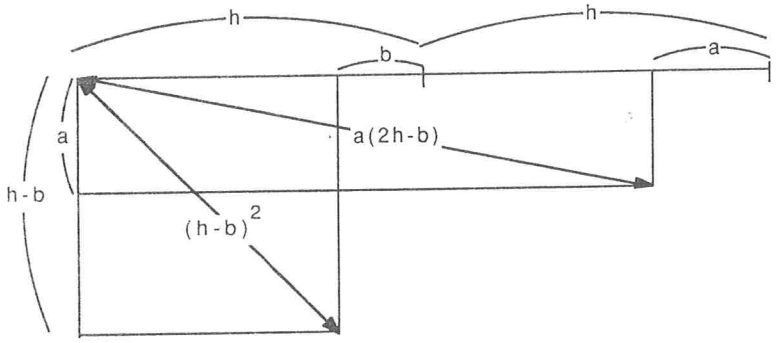
soit : $x = \frac{25-1^2}{2x1}$

III - 2. *Problème 12* : Le problème est du type :



(a=4, b=2)

et l'auteur donne directement la solution $h = a + b + \sqrt{2ab}$, qui n'est pas évidente du tout. Je propose les manipulations suivantes : $h^2 = (h-a)^2 + (h-b)^2 \rightarrow (h-b)^2 = h^2 - (h-a)^2$.
Les chinois connaissent la "différence de deux carrés" (voir II-1).
D'où : $(h-b)^2 = a(2h-a)$, puis :



En enlevant la partie commune aux rectangles d'aires $a(2h-a)$ et $(h-b)^2$, les aires restantes sont égales ; on les dispose comme sur la 2ème figure ; les aires restantes sont $(h-b)$ $(h-b-a)$ et $a(h+b-a)$.

Les rectangles $(h-b)$ $(h-b-a)$ et $a(h+b-a)$ ont même aire ; en enlevant le rectangle commun aux deux, il reste $(h-b-a)^2 = 2ab$, d'où le résultat.

III-3. *Problème 11* : L'équation est $(x+68)^2 + x^2 = 100^2$; l'auteur propose *un changement de variable*, en posant en fait $z = x+34$

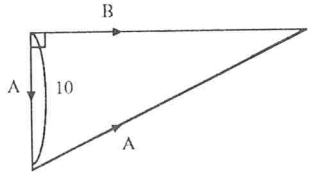
↖ *"moitié de la différence".*

d'où $(z+34)^2 + (z-34)^2 = 100^2$; par des manipulations de rectangles, on sait ramener cela à :

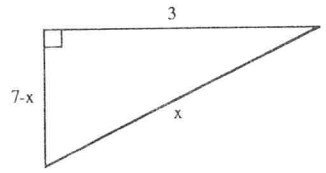
$$2z^2 + 2 \times 34^2 = 100^2$$

d'où la solution.

III-3. *Problème 14* :

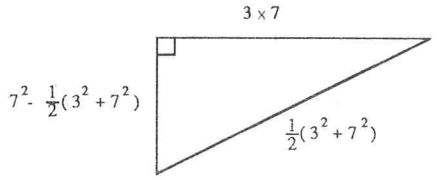


Van der Waerden suggère le raisonnement suivant :
Si le temps de parcours de chacun était de 1, on aurait les distances :



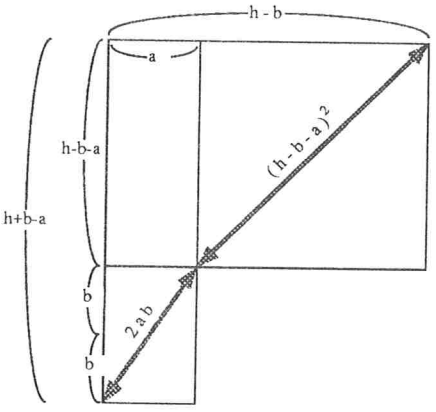
D'où $7(2x-7) = 9$ et $x = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{7}+7\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3^2+7^2}{7}\right)$

En multipliant par 7, on obtient le triangle :



ce sont les "coefficients de trajets" du texte. Comme le triangle réel est semblable au précédent, la solution est donnée par $\frac{10}{7^2 - \frac{1}{2}(3^2+7^2)} = \frac{y}{3 \times 7} = \frac{z}{\frac{1}{2}(3^2+7^2)}$.

III-4. *Problème 20* :



Pour obtenir l'équation : les aires hachurées sont les mêmes, donc :

$20\ (1775 - \frac{x}{2}) = \frac{x}{2}\ (14+x)$ (méthode explicitement donnée par Yang Hui au 13ème siècle).

D'où $x^2 + 34x = 20 \times 1775 \times 2$

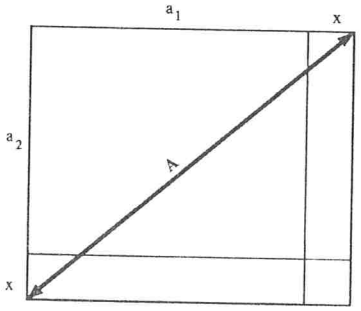
"diviseur fixé" *"dividende"*

vocabulaire issu de l'algorithme d'extraction de racine carrée (voir plus loin).

III-5. *Extraction de racines carrées*

Soit à extraire la racine carrée de A ; si a_1 est la 1ère approximation, l'erreur est x :

$A - a_1^2 = 2a_1x + x^2$, ce qui se voit très bien :

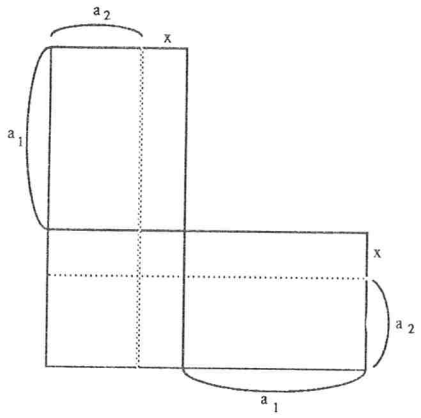


Pour A = 71824 $a_1 = 200$, d'où

$31824 = 400x + x^2$

"dividende" *"diviseur fixé"*

Soit a_2 une approximation de l'erreur ; la nouvelle erreur x vérifie :



$A - a_1^2 - a_2(2a_1+a_2) = x^2 + 2(a_1+a_2)\,x$, ce qui se voit encore très bien.
$a_2 = 60$, d'où la nouvelle équation
$4224 = x^2 + 520\,x$ qui "tombe juste" : $x = 8$.

IV - *Extraction de racine cubique* : l'utilisation de cubes est attestée dès Liu-Hui (3ème siècle de notre ère). Le texte est obscur, mais témoigne d'une disposition typique de toute l'algèbre chinoise : les équations en colonnes. Si a_1 est la 1ère approximation de la racine cubique de V, on a $V - a_1^3 = 3\,a_1^2\,x + 3\,a_1\,x^2 + x^3$, qui est disposé en :

$V - a_1^3$	(dividende)
$3\,a_1^2$	(diviseur fixé)
$3\,a_1$	(ligne du milieu)
1	baguette sur la ligne du dessous .

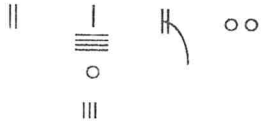
V - Le "saut" du début de notre ère au 13ème siècle est dû à l'absence de documents importants, mis à part Liu Hui (3ème siècle).

Ecriture des nombres dans les équations :



2783 s'écrit : =

Ecriture des équations et des polynômes :



représente à la fois le polynôme -29200 (┐pour indiquer le "signe moins") + $3x^2$ et l'équation $-29200 + 3x^2 = 0$.

V-1. Avec $\pi = 3$, $\frac{3}{4}\,d^2 - L\,l = 7300$, $d - (L+l) = 55$, $L-l = 35$ ce qui donne $2d^2 + 110\,d - 31000 = 0$. Le texte donne le détail de la mise en équation. A noter que les deux autres méthodes proposées donnent $\begin{matrix} a \\ b \\ c \end{matrix}$ pour $Cx^2 + bx = a$ (voir plus haut). Les numéros entre parenthèses du texte renvoient au texte chinois que l'on a reproduit, et où le lecteur pourra s'amuser à déchiffrer les équations.

VI - PRINCIPAUX DOCUMENTS

1 - - 1400 à -1100 : textes divinatoires sur des os, avec des nombres écrits selon le système décimal, avec une numération analogue à celle de notre langage parlé, sans zéro.

2 - - 4ème siècle : Canon moiste : ébauche, sans lendemain, d'un développement axiomatique des concepts de géométrie.

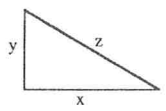
3 - "Zhoubi suanjing"
ou "Chou-Pei Suan-ching" = "classique arithmétique du gnomon et des trajectoires circulaires des cieux"
Auteur inconnu ; date de la dynastic des Han (-202 à + 220).
Contient une authentique démonstration de la relation de Pythagore.
Connaissance de la relation de Thalès.

4 - "Jiuzhang suanshu"
ou "Chiu-chang Suan-chu" = "Neuf chapitres sur l'art mathématique".
Auteur inconnu ; même époque que le précédent. Livre de base, souvent commenté utlérieurement, noté JZSS.
9 chapitres contenant 246 problèmes.
Thèmes : travaux publics, impôts, partages.
Techniques : calcul de fractions, nombres négatifs, extractions de racines carrées et cubique, système linéaires, problèmes du second degré.

5 - Liu Hui, auteur du 3ème siècle. A écrit un commentaire du Chiu-chang, où les équations quadratiques sont établies à l'aide de figures ;
Et le "Manuel mathématique des iles maritimes", consacré à des calculs de distances, comme nos problèmes de topographie. Il y donne, sans explication, l'équation du problème et sa solution.

6 - "Manuel arithmétique de maître Sun" (4ème siècle ?).
* Première référence explicite à l'usage de l'échiquier et des baguettes, qui donnèrent à l'algèbre chinoise son style propre.
* Explication détaillée de l'extraction d'une racine carrée sur l'échiquier.
* Premier exemple de résolution d'un problème "d'analyse indéterminée" (Résoudre $3x+2 = 5y+3 = 7z+2$ en nombre entiers ; une seule solution donnée).

7 - "Continuation des mathématiques anciennes". Wang H'siao-T'ung (7ème siècle).
Premier problème (autre que l'extraction de racine) conduisant à une équation cubique
(Trouver les côtés connaissant xy et z-x).



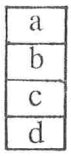
L'auteur donne l'équation sous la forme

a
b
c
d

signifiant $dx^3+cx^2+bx = a$, sans indiquer comment il l'a obtenue.

LA GRANDE FLORAISON DU 13ème SIECLE :

8 - Qin Jiushao
ou Ch'in Chiu-Shao (1201-1261) a écrit le "Traité mathématique des 9 sections", 81 problèmes répartis en 9 chapitres.
Thèmes : astronomie, arpentage, impôts, commerce, ouvrages militaires.
Techniques : - Résolution de problèmes d'analyse indéterminée
- Résolution d'équations polynômes jusqu'au degré 10 par la méthode 12ème siècle
(La méthode de résolution est donnée en détail, mais pas la façon d'obtenir l'équation).

- Ecriture  pour $a+bx+cx^2+dx^3 = 0$ (17ème siècle en Europe)

- Emploi du zéro.[1]

9 - Li Zhi
ou Li Yeh ($\simeq$1180-1265). Deux ouvrages ont survécu : "Reflets des mesures du cercle sur la mer" et "Mathématiques anciennes par la méthode des sections"
* Il donne *plusieurs méthodes pour obtenir les équations des problèmes*, mais aucune pour les résoudre.
* Première référence connue à "l'élément céleste" qui est l'inconnue.
* Première apparition de la nouvelle notation des négatifs :
 pour -360 (au lieu de couleurs différentes).

10 - Yang Hui : "Analyse des règles mathématiques des 9 chapitres" (1261) et "Supplément à l'analyse des 9 chapitres". Il y explique comment, *par des procédés géométriques*, on obtient et résoud certaines équations du "chiu-chang".

11 - Zhu Shih
Chu Shih-chieh, le virtuose de l'algèbre sur échiquier.
1299 : "Introduction aux études mathématiques"
1302 : "Le miroir de Jade des quatre inconnues". 284 problèmes répartis en 24 chapitres.
Résolution de *systèmes d'équations polynômes jusqu'à quatre variables*, uniquement à l'aide de manipulations sur l'échiquier. Les quatre inconnues portent les noms de *céleste, terrestre, humaine et matérielle.*

N.B. Ce qui est appelé "résolution d'équations polynômes" n'est pas, comme plus tard en Europe, la recherche du nombre de solutions et de leur expression exacte, mais le calcul, par l'algorithme "de Horner", d'une approximation, chiffre par chiffre, d'une seule solution.

---

1 - Peut être connue en Chine dès le début du 11ème siècle.

VII - BIBLIOGRAPHIE

1 - *Ouvrages contenant des extraits significatifs de textes chinois*

MIKAMI : The development of math. in China and Japon (1910).

LIBBRECHT : Chinese math. in the 13th Century (1973), MIT Press.

HOE, J. : Les systèmes d'équations polynômes dans le "Miroir de Jade des quatre inconnues" (1977). Collège de France, Institut des hautes études chinoisesLAM

LAY-YONG : Li Ye anf his "old math. in expanded sections". Article de "Archiv for history of exact sciences".

LAM LAY-YONG : A critical study of the Yang hui suanfa, a 13th century chinese math. treatise (1977). Singapore University Press.

VOGEL K : Chiu chang suan shu, Neun. bücher arithmetischer technik (1968). Friedr. Vieweg und Sohn-Braunschweig. (*Traduction intégrale du JZSS*).

2 - *Autres ouvrages*

Trois livres de référence :

NEEDHAM, J. : Science and civilisation in china

T3 : Math. and the sciences of the heaven and the earth

MARTZLOFF, J-C. : Recherches sur l'oeuvre math. de Mei Wending (1981). Collège de France, Institut des hautes études chinoises.

MARTZLOFF, J-C. : Histoire des math. chinoises (1987), Masson.

Autres :

VAN DER WAERDEN : Geometry and algebra in ancient civilisations.

DHOMBRES, J. : Nombre, mesure et continu (Ch. 7)

CHEMLA, K. : La redécouverte des maths chinoises (Science et Avenir, Mai 1985)

SMITH : History of mathematics, (Dover).

LA RECHERCHE DES TANGENTES A UNE CONIQUE
L'histoire des mathématiques comme outil pédagogique en terminale

Alain LE BOULCH
Lycée Jacques Cartier - SAINT MALO

A un moment où les exigences de rigueur en mathématiques se sont quelque peu déplacées, l'étude d'un texte historique ne pourrait-elle pas tenir lieu de démonstration ? Sans peut-être aller aussi loin, de nombreux textes anciens offrent la possibilité d'approcher une notion de façon plus attrayante pour les élèves.

Cet article présente des expériences faites dans ce sens en classe de Terminale :

- Certains textes de Roberval peuvent, par exemple, permettre d'établir les propriétés des tangentes à une conique de manière parfois moins artificielle que dans le cadre actuel des programmes de Terminale.

- Un texte d'Apollonius et un article de la Grande Encyclopédie complèteront cette approche historique de la notion de tangente.

- D'autres textes de Roberval pourraient aussi être étudiés en classe et donner prétexte à redécouvrir des courbes un peu oubliées aujourd'hui dans l'enseignement (limaçon de Pascal, cycloïde...).

I - UN TEXTE DE ROBERVAL (texte 1) :

1 - Ce texte est extrait des "Observations sur la composition des mouvements et sur le moyen de trouver les touchantes aux lignes courbes", imprimées dans les Mémoires de l'Académie des sciences en 1693 et professées au Collège royal en 1636.

2 - Roberval (Gilles Personne de, 1602-1675) :

Né dans le village de Roberval, près de Beauvais, il devint titulaire d'une chaire au Collège royal et fut membre fondateur de l'Académie des sciences. Il a développé et utilisé la méthode des indivisibles. Ami de Mersenne, il ne s'entendit jamais avec Descartes.

3 - Quelques repères :

Roberval (1602-1675)
Descartes (1596-1650)
Pascal, Etienne (1588-1651)
Pascal, Blaise (1623-1662)
Mersenne (1588-1648)
Fermat (1601-1665)
Leibniz (1646-1716)
Cavalieri (1598-1647)

4 - Quelques éléments pour l'étude de ce texte :

a) Le principe de Roberval (Axiome ou principe d'invention) :

C'est une méthode cinématique de détermination des tangentes à une courbe :

La direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe est la touchante de la ligne courbe en chaque position de ce point-là.

En langage morderne : le vecteur-vitesse est porté par la tangente.

b) Vocabulaire et noms cités :

- Une touchante : une tangente.
- Un rhombe : un losange.
- Le Limaçon de Monsieur Pascal : il s'agit d'Etienne Pascal, le père de Blaise.
- La Roulette de Monsieur Rob. (Roberval) : la cycloïde (aussi appelée trochoïde par Roberval).

On peut ici remarquer l'orthographe et les abréviations utilisées par Roberval.

c) La propriété des tangentes à une parabole :

La parabole considérée a pour foyer A et directrice (BH).

Après avoir expliqué comment construire un point E de cette parabole $(AE = BI)$, Roberval expose sa méthode, avant de montrer qu'elle s'accorde avec celle d'Apollonius (voir II).

Pour cela, il montre que le sommet F de la parabole est le milieu de la sous-tangente $[CI]$.

d) Une démonstration moderne de cette propriété :

$AE = BI = HE.$

$\overrightarrow{AE}^2 = \overrightarrow{HE}^2$

$\overrightarrow{2AE} \cdot \overrightarrow{V_E} = \overrightarrow{2HE} \cdot (\overrightarrow{V_E} - \overrightarrow{V_H})$

$\overrightarrow{V_E} \cdot (\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{HE}) = O$, car $\overrightarrow{HE} \perp \overrightarrow{V_H}$

$\overrightarrow{VE} \cdot \overrightarrow{AH} = O$

On démontre ainsi que la tangente au point E de la parabole est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{AEH}$.

d) Conclusion :

Ce texte peut être étudié entièrement ou partiellement en classe de Terminale. Il est très accessible aux élèves, malgré une justification physique de ce principe cinématique assez délicate. Il est d'ailleurs à signaler que les textes de Roberval concernant d'autres courbes (la cycloïde, par exemple) peuvent aussi être étudiés, notamment en parallèle avec une étude paramétrique de ces courbes.

II - UN TEXTE D'APOLLONIUS (texte 2) :

1 - Ce texte est extrait du traité des Sections Coniques d'Apollonius de Perge (Les coniques d'Apollonius de Perge).

2 - Apollonius de Perge (Vers 262 - vers 180 av. J.C.) :

Un des grands géomètres grecs, son oeuvre principale est le traité cité précédemment, on lui doit les noms actuels des coniques : parabole, ellipse et hyperbole.

3 - Etude du texte et démonstration :

a) Premier paragraphe :

Le sommet E de la parabole est le milieu de la sous-tangente $[A\Delta]$.

b) Deuxième paragraphe :

(AB) est l'axe focal de la parabole et $AE = E\Delta$.

Apollonius montre que tout point de la droite $(A\Gamma)$, distinct du point Γ, est extérieur à la parabole, donc que la droite $(A\Gamma)$ est tangente à la parabole.

c) Troisième paragraphe : démonstration par l'absurde :

Soit Z un point de la droite $(A\Gamma)$ intérieur à la parabole.

On a : $BH > ZB$, donc : $\frac{BH^2}{\Gamma\Delta^2} > \frac{ZB^2}{\Gamma\Delta^2}$.

Or : $\frac{BA^2}{A\Delta^2} = \frac{ZB^2}{\Gamma\Delta^2}$, en effet : $\frac{BA}{A\Delta} = \frac{ZB}{\Gamma\Delta}$, car les triangles ABZ et $A\Delta\Gamma$, sont semblables.

De plus : $\frac{BE}{\Delta E} = \frac{HB^2}{\Gamma\Delta^2}$ (penser à l'équation d'une parabole).

On en déduit : $\frac{BE}{\Delta E} > \frac{BA^2}{A\Delta^2}$. Or : $\frac{4 \times BE \times EA}{4 \times AE \times E\Delta} = \frac{BE}{E\Delta}$, donc $\frac{4BE \times EA}{4AE \times E\Delta} > \frac{BA^2}{A\Delta^2}$

D'où : $\frac{4BE \times EA}{AB^2} > \frac{4AE \times E\Delta}{A\Delta^2}$

Or : $E\Delta = AE$, $4AE \times E\Delta = 4AE^2 = A\Delta^2$.

Il s'en suivrait que : $\frac{4BE \times EA}{AB^2} > 1$

Or : $4BE \times EA < BA^2$, car le point E n'est pas le milieu de $[AB]$.
Contradiction.

Tout point de la droite $(A\Gamma)$, distinct du point Γ, est donc extérieur à la parabole : la droite $(A\Gamma)$ est tangente à la parabole.

Remarque : A titre d'exercice, on peut faire démontrer que : $4AE \times EB < AB^2$

On pose : $AB = l$, $AE = x$. On a : $EB = l - x$ (car $E \in [AB]$).

En étudiant la fonction $f : x \mapsto 4x\ (l-x)$, on montre que $\forall x \neq \frac{l}{2}$, $4x\ (l-x) < l^2$.

III - UN ARTICLE DE LA GRANDE ENCYCLOPEDIE (texte 3) :

Ce texte est l'article "tangente" de l'Encyclopédie Méthodique éditée par le libraire Panckoucke de 1784 à 1789, reprenant les articles mathématiques de la Grande Encyclopédie de Diderot-D'Alembert.

IV - UN EXERCICE PROPOSE EN CLASSE :

Propriété de la tangente à une ellipse :

On utilisera la propriété suivante :

Tout point d'une tangente à une ellipse, distinct du point de contact, est extérieur à l'ellipse.

Remarque : Pour justifier cette propriété, on pourrait la démontrer pour un cercle et considérer qu'une ellipse est l'image de son cercle principal par une affinité orthogonale.

Soient (T) la tangente en un point M à l'ellipse (E) et F_1 le symétrique du foyer F' par rapport à la tangente (T). Les droites (FF_1) et (T) sont sécantes en un point P.

1) Démonter que : $PF + PF_1 \leq 2a$ (On pourra utiliser l'inégalité triangulaire).
2) Démonter que $PF + PF' = 2a$.
3) En déduire que les points F, M et F_1 sont alignés, puis que la tangente (T) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Théorème :

La tangente en un point M à l'ellipse (E) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{FMF'}$ (angle des rayons vecteurs de ce point).

Texte 1

PROBLEME I.

Propoſition cinquiéme.

DONNER les touchantes des lignes courbes par les mouvemens mêmes mêlez.

Mais nous ſuppoſons qu'on nous en donne aſſez de propriétez ſpécifiques, qui nous faſſent connoître les mouvemens qui les décrivent.

Axiome, ou principe d'invention.

LA direction du mouvement d'un point qui décrit une ligne courbe, eſt la touchante de la ligne courbe en chaque poſition de ce point-là.

Le principe eſt aſſez intelligible, & on l'accordera facilement dès qu'on l'aura conſideré avec un peu d'attention.

Regle

DES MOUVEMENS COMPOSE'S.

Regle génerale.

PAR les propriétez ſpécifiques de la ligne courbe (qui vous ſeront données) examinez les divers mouvemens qu'a le point qui la décrit à l'endroit où vous voulez mener la touchante: de tous ces mouvemens compoſez en un ſeul, tirez la ligne de direction du mouvement compoſé, vous aurez la touchante de la ligne courbe.

La démonſtration eſt mot à mot dans notre principe. Et parce qu'elle eſt très-générale, & qu'elle peut ſervir à tous les exemples que nous en donnerons, il ne ſera point à propos de la répéter.

Vous trouverez dans les exemples ſuivans les touchantes des ſections coniques, celles des autres lignes principales qu'ont connu les anciens, & celles de quelques-unes que l'on a décrit depuis peu, comme du Limaçon de Monſieur Paſchal, de la Roulette de Monſieur Rob. de la Parabole du ſecond genre de Monſieur Deſc. &c.

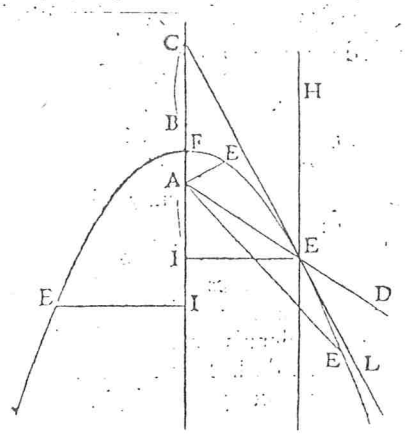
Premier éxemple des touchantes de la parabole.

SOIT que l'on nous ait donné la parabole EFE, & le moyen de le décrire par la cinquiéme méthode générale de Monſieur Mydorge livre ſecond, propoſition 25. qui eſt telle.

Le ſommet & le foyer de la parabole étant donnez de poſition, trouver dans le même plan tant de points qu'on voudra par leſquels la parabole eſt décrite.

Soit A le foyer, & F le ſommet: ſoit tirée la ligne AF & prolongée de F vers B, & ſoit FB égale à AF la même ligne BFA ſera l'axe de la parabole. Prenez dans FA autant de points I qu'il vous plaira, tirez par ces points des lignes perpendiculaires à FA; du

centre A & de l'intervale d'entre chaque perpendiculaire, & le point B comme BI, décrivez des arcs de cercle dont chacun coupe une de ces perpendiculaires comme en E, la parabole paſſera par les points E.



Cela poſé ſi l'on demande la touchante de la Parabole au point E, ſoit tiré la ligne AE prolongée comme en D, & la ligne EI perpendiculaire à AB, & encore la ligne HE parallele à à l'axe FAI, alors il eſt clair par la deſcription ci-deſſus, que le mouvement du point E décrivant la Parabole, eſt compoſé de deux mouvemens droits égaux, dont l'un eſt la ligne AE, & l'autre eſt la ligne HE ſur laquelle il ſe meût de même viteſſe que le point I dans la ligne BA, laquelle viteſſe eſt pareille à celle de la ligne AE par la conſtruction, puiſque AE eſt toûjours égale à BI. Partant puiſque la direction de ces mouvemens égaux eſt connuë, ſçavoir ſuivant les lignes droites AED, HE données de poſition, ſi vous diviſez l'angle AEH en deux également par la ligne LEC qui eſt le diamétre d'un rhombe autour de l'angle AEH, (& par conſéquent la direction du mouvement compoſé des deux HE AE,) la ligne LEC ſera la touchante.

Avant que de paſſer outre, remarquez deux choſes.

La premiere, que nous n'avons pas voulu conſidérer le point E comme commune ſection de deux lignes, dont lignes, dont l'une AE infinie ſe meut circulairement autour du point A; l'autre IE auſſi infinie deſcend parallement à ſoi-même, aïant toûjours ſon extrémité I dans la ligne BA, puiſqu'il a été plus facile de conſidérer les mouvemens AE, HE du point E en chaque endroit de la ſection de ces lignes. Secondement, nous avons dit que les mouvemens AE, HE ſon égaux l'un à l'autre, ce qui ſera vrai, quelque point de la parabole que nous prenions pour E. Mais il ne s'enſuit pas que tous les mouvemens d'un point E ſoient égaux à tous les mouvemens d'un autre point E de la parabole, chacun d'eux n'en aiant qu'un réciproque de l'autre côté de la parabole & également éloigné du ſommet. Vous entendrez la même choſe en toutes les autres lignes courbes.

Pour montrer que notre façon de trouver les touchantes de la Parabole, s'accorde avec celle d'Apollonius livre 1. propoſition 33, & pour le trouver en quelque façons analitiquement, poſons qu'il ſoit vrai que LEC touche la Parabole en E. Si donc nous abaiſſons l'ordonnée EI, IF ſera égale à FC, & ajoûtant FB à IF, & FA à CF, les toutes CA & IB ſeront égales (car les ajoûtées le ſont par la conſtruction) mais IB eſt égale à AE par notre conſtruction, donc CA & AE ſont égales, & l'angle ACE égal à l'angle AEC; mais par notre conſtruction nous avons diviſé l'angle AEH en deux également, & par conſequent nous avons fait AEC, CEH égaux entr'eux, donc ACE eſt égal à CEH ſon alterne, ce qui eſt vrai, car par la conſtruction EH, eſt paralelle à CI.

Ou ſi vous aimez mieux, puiſque CI, EH ſont paralleles, l'angle ACE eſt égal à CEH; mais par la con-

ſtruction C E H eſt égal à A E C, donc A C E & A E C, ſont égaux, & le triangle A C E iſoſcèle, donc C A eſt égale à A E. Mais encore par la conſtruction A E eſt égale à B I, C A eſt donc égale à B I, & en ôtant les égales A F, B F, C F ſera égale à F I, & par conſequent la ligne CE touche la parabole, ce qu'il falloit démontrer.

Que ſi l'on nous eût donné la deſcription de la parabole par un point, comme E ſe promenant le long de la ligne I E du mouvement uniforme, en même temps que la ligne IE deſcend parallelement à ſoi-même, d'un mouvement très-inégal, mais tel que le quarré de I E eſt toûjours égal au rectangle ſous I F, & une ligne donnée nommée P, qui en ce cas eſt le côté droit de la Parabole, il auroit fallu démontrer ce problême.

La premiére (comme P) de trois lignes continuellement proportionnelles nous étant donnée, & un mouvement égal dans la ſeconde I E trouver le mouvement qui ſe fait dans la troiſiéme F I, ce qui eſt un peu plus long, &c.

L'on pourroit encore propoſer le moïen de décrire la Parabole par quelques autres de ſes propriétez, ce qui ſeroit plus difficile.

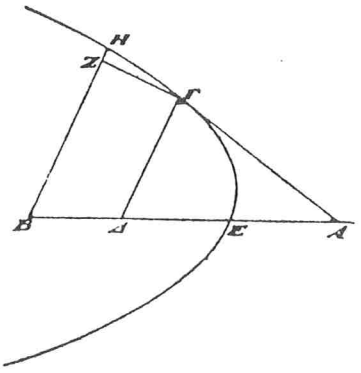
Texte 2

PROPOSITION XXXIII.

Si l'on prend un point sur une parabole ; si, de ce point, l'on abaisse une droite d'une manière ordonnée sur le diamètre, et si l'on pose une droite égale à celle que cette dernière droite découpe sur le diamètre, dans la direction de celui-ci, et à partir du sommet, la droite de jonction, menée du point ainsi obtenu au point que l'on a pris, sera tangente à la section ([3]).

Soit une parabole dont un diamètre est la droite AB. Abaissons une droite ΓΔ de manière ordonnée ; posons une droite AE égale à la droite EΔ, et menons la droite de jonction AΓ. Je dis que la droite AΓ prolongée tombera à l'extérieur de la section.

En effet, qu'elle tombe à l'intérieur comme la droite ΓZ, et abaissons la droite HB de manière ordonnée. Dès lors, puisque le rapport du carré de BH au carré de ΓΔ est plus grand que celui du carré de ZB au carré de ΓΔ ; mais que le carré de BA est au carré de AΔ comme le carré de ZB est au carré de ΓΔ, et que BE est à ΔE comme le carré de HB est au carré de ΓΔ ([1]), il s'ensuit que le rapport de BE a EΔ est plus grand que celui du carré de BA au carré de AΔ. Or, le quadruple du rectangle délimité sous BE, EA est au quadruple du rectangle délimité sous AE, EΔ comme BE est à EΔ; donc, le rapport du quadruple du rectangle délimité sous BE, EA au quadruple du rectangle délimité sous AE, EΔ est plus grand que celui du carré de BA au carré de AΔ. Dès lors, par permutation, le rapport du quadruple du rectangle délimité sous BE, EA au carré de AB est plus grand que celui du quadruple du rectangle délimité sous AE, EΔ au carré de AΔ ; ce qui ne peut avoir lieu, car, EΔ étant égal à AE, le quadruple du rectangle délimité sous AE, EΔ équivaut au carré de AΔ, et le quadruple du rectangle délimité sous BE, EA est moindre que le carré de BA, puisque le point E n'est pas le milieu de la droite AB. Dès lors, la droite AΓ ne tombe pas à l'intérieur de la section ; donc elle lui est tangente ([2]).



Texte 3

par les variations qu'on apperçoit dans leur lumière, ſur-tout dans les ſatellites de ſaturne, dont un diſparoit totalement; mais ces *taches* ne peuvent s'obſerver, & les ſatellites ſont trop petits pour qu'on puiſſe y rien diſtinguer, non plus que dans mercure & dans la planète de Herſchel. (*D. L.*)

TAMBOUR, ſ. m. (*Méch.*) Deux roues d'égale grandeur & ayant même arbre, placées à une diſtance l'une de l'autre égale à-peu-près au quart de leur rayon, couvertes par des lattes contiguës, clouées à leur circonférence, forment ce qu'on appelle un *tambour*, dans la méchanique pratique; le *tambour* s'applique très-ſouvent à la grue; un ou pluſieurs hommes, introduits dans l'intérieur, le font tourner & monter le poids qu'on doit élever. Pour que l'homme agiſſe avec le plus d'avantage, il ne doit pas éloigner ſon centre de gravité de la verticale qui paſſe par l'axe du *tambour* d'une quantité plus grande que le ſixième du rayon. Il y a des provinces où on emploie des petits chiens, dans les cuiſines, pour faire tourner la broche par ce moyen.

TANGENTE, ſ. f. (*Géométrie*) menez à la courbe *M S* (*planc. Géom. fig.* 241) une ſécante *Mm V* qui la coupe en *M* & *m*; faites tourner cette ſécante autour du point *M* juſqu'à ce que le point *m* tombe ſur le point *M*; la ligne *M m V* parvenue à ſa dernière poſition *M V* eſt une *tangente*.

Si la courbe a une inflexion, *fig.* 242, ou un rebrouſſement, *fig.* 243; la ligne *M V* pourra être en même-tems tangente & ſécante, & après avoir touché la courbe en *M*, aller la couper en *R*.

Dans les élémens de *Géométrie* on ne s'occupe guères que de la *tangente* au cercle. On y démontre que cette *tangente* eſt perpendiculaire au rayon. Effectivement, ſoit la ligne *DE*, *fig.* 244 perpendiculaire en *M* au rayon *MC* de la circonférence *M F G*. Ce rayon étant perpendiculaire à *D E* ſera la plus courte de toutes les lignes qui y aboutiſſent du point *C*. Si donc on mène les lignes *D C* & *C E*, ces lignes étant plus grandes que *M C*, les points *D* & *E* ſeront hors du cercle, & comme on peut dire la même choſe de tout autre point, tous les points de la ligne *D M* ſont hors du cercle excepté le point *M*, qui eſt ſur la circonférence même; donc cette ligne eſt *tangente*.

Si d'un même point *D* on mène une *tangente M D* & une *ſécante D F G* au cercle; la *tangente* eſt moyenne proportionnelle entre la *ſécante* entière & ſa partie extérieure; car ſi on mène les lignes *F M* & *G M*; les triangles *F D M* & *D M G* ſeront ſemblables, parce que l'angle *D* eſt commun; de plus les angles *D M F* & *D G M* ſont, chacun, meſurés par la moitié de l'arc *F M*, donc *D G*: *D M* = *D M*: *D F*.

La portion *M E* de la *tangente* au point *M* extrêmité de l'arc *M I*, compriſe entre ce point *M* & le rayon prolongé qui paſſe par le point *I*, autre extrêmité de cet arc, s'appelle *tangente* de l'arc *M I* ou de l'angle *M C I* meſuré par cet arc. *Voyez* SINUS.

Tangentes des ſections coniques.

Si du point *M* de la parabole *A M*, *fig.* 245, on mène deux lignes, l'une *F M* à ſon foyer, l'autre *M V* qui rencontre ſa directrice, perpendiculairement en *V*, ces lignes ſont égales. *Voyez* CONIQUE ET PARABOLE.

Cela poſé, je dis que la ligne *M Y* qui diviſe l'angle *V M F* en deux parties égales eſt *tangente* à la parabole au point *M*. Pour le démontrer, il ſuffit de faire voir que tout point de la ligne *M Y m* autre que le point *M*, *m* par exemple, eſt hors de la parabole relativement au foyer. Menez de ce point *m* les lignes *m V*, *m K* perpendiculaires ſur la directrice & *m F*; *m V* = *m F*; donc *m K* eſt < *m F*; donc le point *m* n'eſt pas à la parabole; donc l'interſection de *K m* avec la parabole eſt de l'autre côté du point *m* relativement au point *K*.

Si du point *M* de l'ellipſe, *fig.* 246, on mène les lignes *M F* & *M f* aux foyers *F*, *f*, la ſomme de ces lignes ſera conſtante & égale au grand arc. *Voyez* CONIQUE.

Cela poſé, je dis que la ligne *M Y* qui diviſe en deux parties égales le ſupplément de l'angle *F M f* eſt *tangente*, je ſupprime la démonſtration, parce qu'elle eſt la même à-peu-près que pour la parabole.

Si du point *M* de l'hyperbole, *fig.* 247, on mène les lignes *M F* & *M f*, aux foyers *F*, *f*, la différence de ces lignes eſt conſtante & égale à l'axe des foyers. *Voyez* CONIQUE.

Cela poſé, je dis que la ligne *M Y* qui diviſe en deux parties égales l'angle *F M f* eſt *tangente*, même démonſtration que pour l'ellipſe.

Archimède a auſſi déterminé la *tangente* de ſa ſpirale, par des moyens puiſés dans l'ancienne *Géométrie*, ſur quoi *voyez ſes œuvres*, édition de Barrow.

Ces courbes ſont à-peu-près les ſeules dont on puiſſe ainſi trouver les *tangentes*; pour les autres, il faut employer le calcul différentiel ou une méthode analogue, moyennant quoi le problême n'a aucune difficulté, quand l'équation de la courbe eſt donnée d'une manière quelconque. *Voyez l'Analyſe des Infiniment petits* du marquis de l'Hôpital, qui ne laiſſe preſque rien à deſirer ſur cette matière.

Nous parlerons ici de deux cas ſeulement qui ſe rencontrent le plus ſouvent, celui où l'équation de la courbe eſt donnée entre des coordonnées parallèles à deux lignes données, & celui où les

Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

GERBERT D'AURILLAC
le savant, le maître, le mathématicien

Jean-Pierre LEVET
Université de Limoges

On se propose de présenter brièvement la vie et l'oeuvre de Gerbert d'Aurillac, le pape Sylvestre II, mort en 1003, qui fut l'un des plus grands savants du Moyen Age.

Par un rappel du contenu de son enseignement et par une étude commentée de certaines de ses lettres, on montrera l'étendue de son érudition et de son ambition scientifique et philosophique.

On analysera enfin quelques passages élémentaires des oeuvres d'arithmétique et de géométrie qui figurent dans le corpus qui lui est attribué, avec la volonté de donner ainsi une image de ce que pouvaient être, il y a quelque mille ans, les livres d'initiation aux mathématiques ainsi que les talents pédagogiques et l'enthousiasme de leurs auteurs.

Pour conclure, afin de rendre, devant des mathématiciens d'aujourd'hui, à Gerbert un hommage moderne, on énoncera deux programmes informatiques, rédigés l'un en Turbo Pascal (version IV) et l'autre en Basic, concernant la méthode de la division par choix d'une dénomination et d'une différence. Ainsi peut-être des élèves d'aujourd'hui, disposant d'outils qui eussent sans nul doute suscité chez Gerbert joie et admiration, pourront-ils apprendre les méthodes d'autrefois. Souhaitons qu'à cette occasion ils sachent faire preuve de l'enthousiasme qui animait Gerbert lorsqu'il se consacrait à l'étude et à la recherche.

Quelques éléments de bibliographie vous permettront de compléter les informations qui vont vous être données :

A. OLLERIS, **Oeuvres de Gerbert, pape sous le nom de Sylvestre II,** Paris, 1867.
N.M. BUBNOV, **Gerberti Opera Mathematica**, 972-1003, Berlin, 1899.
J. HAVET, **Lettres de GERBERT**, Paris, 1889.
H. PRATT LATTIN, **The Letters of Gerbert, with his papal privileges as Sylvester II**, Columbia U. Press, 1961.
F. PICAVET, **Gerbert, Un Pape Philosophe**, Paris, 1897.
P. RICHE, **Gerbert d'Aurillac, Le Pape de l'An Mil**, Paris, 1987.
Gerberto, Scienza, Storia e Mito, Atti del Gerberti Symposium (Bobbio, 25-27 luglio 1983), **Archivum Bobiense, studia II**, Bobbio, 1985.

Je vous proposerai des traductions que j'ai élaborées après avoir accompli un travail philologique d'établissement du texte.

Certaines d'entre elles feront l'objet d'une publication par les soins du groupe inter I.R.E.M.

Gerbert d'Aurillac fut, au X^{ème} siècle, un savant universel.

Exceptionnelle fut sa destinée. D'humble origine, il fut appelé à exercer les plus hautes fonctions politiques et religieuses, puisqu'il fit élire roi de France Hugues Capet, dont il fut le secrétaire, et qu'il devint pape en 999 sous le nom de Sylvestre II.

Moine au monastère Saint-Géraud d'Aurillac, il se distingua très jeune par des aptitudes intellectuelles peu communes. Il eut la chance de pouvoir séjourner en Espagne de 967 à 970, avant d'être présenté au pape Jean XIII et à l'empereur Otton Ier, qui, l'un et l'autre, furent frappés par son intelligence, par sa science et par son infatigable ardeur au travail.
A partir de 972, il se consacra à l'enseignement et à la recherche à Reims, dans les fonctions d'écolâtre, sous l'autorité de l'archevêque Adalbéron.

Nommé, en 983, abbé de Bobbio, il ne resta en Italie qu'une année, préférant retrouver bien vite ses charges d'enseignement à Reims.

Mêlé aux innombrables querelles politiques de l'époque, il connut quelques années difficiles après avoir obtenu la succession d'Adalbéron. Avant d'accéder au trône pontifical, il fut nommé, en 998, archevêque de Ravenne.

Devenu Sylvestre II, il conçut, avec Otton III, un projet d'instauration d'une monarchie universelle, qui aurait uni l'Europe tout entière et regroupé l'Occident et l'Orient. Son ambition était d'oeuvrer pour une civilisation entièrement fondée sur les valeurs du Christianisme, de lutter contre la pauvreté, d'assurer la paix et de contribuer au progrès par le développement des sciences.

Mais la politique ne lui apporta pas toutes les satisfactions qu'il en attendait. Il s'en fallut même de beaucoup, car elle fut pour lui la principale cause de ces "tempêtes contre lesquelles l'étude lui fournit toujours un port sûr".

Gerbert fut donc avant tout un homme de foi et un homme de science, un passionné de philosophie, discipline qu'il définissait comme étant **"divinarum et humanarum rerum comprehensio veritatis"**.

La philosophie représente donc pour lui tout le savoir accessible à l'esprit humain. Elle est l'étude par excellence, celle qui fait la synthèse de la spéculation et de la pratique. C'est elle qui donne son prix à la vie en ce monde : "La foi", déclare Gerbert, "fait vivre le juste, mais il faut y adjoindre la science", la science parce qu'elle est le produit de la raison, la cause des plus grandes et des plus authentiques satisfactions, celles de l'esprit, et la source du progrès véritable, lorsqu'elle est associée étroitement au respect des valeurs morales.

Dans sa quête philosophique, Gerbert sut recueillir la meilleure partie de l'héritage antique, tel qu'il pouvait être accessible de son temps, et donner une vive impulsion à la recherche. C'est ainsi qu'il s'efforça de redonner vigueur aux études médicales et qu'il eut l'ambition de rapprocher la physique des mathématiques, de faire de ces dernières l'instrument des sciences de la nature.

Travailleur acharné, Gerbert fut aussi un savant passionné, capable de s'enflammer tout autant devant la beauté d'un vers de Virgile que devant celle d'un théorème ou d'une opération arithmétique.

Ce fut aussi un ardent défenseur de l'unité du savoir, au centre duquel il plaça les mathématiques, qui, pour lui, "viennent de Dieu et conduisent à Dieu".

Dans une telle profession de foi, verrons-nous uniquement un élan platonicien (rappelons que, pour le fondateur de l'Académie, les mathématiques constituent une sorte de propédeutique philosophique) ? La réponse à donner à une telle question me paraît négative. Certes, cette perspective n'est sans doute pas absente de la pensée de Gerbert, mais elle n'en constitue qu'un élément. Pour le philosophe, qui est capable d'un véritable enthousiasme mathématique, le substantif étant pris dans son sens étymologique, les mathématiques sont à considérer à la fois en elles-mêmes et comme un instrument.

Par elles-mêmes, elles développent l'intelligence humaine à laquelle elles apportent des joies extraordinaires. En tant qu'instrument, elles sont une école de logique et un bel outil de compréhension du réel. De telles idées, qui sont aujourd'hui banales, étaient en fait tout à fait neuves du temps de Gerbert. La clairvoyance du philosophe attirera d'ailleurs sur lui les critiques, les soupçons et les calomnies des médiocres et des conformistes, qui ne feront pas l'effort nécessaire pour comprendre les positions d'un homme dont la pensée est en avance sur celle de son temps.

Telle est sans doute la raison pour laquelle les idées les plus originales de Gerbert, à quelques notables exceptions près, sont à chercher dans l'enseignement qu'il dispensa et dans les lettres qu'il adressa à des amis ou à des élèves. Les traités scientifiques qui nous ont été transmis sous son nom ne sont que des manuels élémentaires de géométrie et d'arithmétique. Aussi n'est-ce pas d'après leur seul contenu qu'il convient de porter un jugement sur la stature scientifique de leur auteur.

Nous étudierons quelques extraits de ces oeuvres, mais je voudrais d'abord montrer ce que fut l'enseignement de Gerbert et ce que nous apprennent de son zèle et de son ardeur scientifiques celles de ses **Lettres** qui sont parvenues jusqu'à nous.

Un contemporain de Gerbert, l'historien Richer, nous montre l'étendue des matières brassées par l'écolâtre de Reims.

On commence par la logique héritée de l'Antiquité : l'**Isagogé** de Porphyre d'après la traduction de Marius Victorinus et d'après celle de Boèce, le **Peri Hermeneias** et les **Topiques**, lus à travers des traductions et des commentaires (Cicéron, Boèce), puis les oeuvres originales de Boèce (**Sur les Différences Topiques, Sur Les Syllogismes Catégoriques, Sur les Syllogismes hypothétiques, Sur les Définitions, Sur les Divisions**) constituent la première partie du programme de travail.

On passe ensuite à la rhétorique et aux études littéraires. Gerbert lit et commente de préférence les poètes : Virgile, Stace et Térence, Juvénal, Perse et Horace, Lucain. Les prosateurs, toutefois, comme Cicéron et César, ne sont pas complètement négligés. Lorsque les élèves sont suffisamment familiarisés avec ces auteurs, on les fait passer à l'étude de la rhétorique et de la sophistique, nom donné à l'art des controverses.

On arrive enfin aux mathématiques, qui ne sont plus, comme dans la perspective ancienne, une propédeutique, mais un véritable couronnement des études et une initiation à la recherche. Les quatre branches des mathématiques sont successivement étudiées dans l'ordre suivant : arithmétique, musique, géométrie et astronomie.

Pour enseigner le calcul, Gerbert fit construire un abaque ingénieusement conçu qui permettait d'effectuer très rapidement multiplications et divisions. Nous en reparlerons longuement.

Les leçons de musique et de géométrie n'appellent aucun commentaire particulier. Elles précèdent celles qui concernent l'astronomie. Celle-ci est alors une science réputée "presque inaccessible". Pour la rendre simple et attrayante, Gerbert se dote d'un matériel pédagogique qu'il construit lui-même. Une sphère ronde en bois plein représente la sphère du monde. Gerbert l'incline, avec ses deux pôles, obliquement par rapport à

l'horizon. Il pourvoit le pôle supérieur des constellations septentrionales et le pôle inférieur des constellations australes. Avec le cercle appelé "horizon" par les Grecs et "limitant" par les Latins, il en règle la position, car c'est grâce à lui qu'on distingue et sépare les constellations qui sont visibles de celles qui ne le sont pas. Avec cet instrument, Gerbert enseigne à ses élèves la science de la nature. Ils apprennent à connaître les astres, qu'ils observent la nuit sous la direction de leur maître. Celui-ci leur fait comprendre, avec l'aide d'un mécanisme qu'il a inventé, comment se fait la révolution des planètes. Avec une sphère traversée par un tube servant d'axe et indiquant le pôle céleste, il représente, au moyen d'un réseau de fils de fer et de cuivre, les constellations que l'on peut ainsi aisément reconnaître toutes.
Tous les détails ainsi rapportés par l'historien montrent la maîtrise et l'ingéniosité de Gerbert, sa science et sont talent de pédagogue. Tous les contemporains de l'écolâtre furent, comme Richer, très frappés par la passion avec laquelle il dispensait son enseignement, qui attirait d'année en année des élèves de plus en plus nombreux.

"La renommée", constate Richer, "d'un si grand savant ne se limitait pas seulement aux Gaules ; elle s'étendait aussi en Germanie. Elle franchit les Alpes et se répandit en Italie jusqu'à la mer Tyrrhénienne et à l'Adriatique".

Mais le niveau moyen des étudiants devait demeurer relativement médiocre. Aussi est-ce de la recherche personnelle qu'il menait sans relâche que Gerbert tirait les plus grandes satisfactions intellectuelles.

De cette recherche, de nombreuses lettres se font l'écho. Nous allons lire et commenter quelques-unes d'entre elles.

Lettre 7 (les références proposées sont celles de l'édition qu'a donnée du texte latin J. HAVET). Cette lettre date de la fin de 982 ou du début de 983. Elle est adressée à Airard, moine d'Aurillac, ancien élève de Gerbert et futur abbé de Saint-Thierry, près de Reims.

"Gerbert à son ancien élève et ami Airard, salut.
Nous accédons à tes demandes et nous te recommandons de prendre soin de nos affaires comme si elles étaient les tiennes propres. Il faut que Pline soit corrigé, qu'Eugraphius soit reçu et que soient recopiés complètement les livres qui sont à Orbais et à Saint-Basle. Fais ce que nous te demandons, afin que nous fassions ce que tu nous demandes."

Le savant, qui s'intéresse tout autant aux disciplines littéraires (Eugraphius est un commentateur de Térence) qu'aux matières scientifiques (il est inutile de présenter le naturaliste Pline), a constamment besoin de livres nouveaux, dont il n'est pas toujours facile d'obtenir des copies. La lettre 8 montre, elle aussi, cette quête des ouvrages écrits par les Anciens.

Lettre 8.

Adressée à Adalbéron, cette lettre fut écrite à Bobbio en juin 983. Comme la précédente, elle porte témoignage de l'étendue des champs d'intérêt de Gerbert : histoire, astronomie, géométrie. Une formule ("**non minus admiranda**") révèle l'enthousiasme de Gerbert lecteur de livres savants.

"A Adalbéron, archevêque de Reims.

Je vous expliquerai mieux de vive voix devant vous qu'absent et par mes écrits ce que j'ai fait à Mantoue pour vos affaires. Je n'ai pas su quelles clefs de mes coffres à livres je devais envoyer en raison de l'usage commun de serrures semblables. Faites pour nous

l'acquisition de l'Histoire de Jules César auprès du Révérend Adson, abbé de Montierender, pour que le livre soit recopié, afin que vous puissiez avoir les livres que nous possédons chez vous et espérer acquérir ceux que nous avons trouvés ces derniers temps, à savoir huit volumes du **De Astrologia** de Boèce, et aussi de très beaux livres contenant des figures de géométrie et d'autres volumes non moins admirables.

Seule votre absence trouble jour et nuit notre bonheur."

Dans la lettre 24, envoyée au printemps 984 à Lupitus de Barcelone, Gerbert sollicite l'envoi d'un livre d'astronomie traduit de l'arabe. Il espère qu'ultérieurement d'autres échanges de même nature se feront avec son correspondant, archidiacre de la cathédrale de Barcelone.

Lettre 24

"Bien que je n'aie à attendre de toi aucune reconnaissance pour service rendu, ton renom et ta gentillesse me poussent à avoir confiance en toi et à attendre de toi une faveur. Aussi je te demande de m'envoyer le livre d'astronomie que tu as traduit. Par la suite, si tu souhaites obtenir de moi en compensation quelque chose, demande-le moi sans hésiter."

Ecrite à la même époque que la lettre 24, la lettre 17, adressée à Géraud de Saint-Céré, abbé d'Aurillac, en faisant mention d'une traduction élaborée par l'abbé de Saint-Michel de Cuxa, évoque l'importance de la place des savants espagnols dans l'Europe de Xème siècle. Elle nous montre que, malgré les troubles de l'époque, Gerbert n'oublie jamais ses études : "Mon Père Adalbéron, archevêque de Reims, souhaite que vous vous portiez bien. S'il ne s'est pas rendu auprès de vous, c'est à cause du trouble profond qui se manifeste dans les deux royaumes et tout particulièrement de l'agitation qu'entretiennent Héribert de Troyes et le comte Eudes, fils de Thibaut, contre son église... Ce qui lui appartient, considérez-le comme vôtre, et, de peur qu'il ne vous demande une faveur sans rien vous offrir en échange, faites-lui savoir ce qu'il vous plairait d'avoir parmi les biens qu'il possède. Comme preuve de son affection, il vous envoie une couverture de lit en lin, qui a demandé beaucoup de travail, comme jadis il vous en avait envoyé une autre, toute simple celle-là, par l'intermédiaire de votre moine Ayrard.

L'abbé Guarin a laissé en votre possession un petit livre sur la multiplication et la division des nombres écrit par Joseph d'Espagne. C'est une copie de ce livre que nous vous demandons pour nous deux...".

Une autre lettre, antérieure à celle que nous venons de lire, montre que les recherches de Gerbert ne concernent pas seulement les mathématiques. Le médecin dont il souhaite avoir l'ouvrage a vécu au Ier siècle de notre ère. Il avait reçu le beau surnom de Philaléthès, c'est-à-dire d'"ami de la vérité". Voici le contenu de cette lettre, qui porte le numéro 9. Elle date de l'été 983.

Lettre 9

"A l'abbé Gisalbert.

Si vous vous portez bien, nous nous en réjouissons. Vos besoins, nous les considérons aussi comme les nôtres. De quels besoins nous sommes ainsi affectés, nous vous demandons de nous le révéler. Sur les maux des yeux et leurs remèdes, le philosophe Démosthène a publié un livre dont le titre est **Ophtalmicus**. Si vous le possédez, envoyez-nous son début ainsi que la fin du **Pro Rege Dejotaro** de Cicéron. Portez-vous bien".

Ecrite à la fin de 984 ou au début de 985, la lettre 44, dont le destinataire est Ebrard, abbé de Tours, donne une idée précise de ce que fut, pour Gerbert, la philosophie. Nous ne possédons malheureusement pas la liste des livres que recherchait inlassablement l'écolâtre pour son enseignement et ses travaux.

Lettre 44

"Puisque vous vous souvenez souvent de moi entre autres objets d'estime, comme je l'ai appris de plusieurs envoyés, et puisque vous me portez une grande amitié en raison de la parenté qui nous unit, je pense que votre estime me rendra bienheureux si seulement je suis homme à être trouvé digne d'être aimé par le jugement d'un homme aussi grand que vous. Mais comme je ne suis pas des personnes qui, avec Panétius, séparent parfois l'honnête de l'agréable, mais plutôt de celles qui, avec Cicéron, associent l'honnête à toute chose utile, je veux que ces liens honnêtes et sacrés d'amitié ne soient privés d'aucun côté de ce qui est utile à chacun."

Comme la philosophie ne sépare pas la façon dont on se conduit de celle dont on parle, à l'étude du bien vivre j'ai toujours associé celle du bien parler, bien qu'à lui seul le bien vivre soit plus important que ce qu'est le bien dire, et que, pour quelqu'un qui n'a pas à assumer les soucis du pouvoir, l'un soit suffisant sans l'autre.

Mais, pour nous qui nous occupons des affaires publiques, les deux sont nécessaires. En effet, parler comme il faut pour persuader et détourner de leurs élans impétueux par un doux langage les âmes des excités est d'une grande nécessité. Pour cette activité à laquelle il faut s'entraîner, je prépare une bibliothèque assidûment.

Et comme à Rome il y a quelque temps et dans d'autres endroits d'Italie ainsi qu'en Germanie et en Belgique j'ai dépensé beaucoup d'argent pour payer des copistes et des copies d'auteurs, aidé par la bienveillance et le zèle d'amis originaires de la même province, de même permettez que j'obtienne qu'il soit fait de même chez vous et par vous. Les livres que je souhaite voir recopier, j'en donnerai une liste à la fin de ma lettre.

Nous enverrons pour les scribes des parchemins et les fonds nécessaires, conformément à ce que vous demanderez, et nous n'oublierons pas de surcroît votre faveur.

Enfin, de peur d'abuser de la bienséance épistolaire en parlant plus longuement, disons que la cause de tant de travail est le mépris de la mauvaise fortune. Ce mépris, ce n'est pas pour nous comme pour beaucoup la nature seule qui le fait naître, mais une philosophie bien construite.

C'est pourquoi dans le loisir, dans le travail, nous enseignons ce que nous savons et nous apprenons ce que nous ignorons".

Les mêmes préoccupations se manifestent dans la lettre 130, écrite à Reims au début de l'automne 988. Le destinataire est Rainard de Bobbio.

Lettre 130

"Ne va pas croire, bien cher frère, que c'est de ma faute si depuis si longtemps je suis privé de la présence de mes frères. Depuis que je me suis éloigné de toi, par de nombreux voyages j'ai servi la cause de mon frère Colomban dans la mesure de mes forces. L'ambition des royaumes, des temps cruels et déplorables ont changé le bien en mal. Personne ne voit sa loyauté justement récompensée. Mais moi, puisque je sais que tout dépend de la volonté de Dieu, qui change en même temps les coeurs et les royaumes des fils des

hommes, j'attends avec impatience l'issue des affaires. Je t'invite et je t'exhorte, frère, à faire aussi la même chose.

En attendant, je te demande une faveur à laquelle je tiens plus qu'à d'autres ; cela pourra se faire sans danger ni préjudice pour toi et renforcera plus que tout les liens d'amitié qui m'unissent à toi.

Tu sais avec quelle ardeur je cherche à obtenir de partout des copies de livres. Tu sais combien de copistes il y a partout dans les villes et les campagnes d'Italie. Eh bien donc, toi seul étant dans la confidence, fais qu'à tes frais soient copiés pour moi le **De Astrologia** de Manilius, le **De Rhetorica** de Victorinus et l'**Ophtalmicus** de Démosthène.

Je te promets, frère, et tiens pour certain, toi, que ce service qui est une marque de fidélité et que cette louable obéissance bénéficieront de ma part d'un silence sacré, et tout ce que tu demanderas, je te le donnerai parfaitement selon ce que tu m'écriras et au moment où tu l'exigeras. Indique seulement à qui nous devons confier tes présents et nos écrits et fais-nous plus souvent la joie de nous écrire. Ne crains pas que vienne à la connaissance de quiconque ce que tu as placé sous notre foi."
Mais Gerbert n'écrit pas toujours à ses disciples uniquement pour solliciter des copies de livres. Il lui arrive de répondre à des questions précises posées par ses anciens élèves, comme Rémi, moine de Trêves, à qui est destinée la lettre 134, écrite en septembre 988. Rémi n'avait pas bien compris que, selon la définition de Boèce, deux nombres qui mesurent un autre nombre sont des facteurs de ce nombre. Gerbert le lui rappelle et sa lettre lui permet de demander un service en échange d'un bel objet scientifique qu'il fabriquera pour Rémi. Ainsi se font les échanges entre savants dans l'Europe du Xème siècle.

Lettre 134

"Tu as bien compris au sujet du dixième nombre de quelle façon il se mesure lui-même en tant qu'unité des dizaines. Une fois un, en effet, donne un. Mais pour autant tout nombre ne se mesure pas lui-même, comme tu l'as écrit, parce qu'il est égal à lui-même. En effet, ce n'est pas parce qu'une fois 4 égale 4 que 4 mesure 4, mais c'est plutôt 2 qui mesure 4, deux fois 2 font, en effet, 4. D'autre part, le signe I que tu as remarqué noté dans la colonne des dizaines signifie dix unités, qui, séparées en 6 et 4, font un rapport sesquialtère. La même chose peut être observée pour 3 et 2, alors que l'unité constitue la différence.

Nous ne t'envoyons aucune sphère et pour l'instant nous n'en avons aucune. La chose exige un gros travail pour des gens qui s'adonnent aux affaires politiques.

Si donc te préoccupe le souci d'avoir de si grandes choses, envoie-nous encore un volume de l'**Achilléide** de Stace, après l'avoir recopié avec soin, afin que, ne pouvant avoir une sphère gratuitement à cause de la difficulté de sa construction, tu réussisses à l'obtenir par ton présent".

Quelques mois plus tard, Gerbert enverra une autre lettre sur le même sujet à Rémi.

Lettre 148

"Bien cher frère, tes bons sentiments sont écrasés par le travail de l'**Achilléide**, que tu as bien entrepris, mais que tu as abandonné, puisque l'exemplaire copié est incomplet. Aussi, comme savons bien nous souvenir du bienfait que nous avons reçu, nous avons entrepris de confectionner la sphère, qui exige un travail très difficile. Elle est déjà polie au tour et couverte de cuir de cheval. S'il te tarde de l'avoir, simplement teintée d'une

couleur rouge naturelle, attends-la aux environs du 1er mars, mais si tu souhaites l'avoir sous une forme plus élaborée, avec l'horizon et de jolies couleurs diverses, ne frémis pas à l'idée qu'un travail d'une année est nécessaire. Mais, pour ce qui est de donner et de recevoir, il a été admis de droit que celui qui ne doit rien ne donne rien en échange".

Gerbert, dans sa correspondance, aborde parfois, en ce qui concerne l'astronomie, des questions pratiques. C'est ce que nous montre, par exemple, la lettre 153, adressée, en mars 989, au frère Adam.

Lettre 153

"Mon père Adalbéron ayant pris place parmi les âmes immortelles, j'ai été accablé par le poids de tant de soucis que j'ai presque oublié tous les objets de mes études.
Lorsque j'ai commencé à me souvenir de vous, afin de ne pas me laisser engourdir par le manque d'activités et pour donner satisfaction sur un point à un ami absent, j'ai consigné par écrit et j'ai envoyé en gage d'amitié quelques éléments constitués à partir d'observations astronomiques, à savoir les flux et reflux du soleil, en les réunissant sans suivre l'opinion de ceux qui pensent qu'ils se font de façon égale pour chaque mois, mais en m'attachant au compte de ceux qui les décrivent comme inégaux absolument.

Ainsi Martianus Capella, dans son **Astronomie,** pense-t-il que l'augmentation des heures d'ensoleillement se fait de la manière suivante : "il faut savoir", dit-il, "que les jours croissent à partir du jour le plus court de l'année de la façon suivante : dans le premier mois d'un douzième du temps qui est ajouté en été, le second mois, d'un sixième, le troisième, d'un quart, le quatrième d'un autre quart, le cinquième d'un sixième, le sixième d'un douzième". Ainsi, selon ce mode de calcul, ai-je représenté avec des mesures certaines le tableau horologique de deux régions, en attribuant à chaque mois des heures précises.

L'une de ces régions est celle de l'Hellespont, où le jour le plus long est de 15 heures équinoxiales. L'autre est celle des gens qui ont comme jour le plus long un jour de 18 heures équinoxiales.

D'autre part, j'ai dressé ce tableau de telle façon que vous puissiez composer sur le modèle de ce qui est écrit les tableaux horologiques propres concernant n'importe quelle région, à condition de connaître par des clepsydres la durée des jours solsticiaux.

Cela, en vérité, est facile à faire, si l'eau qui s'échappe durant le temps nocturne et diurne du solstice, recueillie séparément, parvient à former la quantité de toute la somme, qui est faite de 24 parties.
Tableau horologique des régions pour lesquelles la durée maximale du jour est de 18 heures equinoxiales :

Juin et juillet	Jour	18 heures	Nuit	6 heures
Mai et août	Jour	17 heures	Nuit	7 heures
Avril et septembre	Jour	15 heures	Nuit	9 heures
Mars et octobre	Jour	12 heures	Nuit	12 heures
Février et novembre	Jour	9 heures	Nuit	15 heures
Janvier et décembre	Jour	6 heures	Nuit	18 heures

Tableau horologique des régions pour lesquelles la durée maximale du jour est de 15 heures équinoxiales :

Janvier et décembre	Jour	9 heures	Nuit	15 heures
Février et novembre	Jour	10 heures 1/2	Nuit	13 heures 1/2
Mars et octobre	Jour	12 heures	Nuit	12 heures
Avril et septembre	Jour	13 heures 1/2	Nuit	10 heures 1/2
Mai et août	Jour	14 heures 1/2	Nuit	9 heures 1/2
Juin et juillet	Jour	15 heures	Nuit	9 heures

Cette lettre appelle quelques éléments de commentaire.

La théorie du polygraphe Martianus Capella à laquelle fait référence Gerbert se trouve au livre VIII (VIII, 878) des **Noces de Mercure et de la Philologie**. Les Anciens appelaient **hora** la douzième partie du jour, quelle que fut la durée de celui-ci, en sorte que l'heure, selon eux, variait avec les saisons. L'heure dite **hora aequinoctialis,** douzième partie du jour d'équinoxe, était seule égale à une heure au sens moderne du mot.
Le parallèle de l'Hellespont ne passe pas en Gaule, comme le croyait Martianus Capella. Il traverse l'Italie méridionale vers Naples et l'Espagne vers Madrid. Mais il est exact que, à la latitude de l'Hellespont, la durée du plus long jour est d'environ quinze heures. A la même latitude, celle du plus court et d'environ neuf heures.

La latitude où le plus long jour est d'environ dix-huit heures est approximativement celle de Stockholm. A Reims et à Paris, les durées maximales et minimales du jour sont de seize et huit heures environ.
La progression définie comme étant celle du premier mois concerne bien évidemment la période qui s'étend du 21 décembre au 20 janvier.

Nous étudierons enfin une lettre adressée par Gerbert en octobre 997 à l'empereur Otton. Elle nous confirmera que le savant s'efforce de maîtriser la possession de l'héritage antique, qu'il s'impose un effort constant de recherche et qu'il fait des mathématiques et de la philosophie morale les deux disciplines les plus nobles et les plus importantes.

Lettre 187

"Au Seigneur et glorieux empereur Otton César Auguste, Gerbert, évêque de Reims par la grâce de Dieu, envoie toutes les salutations dignes d'un tel empereur.

A votre bienveillance éminente, par laquelle perpétuellement nous sommes jugé digne de votre respect, nous pouvons répondre, peut-être en raison de vos voeux, mais non en raison de nos mérites.

Si, en effet, nous sommes enflammés d'une mince étincelle de science, tout cela c'est votre gloire qui l'a créé, la vertu de votre père qui l'a nourri, la magnanimité de votre aïeul qui l'a préparé.

Que dire donc ?

Nous n'apportons pas nos propres trésors pour les joindre aux vôtres, mais nous vous rendons ceux que nous avons reçus.

Ces trésors, pour partie vous les avez déjà obtenus, pour partie vous allez bientôt les recevoir, comme en est le signe votre demande honnête et utile, bien digne de votre majesté.

Si, en effet, vous ne teniez pas pour sûr et certain que l'essence des nombres ou bien contient en elle-même les premiers principes de toutes les choses ou bien les fait sortir d'elle-même, vous ne vous hâteriez pas avec un si grand zèle vers leur pleine et parfaite connaissance, et si vous n'aviez pas saisi la noblesse de la philosophie morale, l'humilité, gardienne de toutes les vertus, ne serait pas ainsi gravée dans vos paroles.

Cependant la finesse d'un esprit qui se connaît bien lui-même n'est pas silencieuse, puisque, pour ainsi dire, vous avez montré une faculté oratoire coulant d'elle-même et d'une source grecque.

Lorsqu'un homme, grec par la race, romain par son état, réclame, comme par droit héréditaire, pour lui-même les trésors de la sagesse grecque et romaine, alors je ne sais quoi de divin est exprimé.

Nous obéissons donc, César, à tes édits impériaux, non seulement sur ce point, mais sur tous ceux que votre Majesté décrétera.

En effet, nous ne pouvons manquer d'obéir, nous qui considérons qu'il n'y a, parmi les affaires humaines, rien de plus doux que votre commandement".
De tels témoignages directs relatifs aux ambitions et à l'activité scientifiques de Gerbert sont par eux-mêmes suffisamment éloquents.

Certains d'entre eux évoquent directement la diffusion des oeuvres mathématiques de Gerbert.

De ces dernières, le **corpus** édité par A. Olleris au siècle dernier comprend une **Regula de abaco computi,** un **Libellus de numerorum divisione,** un **Liber abaci,** une **Geometria.**

Nous allons nous intéresser plus directement à cette dernière oeuvre ainsi qu'aux trois premiers livres du **Liber abaci.**

Un large extrait du Prologue de la **Géométrie** nous montrera quel prix Gerbert attache à l'étude de cette science.

Prologue de la Géométrie.

"Cette discipline -je vais m'exprimer avec des mots simples car je dispense un enseignement à des débutants- tire son nom grec de la mesure de la terre. En grec, en effet, Yη veut dire "terre" et μεTρον "mesure".

Elle fut inventée, dit-on, par les Egyptiens. Bien souvent la crue du Nil causait une inondation telle qu'il devenait impossible de reconnaître les limites des champs. Aussi chercha-t-on à imaginer un art ingénieux dont la pratique permettrait à chacun de déterminer plus facilement l'étendue de son lopin et de distinguer ce dernier des propriétés voisines.

Bien que cet art ait été, à l'origine, inventé pour permettre de mesurer la terre et que la terminologie qu'il utilise lui ait été attribuée en fonction de cette fin qui était la sienne, les savants des générations postérieures développèrent sa méthode et appliquèrent leurs recherches à quelques autres choses, qu'il était utile de connaître ou dont l'étude faisait la joie de l'esprit.

A un tel art ils appliquèrent une définition dont le contenu est le suivant : la géométrie est l'étude de la grandeur et des formes que l'on considère selon la grandeur. On peut aussi, si je ne me trompe, la définir ainsi : la géométrie est la science des grandeurs mesurables ou

bien de la dimension démontrable recherchée par le moyen de propositions élaborées pour mesurer.

Pour tous ceux qui recherchent la véritable sagesse, l'utilité de cette science est très grande. Elle constitue, en effet, un moyen particulièrement affiné pour stimuler les forces de l'esprit et de l'intelligence et pour aiguiser l'entendement. Elle est, en outre, une discipline très agréable pour conduire rationnellement à la découverte de connaissances nombreuses et vraies, qui semblent à beaucoup admirables et surprenantes, ainsi qu'à la contemplation des propriétés extraordinaires de la nature et de la puissance, associée à une ineffable sagesse, de son créateur, qui a tout placé dans le nombre, la dimension et le poids.

Avec nos faibles moyens, nous avons emprunté à divers ouvrages et rassemblé quelques-uns des éléments qui concernent la méthode et les règles de cette science.

Choisissons parmi eux, pour rédiger le premier chapitre de notre livre, ceux que l'on appelle "définitions". Nous pourrons ainsi conduire graduellement, selon un plan bien établi, vers des connaissances plus approfondies l'esprit de celui qui aborde l'étude de cette discipline".
A une présentation traditionnelle de l'origine de la géométrie s'ajoute donc l'annonce d'un plan choisi en fonction de critères pédagogiques. Mais ce n'est pas dans ces éléments que se trouve l'essentiel de l'enseignement dispensé par Gerbert dans ces lignes. Ce qui compte le plus, semble-t-il, c'est, outre l'enthousiasme du mathématicien, la définition de la double utilité de la géométrie : elle contribue à la formation de l'esprit de celui qui l'étudie et elle offre une utilité pratique. Non seulement elle constitue une branche des mathématiques et livre des connaissances qui sont de son seul domaine, mais encore elle constitue un instrument au service d'autres disciplines. Gerbert ne nomme pas ces dernières, mais il est facile de comprendre qu'il s'agit de la logique et surtout de la physique, clairement évoquée derrière une citation biblique. Lorsque Gerbert ne s'adressait pas à des débutants, mais à des étudiants ayant acquis un bon niveau de science, il devait orienter son enseignement vers cette connaissance des secrets de la nature, qui constituait une part importante de ses recherches. L'émerveillement du mathématicien devant l'intelligibilité du réel est remarquable. Il se prolonge dans une réflexion métaphysique et théologique.

Beauté, vérité, sagesse, acuité d'esprit, compréhension du réel, élan vers les spéculations les plus hautes, tels sont, pour Gerbert, les fruits des mathématiques. Comment pourrait-on alors en aborder l'étude sans éprouver la passion le plus vive ?
Revenons à des conditions plus simples et découvrons quelques-unes de ces notions élémentaires dont la présentation a été annoncée par Gerbert.
Nous choisissons des extraits des chapitres VI, VII, IX et X, qui n'appelleront que de très brefs commentaires.

Chapitre VI

Du triangle en tant que principe des figures planes :

"Comme Boèce l'a établi d'une manière bien claire dans ses écrits concernant l'arithmétique, le triangle est le principe des figures planes. La raison en est qu'il faut au moins trois lignes droites pour pouvoir comprendre une surface, c'est-à-dire une étendue quelconque. Deux lignes droites seules ne peuvent, en effet, entourer aucune portion d'espace, et donc le triangle, comme il est formé dans son extension ou étendue par trois lignes, est le premier assemblage de lignes qui soit de nature à former des figures pourvues d'angles et planes. Aussi est-ce à bon droit que, parmi ces même figures, il obtiendra une place proéminente, qui le situera au premier rang.

D'autre part, parmi les figures pourvues d'angles, il apparaît également comme un principe et pour ainsi dire comme un élément parce qu'il entre dans la composition de chacune d'entre elles et que toutes peuvent se résoudre en triangles.
Si l'on marque par un point le centre de la surface, c'est-à-dire de l'aire d'un triangle, d'un tétragone, d'un pentagone ou d'un hexagone ou encore de toutes les figures qui suivent avec un nombre d'angles croissant à chaque fois d'une unité et si l'on trace à partir de ce même point des lignes droites joignant le sommet des angles, on remarquera que chacune de ces figures se compose d'autant de triangles et se divise en autant de triangles qu'elle contient elle-même d'angles. En effet, de cette manière, le triangle se divise en trois autres triangles, le tétragone en quatre, le pentagone en cinq et tous les autres polygones qui suivent en un nombre de triangles qui correspond à celui de leurs angles.

Il arrive encore de façon précise, parce que chacune de ces figures se divise en triangles, qu'il soit possible de trouver ainsi, lorsque l'on est attentif, la surface de chacune d'entre elles d'après les règles qui permettent de calculer la superficie des triangles".

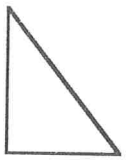
Chapitre VII

"Des espèces du triangle.

Le triangle, que l'on appelle aussi figure à trois angles (trigone) ou figure à trois côtés (tripleure), est une figure plane délimitée par trois lignes droites ou côtés et par un nombre égal d'angles.

Il en existe trois espèces, l'orthogone (le triangle rectangle), l'ampligone (triangle qui a un angle obtus) et l'oxygone (triangle qui a trois angles aigus).

Un triangle orthogone est un triangle qui a un angle droit et deux angles aigus, comme ceci :

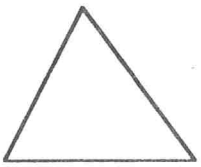


C'est de son angle droit qu'il tire son nom. **Orthos**, en effet, en grec, est l'équivalent de **rectus** en latin et **gonia** veut dire "angle". Ainsi orthogone signifie-t-il "à angle droit".
Un triangle ampligone a un angle obtus et deux angles aigus, comme celui-ci :



Lui aussi, de la même façon, reçoit de son angle obtus le nom qui est le sien.

Un triangle oxygone est un triangle qui se caractérise de la manière suivante : tous ses angles sont aigus. En voici un exemple :



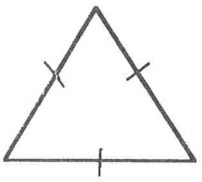
C'est la raison pour laquelle il tire son nom d'"aigu", qui se dit **oxys** en grec.

L'oxygone d'un genre particulier peut avoir ses angles et ses côtés égaux entre eux. De telles égalités sont tout à fait impossibles pour les autres espèces, celles des ampligones et des orthogones, comme il est facile pour tout le monde de le comprendre, et comme on peut bien s'en convaincre en regardant les figures qu'ils constituent.

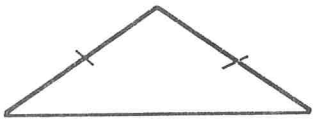
Ajoutons que les mêmes triangles, à savoir les oxygones, ont à leur disposition quelques autres qualificatifs également, qui sont au nombre de trois.

Les uns sont dits équilatéraux, les autres isocèles, les autres enfin scalènes.

Est équilatéral le triangle qui est délimité par trois côtés égaux entre eux. **Isos,** en effet, signifie "égal" et **pleuron** "côté".



Un triangle isocèle est un triangle qui a deux côtés égaux, sur lesquels il s'appuie comme sur deux jambes, le troisième étant, lui, d'une longueur différente. C'est la raison pour laquelle on l'appelle isocèle, ce qui signifie, pour ainsi dire, "qui a des jambes égales".



Un triangle scalène, enfin, est un triangle dont tous les côtés sont inégaux. On l'appelle scalenos, ce qui équivaut à **gradatus** (disposé en degrés), parce que c'est comme par degrés que la longueur croît d'un côté par rapport à l'autre.



Ajoutons qu'un triangle ayant ses trois côtés égaux, c'est-à-dire un triangle équilatéral, peut être seulement un triangle oxygone, tandis que les orthogones et les ampligones, tout comme d'ailleurs les oxygones, peuvent être isocèles et scalènes. Quelques-uns, en effet, parmi les triangles ampligones, orthogones et oxygones sont, comme on le constate, formés de deux côtés égaux entre eux, le troisième étant d'une longueur inégale, alors que les autres ont leurs trois côtés inégaux".

Chapitre IX. Comment peut-on distinguer les trois sortes d'angles ?

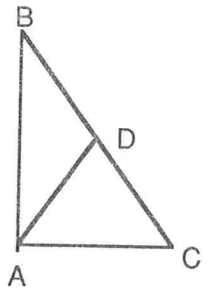
"Si tu veux savoir si un angle dont la mesure fait naître en ton esprit des hésitations est droit, obtus ou aigu, tu pourras utiliser le procédé suivant."

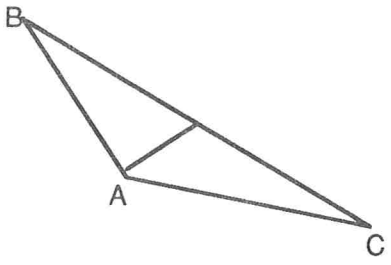
De l'angle pour lequel tu éprouves un doute, sur les deux lignes qui se réunissent à son sommet, marque de chaque côté par des points une mesure de n'importe quelle longueur et trace une ligne joignant ces deux points.

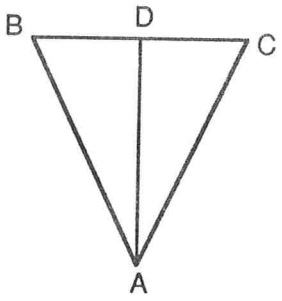
Divise-la en deux parties égales et marque son milieu par un point.

De ce point jusqu'au sommet de l'angle si la distance est la même que celle qui constitue la moitié de la ligne que tu as tracée, l'angle sur lequel tu t'interroges est droit. Si la distance est plus grande et ne peut être atteinte par le dimension de la moitié de la ligne, l'angle sera aigu. Si elle est plus courte et dépassée par cette dimension, l'angle sera obtus.

A titre d'exemple, soit A l'angle sur lequel tu t'interroges ; de ce sommet A, sur les côtés, B et C sont placés à une égale distance. Le point D se trouve placé sur la ligne BC à égale distance de B et de C. Si la distance qui sépare A et D est égale à celle qui sépare D de B et D de C, l'angle est droit. Si AD est plus petit que BD et CD, l'angle est obtus ; si AD est plus grand que BD et CD, l'angle est, à coup sûr, aigu :







Autre méthode, d'après le théorème de Pythagore.

A partir du sommet de l'angle sur lequel tu t'interroges, place sur l'un des côtés trois mesures de longueur égales, par exemple des pieds, et sur l'autre quatre mesures égales . Lorsque cela aura été fait, place des marques avec des points et d'un point à l'autre trace une droite. Si cette droite est égale à cinq pieds, l'angle sur lequel tu t'interroges sera droit ; si elle mesure plus de cinq pieds, l'angle sera obtus, mais si elle fait moins de cinq pieds, il se révèlera aigu.

Exemple : soit une angle de sommet E ; de ce point E jusqu'à F, je compte trois mesures, des pieds. Toujours à partir de E, sur l'autre côté de l'angle, je place quatre mesures jusqu'à G. Si je trouve cinq mesures de la même unité de F à G, l'angle sera certainement parfaitement droit en raison de la nature même des choses.

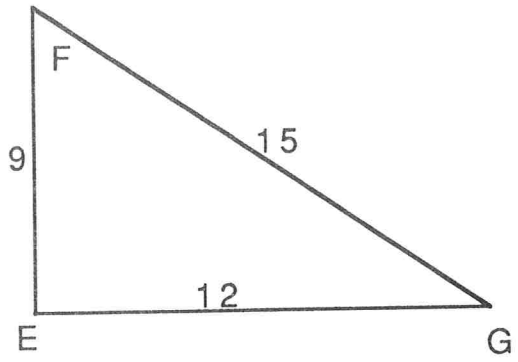
Si je trouve plus de cinq pieds, il sera obtus. Si j'en trouve moins, je tiens pour certain qu'il doit être compté au nombre des angles aigus, comme cela est évident d'après le principe posé".

Chapitre XI. Des triangles rectangles pythagoriciens.

"Parmi tous les triangles dont les côtés ont des longueurs diverses, celui qui a reçu du nom du mathématicien ayant découvert ses propriétés, Pythagore, le qualificatif de "pythagoricien" semble, d'une certaine façon, avoir un privilège et un mérite particuliers.
Pour quelle raison en est-il ainsi ?

On va le voir clairement dans ce qui suit.

Un tel triangle est délimité par des côtés entre lesquels existent les rapports suivants : la base est la sesquitierce du côté perpendiculaire, si bien que l'hypothénuse est la sesquiquarte de la base et qu'elle représente en même temps les cinq tiers du côté perpendiculaire. Le côté perpendiculaire a, par exemple, neuf pieds ou des mesures plus petites ou plus grandes, mais qui entrent toujours avec la base dans le rapport que j'ai indiqué plus haut".



Autres exemples : 18,24,30 ; 15,20,25 ; 3,4,5".

En guise de commentaire, on proposera une brève démonstration du dernier point établi.

Soit a la mesure du côté perpendiculaire et h celle de l'hypoténuse. Par hypothèse, la base mesure $a + \frac{1a}{3}$. D'après le théorème de Pythagore, on peut écrire

$h^2 = a^2 + a^2 + \frac{1a^2}{9} + \frac{2a^2}{3}$, donc $h^2 = 2a^2 + \frac{2a^2}{3} + \frac{1a^2}{9}$, d'où $h^2 = \frac{18a^2+6a^2+a^2}{9}$,

donc $h = a\sqrt{\frac{18+6+1}{9}} = a\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5a}{3}$

Clarté et précision, telles sont donc les caractéristiques principales de ces définitions élémentaires rédigées pour des débutants.

Ce sont également des notions toutes simples que contiennent les trois premiers livres du **Liber abaci.**

Pourtant, en l'absence de zéro, les procédés de calcul que l'on mettait en oeuvre, principalement pour l'accomplissement de la multiplication et de la division, étaient complexes. Aussi, au Xème siècle, seule une élite peu nombreuse pouvait-elle s'initier à l'arithmétique avec l'abaque. Il ne faut donc pas se laisser abuser par le caractère

élémentaire des considérations proposées par Gerbert. Son livre apporte, en effet, une importante contribution à des recherches qui devaient aboutir à une évolution considérable de l'arithmétique : "peu à peu", écrit M. G. Beaujouan (**in La Science Antique et Médiévale,** Paris, PUF, 1957, p. 523-524), "comme chez les Arabes, les chiffres seront tracés sur le sable ou la poussière au lieu d'être gravés sur de petits morceaux de corne et les colonnes elles-mêmes disparaîtront : l'abaque aura fait place à l'algorisme. Comparés aux complications de la logistique grecque, les nouveaux procédés de calcul constituent l'un des apports capitaux du Moyen Age à l'outillage intellectuel de la science occidentale....

Etudions d'abord quelques passages du livre 1.

Comment on construit l'abaque.

"... On doit d'abord polir avec le plus grand soin la planche tout entière. Il faut ensuite établire des divisions de sa surface en traçant trente lignes, dont les trois premières seront réservées aux onces et à leurs portions. Les autres, c'est-à-dire 27, seront regroupées par séries de 3...

Il sera bien clair qu'il convient de veiller attentivement à marquer clairement l'ordre des degrés, unité, dizaine, centaine, et séries formées d'unités, dizaines et centaines... Tout nombre ou bien se réduit à ces séries simples ou bien progresse par de nouvelles séries au fur et à mesure qu'il s'étend pour occuper des lignes supplémentaires... De même que c'est par la multiplication de l'unité première qu'apparaît par accroissement l'unité seconde, c'est-à-dire la dizaine, de même c'est par la multiplication de cette même unité seconde que se dégage l'unité troisième, c'est-à-dire la centaine, puis, d'une certaine façon, l'on revient à l'unité première, je ne dis pas en réalité, mais dans la représentation. En effet, tout comme la première unité est représentée par le signe I, le premier millier est représenté par le même signe, le nom de la série, symbolisé par un tiret placé au-dessus du signe, étant simplement ajouté... Toutes les lignes de l'abaque représentent une quantité dix fois inférieure et dix fois supérieure à celles de ses deux voisines et la quantité de la troisième ligne d'un groupe de trois équivaut à cent fois celle de la première... Après avoir indiqué toutes ces quantités, traçons horizontalement, de la première à la vingt-septième ligne, quatre lignes séparées les unes des autres par un espace égal. La première sera appelé premier trait horizontal, la dernière quatrième trait horizontal... La présentation de ces éléments étant achevée, entreprenons rapidement d'ajouter des compléments relatifs aux chiffres et aux signes par lesquels ils sont représentés. L'unité se représente ainsi -I- ou encore par la lettre grecque A, alpha, deux est symbolisé par τ ou encore par la lettre grecque B, trois par  ou par la lettre grecque Γ gamma, quatre par  ou par la lettre grecque Δ delta, cinq par  ou par la lettre grecque he E, six par  ou par la lettre grecque  , sept par  ou par la lettre grecque Z, huit par 8 soit par la lettre grecque heta H, 9, quant à lui, est représenté ainsi  ou par la lettre grecque θ.

Si donc on multiplie ces chiffres des unités de façon à obtenir le produit de chacun d'entre eux par chacun des autres, on obtiendra 36 multiplications en les mettant ainsi en présence les uns des autres. La connaissance du résultat de ces multiplications facilitera les calculs ultérieurs, sans nuire, bien au contraire, à l'éminente utilité de l'abaque... Puisque tout calcul sur l'abaque se fait en usant des inscriptions placées au-dessus des lignes verticales, il faut bien se rappeler que toutes ces lignes de l'abaque indiquent les unes par rapport aux autres des quantités dix fois supérieures ou inférieures. Telle est la raison pour laquelle je les considère les unes par rapport aux autres comme des doigts ou comme des mains. Au sujet de ces lignes, voici un principe général qu'il faut toujours appliquer : quelle que soit la quantité que multiplie un nombre de la série des unités, il faut placer le doigt sur la ligne de la série multipliée et la main sur la ligne qui la suit : quel que soit le nombre multiplié par une dizaine, il faut placer le doigt sur la ligne de la série qui suit et la main sur la ligne de la série qui suit le doigt ; quel que soit le nombre multiplié par une centaine, il faut placer le doigt non pas sur la ligne qui suit, mais sur celle qui vient après, et la main sur celle qui la suit... Pour que, grâce à un exemple, la règle de la multiplication paraisse plus facile à comprendre, proposons un problème concernant un nombre quelconque. Que ce problème soit donc le suivant : soit un palais contenant seulement XII pièces. Dans chacune d'entre elles, il y a XII tapis. Sur chacun de ces tapis ont pris place XII hommes. Chacun de ces hommes est accompagné d'un nombre égal de femmes, c'est-à-dire XII, et chacune de ces femmes allaite XII enfants. On demande à quel total on parvient en additionnant les nombres de tous ces éléments... Voici comment il faut faire. A l'intersection du quatrième trait horizontal et de la ligne des dizaines, je pose X... je pose également II, de la même façon, à l'intersection du quatrième trait horizontal et de la ligne des unités. Cela étant posé, un autre nombre XII est placé sur le premier trait horizontal, à l'intersection de la ligne des dizaines et des unités pour être multiplié... On procède alors de la manière suivante : II fois II font IIII, j'écris IIII sur le second trait horizontal, à l'intersection de la ligne des unités... Deux fois I font II. On écrit II sur le second trait horizontal, à l'intersection de la ligne des dizaines. Une fois II, II, on place encore II au même endroit. Une fois I, I, à placer dans la colonne qui suit celle des dizaines. Donc le nombre de pièces, douze, multiplié par lui-même, donne un produit de CXLIIII, qui est le nombre des tapis (voir abaque, figure I). Si l'on transfère ce nombre du second trait horizontal au premier pour qu'il soit multiplié de la même manière, on aura, par ce produit, le nombre des hommes. Ayant de la même manière déplacé ce nombre et l'ayant multiplié de la même façon, on obtiendra le nombre des femmes. Ce nombre ayant été déplacé de la même manière, apparaîtra, par multiplication, le nombre des enfants. Si l'on additionne le nombre de palais, de pièces du palais, celui des tapis, celui des hommes, celui des femmes et encore celui des enfants, on parvient au total de CCLXXI CCCCLIII...".

Simples jusque là, les choses deviennent plus délicates avec la division, étudiée tout au long des livres II et III.

Gerbert rappelle tout d'abord que chacune des lignes de l'abaque équivaut au décuple de celle qui la précède, tout en étant du décuple inférieure à celle qui la suit, et que, dans la plupart des cas, le nombre que l'on cherche dans ces lignes n'est ni supérieur ni inférieur du décuple, mais du double, du triple ou d'une autre proportion plus élevée.

Le mathématicien énonce ensuite la règle élémentaire de vérification : on multiplie le quotient par le diviseur et l'on ajoute le reste. On propose de grandes définitions : dividende, diviseur, différence, dénomination : deux fois quatre font huit, deux est une dénomination, c'est-à-dire un nombre par lequel on peut diviser un autre nombre en parties entières.

Dans certains cas, on dispose de deux manières d'agir, avec ou sans dénomination. Le choix de la dénomination est libre, un seul principe devant être respecté : elle doit être supérieure au diviseur. On peut même, afin de procéder plus commodément, changer de dénomination, une ou plusieurs fois, au cours de la même opération.
Voici un premier exemple de division effectuée d'abord sans, puis avec dénomination.

On divise par 6 668.

La division directe est simple : en 6, combien de fois 6, une fois, on place 1 dans la colonne des centaines, dans le quatrième emplacement, on procède de la même façon avec les dizaines puis avec les unités, pour constater qu'il reste, en ce qui concerne ces dernières, 2, nombre inférieur au diviseur, donc reste de la division.

Lorsque l'on utilise la méthode de la dénomination, on procède ainsi :

dividende : 668
diviseur : 6
dénomination : 10
différence (dénomination - diviseur) : 4

On divise 600 par 10, on obtient un premier quotient, 60 ; on multiplie ce quotient par la différence, 60 x 4 = 240, on ajoute à ce produit 68 (différence entre 668 et 600), on obtient 308. Choisissons une nouvelle dénomination, 15, ce qui nous donne une nouvelle différence, 9. Divisons 300 par 15 = 20, qui constitue un second quotient ; multiplions ce quotient par la différence, 20 x 9 =180, ajoutons les 8 unités qui ont été laissées de côté (308-300), cela nous donne 188. Prenons pour dénomination 9, qui nous donnera une différence de 3 ; divisons 180 par 9 ; le quotient est 20 ; multiplions-le par la différence, 20 x 3, cela fait 60, nombre auquel nous ajouterons les 8 unités que nous avons laissées de côté (188-180), 68 ; prenons 6 comme dénomination et divisons 60 par 6, le quotient est 10 ; il nous reste 8 unités (68-60) ; divisons 8 par le diviseur, le quotient est 1, avec un reste de 2, inférieur au diviseur, ce reste sera celui de la division, dont le quotient est fait de la somme de tous les quotients partiels, à savoir 60, 20, 20, 10 et 1, soit 111.

Les éléments qui permettent de construire un tel exemple ayant été donnés, on passe ensuite, dans les autres paragraphes du livre II, à l'étude des divisions simples effectuées sans choix d'une dénomination.

Gerbert propose d'abord la division de 666 par 6. L'opération est évidemment élémentaire (voir abaque figure 2). On divise ensuite 888 par 5. En 8, combien de fois 5 ? Une fois, il reste 3, que l'on convertit en 30 dizaines (unités de la colonne inférieure) ; en 30, combien de fois 5 ? 6 fois : en 8, combien de fois 5 ? Une fois, il reste 3, que l'on convertit en 30 unités ; en 30 combien de fois 5 ? 6 fois ; en 8 combien de fois 5 ? Une fois et il reste 3. Il convient d'additionner les résultats obtenus, 1, 6 + 1 = 7, 6 + 1 = 7, reste 3 : le quotient est 177, le reste 3 (voir abaque figure 3).

L'exemple suivant est la division de 333 par 6.

On place d'abord le diviseur sous le dividende dans la colonne des dizaines. En 33, combien de fois 6 ? 5 fois et il reste 3, que l'on convertit en 30 unités. On place le diviseur sous le nouveau dividende, dans la colonne des unités. En 33, combien de fois 6 ? 5 fois et il reste 3. Inscrits dans le quatrième espace, les quotients des opérations effectuées donnent le résultat recherché, 55, le reste étant 3 (voir abaque figure 4).

Cela ayant été montré, Gerbert indique la façon de procéder lorsqu'un intervalle demeure vide. Si, dans cette hypothèse, une difficulté particulière apparaît, c'est en raison de l'absence de représentation de zéro.
L'exemple choisi est le suivant : 1 098 divisé par 20.

Dividende et diviseur ayant été figurés sur l'abaque, on décale le diviseur d'une colonne vers la gauche et on le place sous le dividende. En 10, combien de fois 2 ? 5 fois, on inscrit 5 dans la colonne des dizaines du quatrième espace : on place le diviseur sous la colonne des dizaines. En 9, combien de fois 2 ? 4 fois et il reste 1, on écrit 4 dans la colonne des unités du quatrième espace ; ces deux opérations ayant été effectuées, il reste 18, nombre inférieur au diviseur. Le résultat de la division est donc acquis : avec un reste de 18, le quotient est 54 (voir abaque figure 5).

Au livre III, Gerbert revient de manière plus approfondie sur la division avec dénomination.

M. G. Beaujouan (**op. cit.**, p. 523) propose comme exemple 4019 : 87 (voir abaque figure 6). On pose le dividende, le diviseur et la différence -13-, la dénomination choisie étant 100. On divise 4 000 par 100 = 40, on multiplie 40 par la différence, 40 x 13 = 520 ; à 520, on ajoute les 19 unités laissées de côté, 539 ; on divise 500 par la dénomination, on obtient 5, que l'on multiplie par la différence, 5 x 13 = 65, on ajoute les 39 laissés de côté = 104 ; on divise 100 par la dénomination, le résultat est 1, que l'on multiplie par la différence, soit 13 ; à ce nombre on ajoute les 4 unités laissées de côté, ce qui donne 17, nombre inférieur au diviseur. Le résultat de l'opération complète est donc maintenant connu : le reste est 17, le quotient 40 + 5 + 1 = 46.

Le premier exemple exposé par Gerbert est le suivant : 77 068 : 6 807. La dénomination choisie étant 7 000, la différence est 193. On divise 70 000 par 7 000 = 10 ; on multiplie ce quotient par la différence : 193 x 10 = 1 930 ; on ajoute à ce produit 7 068, ce qui correspond à 77 068 - 70 000, on obtient ainsi 8 998. On divise alors 8 000 par 7 000 = 1 ; on multiplie 1 par la différence = 193 ; à 193 on ajoute 998 et le reste de la dernière division effectuée, soit 1 000. Cela donne 2 191, nombre qui est inférieur au diviseur posé à l'origine. Le résultat de l'opération complète est donc le suivant :

quotient : 10 + 1 = 11
reste : 2 191.

La disposition des nombres sur la planche est la même que celle qui est illustrée par la figure 6.

Un second exemple est proposé, 60 121 : 344.

On écrit :

- dividende : 60 121
- diviseur : 344
- différence : 56 (la dénomination est donc 400).

On divise 60 000 par 400 = 150 ; on multiplie 150 par 56, ce qui donne 8 400, nombre auquel on ajoute 121 = 8 521. On divise alors 8 000 par la dénomination : 8 000 : 400 = 20 ; on multiplie 20 par la différence et l'on ajoute à ce produit 521 : 20 x 56 = 1 120 ; 1 120 + 521 = 1 641 ; on divise 1 600 par la dénomination 1 600 : 400, on obtient 4, que l'on multiplie par la différence : 4 x 56 = 224 ; à ce nombre on ajoute ce qui a été laissé de côté à l'occasion de l'opération précédente, soit 41 : 224 + 41 = 265, nombre qui est inférieur au diviseur. Le résultat de l'opération est alors connu :

- reste : 265
- quotient : 150 + 20 + 4 = 174.

La disposition des nombres sur l'abaque n'appelle aucun commentaire nouveau, la méthode d'écriture étant celle qui est illustrée par les planches 5 et 6.

Une autre façon de procéder est possible. On ne pose aucune différence (donc on ne choisit aucune dénomination arbitraire). Gerbert donne trois exemples de divisions de cette nature. En voici un. On veut diviser 908 046 par 9 604. On pose le diviseur et le dividende. On déplace d'une ligne vers la gauche le diviseur. Combien de fois 9 en 90 ? Dix, mais on ne retient que 9 à cause des autres composantes du diviseur (il est évident que si l'on multipliait par 100 ce diviseur, on obtiendrait un nombre supérieur au dividende). On place donc 9 dans la colonne des dizaines du quatrième espace. On reporte 8 dans le troisième espace et l'on multiplie 9 par 6 = 54, que l'on retire de 90 = 36, que l'on pose dans le troisième espace, le 6 avec le 8 dans la colonne des milliers. On multiplie 9 par 4 = 36, que l'on retire soit de 3 000 soit de 600 (notés en fait 30 000 et 6 000 en raison du décalage primitivement opéré). Si la soustraction porte sur 30 000, on pose 29 640 ; si elle porte sur 600, on pose 564. On additionne alors les restes, qui vont constituer le nouveau dividende : 8 000 + 30 000 + 2 964 + 6 (=nombre d'unités au départ) = 43 686. On redécale le diviseur vers la droite. Combien de fois 9 en 40 ? Quatre, que l'on place dans la colonne des unités du quatrième espace ; 4 x 9 = 36 ; 40 - 36 = 4 ; on pose 4 dans le troisième espace ; 4 x 6 = 24, que l'on enlève de 40 : 40 - 24 = 16, il reste 16, que l'on pose ; 4 fois 4 = 16, que l'on retire de 600, il reste 584. On additionne les restes : 1 000 + 584 + 3 686 = 5 270, que l'on place de façon à en faire le nouveau dividende. Ce nombre est inférieur au diviseur. Il constitue donc le reste de l'opération, dont le résultat complet est désormais connu, puisque le quotient figure dans le quatrième espace : 94.

Le détail des calculs effectué est représenté sur la planche d'abaque 7.

Les deux méthodes proposées par Gerbert, celle qui fait intervenir une dénomination et une différence et celle qui s'accomplit sans elles, appellent des commentaires mathématiques.

Etudions d'abord la division avec dénomination et différence.

L'intérêt de la méthode, globalement défini, est de diminuer à chaque opération accomplie le dividende.

La démonstration concernant le procédé mis en oeuvre s'appuie sur le théorème de la division euclidienne : a et b étant deux entiers naturels, il existe un couple unique (q,r) tel que a = bq +r.

On part donc de a = bq + r. On cherche q et r.

On décompose $a = A + \alpha$

$b = d - \Delta$ (dénomination - différence).

L'habileté de l'opération consiste à bien choisir A et d, de sorte que l'on puisse facilement diviser A par d.

On écrit $A + \alpha = (d - \Delta)\, q + r$.

La division euclidienne de A par d donne $A = dX + Y$ (où X et Y sont quotient et reste). En reportant, on obtient $dX + Y + \alpha = dq - \Delta q + r$. On pose alors $q' = q - X$. De ce qui a été écrit précédemment, on tire $Y + \alpha = dq' - \Delta(q' + X) + r$, soit encore $Y + \alpha + \Delta X = (d - \Delta)q' + r$. Or $d - \Delta = b$, donc $Y + \alpha + \Delta X = bq' + r$. Par hypothèse, on a choisi $d > \Delta$, donc $Y + \alpha + \Delta X < y + \alpha + dX$, ce qui vaut a. On a bien un nouveau dividende plus petit, si bien que l'on a effectivement progressé.
Proposons maintenant une application numérique commentée.

Divisons 7 212 par 334, en retenant comme dénomination 700, ce qui fait une différence de 366.

On écrit $7\,212 = 334\, q + r$; $7\,212 = 7\,000 + 212 = q\,(700 - 366) + r$;

je pose $q = q_1 + 10$ (quotient de la division de 7 000 par 700) ;

$212 = 700\, q - 7\,000 - 366\, q + r$;

$212 = 700\,(q - 10) - 366\,(q_1 + 10) + r$;

$212 = 700\, q_1 - 366\, q_1 - 3\,660 + r$;

$3\,660 + 212 = 334\, q_1 + r$; $3\,872 = 334\, q_1 + r$.

On passe alors à une seconde étape :

$3\,872 = 3\,000 + 872 = q_1\,(700 - 366) + r$;

je remplace 3 000 par 4 fois 700 + 200 (je divise 3 000 par la dénomination 700) ;

je peux écrire $200 + 872 = 700\, q_1 - (4 \times 700) - 366\, q_1 + r$;

je pose alors $q_2 = q_1 - 4$.

Il s'ensuit que $200 + 872 = 700\, q_2 - 366\,(q_2 + 4) + r$;

d'où $200 + 872 + (4 \times 366) = 334\, q_2 + r$; $1\,072 + 1\,464 = 334\, q_2 + r$;

donc $2\,536 = 334\, q_2 + r$.

Nous arrivons alors à la troisième étape :

$2\ 536 = 2\ 000 + 536 = (700 - 366)\ q_2 + r$;

je divise 2 000 par 700, le quotient est 2 avec un reste s'élevant à 600.

J'écris $(2 \times 700) + 600 + 536 = 700\ q_2 - 366\ q_2 + r$.

Je pose $q_3 = q_2 - 2$; $600 + 536 = 700\ q_3 - 366\ (q_3 + 2) + r$;

$600 + 536 + (2 \times 366) = 334\ q_3 + r$;

$1\ 868 = 334\ q_3 + r$;

$1\ 000 + 868 = q_3 \quad (700 - 366) + r$; $700 + 300 + 868 = 700\ q_3 - 366\ q_3 + r$;

je pose alors $q_4 = q_3 - 1$; $300 + 868 = 700\ q_4 - 366\ (q_4 + 1) + r$;

$366 + 300 + 868 = 334\ q_4 + r$;

$1\ 000 + 534 = (700 - 366)\ q_4 + r$;

$700 + 300 + 534 = 700\ q_4 - 366\ q_4 + r$;

je pose $q_5 = q_4 - 1$; $300 + 534 = 700\ q_5 - 366\ q_5 - 366 + r$; $1\ 200 = 344\ q_5 + r$;

$1\ 000 + 200 = 344\ q_5 + r$; $300 + 700 + 200 = 700\ q_5 - 366\ q_5 + r$;

je pose $q_6 = q_5 - 1$;

$300 + 200 + 366 = 344\ q_6 + r$;

$866 = 344\ q_6 + r$;

$100 + 700 + 66 = 700\ q_6 - 366\ q_6 + r$;

je pose $q_7 = q_6 - 1$;

$100 + 66 + 366 = 334\ q_7 + r$;

$532 = 334\ q_7 + r$;

je pose $q_8 = q_7 - 1$;

$532 = 334\ q_8 + 334 + r$;

$198 = 334\ q_8 + r$,

or $q_8 = 0$, puisque 198 : 334 a pour quotient 0 .

Donc $r = 198$;

$q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5 + q_6 + q_7 = 10 + 4 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 21$.

Passons à la division accomplie sans choix d'une dénomination (et donc sans différence). L'étude sera illustrée par l'exemple de Gerbert, à savoir 908 046 : 9 604.

J'écris $908\ 046 = 9\ 604\ q + r$.

Gerbert procède d'abord à un décalage : $q_0 = q / 10$; $900\ 000 + 8\ 046 = 96\ 040\ q + r$.

Gerbert décompose encore : $900\ 000 + 8\ 046 = 90\ 000\ q_0 + 6\ 040\ q_0 + r$.

En 90, combien de fois 9 ? Réponse 10 fois, mais on ne prend que 9, pour tenir compte des autres chiffres du diviseur.

Je pose $q_0 = 9 + q_1$. Je place 9 dans la colonne des dizaines.

On écrit $900\ 000 + 8\ 046 = 90\ 000\ (9 + q_1) + 6\ 040\ (9 + q_1) + r$;

$900\ 000 + 8\ 046 = 810\ 000 + 90\ 000\ q_1 + (9 \times 6\ 040) + 6\ 040\ q_1 + r$;

d'où 90 000 + 8 046 = 96 040 q_1 + 54 000 + 360 + r.

Gerbert retire les 54 000 des 90 000, ce qui donne :

30 000 + 6 000 + 8 046 = 96 040 q_1 + 360 + r.

Deux façons de procéder se présentent alors :

A) on retire les 360 de 30 000 ;

B) on les retire de 6 000. Le choix est libre. Gerbert ne développe que le procédé *A)*

Donc 6 000 + 29 640 + 8 046 = 96 040 q_1 + r ;

43 686 = 96 040 q_1 + r.

Il convient de bien remarquer que, puisque $q_1 = q_0 - 9$ et que $q_0 = 9/10$, et que par conséquent $q_1 = 9/10 - 9$, q_1 n'est pas un entier. On ne peut donc pas appliquer ici le théorème de la division euclidienne.

La première étape de l'opération est alors achevée.

Gerbert redécale le diviseur dans l'autre sens, ce qui revient à dire $q_2 = 10\ q_1$;

43 686 = 9 604 q_2 + r ;

on écrit 43 686 = 9 604 q_2 + r ;

40 000 + 3 686 = 9 000 q_2 + 604 q_2 + r.

En 40, combien de fois 9 ? Réponse : 4 fois.

On pose 4 dans la colonne des unités du quatrième espace.

On pose alors $q_2 = q_3 + 4$.

En reportant, on obtient 40 000 + 3 686 = 9 000 q_3 + 36 000 + 604 (q_3 + 4) + 2 ;

4 000 + 3 686 = 9 604 q_3 + (4 x 604) + 2 ;

4 000 + 3 000 + 686 = 9 604 q_3 + 2 400 + 16 + 2 ;

1 600 + 3 000 + 686 = 9 604 q_3 + 16 + r ;

5 270 = 9 604 q_3 + r ;

5 270 = 9 604 q_3 + r, donc $q_3 = 0$ et r = 5 270.

Le résultat complet de l'opération est alors connu.

Les explications que l'on vient de fournir ne permettent pas de saisir l'un des enseignements du texte latin de Gerbert : la joie, l'enthousiasme du maître et du mathématicien. Pour les montrer clairement, il faudrait construire une analyse philologique du texte, qui permettrait de rendre pleinement hommage à son auteur.

Comme il n'est pas question de la proposer ici, j'ai cherché comment, en guise de conclusion, on pourrait rendre, devant des mathématiciens, d'une autre manière, à Gerbert, cet hommage auquel il a bien droit. Aussi vais-je, comme je l'ai annoncé dans mon introduction, vous proposer une informatisation de la division par différence, sous la forme d'un programme GERBERT en turbo pascal (version IV) et en Basic. Nous célèbrerons ainsi les noces de la philologie, non pas avec Mercure, mais avec les Mathématiques et l'Informatique.

```
program Gerbert_division_par_la_methode_des_differences;

var
  dividende, diviseur, denomination, difference : longint;
  p, a, alpha, x, y, reste, quotient            : longint;

begin
  quotient := 0;
  write('dividende ? '); readLn(dividende);
  write('diviseur  ? '); readLn(diviseur);
  while dividende >= diviseur do
    begin
      repeat
      write('denomination ? ( >',diviseur,' )  '); readLn(denomination);
      until denomination > diviseur ;
      difference := denomination - diviseur;
      writeLn('          La différence est :  ', difference);
      {-----------------------------------------------------------------}
      p := 1;
      while dividende/p > 10 do
            begin
              p := 10*p     {  decomposition du dividende en A + alpha }
            end;
      a :=  (dividende div p)*p;
      alpha := dividende - a;
     {-----------------------------------------------------------------}
      x := a div denomination;        { Ces opérations sont simples et  }
      y := a mod denomination;        { peuvent être effectuées de tête }
     {-----------------------------------------------------------------}
     if x=0         { Cas où le dividende est plus petit que la dénomination }
         then
           begin
             writeLn('            Je pose 1 ');
             quotient := quotient + 1;
             y := y - diviseur ;
         end;
      {-------------------------------------------------}
      if x<>0 then writeLn('          Je pose ', x);
      quotient := quotient + x;
      dividende := y + alpha + difference*x;
      writeLn('          Le nouveau dividende est ', dividende);
      end;
    reste := dividende;
    writeLn;
    writeLn('      quotient ', quotient);
    writeLn('      reste ', reste);
    readLn;
  end.
```

Premier exemple

```
dividende ? 668
diviseur  ?  34
denomination ? ( >34 ) 40
          La différence est :  6
          Je pose 15
          Le nouveau dividende est 158
denomination ? ( >34 ) 50
          La différence est :  16
          Je pose 2
          Le nouveau dividende est 90
denomination ? ( >34 ) 40
          La différence est :  6
          Je pose 2
          Le nouveau dividende est 22

      quotient 19
      reste 22
```

Deuxième exemple

```
dividende ? 5197269
diviseur  ?  413422
denomination ? ( >413422 )  1000000
          La différence est :  586578
          Je pose 5
          Le nouveau dividende est 3130159
denomination ? ( >413422 )   500000
          La différence est :  86578
          Je pose 6
          Le nouveau dividende est 649627
denomination ? ( >413422 )   5000000
          La différence est :  86578
          Je pose 1
          Le nouveau dividende est 236205

      quotient 12
      reste 236205
```

```
10 quotient=0
20 input "Dividende ";dividende
30 input "Diviseur ";diviseur
40 input "Denomination";denomination
50 difference=denomination-diviseur
60 print "          La difference est : ";difference
70 p=1
80 if dividende/p>10 then p=10*p:goto 80
90 a=int(dividende/p)*p
100 alpha=dividende-a
110 x=int(a/denomination)
120 y=a-x*denomination
130 IF x=0 then print "          Je pose 1":quotient=quotient+1:y=y-diviseur
140 IF x<>0 then print "            Je pose ";x
150 quotient=quotient+x
160 dividende=y+alpha+difference*x
170 print "          Le nouveau dividende est ";dividende
180 IF dividende >= diviseur THEN goto 40
190 reste=dividende
200 print "            Quotient : ";quotient
210 print "            Reste    : ";reste
```

ABAQUE : Figure n° 1

M	C	X	S
		I	II
	I	IIII	IIII
		I	II

Les figures suivantes contiennent des chiffres arabes, qui doivent en faciliter l'interprétation

ABAQUE : Figure n° 2

M	C	X	S
			6
	6 6	6 6	6 6
	1	1	1

ABAQUE : Figure n° 3

M	C	X	S
			5
	8 5	8 3 5 5	8 3 5
	1	6 1	6 1
	1	7	7

ABAQUE : Figure n° 4

M	C	X	S
			6
	3	3 6	3 3 6 3
		5	5

ABAQUE : Figure n° 5

M	C	X	S
		2	
	1 2	9 2 1 2 1	8 8
		5	4

ABAQUE : Figure n° 6

CM	XM	M	C	X	S
				1 8	3 7
		4	 5	1 2	9
			5 1	3 6 1	9 5 4 3
				1	7
				 4 4	1 5 6

Les nombres "en gras" placés à droite de l'abaque indiquent l'ordre des opérations qui sont effectuées.

ABAQUE : Figure n° 7

CM	XM	M	C	X	S	
		9	6		4	**9**
	9	6		4		**3**
		9	6		4	**2**
		5	2	7		**1 4**
	4	3	6	8	6	**8**
9		8		4	6	**1**
		8				**5**
	3	6				**6**
	2	9	6	4		**7 a**
		5	6	4		**7 b**
		4				**1 1**
		1	6			**1 2**
			5	8	4	**1 3**
				9		**4**
					4	**1 0**

Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

MATHEMATIQUES CONSTRUCTIVES : HIER ET DEMAIN

Henri LOMBARDI
Faculté des Sciences et Techniques de Besançon

Introduction

Nous sommes arrivés dans une période où le goût des "grandes abstractions" est un peu retombé en mathématiques.
Cela tient en partie au développement des méthodes numériques efficaces dû à l'explosion informatique.
Par ailleurs, les ordinateurs, gros et moins gros, savent désormais manipuler des expressions formelles compliquées, calculer des intégrales sous forme littérale explicite ....
Cela a augmenté l'intérêt général pour les méthodes algorithmiques, et pas seulement dans le cadre de l'analyse numérique.
Enfin, la communauté mathématique a toujours été intéressée à rendre effectifs des résultats d'existence "abstraits". Une preuve d'existence qui donne un moyen algorithmique de construire l'objet (dont on affirme qu'il existe) est considérée par tout le monde comme supérieure à une preuve d'existence purement abstraite.

En 1967, le livre de Bishop "Foundations of Constructive Analysis" a créé une certaine surprise: ce livre démontrait dans la pratique que les résultats de base de l'analyse classique pouvaient être rendus "effectifs", "algorithmiques".
Autrement dit, les méthodes algorithmiques ne sont pas seulement praticables en algèbre pour des structures énumérées, mais dans tout le domaine mathématique.
Ce livre est cependant passé pratiquement inaperçu en France. Et alors que tous les mathématiciens sentent spontanément la différence entre une méthode abstraite et une méthode constructive, l'opposition radicale des deux méthodologies n'est pas clairement identifiée.

Trois exemples d'opposition entre les méthodologies cantoriennes et constructives

Constructions ... géométriques

Etant donnée une droite D du plan euclidien, nous noterons σ_D la symétrie orthogonale par rapport à la droite D . Un théorème affirme que pour trois droites D_1 , D_2 , D_3 , on a l'égalité $\sigma_{D_1}\,\sigma_{D_2}\,\sigma_{D_3} = \sigma_{D_3}\,\sigma_{D_2}\,\sigma_{D_1}$ si et seulement si les trois droites sont parallèles ou concourantes.

Nous n'examinerons pas la démonstration de ce résultat, mais une construction géométrique qui lui est reliée:

> On donne deux droites distinctes D_1 , D_2 , et un point M extérieur à ces deux droites. Construire une droite D_3 passant par M et telle qu'on ait l'égalité ci-dessus.

Du point de vue cantorien abstrait habituel

Il n'y a pas à proprement parler de problème de construction. On dira:

1er cas : les deux droites sont sécantes en un point I : on trace la droite (IM).

2ème cas : les deux droites sont parallèles : on trace la parallèle passant par M.

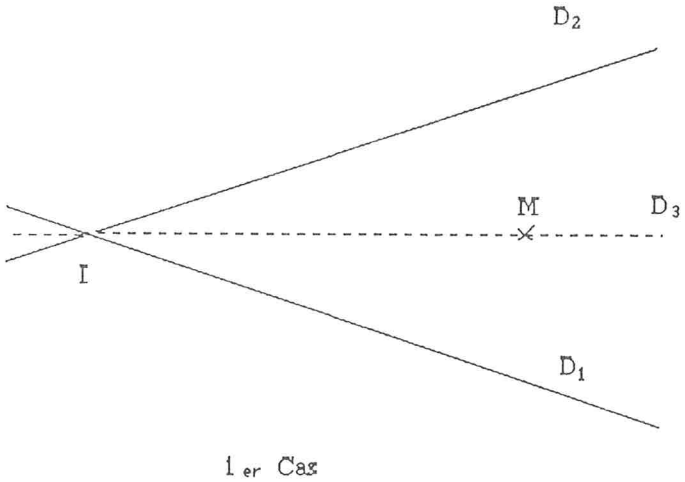
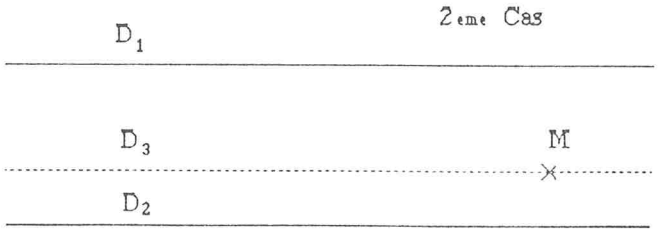


figure 1



Du point de vue du dessinateur qui dispose d'une feuille de papier fini sur laquelle

sont tracées les deux droites et le point

si les deux droites se coupent en dehors de la feuille de papier, on résout le problème par une construction de 3ème concourante.

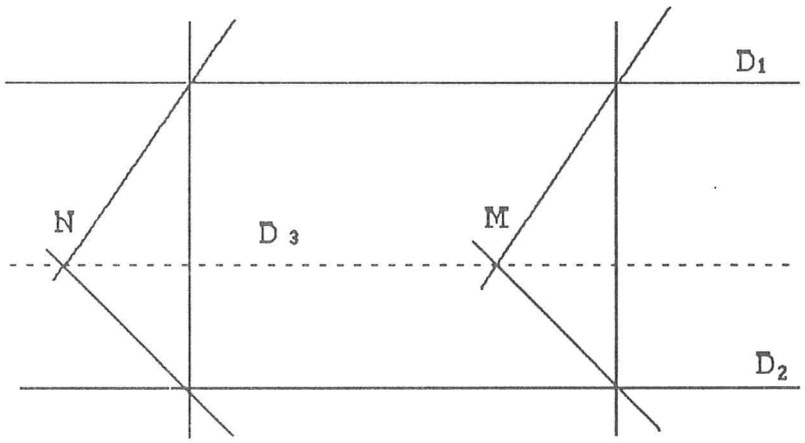


Figure 2

Il est à noter que cette construction donne aussi le bon résultat lorsque les deux droites sont parallèles.

Du point de vue des mathématiques constructives

On considère qu'on dispose d'une feuille de papier fini, mais arbitrairement grande. On n'a donc aucune méthode *générale* pour décider si deux droites qui *semblent* parallèles sont sécantes ou non. La construction du dessinateur nous sauve cependant la mise. Il y a donc un concept constructif de 3ème concourante, qui recouvre le cas de la 3ème concourante lorsque les deux droites de départ sont sécantes et celui de la 3ème parallèle lorsque les deux droites de départ sont parallèles.

A noter cependant que les deux droites de départ doivent être clairement distinctes.

Ainsi le point de vue constructif apparaît comme une abstraction "raisonnable" de celui du dessinateur, tandis que le point de vue cantorien, qui accepte le plan euclidien comme une totalité préexistante, est une abstraction "purement idéale".

Remarques

Le dessinateur est confronté à d'autres limitations que celle due à la taille finie, fixée a priori, de sa feuille de papier. Pour lui, en effet :

- deux points distincts mais "trop proches" ne définissent pas une droite
- deux droites sécantes mais "faisant un angle trop petit" ne définissent pas un point d'intersection
- un cercle de rayon trop petit ne peut pas être tracé
- le point de contact entre un cercle et une droite tangente doit être construit (alors qu'il est parfaitement défini comme unique point commun au cercle et à la droite).

En mathématiques constructives, on a des limitations tout à fait analogues:

– on ne peut pas dire "soit D une droite passant par A et B" sauf si on est assuré que les deux points sont clairement distincts, ou qu'ils sont confondus.

– etc...

Une preuve en arithmétique

On considère le théorème d'existence du PGCD de 2 nombres entiers positifs.

$$\forall\, a, b \in \mathbb{N}^+ \;\; \exists\, c \in \mathbb{N}^+ \;\; \forall\, d \in \mathbb{N}^+ :$$
$$d \text{ divise } c \iff d \text{ divise } a \text{ et } b$$

Preuve constructive

1) on décrit l'algorithme d'Euclide (divisions successives)

2) on démontre qu'il se termine en moins de .... étapes

3) on prouve que le dernier reste obtenu, c est PGCD de a et b

4) on améliore un tout petit peu l'algorithme, de manière à ce qu'il fournisse en outre la relation de Bezout $u.a + v.b = c$ (avec u et v dans $\mathbb{Z}$).

Preuve cantorienne

1) on démontre le résultat général suivant:

toute partie non vide de $\mathbb{N}^+$ possède un plus petit élément

2) on considère la partie I de $\mathbb{N}^+$ définie par

$$I := \{x \in \mathbb{N}^+ ; \exists\; u, v \in \mathbb{Z} \;, u.a + v.b = x\}$$

on considère le plus petit élément c de I , et on démontre facilement que c est PGCD de a et b.

Le théorème est prouvé, et sans effort supplémentaire, on obtient l'existence "abstraite" d'une relation de Bezout.

Commentaires

La preuve cantorienne est plus élégante. Sans doute même éclaire-t-elle mieux le problème.

Cependant, elle ne fournit aucun moyen de construire le PGCD ou la relation de Bezout.

Si on veut rendre constructive la démonstration cantorienne, on procédera comme suit:

– le résultat (1) est vrai constructivement sous la forme suivante :

si on sait tester l'appartenance d'un entier à une partie explicitement non vide de $\mathbb{N}^+$, alors on sait construire le plus petit élément de cette partie

– pour utiliser le résultat (1) dans la deuxième partie du raisonnement, il faut donc montrer qu'il existe un test d'appartenance pour la partie I considérée.

C'est faisable, au prix de la perte de l'élégance de la démonstration.

En outre, on se rendra facilement compte du fait que l'algorithme sous-jacent à cette démonstration est beaucoup moins performant que l'algorithme d'Euclide: si a et b sont de l'ordre

de 1 million, l'algorithme d'Euclide va demander une trentaine d'étapes et l'autre algorithme en moyenne 500 mille étapes.

Un théorème d'analyse

On considère le théorème des valeurs intermédiaires.

> Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue
> avec $f(a) < 0 < f(b)$
> alors $\exists\ c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$

Les premières démonstrations de ce théorème remontent à Bolzano et à Cauchy.
Bolzano donne une démonstration du type " borne supérieure des x où $f(x) \leqslant 0$ ". Pour lui, il s'agit de parachever les démonstrations par Gauss du théorème fondamental de l'algèbre. Bolzano remarque que les différentes démonstrations proposées utilisent toutes des arguments du genre "théorème des valeurs intermédiaires".
Or, dit Bolzano, en toute rigueur, l'évidence géométrique ne doit pas être utilisée pour démontrer un résultat dans un domaine où la géométrie n'a rien à voir.
Pour Cauchy, l'évidence géométrique du théorème est suffisamment forte (dans son cours à l'Ecole Polytechnique) mais il prend quand même la peine de donner en annexe une démonstration par dichotomie pour ceux qui veulent une preuve relevant purement de l'analyse.
Nous allons voir qu'en fait, le théorème des valeurs intermédiaires, sous sa forme la plus générale, n'est pas démontrable constructivement. Ainsi, Bolzano, qui pensait avoir achevé la preuve de Gauss, n'avait fait que la moitié du travail. C'est Brouwer, au début du XX^{ème} siècle, qui donnera la première preuve constructive du théorème fondamental de l'algèbre.
Nous allons d'abord présenter l'algorithme classique par dichotomie, avant de le critiquer et de proposer quelques substituts au théorème "abstrait" des valeurs intermédiaires.

L'algorithme par dichotomie classique

Algorithme Zéro Dichotomie Exacte

Description des variables utilisées

```
nombres rationnels
a,b      :  bornes de l'intervalle
u, v     :  approximation par défaut et par excès de la racine
w        :  (u+v)/2
epsilon  :  majoration de l'erreur souhaitée
z        :  valeur approchée de la racine

Signes: (+1, -1  ou  0)
Su, Sv, Sw :     signes de la fonction aux points u, v, w

fonction continue sur   [a, b] :
f        :  la fonction dont on cherche un zéro
```

Cet algorithme traite les entrées a, b, epsilon, f et donne en sortie une valeur approchée (à epsilon près) z d'une racine c de f sur [a , b], la racine c ne dépendant pas de epsilon. La fonction f doit changer de signe aux bornes de l'intervalle de départ. L'algorithme donne un résultat sûrement correct si le calcul du signe de f(x) est effectif.

Algorithme détaillé

```
Module ZERO DICHOTOMIE EXACTE
    Variables
      entrées     : a, b, f, epsilon
      retournées  : z
      locales     : u, v, w, Su, Sv, Sw
Début
     u ← a; v ← b;
     Su ← Signe(f(u)); Sv ← Signe(f(v)) ;
     Si  Su.Sv < 0  alors
          Début
          Répéter
               w ← (u+v)/2;
               Sw ← Signe(f(w));
               Si  Su.Sw > 0  alors  u ← w  sinon  v ← w;
               Si  Sw = 0  alors  u ← w;
          jusqu'à ce que  |u - v|  < 2.epsilon ;
          z ← (u+v)/2
          fin
     sinon  signaler "intervalle mal choisi"
fin
```

Commentaire

L'algorithme ne tourne en pratique que si on sait déterminer les signes successifs de f(w). Donc, si f est donnée, de manière absolument générale en tant que fonction uniformément continue sur l'intervalle considéré, l'algorithme ne tourne pas à tout coup: il peut très bien échouer à tester le signe de f(w) pour une certaine valeur de w .

D'ailleurs, cet algorithme fournit un zéro (calculé avec une précision arbitraire) qui ne dépend que de la fonction f . Mais une méthode algorithmique générale (traitant en entrée une fonction continue avec f(a) et f(b) fixés par exemple) et qui fonctionne de manière *extensionnelle* (c'est à dire que le résultat ne dépend que de la donnée f en tant que fonction, et non de la manière dont cette donnée est présentée) donne obligatoirement un résultat qui dépend continûment de la donnée f . Ceci parce qu'un algorithme n'a accès qu'à un nombre fini d'informations au cours de son calcul.

Or, manifestement, le calcul du zéro d'une fonction f strictement croissante (pour ne considérer que ce cas) ne peut pas être prolongé *continûment* aux fonctions croissantes "tout court".

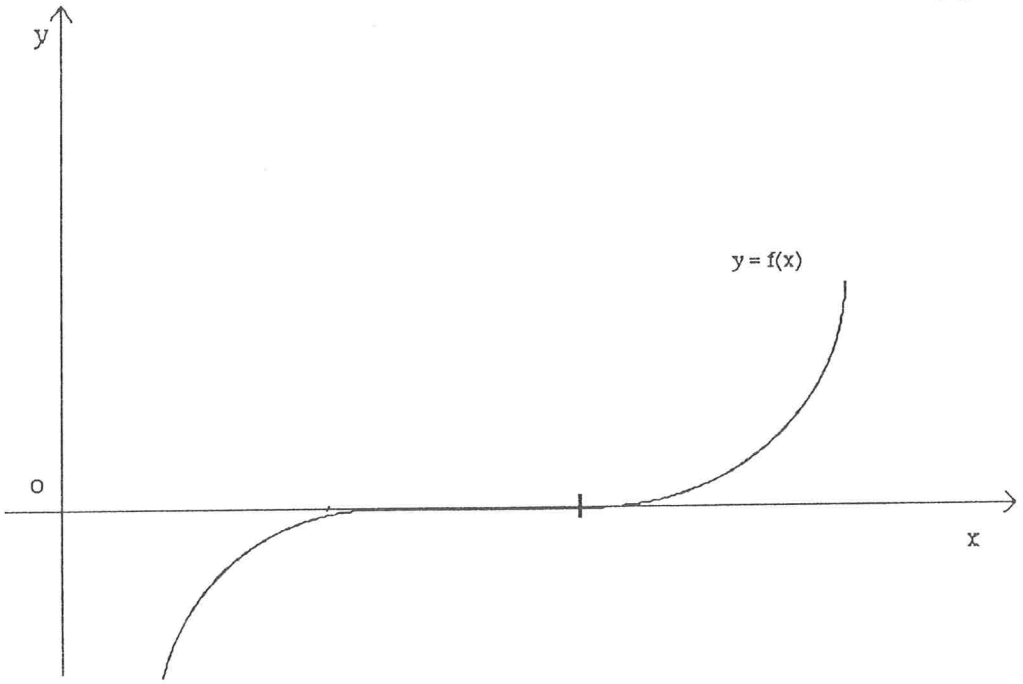


figure 3 : une fonction très voisine de f (pour la norme uniforme) peut avoir un zéro unique très éloigné de celui de f

Quelles sortes d'objets sont un nombre réel, une fonction continue, d'un point de vue algorithmique, constructif ?

Un nombre réel x est connu lorsqu'on connaît, pour chaque entier n un nombre rationnel qui approche x à $1/2^n$.
Une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est connue *en tant que fonction continue* lorsqu'on connaît, pour chaque entier n une approximation rationnelle de f avec la précision $1/2^n$, pour la norme uniforme. (par "approximation rationnelle" on entendra une fonction linéaire par morceaux rationnels).
Remarque : on traite de la même manière tous les espaces métriques complets séparables.

On voit que de ce point de vue, un nombre réel ou une fonction continue peuvent très bien être considérés comme une entrée ou une sortie d'un algorithme.
Nous sommes fondamentalement dans la même situation que celle décrite pour le plan euclidien: nous avons accès à une partie finie, mais arbitrairement grande, de l'information contenue dans l'objet considéré.

Le lecteur se demande sans doute ici s'il est bien sérieux d'envisager de faire de l'analyse sans le théorème des valeurs intermédiaires. Nous allons expliquer comment la difficulté peut être tournée.

Trois théorèmes constructifs qui explicitent les significations réelles du théorème des valeurs intermédiaires

Hypothèse : soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue avec $f(a) < 0 < f(b)$

Théorème 1 (le théorème pour les physiciens)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists c \in [a, b] : \quad |f(c)| \leqslant \varepsilon$$

L'algorithme se déduit aisément de l'algorithme de dichotomie classique: on calcule un rationnel approchant $f(w)$ à $\varepsilon/2$, ce qui permet de situer $f(w)$ sur un intervalle rationnel de longueur $\leq \varepsilon$. On en déduit : $f(w) < 0$ ou $f(w) > 0$ ou $|f(w)| \leq \varepsilon$. On montre que l'algorithme termine en un temps fini en utilisant la continuité uniforme de la fonction f (continuité uniforme qui est connue de manière explicite).

Théorème 2 (le théorème pour les pinailleurs)

Si $f(x)$ est clairement distinct de 0 pour tout $x \in \mathbb{Q} \cap [a, b]$, alors $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$

En particulier, il est absurde de supposer que pour tout $x \in [a, b]$, $f(x)$ soit clairement distinct de 0.

En effet, sous l'hypothèse énoncée, l'algorithme par dichotomie classique "tourne": quand un nombre est supposé clairement distinct de 0, il suffit de le calculer avec une précision suffisante pour connaître son signe.
La deuxième affirmation du théorème explicite le contenu constructif du théorème des valeurs intermédiaires classique. On voit que cela présente un intérêt relativement limité.
La première affirmation du théorème s'applique par exemple pour une fonction polynôme à coefficients rationnels. Cela ne suffit pas pour traiter tous les polynômes à coefficients réels. Néanmoins, on peut démontrer le théorème suivant:

Théorème 3 (pour les fonctions analytiques réelles)

Si $f(x)$ est une fonction analytique réelle, alors $\exists c \in [a, b] : f(c) = 0$

La démonstration de ce théorème est relativement difficile, et il faut bien expliciter le contenu algorithmique de l'affirmation "f est une fonction analytique réelle". Si le but est de démontrer le théorème fondamental de l'algèbre, on pourra se limiter aux fonctions polynômes à coefficients réels, pour lesquelles une preuve relativement simple peut être donnée.

Il faut noter cependant qu'il existe des preuves du théorème fondamental de l'algèbre reposant sur une évidence géométrique : par exemple on pose $z = r\,e^{i\theta}$, et on regarde comment évolue la courbe fermée obtenue pour r fixé et θ variable, lorsque r varie de 0

à ∞ . C'est sûrement une démonstration beaucoup plus éclairante du théorème, même si elle manque de rigueur dans la mesure où il est difficile d'en déduire un algorithme de calcul d'une racine du polynôme.

Points de repère historiques concernant le débat philosophique

On aura remarqué que la différence entre les deux méthodologies (constructive et cantorienne) repose sur une différence d'attitude à l'égard de l'infini.
Le point de vue constructif tient l'infini pour une abstraction de caractère "négatif" (l'ensemble des nombres entiers n'est jamais épuisé), et se rattache à la tradition grecque de l'infini potentiel.
Le point de vue cantorien estime l'existence d'ensembles infinis "en acte" comme assurée, au moins dans un univers mathématique idéal. En conséquence, on peut raisonner avec les ensembles infinis de la même manière qu'avec les ensembles finis, sans précautions supplémentaires.
Les points de repère qui suivent se veulent tout sauf exhaustifs et objectifs. Ils sont écrits d'*un* point de vue constructif (parmi d'autres).

L'infini chez les grecs

Chez Euclide, une droite n'existe jamais "en entier". Il y a seulement des segments de droites, qu'on peut prolonger "à volonté".
Le nombre $\sqrt{2}$ ne peut pas être *nommé,* il n'a pas le statut d'un nombre parce qu'il ne possède pas de description arithmétique finie (ce n'est pas une fraction).
Une théorie de la comparaison des rapports de grandeurs est développée, qui permet de parler des nombres réels sans jamais les nommer comme "infinis actuels". Comme en mathématiques constructives, l'égalité est de nature négative (double réduction à l'absurde), alors que les inégalités strictes ont un caractère positif.
Cette distinction entre énoncés de caractère positif et énoncés de caractère négatif disparaît si l'on admet que " deux négations valent une affirmation".
Le paradoxe de Zénon nous parle aussi de l'infini. Il peut être interprété comme une réfutation de la possibilité d'existence de l'infini actuel.

La crise des infinitésimaux

L'efficacité du calcul différentiel et de la méthode des infinitésimaux prépare le terrain pour la reconnaissance d'un statut "ordinaire" accordé à l'infini. C'est en raisonnant sur des infiniment grands et infiniment petits *comme si* c'était des quantités finies, c'est à dire en

se débarrassant des scrupules imposés par la tradition grecque, qu'on obtient, par des méthodes uniformes et extraordinairement efficaces, des résultats qui auparavant étaient inaccessibles ou dans le meilleur des cas demandaient une ingéniosité toujours renouvelée.
Les notions de nombre réel et de fonction s'avèrent des notions fondamentales.
Cependant, on ne trouve pas de justification convaincante pour ces objets qui sont des sortes d'infinis en acte.
La crise sera résolue en chassant les infinitésimaux au profit de la notion de limite, mais en accordant un statut à part entière aux nombres réels en tant qu'infinis actuels.
Il faudra attendre l'analyse non standard d'A. Robinson dans les années 60 pour s'apercevoir que les infinitésimaux ne sont ni plus ni moins sulfureux que les nombres réels. Dans sa version Internal Set Theory, l'analyse non standard peut aujourd'hui être considérée comme une meilleure heuristique de l'analyse constructive que l'analyse classique.

La crise des géométries non euclidiennes

L'existence des géométries non euclidiennes, tout aussi cohérentes que la géométrie euclidienne, introduit un bouleversement conceptuel concernant la notion de vérité, et la place des mathématiques.
Avant les géométries non euclidiennes, on pouvait croire à l'existence d'une vérité géométrique "absolue", que l'esprit humain, par la seule force de son raisonnement, arrivait à maîtriser.
Après, tout change. L'esprit humain ne fait plus que proposer des modèles mathématiques imparfaits pour une description proprement humaine d'une réalité extérieure fuyante et insaisissable dans sa totalité. Il va maintenant falloir mesurer la somme des angles de très grands triangles et regarder des étoiles cachées derrière le soleil pour savoir dans quel univers on vit. La vérité perd son caractère absolu pour devenir une construction proprement humaine et donc très relative. A tous points de vue, nous ne sommes plus au centre du monde, mais bel et bien perdus dans un coin de galaxie.
Cette notion de vérité mathématique construite par l'esprit humain est au coeur de la problématique intuitionniste de Brouwer.

Cantor et l'avènement de l'infini actuel

On a du mal à imaginer à quel point Cantor heurtait de front les conceptions établies en introduisant la théorie des ensembles infinis "actuels". C'était à l'époque un véritable acte de foi. Ses articles étaient systématiquement refusés par Kronecker. Des affirmations telles que "$\mathbb{N}$ est strictement plus petit que $\mathbb{R}$" semblaient relever de la folie. Et Cantor lui-même avait du mal à admettre que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ont le même cardinal.

Cependant, c'est bien grâce aux infinis actuels de Cantor qu'on a pu donner une "construction" de l'ensemble des nombres réels, ou la définition générale de la notion de fonction.

Les paradoxes de la théorie des ensembles et les avatars de l'hypothèse du continu

Les constructions d'infinis autorisés par la théorie des ensembles de Cantor sont a priori aberrantes: imaginez par exemple que vous mettez une relation de bon ordre sur $\mathbb{R}$, puis que par récurrence transfinie sur ce bon ordre vous construisez à chaque étape l'ensemble des parties de la réunion des ensembles précédemment construits, en ayant démarré avec l'ensemble $\mathbb{N}$ .... au bout du compte vous obtenez quelque chose de vraiment très très très GROS, et dont l'utilité mathématique est tout à fait contestable.

Certains ensembles infinis s'avèrent de toute manière trop grands, trop infinis: par exemple

$$X = \{ x ;\ x \text{ est un ensemble tel que } x \notin x\}$$

Ensemble pour lequel on a $X \in X \iff X \notin X$.

On se tirera d'affaire en décrétant que les ensembles trop infinis ne sont pas des ensembles, mais des classes[1]. La théorie formelle correspondante n'a depuis donné lieu à aucune contradiction logique.

Par ailleurs Brouwer développe une réfutation systématique de la notion d'infini actuel et met en pratique des mathématiques où le principe du tiers exclu n'est plus admis pour les affirmations correspondant à une infinité de vérifications. La logique sous-jacente sera formalisée par Heyting, sous le nom de logique intuitionniste.

Enfin, la comparaison des infinis selon leur taille va réserver quelques surprises.

Cantor passera la fin de sa vie à essayer, sans succès, de démontrer "l'hypothèse du continu": il n'y a pas de cardinal strictement compris entre celui de $\mathbb{N}$ et celui de $\mathbb{R}$.

Skolem démontrera que toute théorie mathématique formelle cohérente possède un modèle dont le cardinal est celui de $\mathbb{N}$: dans un tel modèle, $\mathbb{R}$ n'admet pas "plus" d'éléments que $\mathbb{N}$, et il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{R}$ ... mais elle ne fait pas partie du modèle.

Plus tard K. Gödel et P. Cohen démontreront que l'hypothèse du continu est indépendante des axiomes communément admis pour la théorie des ensembles.

Face à ce genre de résultats, deux attitudes opposées sont développées.

Les uns, comme Skolem, estiment que la comparaison des cardinaux a un caractère très relatif. Pour eux, l'infini ne correspond à aucune réalité et est simplement une manière de parler.

Les autres, comme Gödel, s'en tiennent à un point de vue "réaliste": un univers mathématique cantorien existe bel et bien, et dans cet univers, l'hypothèse du continu est

---

[1] Un ensemble peut être élément d'une classe, mais les classes "trop infinies" ne sont éléments d'aucun ensemble

nécessairement vraie ou fausse. En conséquence, ils estiment que de nouveaux axiomes raisonnables doivent être cherchés, qui décideront vraie ou fausse l'hypothèse du continu.
Du point de vue constructif, $\mathbb{R}$ est un infini potentiel *plus compliqué (et non pas plus grand)* que $\mathbb{N}$. Mais il y a aussi des parties de $\mathbb{N}$ qui sont plus compliquées que $\mathbb{N}$, et en particulier il n'est pas absurde de supposer que l'infini potentiel $\mathbb{R}$ est isomorphe à une partie compliquée de l'infini potentiel simple $\mathbb{N}$ (cette hypothèse est admise comme vraie par l'école constructive russe autour de Markov).

Le programme de Hilbert

Hilbert tient les critiques de Brouwer pour sérieuses. Mais ce qui lui importe, c'est avant tout de faire des mathématiques. Or les mathématiques sont plus faciles à faire dans le paradis de Cantor que dans l'enfer de Brouwer.
Hilbert tient le langage suivant : finalement peu nous importe de savoir si les infinis actuels existent ou non, si l'hypothèse du continu est vraie ou fausse, si elle a un sens ou si elle n'en a pas; ce qui nous importe, c'est de savoir si, en utilisant la théorie des ensembles infinis, on est assuré de ne jamais démontrer des énoncés qui ont du sens mais qui seraient faux. C'est exactement la même attitude que vis à vis des nombres imaginaires qui servent à trouver la racine réelle d'une équation du troisième degré : l'important est avant tout que, une fois le calcul terminé, et les nombres imaginaires évaporés, le résultat soit juste.
Autrement dit, si on pouvait réduire l'infini mathématique à n'être qu'une manière de parler, on serait pleinement satisfaits.
Pour cela, il faut considérer une théorie purement formelle, dans laquelle on puisse librement utiliser les infinis de Cantor d'une part, et dans laquelle on puisse écrire les énoncés mathématiques qui "ont sûrement du sens", d'autre part.
Ensuite, il faut, par des méthodes constructives, démontrer que tout énoncé "ayant du sens" et démontré comme vrai dans la théorie formelle, est vrai dans la réalité.
La première théorie à tester est une théorie très simple (la théorie formelle dite *de Peano*) où on peut tout juste écrire quelques énoncés concernant les entiers naturels, mais où la logique du tiers exclu est admise, même pour des énoncés correspondant à une infinité de vérifications. Ensuite, il faudra passer à des théories plus sophistiquées, en espérant un jour traiter la théorie des ensembles elle-même.
Gödel apportera deux réponses contradictoires au problème posé.
La première réponse est que, pour de qui concerne la théorie de Peano, la logique *avec tiers exclu* n'introduit aucune contradiction. En particulier, comme la théorie de Peano sans tiers exclu (l'arithmétique de Heyting) est admise comme consistante par tout le monde, on peut être assuré que la théorie de Peano est non contradictoire (Hilbert gagne donc par un point à zéro). Gödel ira plus loin et proposera de donner un sens constructif aux énoncés et aux preuves de la théorie de Peano (Hilbert gagne par deux points à zéro).

Néanmoins, on n'a pas réussi pour le moment à faire le travail analogue pour des théories formelles plus sophistiquées que celle de Peano; et cette dernière est bien trop pauvre pour pouvoir être prise comme base du travail mathématique ordinaire.

La deuxième réponse est que, pour toute théorie formelle qui prétend décrire au moins $\mathbb{N}$, la cohérence de la théorie ne peut pas être démontrée avec les seuls moyens formalisés dans la théorie.

A fortiori, la théorie des ensembles semble bien ne jamais pouvoir être prouvée consistante dans la mesure où on a incorporé dans son formalisme toutes les méthodes de démonstrations connues, mêmes celles qui sont le plus douteuses (deux points à un).

En fait, le théorème d'incomplétude de Gödel milite en faveur d'une vérité mathématique non préétablie, mais en état de construction permanente.

Une réponse d'une toute autre nature est apportée par Bishop en 1967 avec son livre d'analyse constructive: Cantor n'est pas le paradis, et Brouwer n'est pas l'enfer. En ne mettant en oeuvre que les idées les plus incontestables de Brouwer, on fait une mathématique, certes un peu plus difficile, mais où tous les énoncés ont du sens, où tous les théorèmes sont incontestables (par toutes les écoles de pensée), et où, simplement, on regarde un peu plus en détail la signification algorithmique réelle des énoncés classiques. (deux points partout).

Le point de vue formaliste

Il s'agit d'une attitude repli frileux, bizarrement adoptée par Bourbaki dans son introduction, et qui n'a en réalité que bien peu d'adeptes[1]. On peut la résumer par "courage, fuyons!", fuyons la question du sens puisqu'elle nous embête. Vous croyiez naïvement faire *des* mathématiques dans le but de construire des modèles abstraits pour le mouvement des planètes, la propagation de la chaleur où les éruptions volcaniques. Vous vous trompiez, vous êtes en train de jouer à un nouveau jeu, fort intelligent, très sophistiqué, qui s'appelle *la* mathématique, et dont les règles ont été édictées, 4000 ans a posteriori mais pour l'éternité à venir, par quelques très grands savants dans leur infinie sagesse, très grands savants qui, comble de modestie, ne donnent même par leur nom sur la couverture. Les situations (parfois encore appelées énoncés) gagnantes de ce jeu subtil s'appellent "théorèmes". Amusez-vous bien. Plus les théorèmes démontrés auront l'air d'avoir du sens et plus ce sera amusant. Mais gardez vous bien de croire qu'ils aient réellement du sens.

---

1 La majorité des mathématiciens, y compris sans nul doute les rédacteurs de Bourbaki, est sur une position proche de celle de Gödel.

Et demain ?

La situation actuelle est dominée par la pragmatisme. Dans la mesure où les résultats de nature effective sont de plus en plus recherchés, on peut penser que la méthodologie constructive va finir par s'imposer comme la méthodologie normale.
Néanmoins, les facilités offertes par le tiers exclu et l'axiome du choix sont grandes, et les fabricants de théorèmes ne sont pas prêts à lâcher la proie pour l'ombre.
En fait le programme de Hilbert reste à réaliser : démontrer que, si on délimite convenablement le cadre de travail, l'analyse et l'algèbre classiques, ou mieux, non standards, ne conduiront jamais à des résultats faux sur les énoncés qui ont du sens.

Quelques conclusions

Ce que ne sont pas les mathématiques constructives :

- une entreprise de déstabilisation de l'éducation nationale
- la volonté d'être encore plus rigoureux que Bourbaki, et encore plus difficile à comprendre
- un rejet des mathématiques classiques

Ce que sont les mathématiques constructives :

- une volonté de donner du sens aux énoncés mathématiques
- une bonne heuristique pour la recherche d'algorithmes performants
- l'adoption des résultats classiques (cantoriens) à titre d'heuristique pour la recherche de résultats ayant sûrement du sens
- une conception algorithmique des êtres mathématiques **et** de la vérité (pour les énoncés concernant ces êtres mathématiques)

Petit tableau comparatif des méthodologies cantoriennes et constructives

point de vue cantorien	point de vue constructif
utiliser des méthodes abstraites et puissantes pour obtenir de nombreux résultats, même très abstraits	donner des algorithmes pour résoudre des problèmes concrets, ou, du moins, idéalement concrets
un univers mathématique cantorien idéal existe: les êtres mathématiques y sont préexistants la vérité est préexistante dans cet univers, le but des mathématiques est de la découvrir	les êtres mathématiques sont des constructions humaines la vérité concernant ces êtres est elle-même l'objet d'une construction
acceptation de l'infini actuel	refus de l'infini actuel, acceptation de l'infini potentiel
raisonnement par l'absurde pour démontrer un théorème d'existence	toute démonstration d'existence fournit, en filigrane, un algorithme pour construire l'objet
refus du tiers cas : par exemple $\forall x \in \mathbb{R}\ (x=0 \text{ ou } x\neq 0)$ est un théorème des mathématiques cantoriennes, alors même qu'aucun algorithme connu ne permet de le *réaliser*	acceptation du pouvoir limité du raisonnement humain, qui est de nature finie, algorithmique: le théorème en face n'est pas démontrable constructivement on peut tout juste démontrer le théorème suivant (sans intérêt) $\nexists x \in \mathbb{R}\ (x=0 \text{ et } x\neq 0)$
une preuve constructive est toujours acceptable par un cantorien, mais elle semble souvent inutilement compliquée	il est souvent bien difficile d'attribuer une signification constructive à une preuve classique
la notion d'ensemble est la notion de base, prémathématique, non définie	les notions de base, non définies, sont celles de construction et d'entier naturel
$\forall x \ \exists y$ a un sens purement abstrait	$\forall x \ \exists y$ a le sens d'une construction

Petite bibliographie

ouvrages de base

Bishop Erret Foundations of Constructive Analysis (1967) McGraw Hill (épuisé)

Bishop E., Bridges D. Constructive Analysis (1985) Springer Verlag

Mines R., Richman F., Ruitenburg W. A Course in Constructive Algebra. (1988) Universitext. Springer Verlag

Bridges D, Richman F Varieties of Constructive Mathematics (1987) Cambridge University Press. LNS 97 (comparaison dans la pratique des trois principales tendances du constructivisme)

autres

Beeson M. J. Foundations of Constructive Mathematics (1985) Springer (c'est un livre de logique)

Brouwer Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism (Van Dalen ed.) (1981) Cambridge University Press.

Kushner B. A. Lectures on Constructive Mathematical Analysis (traduit du russe en 1985) dans la série: Translations of the A.M.S.

Aberth O. Computable Analysis (1980) McGraw Hill (c'est écrit dans l'esprit de l'école constructiviste russe)

Apéry R. article à lire dans "Penser les mathématiques" (collection Seuil Points Sciences)

Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

LA RELATIVITÉ RESTREINTE
LE ROLE CRÉATEUR D'EINSTEIN

Jean NOUET
Université du Maine - Le Mans

La compréhension de la démarche heuristique qui conduisit Einstein à poser les bases de la relativité restreinte nécessite de rappeler, en début d'exposé, quelques éléments significatifs de sa biographie puis de situer l'état d'avancement et les contradictions de la physique classique quand il écrivit son célèbre article de 1905 : "Sur l'électrodynamique des corps en mouvement". La suite de l'exposé a un caractère plus didactique, elle a pour but de montrer l'originalité et la richesse de l'article à travers l'analyse des méthodes utilisées, des résultats obtenus et de leur incidence sur la Physique du XX ème siècle.

QUELQUES ELEMENTS BIOGRAPHIQUES

Einstein a 26 ans en 1905, il occupe alors un poste d'Expert Technique au Bureau des Brevets à Berne. Bien qu'à l'écart de la communauté universitaire, il a déjà à son actif plusieurs articles. Le premier, sur la capillarité, paraît en 1901 dans la revue scientifique allemande *Annalen der Physik*. Entre 1902 et 1904, il publie dans la même revue trois articles de thermodynamique qui témoignent d'une compréhension approfondie de la thermodynamique et de ses aspects statistiques.

Sa méthode de travail est celle d'un autodidacte. Etudiant en

mathématiques et en physique au Polytechnicum de Zurich de 1896 à 1900, il préfère aux cours magistraux la lecture solitaire d'œuvres originales telles que la Théorie Electromagnétique de Maxwell ou le Traité de Mécanique de Mach dont il reconnaîtra plus tard le rôle décisif dans la genèse de sa théorie de la relativité restreinte. Les relations plutôt tendues qu'il entretient avec ses professeurs ne lui permettront pas d'obtenir un poste d'assistant. Il manifeste alors une certaine hostilité vis à vis de l'Université dont l'enseignement repose trop souvent selon lui sur la mémorisation de connaissances rarement remises en question.

Il faudra attendre Juin 1902 pour qu'il obtienne à Berne un emploi permanent au Bureau des Brevets : " Son rôle était de présenter clairement les demandes et de dégager l'idée centrale à partir des explications souvent vagues et verbeuses des inventeurs. C'est peut-être cette formation qui a développé en lui cette faculté exceptionnelle de saisir l'essentiel des problèmes et de voir immédiatement les conséquences d'une hypothèse. Qui plus est, ce travail lui laissait du temps libre pour poursuivre ses recherches. On pourrait dire qu'à ce stade de sa carrière, c'était l'emploi idéal." Extrait de " *Einstein : the man and his achievement* " de G. J. Whitrow.

Au cours de ces années, il tisse des liens d'amitié durables : à l'Université, avec Marcel Grossmann dont les notes de cours lui permettront de préparer son examen terminal et à Berne, avec Maurice Solovine, Konrad Habicht et Michele Besso. Banesh Hoffmann évoque très bien dans son livre *"Albert Einstein : créateur et rebelle"* l'importance de l'environnement intellectuel qu'il trouve auprès de ses amis de Berne. Il écrit en particulier à propos de Michele Besso qu'Einstein remercie à la fin de l'article de 1905 : "Par son attitude délibérement critique, Besso aida Einstein à affiner et à préciser ses notions, ce qui ne l'empêcha pas de se montrer plus qu'encourageant : enthousiaste. Ce rôle de pierre à aiguiser l'esprit, il le joua à merveille pour Einstein."

Dans ces conditions Einstein annonce, au printemps 1905, dans une lettre à son ami Habicht, quatre articles qui vont faire de l'année 1905 une année mémorable dans les annales de la physique. Trois de ces articles

paraîtront dans le tome 17 de *Annalen der Physik* et le quatrième , sur la détermination du nombre d'Avogadro à partir de solutions liquides , sera présenté comme thèse devant l'Université de Zurich. Outre l'article fondamental sur la relativité, le tome 17 contient deux autres articles importants, l'un sur le mouvement Brownien et l'autre, pour lequel lui sera attribué le prix Nobel en 1922, sur l'introduction du concept de quantum d'énergie.

Le génie créateur d'Einstein s'est incontestablement épanoui pendant son séjour à Berne, mais cette production exceptionnelle est en fait l'aboutissement d'une longue période de réflexion et de mûrissement qu'Einstein lui même fait remonter dans ses notes autobiographiques à l'âge de 16 ans. Il essayait alors d'imaginer qu'il poursuivait à la vitesse de la lumière un rayon lumineux en se demandant quelle pouvait être l'apparence de la vibration lumineuse associée . Il écrira que cette interrogation « contenait en germe la théorie de la relativité restreinte ». La faculté d'opérer sur des images mentales est une des caractéristiques de la pensée d' Einstein, il aura fréquemment recours dans sa démarche scientifique à ce qu'il appelait des expériences par la pensée (Gedankenexperiments).

L'analyse de l'article de 1905, qui marque la naissance de la relativité restreinte et bouscule la physique classique, passe par un examen attentif de l'état des connaissances et des difficultés rencontrées dans les principaux domaines de la physique : mécanique, optique, électromagnétisme.

LES SUCCES ET LES CONTRADICTIONS DE LA PHYSIQUE CLASSIQUE

LA MECANIQUE : LE PRINCIPE DE RELATIVITE DE GALILEE, L'ESPACE ET LE TEMPS ABSOLU DE NEWTON

Galilée introduit l'idée de relativité dans son *Dialogue concernant les deux plus grands systèmes du Monde* qui paraît en 1632 . Cet

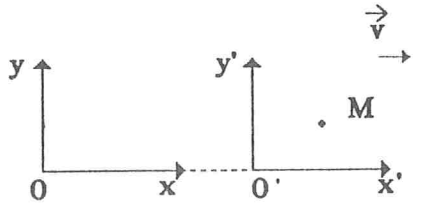
ouvrage inspira fortement Newton qui , dans les *Principes mathématiques de la philosophie naturelle* achevé en 1687 , énonce le Principe de relativité sous la forme d'un unique corollaire :

« Les mouvements relatifs des corps enfermés dans un espace quelconque sont les mêmes, que cet espace soit immobile ou qu'il se meuve uniformément et en ligne droite sans rotation . » (Cinquième corollaire de Newton déduit des quatre lois principales).

Ce corollaire permet de définir une classe de référentiels équivalents appelés de nos jours référentiels galiléens . Ainsi dans le cadre d'une présentation moderne on peut , afin de faciliter l'introduction ultérieure de la transformation spéciale de Lorentz , poser le problème de la description du mouvement d'un point matériel M dans deux référentiels galiléens particuliers (R) et (R') définis de la façon suivante :

Les coordonnées du point M sont respectivement (x, y, z) dans (R) et (x', y', z') dans (R') , les axes de (R') étant parallèles aux axes de (R) . Dans cette description où le temps est une grandeur universelle indépendante du référentiel choisi (temps absolu) nous considérons que le mouvement de (R') par rapport à (R) se fait à la vitesse $\vec{v}$, vecteur constant dirigé suivant l'axe Ox, et qu'au temps t = 0 les origines coïncident.

Nous appellerons transformation de Galilée l'ensemble des relations qui permettent d'exprimer les coordonnées du point M dans (R') en fonction de ses coordonnées dans (R), voir figure 1 .



$$x' = x - v\,t$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = t$$

Figure 1. Transformation de Galilée

Si $\vec{V}$ est la vitesse du point M relativement à (R) et $\vec{V}'$ la vitesse de ce même point relativement à (R'), on peut déduire de la transformation de

Galilée la formule de composition des vitesses :

$$\vec{V}' = \vec{V} - \vec{v}$$

Le calcul des accélérations $\vec{a}$ et $\vec{a}'$ du point M relativement à (R) et (R') conduit à l'invariance de l'accélération puisque $\vec{v}$ est un vecteur constant.

$$\vec{a} = \vec{a}'$$

La masse étant un scalaire invariant, l'invariance de l'accélération entraîne nécessairement celle de la force.

$$\vec{a} = \vec{a}' \qquad \vec{f} = m\vec{a} = m\vec{a}' = \vec{f}'$$

L'équation fondamentale de la dynamique prend la même forme dans les deux référentiels. Elle est dite invariante dans un changement de référentiel galiléen.

$$\vec{f} = m\,\vec{a} \quad \text{dans (R)}, \qquad \vec{f}' = m\,\vec{a}' \quad \text{dans (R')}$$

Il s'agit d'une autre formulation du principe de relativité de Galilée et Newton. On peut d'ailleurs également énoncer qu'il ne sera jamais possible de mettre en évidence, par une expérience de mécanique, le mouvement d'un référentiel galiléen par rapport à un autre référentiel galiléen, c'est à dire que tous ces référentiels sont équivalents au sens de la mécanique.

Malgré tout, Newton postule l'existence d'un espace absolu qui va, avec la notion de temps absolu, constituer un des concepts fondamentaux de la mécanique classique. Notons à ce propos que des critiques sont dejà formulées à l'époque de Newton — débat opposant Huygens et Leibniz — sur le concept d'espace absolu incompatible avec le principe de relativité de Galilée. Pour une analyse plus complète des apports respectifs de Galilée et de Newton à la cinématique et à la dynamique classique, on pourra se reporter au livre

de Françoise Balibar dans la collection Philosophies : « Galilée, Newton lus par Einstein ».

L'OPTIQUE : LA MESURE DU MOUVEMENT ABSOLU DE LA TERRE LE CONCEPT D'ETHER

Parmi tous les référentiels galiléens la mécanique newtonienne privilégie le référentiel de Copernic qui est censé définir un référentiel absolu auquel est associé l'éther immobile de la théorie ondulatoire d'Huygens (voir encadrés 1 et 2).

Par rapport à ce référentiel de Copernic, un laboratoire terrestre peut être considéré, pendant une durée d'expérience trés courte, comme un référentiel galiléen en translation à la vitesse $v = 30\ km\ s^{-1}$ (on peut alors négliger le mouvement de rotation de la terre sur elle-même) . Devant l'impossibilité par une expérience de mécanique de différencier ces deux référentiels galiléens, c'est à dire de mettre en évidence le mouvement de la terre par rapport à l'éther, il apparut alors naturel de faire appel à des expériences d'optique et d'astronomie.

Encadré 1

Référentiel de Copernic : référentiel dont l'origine coïncide avec le centre de masse du système solaire et dont les axes pointent vers trois étoiles fixes.

La première détermination de la vitesse de la lumière avait été faite par l'astronome danois Römer, en 1615, à partir du mouvement des satellites de Jupiter. Signalons déjà que la valeur très grande mais finie de c ($c \approx 300\,000\ km\ s^{-1}$), remettait en cause l'idée de propagation instantanée des interactions à distance et allait rendre nécessaire l'élaboration de nouvelles théories, la théorie de Maxwell d'abord, celle d'Einstein ensuite.

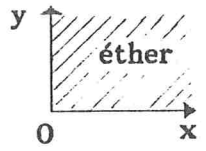
Dans le référentiel de Copernic, homogène et isotrope, la vitesse de la lumière est la même quelle que soit sa direction de propagation, nous

noterons $\vec{c}$ le vecteur vitesse de la lumière dans ce référentiel. L'application de la formule de composition des vitesses de la mécanique newtonienne permet de déduire le vecteur vitesse correspondant $\vec{c}\,'$ dans un référentiel galiléen terrestre se translatant à la vitesse constante $\vec{v}$ pendant la durée de l' expérience envisagée ($v = \| \vec{v} \| \approx 30$ km s^{-1}) : $\vec{c}\,' = \vec{c} - \vec{v}$.

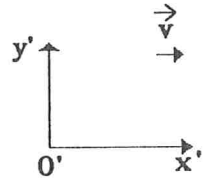
En langage moderne nous dirons que, dans le cadre des prévisions de la mécanique, il y a brisure de symétrie, c'est à dire qu'on s' attend à trouver des valeurs différentes pour la valeur de la vitesse de la lumière selon sa direction de propagation dans le laboratoire. La figure 2 montre quelques trajets de rayons particuliers qui, par exemple, jouent un rôle dans la célèbre expérience de Michelson - Morley.

Encadré 2

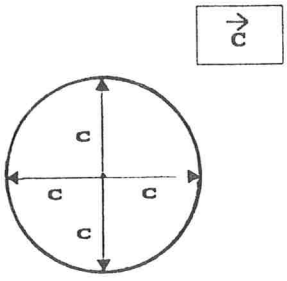
Ether - Ether cosmique - Ether luminifère : le terme d'éther, emprunté à la science grecque, a été introduit par Descartes dans le cadre de sa conception mécaniste de l'Univers. Il décrit un milieu hypothétique remplissant l' espace interplanétaire. Par analogie avec les ondes élastiques qui nécessitent un milieu matériel, dans la logique de la théorie ondulatoire d' Huygens, l'éther devient le milieu jugé alors indispensable à la propagation des ondes lumineuses.



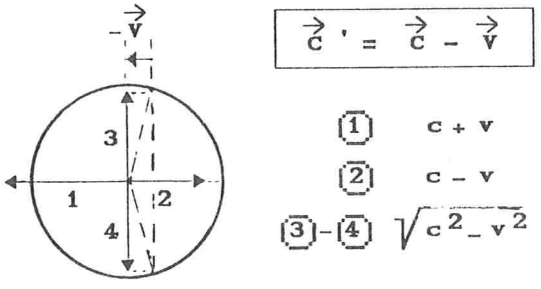
Référentiel de Copernic



Référentiel terrestre



Isotropie



Brisure de symétrie

Figure 2. Prévisions de la mécanique newtonienne

Sur la base d'une telle conception, les expérimentateurs conçurent d' ingénieuses expériences d'optique pour déceler le mouvement absolu de la terre, c' est à dire son mouvement par rapport à l' éther immobile. Ainsi l'expérience d' Arago (1810) avait-elle pour but de mettre en évidence la variation de vitesse des rayons lumineux émis par deux étoiles situées dans la direction du mouvement de la terre (figure 3) et repérées à douze heures d'intervalle (T entre E_1 et E_2). Des rayons lumineux de vitesses différentes subissant des déviations différentes à la traversée d'un prisme, l' écart attendu sur l' angle de déviation devait être proportionnel au rapport v/c c'est à dire de l' ordre de 10^{-4}. Il n' en fut rien et Fresnel, pour interpréter cette expérience négative, proposa une théorie qui reposait sur la notion d' entraînement partiel de l' éther par la terre en mouvement. Il introduisit un coefficient d' entraînement k tel que $k = 1 - 1/n^2$ où n est l' indice du corps en mouvement dans l'éther . Cette théorie de Fresnel (1818) allait connaître une longue existence avec quelques succès marquants, comme l' interprétation des résultats de l'expérience de Fizeau (1851) sur la mesure de la vitesse de la lumière dans l'eau en mouvement (encadré 3). Toutefois de nombreux faits incompatibles restaient à interpréter comme par exemple l'aberration stellaire (encadré 3) mise en évidence par Bradley (1728) qui, elle , n'était pas conciliable avec un effet d'entraînement de l'éther. Le problème de l'éther devint un problème central en physique qui, sans aucun doute, stimula les travaux de savants illustres sur l'élasticité des milieux continus et sur le développement des méthodes mathématiques nécessaires à ce type d'études. Citons par exemple les travaux de Navier, Cauchy, Poisson, Green, Newmann et Stokes. Le milieu " éther " ne devait-il pas réunir selon les termes de Whittaker dans son *Histoire des théories de l' éther et de l' électricité* les propriétés contradictoires suivantes : "se comporter comme un solide élastique afin de transmettre des vibrations transversales aussi rapides que celles de la lumière" et d' autre part "comme un fluide pour les mouvements

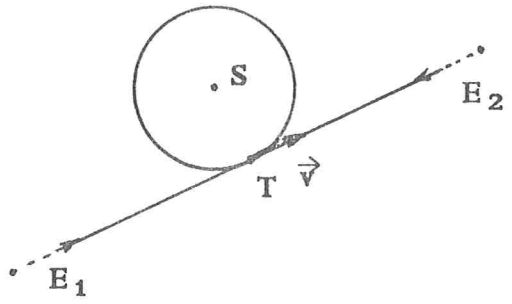
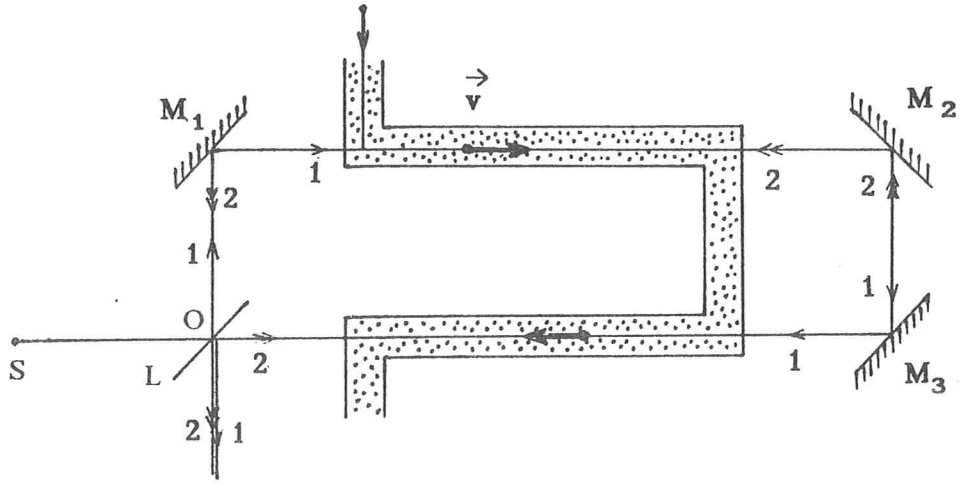


Figure 3 . Expérience d'Arago

progressifs plus lents des planètes dans l' éther ".

Encadré 3

Expérience de Fizeau (1851): mise en évidence du coefficient d'entraînement de l' éther par l'eau en mouvement à partir du déplacement du système de franges d' interférences quand on inverse le sens d' écoulement de l' eau dans le dispositif représenté ci-dessous.



L'expérience consiste à faire interférer les rayons 1 et 2 obtenus à partir d' un rayon initial S O séparé au niveau de la lame semi-réfléchissante L en deux rayons qui suivent les trajets notés 1 et 2 sur la figure. Les rayons lumineux se propagent dans un tube rempli d' eau qui est en mouvement à la vitesse v par rapport au référentiel du laboratoire . L'expérience révèle que la vitesse de la lumière par rapport au laboratoire peut s'exprimer sous la forme :

$$V = c/n + k\,v$$

où c / n est la vitesse de la lumière dans l' eau (n indice de l' eau , $n \approx 4/3$). La valeur trouvée du coefficient **k** est compatible avec le coefficient d'entraînement de l' éther $k = 1 - 1/n^2$ introduit par Fresnel.

Aberration stellaire (1728) découverte par Bradley : observation du mouvement apparent elliptique des étoiles sur la voûte céleste.

L' ELECTROMAGNETISME DE MAXWELL

Si le concept d' éther a sans aucun doute posé de nombreux problèmes pour l' interprétation simultanée des expériences que nous venons d' évoquer, il a permis à Maxwell de se dégager des théories newtoniennes de l'électricité et du magnétisme, c'est à dire d'abandonner la notion d' action instantanée à distance pour approfondir la notion de propagation du champ électromagnétique à travers un milieu. En s' appuyant sur les idées de Faraday (1831) et de Thomson (1850), Maxwell a utilisé une représentation mécaniste d'un éther cellulaire électrique - qu' il identifia à l' éther de l'optique - pour introduire les notions de courant de déplacement et de propagation de proche en proche du champ électromagnétique (figure 4).

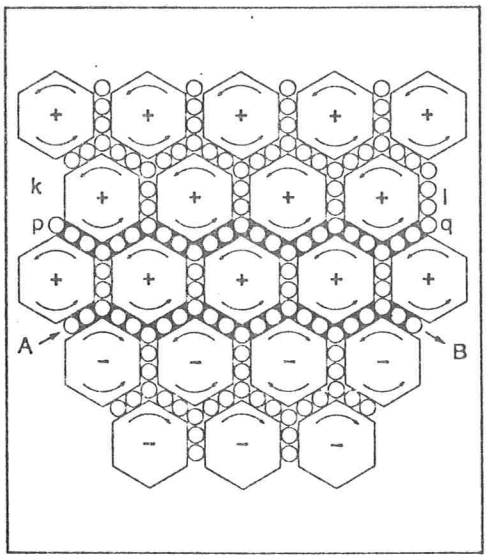


Figure 4 . Image de l'éther cellulaire. Les hexagones sont des molécules d'éther dont la rotation engendre le magnétisme. Les billes interstitielles représentent l'électricité. Il s' agit là d'une image guide plutôt que d' un modèle explicatif.
(d'après Maxwell, Scientific papers. Cliché J. L. Charmet)

Il fut ainsi conduit à établir les équations générales de l' électromagnétisme (1861 - 1862) que nous donnerons sous leur forme " actuelle " dans le cas du vide caractérisé par les constantes universelles ε_0 et μ_0 du système d' unités international (S.I.).

$$\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad (1) \qquad\qquad \vec{rot}\,\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad (2)$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad (3) \qquad\qquad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0 \qquad (4)$$

L' application de l' opérateur rotationnel respectivement aux équations (1) et (2) conduit, en tenant compte des équations (3) et (4), aux équations de propagation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ à la vitesse c qui est ainsi une constante universelle dépendant des caractéristiques ε_0 et μ_0 du vide .

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

avec $$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

La théorie de Maxwell fait apparaître les rôles symétriques joués par les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ qui constituent le champ électromagnétique ($\vec{E}$, $\vec{B}$) se propageant dans le vide à la vitesse de la lumière . Il s' agit de la deuxième grande théorie unificatrice de la physique après celle de Newton . Encore faudra-t-il, pour la consécration de cette théorie, attendre les travaux de Hertz , en 1888 , qui montrèrent véritablement l' identité des ondes "hertziennes" et des ondes lumineuses.

Toutefois, une des faiblesses de la théorie de Maxwell n' allait pas échapper à Einstein. En effet, pour prendre en compte tous les phénomènes connus de la physique du dix neuvième siècle, il est nécessaire d'adjoindre à ces équations l' expression de la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q \vec{E} + q \vec{v} \Lambda \vec{B}$$

qui suppose l' existence d' un champ "électromoteur" $\vec{E}_m$ ($\vec{E}_m = \vec{v} \Lambda \vec{B}$) ajouté de façon arbitraire pour rendre compte de la force appliquée sur une charge électrique unité en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ dans une induction magnétique $\vec{B}$.

L' EXPERIENCE DE MICHELSON - MORLEY ET LA THEORIE DE LORENTZ

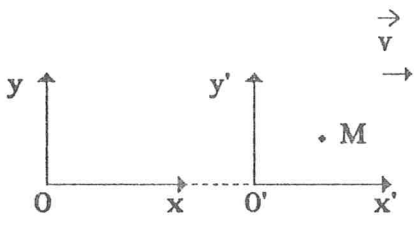
La formulation générale des lois de l'électromagnétisme n' allait pas conduire pour autant Maxwell à abandonner la notion d' éther. Les équations

que nous venons de présenter avec notre état d'esprit de la fin du vingtième siècle sont censées, pour Maxwell, être écrites dans un référentiel absolu, celui de Copernic auquel est lié l'éther immobile déjà évoqué. Ainsi Maxwell contribua-t-il à stimuler les travaux d'expérimentateurs comme Michelson qui se proposa de déterminer par une méthode interférométrique la vitesse de déplacement de la terre par rapport à l'éther immobile. Cette expérience réalisée d'abord en 1881, puis améliorée avec la participation de Morley en 1887, fut un échec. Pour une présentation complète de l'expérience on pourra se reporter aux manuels de premier cycle des Universités. Son résultat négatif remettait en question l'interprétation de l'aberration stellaire donnée par Fresnel, autrement dit, portait un coup à la théorie de Fresnel.

Dans cette expérience de Michelson et Morley il ne pouvait y avoir aucun doute quant à l'interprétation puisque la source lumineuse appartient alors au référentiel du laboratoire contrairement à la situation rencontrée dans les expériences d'astronomie de Bradley et d'Arago. D'autre part, il s'agissait d'une expérience très précise qui devait permettre de déceler des effets de l'ordre de v/c. Dans les vingt années qui suivirent la découverte du résultat négatif des expériences de Michelson et Morley, les physiciens rivalisèrent d'imagination afin de proposer une interprétation de ce résultat qui préservât la théorie de Fresnel. En particulier, dès 1882, indépendamment l'un de l'autre et à cinq mois d'intervalle, Fitzgerald puis Lorentz introduisirent l'hypothèse de contraction des corps en mouvement à travers l'éther dans la direction du mouvement. Le facteur de contraction introduit ($\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$) devait exactement compenser la différence de vitesse prévue par la physique classique entre les rayons lumineux, suivant que les trajets sont parallèles ou orthogonaux à la vitesse $\vec{v}$ de translation de la terre par rapport à l'éther. L'introduction très formelle de cette hypothèse eut ses adeptes mais signalons que Poincaré fut le premier à critiquer cette approche très fragmentaire du problème.

Alors que Lorentz avait proposé avec succès un perfectionnement de la théorie électromagnétique de Maxwell qui permettait d'interpréter la formule de Fresnel donnant le coefficient d'entraînement k, il publia en 1895 une étude dans l'esprit de la théorie de la relativité qui mérite de retenir l'attention afin de bien situer la contribution ultérieure d'Einstein. Dans ce travail

Lorentz se proposait d'étudier l'influence du mouvement de la terre sur les phénomènes électriques et optiques. Ainsi, afin d'obtenir la même formulation des équations de Maxwell, au second ordre près en v/c, dans un référentiel terrestre et dans un référentiel absolu lié à l'éther, il introduisit une transformation du temps de la forme $t' = t - \frac{v\,x}{c^2}$. Lorentz ne prêtait aucune signification au paramètre t' qu'il appelait alors le temps local. Indiquons tout de suite qu'il précisera plus tard, en 1927 : « je n'avais jamais pensé que ce paramètre t' pût avoir une quelconque relation avec le temps réel » et plus loin « je n'ai considéré ma transformation du temps que comme une hypothèse de travail de caractère heuristique, la théorie de la relativité est donc réellement l'œuvre d'Einstein » (citation extraite de W. G. Rosser " Une introduction à la théorie de la relativité "). La transformation ainsi établie par Lorentz fut modifiée en 1898 par Larmor qui introduisit le coefficient multiplicatif γ (figure 5) et constata l'analogie de ce coefficient avec le facteur de contraction de Lorentz-Fitzgerald. La forme définitive de la transformation fut donnée dans l'article de Lorentz de 1904 (Gerald Holton, 1960). Cette transformation qui assure l'invariance des équations de Maxwell fut appelée en 1905 par Poincaré "transformation de Lorentz" (figure 5).



$$x' = \gamma\,(x - vt)$$
$$y' = y$$
$$z' = z$$
$$t' = \gamma\left(t - \frac{v\,x}{c^2}\right)$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Figure 5 . Transformation de Lorentz

Pour achever cette présentation de l'état d'avancement de la physique à la fin du dix neuvième siècle on ne peut manquer d'évoquer les travaux de Poincaré qui dès 1895, avait trouvé, comme nous l'avons déjà vu, peu satisfaisantes les explications proposées à l'époque. Il en vint donc à énoncer en 1904 le principe de relativité sous la forme suivante : « les lois de la physique doivent être les mêmes pour un observateur au repos ou pour un observateur en mouvement uniforme de translation, de sorte que nous n'avons aucun moyen de

savoir si nous sommes en repos ou en mouvement». Mais comme le soulignent Gerald Holton (1960) et Stanley Goldberg (1967), pour Poincaré le principe de relativité est un fait déduit de l'expérience de Michelson-Morley qui pourrait éventuellement être remis en question par de nouveaux faits expérimentaux. Poincaré ne cherchait pas à développer une théorie basée sur le principe de relativité. Comme Lorentz, il cherchait une théorie des électrons qui puisse expliquer le comportement de la matière et son interaction avec l'éther. Cette approche est foncièrement différente de celle d'Einstein, comme nous allons le voir à partir de l'analyse de l'article que nous présentons maintenant.

L'ARTICLE D'EINSTEIN DE 1905 : LA NAISSANCE DE LA RELATIVITE RESTREINTE

L'article est construit en deux parties précédées d'une *introduction* qui, dès le départ, invite à une réflexion sur l'Electromagnétisme de Maxwell.

L'INTRODUCTION DE L'ARTICLE DE 1905

Sans surprise pour le lecteur, compte tenu du titre *Sur l'électrodynamique des corps en mouvement*, Einstein s'intéresse d'abord au phénomène d'induction dans le cas du mouvement relatif d'une spire et d'un aimant. Il fait remarquer que l'explication donnée pour justifier l'apparition d'un courant induit dans la spire, au cours du mouvement relatif spire-aimant, introduit une distinction arbitraire entre repos et mouvement.

Bien qu'aucune formulation mathématique n'apparaisse dans l'*introduction*, pour développer la présentation de l'exemple choisi nous ferons appel à la notation vectorielle utilisée de nos jours. Dans la première hypothèse, déplacement de l'aimant par rapport à la spire au repos, le champ magnétique créé par l'aimant en mouvement dans le référentiel de la spire dépend de l'espace et du temps, nous le noterons $\vec{B}(\vec{r}, t)$. L'équation de Maxwell-Faraday $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ impose donc l'existence d'un champ électrique en tout point du référentiel. En particulier, ce champ électrique met en mouvement les

électrons du métal de la spire produisant ainsi le courant induit (figure 6.a). Dans la deuxième hypothèse, déplacement de la spire par rapport à l'aimant au repos, le champ magnétique créé par l'aimant est dans le référentiel de l'aimant indépendant du temps (magnétostatique), il peut s'écrire $\vec{B}(\vec{r})$ et dans ce référentiel il n'existe pas de champ électrique associé. Pour justifier l'apparition du courant dans la spire on peut alors faire appel à la notion de force électromotrice induite (loi de Faraday) ou à la notion de champ électromoteur que nous avons déjà évoquée (figure 6.b).

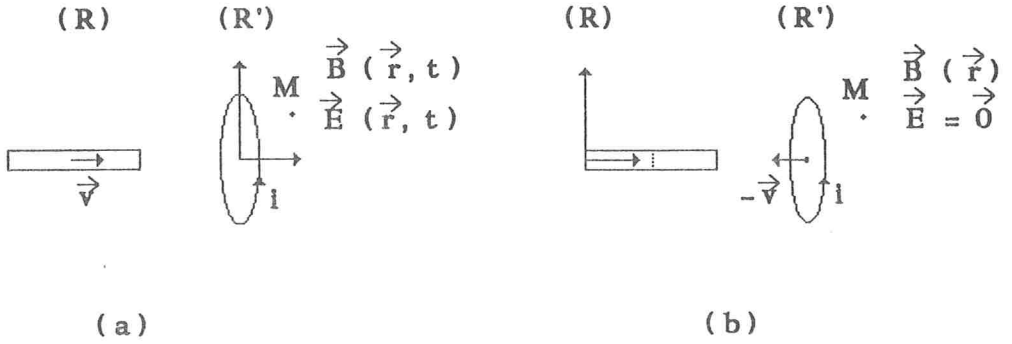


Figure 6. Déplacement relatif spire - aimant

Einstein est frappé par l'asymétrie qui existe entre les deux explications proposées alors qu'il s'agit de rendre compte d'un unique phénomène. Nous verrons comment dans la deuxième partie de l'article il répond à ce problème en établissant une loi de transformation des champs dans un changement de référentiel galiléen.

Cette première partie de l' *introduction* conduit à un paragraphe essentiel que nous transcrivons intégralement : « Des exemples du même genre, ainsi que les expériences entreprises pour démontrer le mouvement de la Terre par rapport au "milieu où se propage la lumière" et dont les résultats furent négatifs, font naître la conjecture que ce n'est pas seulement dans la mécanique qu'aucune propriété des phénomènes ne correspond à la notion de mouvement absolu, mais aussi dans l'électrodynamique. Pour tous les systèmes de coordonnées pour lesquels les équations de la mécanique restent valables, les lois de l'électrodynamique et de l'optique gardent également leur formulation; c'est ce qui a été démontré pour les grandeurs du premier ordre.».

Plusieurs idées sont exprimées qui n'ont pourtant pas été admises pendant quelques décennies par d'illustres scientifiques, philosophes ou historiens

des sciences : d'abord qu'un ensemble de faits expérimentaux et de travaux antérieurs ainsi qu'une réflexion personnelle ont conduit Einstein à étendre le principe de relativité de Galilée à tous les phénomènes physiques ; ensuite que si les travaux publiés par Lorentz en 1895 étaient connus d'Einstein - allusion contenue dans la dernière phrase qui évoque la transformation de "Lorentz" démontrée au premier ordre seulement - en revanche il ne connaissait pas l'article de Lorentz de 1905 ce qu'a très bien prouvé G. Holton (Sur les origines de la théorie spéciale de la relativité - 1960).

Nous retiendrons que l'expérience de Michelson-Morley n'a pas eu le rôle déterminant qu'on lui a trop souvent attribué pour des raisons historiques, scientifiques et aussi pédagogiques, raisons très bien analysées dans un autre article de G. Holton (Einstein et l'expérience "cruciale" - 1969). Son influence a été indirecte dans la mesure où elle a incontestablement suscité les travaux de Lorentz, mais dans la réflexion d'Einstein elle n'a pas été plus décisive que l'expérience de Fizeau ou que les observations relatives à l'aberration stellaire. Un doute subsiste d'ailleurs puisqu'Einstein écrit dans un passage d'une lettre de 1954 transcrite par S. Bergia (1979) : « Le résultat de l'expérience de Michelson n'a pas exercé d'influence considérable sur mon propre travail. Je ne me souviens même pas si je le connaissais seulement lorsque j'écrivis mon premier article sur ce sujet.».

Alors que Poincaré voyait dans le " principe de relativité " un fait déduit de l'expérience, Einstein donne à la conjecture précédemment énoncée le statut de Principe. Il y ajoute un second Principe « en apparence seulement incompatible avec le premier » celui de la constance de la lumière dans le vide quelque soit le référentiel galiléen choisi (figure 7). L' expression " en apparence seulement"

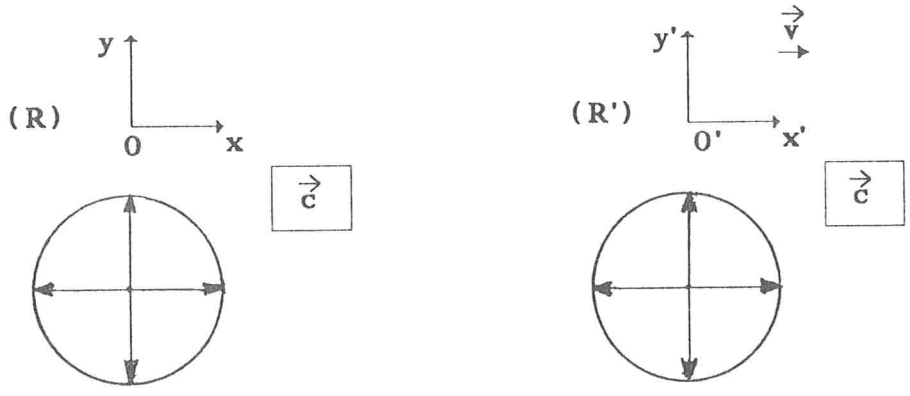


Figure 7 . Invariance de la vitesse de la lumière dans le vide

intrigue le lecteur mais elle annonce déjà que l'auteur s'engage dans une voie totalement nouvelle. En effet, l'application de la transformation de Galilée implique une modification de la vitesse de la lumière dans un changement de référentiel (figure 2). Nous verrons comment cette transformation devra être abandonnée, l'idée de base d'Einstein consistant à accepter et exploiter les conséquences logiques de ces deux principes.

En ce qui concerne le concept d'éther, vieux de plus de deux siècles, il est écarté d'une simple phrase : « On montrera que l'introduction d'un "éther luminifère" devient superflue dans la mesure où le point de vue développé ici ne requiert pas un "espace absolu au repos" pourvu de propriétés particulières ».

L'introduction se termine par un dernier paragraphe qui annonce la mise en place de la nouvelle théorie grâce à l'utilisation de processus électromagnétiques pour relier les notions physiques d'espace et de temps.

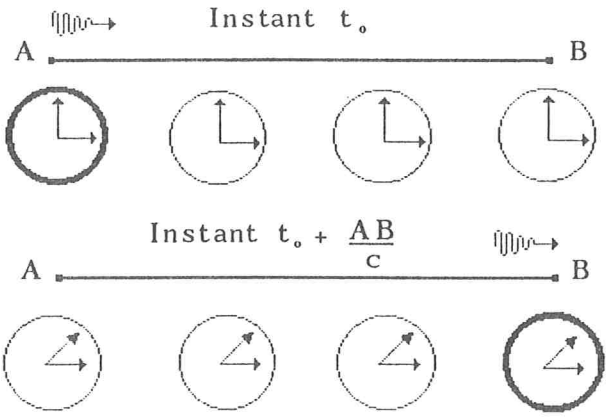
LA PARTIE CINEMATIQUE DE L'ARTICLE DE 1905

D'emblée Einstein remet en question toutes les notions non solidement établies nécessaires à l'élaboration de la cinématique. Il s'appuie pour cela sur des bases simples et précises suggérées par l'évidence expérimentale. Ainsi fait-il remarquer que la mesure du "temps" se ramène toujours à la constatation de la simultanéité de deux événements en un même point de l'espace. Les difficultés surgissent quand il s'agit de définir la simultanéité en des points différents puisqu'il n'existe pas de signaux se propageant instantanément. L'idée de base va consister à exploiter judicieusement le deuxième principe énoncé qui impose la constance de la lumière dans le vide pour tous les référentiels galiléens. Einstein introduit un procédé de mesure utilisant des signaux lumineux, il s'agit d'une "expérience par la pensée" permettant de synchroniser des horloges au repos en des endroits différents d'un même référentiel (encadré 4).

La présentation que nous donnons maintenant pour illustrer le caractère non absolu de la simultanéité de deux événements n'est pas exactement celle de l'article de 1905 mais Einstein préféra ultérieurement cette présentation pour montrer, sans formalisme mathématique, la nécessité de renoncer au concept de temps absolu.

Encadré 4

Synchronisation des horloges



Soient deux points A et B fixes par rapport à un même référentiel galiléen (R) et distants de AB. A l'instant t_A indiqué par une horloge placée en A un signal lumineux est émis en direction d'une horloge placée en B, cette horloge est synchrone avec la première si, quelque soit t_A, le signal est reçu par l'horloge placée en B au temps t_B tel que $t_B = t_A + \frac{AB}{c}$

Expérience par la pensée illustrant le caractère relatif de la simultanéité

Si deux événements se produisent en deux points M_1 et M_2 d'un même référentiel (R), il sera aisé pour un observateur placé en H, milieu de $[M_1M_2]$, de contrôler la simultanéité des deux événements. En effet, toutes les horloges du référentiel (R) ayant été synchronisées (en utilisant la procédure de l'encadré 4), on dira que les deux événements (E_1) et (E_2) se produisant aux instants t_1 et t_2 aux points M_1 et M_2 sont simultanés si deux signaux lumineux α_1 et α_2 émis respectivement aux points M_1 et M_2 aux instants t_1 et t_2 arrivent au même instant en H (encadré 5).

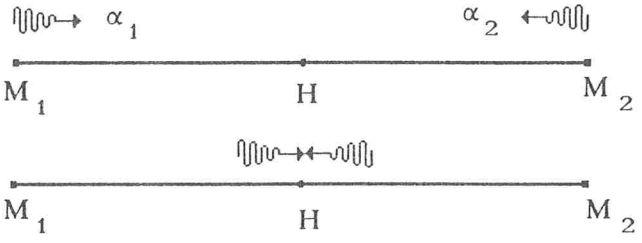
La procédure ainsi définie permet de vérifier que dans le référentiel (R) les événements (E_1) et (E_2) sont simultanés. Nous allons voir qu'il n'en

est plus de même pour un observateur - placé dans des conditions apparemment équivalentes - appartenant à un référentiel galiléen (R') en translation à la vitesse $\vec{v}$ parallèlement à la direction de la droite ($M_1 M_2$).

Encadré 5

Notion de simultanéité

Evénement (E_1) en M_1 à t_1 — Evénement (E_2) en M_2 à t_2



Les signaux α_1 et α_2 sont émis aux instants t_1 et t_2. L'observateur placé en H reçoit les deux signaux lumineux au même instant t_H.

$$t_H = t_1 + \frac{M_1 H}{c} = t_2 + \frac{M_2 H}{c}$$

Comme $\frac{M_1 H}{c} = \frac{M_2 H}{c}$ nous déduisons $\boxed{t_1 = t_2}$

Les deux événements sont simultanés dans (R)

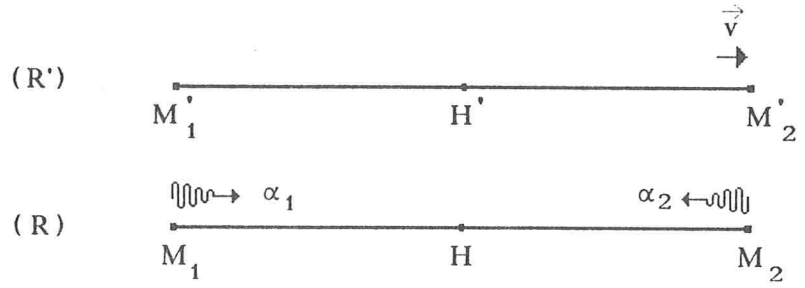
Considérons pour cela dans le référentiel (R') les points M'_1, M'_2 et H' homologues des points M_1, M_2 et H dans (R) (encadré 6). Supposons qu'à l'instant t_1, égal à t_2, dans (R) où se produisent les événements (E_1) et (E_2) les points homologues de (R) et de (R') coïncident et qu'un observateur de (R') soit placé au point H' milieu de $M'_1 M'_2$. On peut illustrer cette représentation comme le faisait Einstein en considérant que l'observateur en H' est dans un train "relativiste" alors que l'observateur situé en H est sur le quai de gare où passe le train imaginaire.

Les éclairs lumineux α_1 et α_2 étant émis dans le référentiel (R)

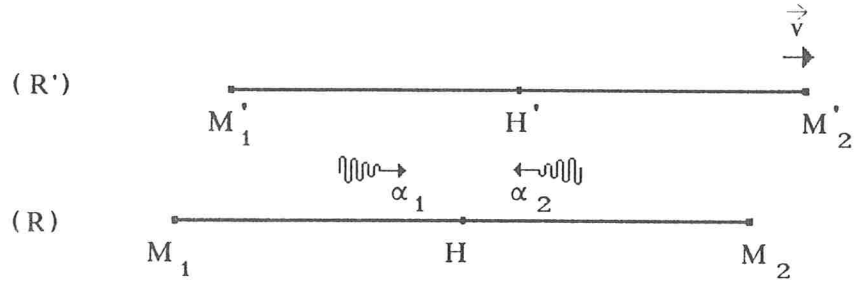
l'observateur placé en H' reçoit le signal lumineux α_2 avant le signal lumineux α_1 puisqu'il va à la rencontre du signal α_2 et fuit le signal α_1. L'ordre de réception des signaux serait d'ailleurs inversé si le référentiel (R') se déplaçait à la vitesse $-\vec{v}$ par rapport au référentiel (R), c'est à dire vers la gauche sur la figure .

Encadré 6

Introduction d'un temps relatif à chaque référentiel



Les signaux α_1 et α_2 sont émis aux temps t_1 et t_2, $t_1 = t_2$. Les événements sont simultanés pour l'observateur situé en H dans (R)



Le signal α_2 atteint l'observateur placé en H' dans (R') avant α_1 .

Commme l'éclair α_1 est reçu après l'éclair α_2, il est nécessaire d'introduire le temps t' dans (R') , t'_i étant la date d'émission de α_i dans (R'). Alors $t'_1 + \frac{M'_1H'}{c} > t'_2 + \frac{M'_2H'}{c}$

comme $\frac{M'_1H'}{c} = \frac{M'_2H'}{c}$ (Principe d'invariance de c)

nous déduisons $t'_1 > t'_2$

Les événements simultanés dans (R) ne sont plus simultanés pour l'observateur situé en H' dans (R').

Les schémas sont effectués par un observateur appartenant au référentiel (R)

Pour un physicien "pré-relativiste" la non-simultanéité des signaux à la réception serait attribuée à la différence de vitesse des deux signaux lumineux par rapport à l'observateur en mouvement, le module de la vitesse relative étant c + v pour α_2 et c - v pour α_1. En revanche, pour Einstein, le fait d'avoir retenu le principe de la constance de la lumière dans le vide * quel que soit le référentiel galiléen oblige à introduire un temps t' dans (R') distinct du temps t dans (R) puisque les durées de propagation sont alors égales (encadré 6).

Ayant ainsi défini un procédé de mesure faisant appel à des signaux lumineux, Einstein déduit la première conséquence fondamentale de ses deux principes : le caractère non absolu de la simultanéité ; il est donc conduit à abandonner la notion de temps absolu. Sur les mêmes bases, il présente alors en quelques pages une démonstration rigoureuse des relations de transformation des coordonnées spatio-temporelles d'un événement sous le titre : « Théorie de la transformation des coordonnées spatiales et du temps lorsque l'on passe d'un système au repos à un système animé d'un mouvement de translation uniforme par rapport au premier ». Il s'agit de la transformation de Lorentz qu'il introduit dans une optique complètement différente de celle de Lorentz à partir d'une réflexion originale sur l'espace et le temps.

La transformation de Lorentz

Pour présenter ces relations de transformation nous reviendrons à notre introduction de la transformation de Galilée (figure 1). La représentation d'un événement nécessite maintenant de considérer, en plus des coordonnées cartésiennes (x, y, z), le temps t mesuré par les observateurs du référentiel (R). Le même événement dans le référentiel (R') est alors caractérisé par les coordonnées spatiales (x', y', z') et le temps t' mesuré par les observateurs de (R'). Un événement, noté { E }, sera de ce fait caractérisé par quatre composantes : { x, y, z, t } dans (R) et { x', y', z', t'} dans (R') (dans le mémoire d'Einstein ces dernières composantes sont notées { ξ, η, ζ, τ } et la vitesse de la lumière est notée V). Les observateurs de chaque référentiel (R) et (R') sont munis d'horloges qui ont été synchronisées

* Dans toutes les "expériences" considérées, les signaux lumineux sont supposés se propager dans le vide (les propriétés optiques de l'air sont peu différentes de celles du vide).

de telle sorte que $t = t' = 0$ au moment de leur coïncidence spatiale, c'est à dire quand O' est en O (figure 5).

La transformation des coordonnées cartésiennes et du temps étant obtenue, Einstein montre qu'elle satisfait à la relation d'invariance :

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2$$

relation exprimant qu'une onde sphérique émise à l'origine du référentiel au temps $t = 0$ se propage dans le vide à la même vitesse c par rapport à n'importe quel référentiel galiléen.

L'intérêt de cette démonstration de la transformation de Lorentz est qu'elle repose non seulement sur les principes posés mais également sur la définition de méthodes de mesure. Cette approche opérationnaliste est une nouveauté dans la pensée et la démarche scientifique. Einstein donne un sens au mot temps pour un événement éloigné en définissant un procédé de mesure qui fait appel à la propagation de signaux lumineux dans le vide, propagation caractérisée par une constante universelle, la vitesse de la lumière.

Il introduit ensuite les notions de "contraction des longueurs" et de "dilatation du temps" que nous ne développerons pas ici. Un dernier court chapitre intitulé « Théorème de l'addition des vitesses » termine la Partie cinématique de l'article. Einstein y introduit ce que nous appelons maintenant la formule de transformation des vitesses. Si les composantes de la vitesse d'une particule sont respectivement (V_x, V_y, V_z) dans (R) et (V'_x, V'_y, V'_z) dans (R') en mouvement par rapport à (R) à la vitesse $\vec{v}$ ($\vec{v}$ parallèle à Ox), on obtient :

$$V_x = \frac{V'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} V'_x}$$

$$V_y = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}\, V'_y}{1 + \frac{v}{c^2} V'_x}$$

$$V_z = \frac{\sqrt{1 - \beta^2}\, V'_z}{1 + \frac{v}{c^2} V'_x}$$

avec $\beta = \frac{v}{c}$

Formules de transformation des vitesses

A ce stade il est tout à fait surprenant qu' Einstein ne fasse aucune allusion à l'expérience de Fizeau (encadré 3) qu'il aurait pu aisément interpréter*. En effet , si le référentiel (R') est associé au liquide en mouvement à la vitesse $\vec{v}$ paralléle à l'axe Ox du référentiel (R) du laboratoire , la vitesse V_x de la lumière dans le laboratoire peut s' exprimer en fonction de la vitesse de la lumière V'_x , $V'_x = \frac{c}{n}$, dans le liquide (n indice du liquide). On obtient alors dans la présente hypothèse ($\vec{v}$ parallèle à Ox) :

$$V_x = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{c}{n}}$$

On peut développer V_x au premier ordre en $\frac{v}{c}$ puisque la vitesse d'écoulement du fluide est très faible par rapport à la vitesse de la lumière dans le fluide .

$$V_x \approx \frac{c}{n} + \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) v \approx \frac{c}{n} + k\,v$$

On retrouve ici le coefficient k ($k = 1 - \frac{1}{n^2}$) qui correspond au " mystérieux" coefficient d' entraînement partiel de l' éther introduit par Fresnel. L' expérience est interprétable dans le cadre de la nouvelle théorie sans qu'il soit nécessaire de faire appel au concept d' éther.

LA PARTIE ELECTRODYNAMIQUE DE L'ARTICLE DE 1905

Dans cette dernière partie Einstein utilise les résultats qu'il a obtenus dans le domaine de la cinématique et les applique à l' électrodynamique . D' abord il écrit les équations de Maxwell pour le vide dans le référentiel (R), il s' agit de l'expression analytique des équations de Maxwell - Faraday et de Maxwell - Ampère déjà introduites dans la première partie de l'exposé . Nous les écrivons ci - après avec nos notations , alors que les composantes de $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont notées respectivement X, Y, Z et L, M, N dans le mémoire d' Einstein.

---

* Il semble qu' Einstein ait fait le choix délibéré de ne privilégier et de ne citer aucune expérience célèbre pour appuyer sa théorie dont la cohérence interne lui paraît suffisamment convaincante.

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_z}{\partial t}$$

Formulation analytique dans (R) des équations de Maxwell
(équations de Maxwell - Faraday et de Maxwell - Ampère)

En appliquant la transformation de Lorentz inverse aux composantes x, y, z, t dans (R) il obtient des équations où interviennent les composantes x', y', z', t' relatives à (R'). D'après le principe de relativité les équations de Maxwell doivent garder la même formulation dans le référentiel galiléen (R') c'est à dire qu'elles doivent encore s'exprimer dans (R') sous la forme :

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} = -\frac{\partial B'_x}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} = -\frac{\partial B'_y}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} = -\frac{\partial B'_z}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial B'_z}{\partial y'} - \frac{\partial B'_y}{\partial z'} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E'_x}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial B'_x}{\partial z'} - \frac{\partial B'_z}{\partial x'} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E'_y}{\partial t'}$$

$$\frac{\partial B'_y}{\partial x'} - \frac{\partial B'_x}{\partial y'} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial E'_z}{\partial t'}$$

Formulation analytique dans (R') des équations de Maxwell

Pour assurer l'identité des deux familles d'équations, les composantes du champ électromagnétique ($\vec{E}'$, $\vec{B}'$) dans (R') doivent, en fonction des composantes du champ électromagnétique ($\vec{E}$, $\vec{B}$) dans (R), avoir pour expression :

$$\vec{E}\begin{cases} E_x = E_x \\ E_y = \gamma\,(E_y - v B_z) \\ E_z = \gamma\,(E_z + v B_y) \end{cases} \qquad \vec{B}\begin{cases} B_x = B_x \\ B_y = \gamma\,(B_y + \frac{v}{c^2} E_z) \\ B_z = \gamma\,(B_z - \frac{v}{c^2} E_y) \end{cases} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Formules de transformation des champs électrique et magnétique

On constate qu'en plus du champ électrique $\vec{E}$ existant dans le référentiel (R) il apparaît, dans le référentiel (R') de l'observateur en mouvement, une composante supplémentaire que l'on peut assimiler au champ électromoteur si on néglige les termes du second ordre en v/c . Les expressions des composantes de $\vec{E}'$ deviennent * :

$$E'_x = E_x$$
$$E'_y \approx E_y - v B_z \qquad \text{(au premier ordre)}$$
$$E'_z \approx E_z + v B_y \qquad \text{(au premier ordre)}$$

c'est à dire , sous forme vectorielle :

$$\vec{E}' \approx \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Einstein revient alors en quelques lignes sur l'exemple de la spire et de l'aimant évoqué au début de l'article. Il indique seulement, sans plus de développement, que disparaît ainsi l'asymétrie des deux interprétations. En effet, la situation de la figure 6. b devient similaire à la situation de la figure 6.a si le champ électromagnétique est exprimé dans le référentiel de la spire, noté (R'), en mouvement à la vitesse $\vec{v}' = -\vec{v}$, avec $v \ll c$, par rapport au référentiel de l'aimant, noté (R).

$$\vec{B}\begin{vmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{vmatrix} \qquad \vec{E}\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \vec{B}'\begin{vmatrix} B'_x \\ B'_y \\ B'_z \end{vmatrix} \qquad \vec{E}'\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E'_y \approx v B_z \\ E_z \approx -v B_y \end{vmatrix}$$

Dans le référentiel (R) de l'aimant Dans le référentiel (R') de la spire

* Nous ne nous intéressons pas ici à l'expression des composantes de $\vec{B}'$ dans (R')

La distinction arbitraire entre repos et mouvement est ainsi levée . Un problème de magnétostatique dans (R) devient dans (R') un problème d'électromagnétisme . Nous retiendrons qu'il est nécessaire d'être vigilant quant au choix du référentiel galiléen le plus adéquat pour la résolution d'un problème d'électromagnétisme. Dans son *introduction* , Einstein indique que d'autres situations du même genre auraient pu être présentées : on pense, par exemple, à un problème d'électrostatique qui, pour un observateur en mouvement, devient un problème d'électromagnétisme. On mesure tout l'intérêt de résoudre le problème dans le référentiel où les lois de la physique s'expriment le plus simplement et d'appliquer ensuite les formules de transformation des champs.

Après cette parenthèse didactique , revenons à l'article lui même qui n'est pas pour autant terminé . Einstein traite encore l'effet Doppler et l'aberration stellaire . Il n'insiste pas sur l'importance des résultats qu'il obtient sinon en indiquant qu'il déduit une expression de la loi de l'aberration sous sa forme la plus générale . A ce stade il aurait pu préciser qu'il donnait là une interprétation indiscutable du phénomène d'aberration sans avoir recours à la théorie de Fresnel . D'autre part, il n'indique pas explicitement qu'il prévoit un effet Doppler transverse dont la confirmation expérimentale sera seulement apportée en 1938 par Ives et Stillwell .

Einstein déduit également à partir des relations de transformation des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ une expression de l'énergie de l'onde lumineuse qui varie suivant la même loi que la fréquence avec l'état de mouvement de l'observateur . Là encore , il reste dans le cadre de la logique interne de son article sans faire allusion à ses propres travaux sur les quanta de lumière qui seront pourtant publiés eux aussi dans le tome 17 de *Annalen der Physik*. Dans le même paragraphe il poursuit en établissant l'expression de la pression de radiation qui s'exerce sur un miroir parfaitement réfléchissant .

L'article se termine sur une première approche de la dynamique relativiste à travers l'étude de la trajectoire d'un électron dans un champ magnétique uniforme . Einstein obtient les expressions maintenant classiques des masses "longitudinale" et "transversale" variant avec la vitesse *. Il conclut à l'impossibilité pour une particule matérielle de dépasser la vitesse

* Masse qui correspond à ce que nous appelons aujourd'hui "inertie" (recommandation de la commission Lagarrigue).

de la lumière et termine son article en donnant les caractéristiques de la trajectoire de l'électron relativiste .

INCIDENCES DE L'ARTICLE - CONCLUSION

Nous avons déjà évoqué au fur et à mesure de l'exposé l'importance des résultats obtenus. Il faudra en fait des années de travail à la communauté scientifique pour déduire toutes les conséquences expérimentales et théoriques de cet article fondamental. Einstein lui-même, trois mois plus tard publie dans le tome 18 de *Annalen der Physik* un article complémentaire où il introduit l'idée que la masse m d'un corps émettant l'énergie E sous forme de rayonnement doit décroître d'une quantité Δm égale à $\frac{E}{c^2}$. L'article de base qui explicite et discute la fameuse relation $E = m c^2$ parait en 1907 dans *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* . Dans le même article sont posées les bases physiques de la relativité générale ; une longue période de réflexion et de travail personnel sera nécessaire pour qu'il établisse en 1916 la théorie de la relativité générale .

En 1909 une nouvelle étape est franchie avec la contribution des physiciens américains Lewis et Tolman qui donnent une formulation complète de la dynamique relativiste seulement abordée dans l'article d'Einstein . La même année Minkowski , qui fut le professeur de mathématiques d'Einstein au Polytechnicum de Zurich , propose l'élégant et puissant formalisme à quatre dimensions qui contribuera à séduire les théoriciens les plus sceptiques .

Paradoxalement alors que la théorie de la relativité générale était confirmée expérimentalement dès 1919 par Eddington , il fallut attendre 1923 pour que Compton vérifiât les hypothèses d'Einstein sur les quanta de lumière et en même temps , les lois relativistes de conservation de l'énergie et de l'impulsion . La relation $\Delta E = c^2 \Delta m$ reçut confirmation en 1932 grâce aux expériences de Cockroft et Walton. Le physicien allemand Hahn découvrit en 1938 dans la fission nucléaire le processus permettant d'exploiter l'équivalence masse-énergie avec les conséquences que l'on connait . Pour les effets cinématiques nous avons déjà signalé qu'il fallut attendre 1938 pour que soit vérifié expérimentalement l'effet Doppler transverse .

Quant à l'effet de "dilatation du temps" il fut confirmé par les

expériences sur l'étude de la durée de vie des muons cosmiques, en 1941 par Rossi et Hall, puis en 1963 par Frish et Smith. Ajoutons que de nos jours la relativité restreinte est vérifiée régulièrement dans le cadre des nombreuses expériences effectuées par les physiciens des particules de haute énergie.

En conclusion, nous dirons que la relativité restreinte s'appuie historiquement sur la théorie électromagnétique de Maxwell et sur les travaux de nombreux théoriciens et expérimentateurs dont la réflexion scientifique reste étroitement subordonnée aux faits expérimentaux observés. Le caractère révolutionnaire de l'article d'Einstein réside dans l'originalité de la démarche. En effet, à partir d'une réflexion critique et approfondie sur les contradictions de la physique classique, réflexion qui implique a priori un refus des explications de circonstance jusqu'ici proposées pour interpréter les différentes expériences, Einstein retient un nombre limité de principes essentiels, abandonne les concepts superflus et ose remettre en question la mécanique newtonienne.

Grâce à l'élaboration de procédés de mesure par la pensée compatibles avec les principes énoncés, en codifiant la mesure de l'espace et du temps, il construit une théorie cohérente qui intègre les connaissances anciennes, élimine les contradictions et prévoit avant expérience de nouveaux phénomènes.

Dans l'article est absente toute argumentation qui aurait pu être développée pour démontrer la validité des hypothèses. En particulier, il n'est fait aucune référence explicite aux expériences célèbres déjà évoquées. L'élégance de la démarche, la logique interne de l'article et sa valeur prédictive suffisent pour convaincre.

En mettant ainsi en place la théorie de la relativité restreinte Einstein fournit, à partir du principe d'invariance des lois physiques, une formulation qui concilie les points de vue apparemment différents d'observateurs galiléens Cette théorie contribuera à unifier les champs électrique et magnétique, les concepts d'espace et de temps mais aussi ceux de masse et d'énergie. Il faudra encore à Einstein environ dix années de réflexion solitaire pour élaborer la théorie de la relativité générale qui trouve aujourd'hui sa consécration dans les travaux les plus récents d'astrophysique et de cosmologie.

BIBLIOGRAPHIE

BALIBAR F., Galilée, Newton lus par Einstein, Presses Universitaires de France, 1986 .

BARRAT J. P., Electromagnétisme et Relativité Restreinte, Ediscience, 1972 .

COCKROFT J. D. and WALTON G. T., Proc. Roy. Soc. A137, 229, 1932 .

COMPTON A. H., Phys . Rev. 21 , 483, 1923.

EINSTEIN A., Annalen der Physik 17, 891, 1905 - idem, 18, 639, 1905.
Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité (traduction M. Solovine), Gauthier-Villars, 1972.
Comment je vois le monde, Flammarion, 1979.

EINSTEIN A. et BORN M., Correspondance 1916 - 1955, Editions du Seuil, 1972.

EINSTEIN A. et BESSO M., Correspondance 1903 - 1955, Collection Savoir, 1979.

FRENCH A. P., (sous la direction de), EINSTEIN le livre du Centenaire. Edition française de G. Delacôte et J. Souchon-Royer, Hier et Demain, 1979.

FRISCH D. H. and SMITH J. H., Am. J. Phys., 31, 342, 1963.

GOLBERG S., Am. J. Phys., 35, 934, 1967.

GROSSETETE C., Relativité restreinte et structure atomique de la matière, Collection Ellipses, 1985.

HOFFMANN B. et DUKAS H., Albert Einstein : créateur et rebelle (traduction M. Manly), Editions du Seuil, 1975 .

HOLTON G., Am. J. Phys., 28, 627, 1960, idem, 37, 968, 1969.

IVES H. E. and STILLWELL G. R., J. Opt. Soc. Am., 28, 215, 1938 .

LEWIS G. N. and TOLMAN R. C., Phil. Mag., 18, 510, 1909.

LEVY - LEBLOND J. M., La relativité aujourd'hui, La Recherche, vol. 10, n° 96, 1979.

LORENTZ H. A., Versuch ciner Theorie der electrischen und optischen Erescheinungen in bewegten Karpen , p 28 , Brill, Leiden, 1895.

MACH F., The Science of Mechanics, Open Court Publishing Company, La Salle, Illinois, 1933, (traduction française E. Bertrand), La Mécanique, exposé historique et critique de son développement.

MAXWELL J. C., Collected Scientific Papers, Dover, New York, 1952.
Traité d'électricité et de magnétisme, publié par W. Garnet, (traduction française G. Seligmann) Gauthier - Villars, 1885 - 1887.

MINKOWSKI H., Traduction anglaise dans The Principle of Relativity, Dover Publications Inc. (article de 1909).

POINCARE H. A., Monist, 15, 1, 1905.

ROSSI B. and HALL D. B., Phys. Rev., 59, 223, 1941.

ROSSER W. G., An Introduction to the theory of Relativity, Butterworths, Londres, 1964.

SMITH J. H., Introduction à la Relativité, Edition française dirigée par J. M. Levy - Leblond, Ediscience, 1973.

WHITROW G. J., (sous la direction de), Einstein : the man and his achievement, British Broadcasting Corporation, Londres, 1967.

WHITTAKER E. T., A History of the Theories of Aether and Electricity, T. Nelson, Londres, 1951 ; H. Torchbooks, New York, 1960.

Actes de l'Université d'Été sur l'Histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988

LA PHILOSOPHIE MATHÉMATIQUE DE GASTON BACHELARD

(d'après "Intuition et Réalisme en Mathématiques")

Michel SERFATI (*)
Lycée Raspail - Paris

- le philosophe anabaptiste :

On pourrait dire, pour faire bref, que l'œuvre de Bachelard, si particulière, est comme la mise en acte d'une contradiction assumée. Bachelard est pour nous en effet d'une part cet épistémologue des sciences expérimentales, rationaliste véhément, actif et incisif, le tenant de l'*animus*, associé à ce qu'il en est des vertus mâles (au rang desquelles le concept), mais aussi bien le chantre de la "rêverie", scientifique ou poétique, paladin de l'*anima*, ce symbole des principes femelles (où il place l'image). L'intérêt spécifique pour nous de la position de Bachelard tient sans doute en que ce "phénoménologue de l'imaginaire" (J.C Margolin) ne cherche nullement à réduire la contradiction, mais à l'exposer au contraire, et à l'assumer.
Cependant, ce qui est chez lui une démarche naturelle ne va évidemment pas sans faire lever quelques interrogations chez ses commentateurs et disciples. Et on voit, dans la "Revue internationale de Philosophie"(1) revenir une même ambivalence dans les titres des articles qui lui sont consacrés dans un numéro spécial : "Le Problème de l'Unit", "Janus Bi-Frons", "la synthèse". Canguilhem évoque à son propos une "anthropologie concordataire."

L'assomption de cette essentielle contradiction place évidemment Bachelard dans une position un peu à part dans les écoles philosophiques. Lui-même se définissait comme un philosophe "anabaptiste ".

- Psychanalyse et métapsychologie : *animus et anima* ?

Il se peut que Bachelard ait vu, dans ce qu'il appelle la psychanalyse, le seul outil conceptuel en mesure de mettre en forme cette assomption. Pendant une assez grande partie de sa vie, en effet, Bachelard a revendiqué et mis en avant la psychanalyse comme un moyen neuf et spécifique d'éclairage de la connaissance scientifique.

(*) Union des Professeurs de Spéciales.
Ce texte fait suite à un "Atelier" de l'Université d'Eté de La Rochelle en Histoire et Epistémologie des Mathématiques, sous le titre "Bachelard, connaissance approchée et épistémologie".

(1) Revue Internationale de Philosophie. N° 150 (194)(3) P.U.F.

A l'époque de sa thèse (1927), l'"Interprétation des Rêves" vient tout juste de paraître depuis un an (1926), et Bachelard est bien ici un homme de son temps ! Mais -il faudrait ailleurs le montrer-, c'est une "psychanalyse" bien particulière qu'il développe. Comme tous les grands créateurs en effet, (on songe ici à Lacan), Bachelard tire à lui termes et concepts forgés dans d'autres sciences, d'autres contextes et pour d'autres usages, s'autorisant l'emploi de signifiants ainsi "dévoyés" à un usage personnel fort fécond et pour sa plus grande gloire ! Dans les meilleurs cas, ces signifiants deviennent autant de métaphores par lesquels les autres doivent "passer" .

Plutôt qu'à Freud., on a dit, à juste titre, que la "psychanalyse" de Bachelard était plutôt empruntée à Jung. Cependant ,le terme même de "psychanalyse *de l'objet* ", que Bachelard évoque abondemment dans son œuvre fait aussitôt nécessairement question ! A notre sens, et pour le texte qui nous occupe ici, c'est davantage aux théorisations - à venir ! - de Mélanie Klein qu'il faudrait rattacher les conceptions de Bachelard.

Quoiqu'il en soit, je préférerai parler dans la suite de "métapsychologie", le mot psychanalyse ayant une connotation clinique qui est ici hors de propos.

- Bachelard et les Mathématiques.

La place des mathématiques dans l'œuvre de Bachelard est singulière : Epistémologiquement d'abord, elle est majeure. Bachelard lui-même écrit quelque part que son "sur moi" est mathématique, entendez une instance intériorisée qui guiderait son inconscient épistémique.

Cependant, de façon très surprenante quand on considère la variété de son œuvre, on trouve relativement peu de textes de Bachelard consacrés à l'épistémologie des mathématiques même. Maurice Loi(2) en fait l' inventaire, qui passe par "*l'Essai sur la connaissance approchée*" (1927/28 ; nous l'étudions ici) , le "*Nouvel esprit scientifique*" (1934 : Bachelard a 50 ans), puis la "*Formation de l'Esprit Scientifique* " (1938 : 54 ans), la "*Philosophie du Non* " (1940 : 56 ans), enfin et pour couronnement, le "*Rationalisme appliqué* " (1949 : 65 ans).

- Essai sur la Connaissance approchée .

Il s'agit de la thèse principale de Doctorat en Philosophie de Bachelard, publiée en librairie en 1928, un an après sa soutenance.(3)
Dans l' ouvrage, divisé en quatre livres et dix sept chapitres, Bachelard s'intéresse à ce qu'il appelle la connaissance approchée, et tout d'abord dans les questions de sciences expérimentales. Naturellement, et comme il s'agit de cette forme de figure imposée qui se nomme thèse universitaire, il ne peut se dispenser d'aborder cette même question relativement aux mathématiques, même si on peut croire qu'il ne l'aurait sans doute pas éludée de toutes façons.
Quel sens cependant donner, quand il s'agit de mathématiques, à l'expression : "connaissance approchée " ? A cette question, Bachelard consacre le livre III, lui-même divisé en quatre chapitres :

---

(2) "*Il Protagora*". Janvier-Juin 1984 (*Saggi e Richerche* n° 5)

(3) Librairie Philosophique J. VRIN. Paris. Réédition 1987.
Sa thèse complémentaire est dénommée *"Essai sur l'Evolution d'un Problème de Physique"*.

- Chapitre X : Intuition et réalisme en mathématiques .
- Chapitre XI : Les corps de nombres et l'explication mathématique .
- Chapitre XII : Les problèmes de l'approximation en Mathématiques
- Chapitre XIII : La notion d'infini et l'approximation.

C'est au chapitre X - au titre très " irémique" - qu'est consacré cet atelier -exposé.(4) Ce texte passionné, riche en métaphores, est à mon sens nourri de toute la théorie métapsychologique encore implicite de Bachelard (la "psychanalyse de l'objet"). Il est aussi malheureusement semé d'affirmations bien hasardeuses, en particulier sur la structure des mathématiques actuelles. Bachelard place par exemple un fossé entre l'Analyse et la Géométrie qui, dans l'actuelle unité des mathématiques, n'est plus aujourd'hui de saison . Et c'est aussi en physicien que, trop souvent, Bachelard nous parle de l'épistémologie des mathématiques, ignorant par exemple ce fait épistémologique majeur en mathématiques qu'est la recherche ludique de l'enigme(5)

- Intuition et réalisme en mathématiques .

Tel est le titre complet du chapitre dont nous proposons ici l'étude complète, et d'abord un bref résumé du contenu.
Commençant par examiner le statut et les conditions d'emploi de l'intuition, Bachelard s'attache ensuite à lui opposer la "rigueur", et la radicale et nécessaire correction que ,selon lui, elle apporte à l'intuition. Bachelard entonne ensuite un chant de gloire - argumenté - à la contingence des objets : les voici en effet, ces fruits de la liberté du créateur mathématicien, ces objets mathématiques arbitraires et contingents, et donc fort peu susceptibles de réalité. C'est donc d'abord à la faiblesse du statut de réalité des objets mathématiques que Bachelard conclut (parlant à ce propos d'"ontologie *minima* ").Nous nous emploierons évidemment ici à mettre à jour point par point ses éléments de démonstration .

Cependant, et après avoir ainsi établi une certaine faiblesse ontologique de ces objets, Bachelard poursuit par cette forte remarque :

"Cependant, quand la preuve serait faite que le réalisme mathématique est illusoire, les causes de cette illusion demeureraient qui réclameraient une explication supplémentaire. A y bien réfléchir, une métaphore aussi solide, c'est déjà, dans le domaine de la connaissance une réalité." (pp .185).

Et le chapitre de repartir alors sur cette piste neuve ! Pour traiter cette difficile contradiction sur le statut de l'objet mathématique, Bachelard, revenant sur une de ses remarques antérieures, élabore alors une théorie de construction de l'objet par "projection" (: "ontologie projetée" : c'est l'esprit qui crée), la "réification" étant l'exact résidu dans le réel de deux mouvements relatifs opposés : intégration et rejet de la chose par le sujet, dans un procès d'approximations successives : "A notre point de vue, ce n'est pas le monde qui vivrait d'oppositions et de réconciliations successives, mais l'esprit lui-même dans sa tâche épistémologique ou créatrice. "(pp .186) C'est ici, et même si jamais le mot n'apparaît, l'amorce d'une théorisation typiquement métapsychologique de la construction de l'objet (on songe à Mélanie Klein).

---

(4) Les références renvoient donc aux numéros des pages de l'Edition Vrin.

(5) Ce trait est même essentiel par exemple pour comprendre et expliquer la nature et la persistance des recherches des mathématiciens sur la quadrature du cercle. Les approximations de π données par les Babyloniens, ou par Archimède, puis par Métius par exemple, étaient bien suffisantes pour la "pratique" (pp. 173), et la question est évidemment ailleurs.

Bachelard conclut ainsi tout le chapitre X". Ainsi le réalisme est-il en quelque sorte fonction de l' hétérogénéïté des domaines. Il est d'autant plus net ,d'autant plus objectif que les intérférences sont plus nombreuses, plus diverses. D'ailleurs l'approximation consiste toujours dans un essai de correspondance entre deux domaines différents. C'est même, comme nous allons le voir, en examinant l'ordre d' hétérogénéité des domaines d'explication qu'on arrive à classer le plus rationnellement les procédés d'approximation." (pp 191)
Sans nécessairement en suivre le déroulement linéaire, nous proposons maintenant d'étudier une à une les principales idées qui courent à travers ce texte .

- la seule intuition est inapte à la construction de l'objet mathématique.

Une connaissance intuitive est fixe, tenace, localisée, bornée. Par nature inapte à la généralisation, l'intuition "entrave finalement la liberté de l'esprit" (pp 169). Bachelard en conclut donc logiquement : "l"intuition mathématique est impropre à l'analyse ". Et de donner un exemple de fausse intuition qui conduit au calcul absurde de l'aire d'un tronc de cylindre(6)

L'intuition est donc une donnée brute, ni précise, ni imprécise, et dont on ne peut en tout cas améliorer la précision, qui est, de façon irréversible et immuable, associée à son surgissement même(7) : "Comment reconnaîtrait-on l'imprécision d'une notion en restant dans l'intuition qui primitivement la procure ? Les limites de la précision dans ce domaine doivent être atteintes rapidement et même d'emblée. " (pp .174)

- pour construire l'objet par abstraction, il faut sur lui deux points de vue au moins.

Ce point est crucial dans la démonstration de Bachelard. Il l'évoque en début de chapitre, il y revient en force à la fin.
Pour que, à partir de l'intuition, l'abstraction puisse se faire "avec méthode", il faut que la notion à considérer se retrouve dans au moins deux domaines distincts. La démonstration de Bachelard est ici directement sous-tendue, semble-t-il, à la fois par l'image du repérage géométrique (ou goniométrique), qui requiert deux (ou trois) points fixes pour situer un point, et aussi par celle, optique, de l"intérférence", qui laisse apparaître, à l'intersection des franges, le réel comme résidu : "C'est dans l'interférence des domaines de pensée que nous trouverons le moyen de corriger les notions." (pp 169).
Pour bien comprendre une notion, on ne peut être plongé dans cette notion seule, et c'est donc à partir de deux *points de vue*, qu'on *distingue* l'objet, qu'on le *crée* : c'est en montrant en quoi un cercle est une ellipse, mais aussi une hypersphère, comme à l'intersection donc de ces deux concepts, qu'on a quelques chances (?) d'apercevoir celui de cercle.

---

(6) En "passant à la limite" sur des sommes d'aires de triangles situés dans des plans tangents. L'ambiguité est évidemment ici dans le passage à la limite, notion si usuelle, et cependant si peu simple !
La suite des triangles est ici une suite double (hauteur et base) : si les deux entiers tendent vers l'infini indépendemment, à la limite, on obtient donc géométriquement des bourrelets circulaires, (et numériquement tout ce qu'on veut...). Pourquoi ceci est-il contraire à l'intuition chez Bachelard ? (pp. 171)

(7) Emporté par son élan démonstratif, et voulant étendre sa preuve à la physique, on trouve chez Bachelard, déclarant citer Russel, cette affirmation hasardeuse : "l'intuition n'a rien à voir avec l'infiniment petit". (pp. 172). Les modèles de l'atome ne seraient-ils pas géomorphes ?

Bachelard : " Ainsi, pour bien connaître le cercle, il convient de l'envisager non seulement sur un plan , mais aussi sur une sphère, en distinguant les cas où il est grand et petit cercle. De même la connaissance du plan resterait insuffisante si on ne le comprenait dans ce qu'on appelle vulgairement l'*espace*, et qui ne qu'est que l'espace d'ordre immédiatement supérieur dans lequel il est retournable. (pp .188)
En d'autres termes encore, c' est de la confrontation d'une même notion à deux champs distincts qu'on constate une différence de "sensibilité", qui est créatrice. Si "on transporte ailleurs une notion expérimentale, il est bien rare que les sensibilités se correspondent dans les deux champs. Alors l'erreur éclate, la pensée s'éveille. Les mathématiques se libérent..." (pp .174)

De cette théorie de l'objet comme produit rationnel de l'intersection des points de vue, Bachelard fait même une méthode : "Avant de reconnaître la liberté de l'esprit, il fallait en éprouver la mobilité. C'est en multipliant la signification en extension des mathématiques qu'on devait en approfondir la compréhension." (pp .173)).
Autrement dit, et à nouveau, c'est en multipliant (signes de "liberté ") les occurences d'une notion dans des registres divers et autonomes (signes de la "mobilité"), qu'on la fait advenir dans le domaine de la raison. C'est donc par abstraction à partir d'occurences, d'exemples, et de recoupements (significations "en extension") qu'on parvient à la conceptualisation (significations "en compréhension").

- la rigueur est affaire de discours

Pour Bachelard, la "rigueur", qu'il oppose ici fortement à l'intuition, est un pur effet de discours, utile à l'exposé et à l'exposé seulement :

"La rigueur est, de notre point de vue, essentiellement discursive" (pp 170). Il semble que René Thom ait rejoint ici Bachelard : "de toutes les disciplines scientifiques, les mathématiques sont celles où la rigueur est, *a priori*, la moins nécessaire. "
Pour Bachelard, toute création d'un objet mathématique est le produit du conflit entre rigueur et intuition, celle-ci venant radicalement contredire celle-là : "La rigueur ne peut donc provenir que d'une correction radicale de l'intuition." (pp .172)[8]

"Même cette rigueur n'est jamais si assurée que lorsqu'elle est conquise sur une véritable erreur." Et Bachelard de citer alors ici le très célèbre exemple de la mise à jour du concept de convergence uniforme.
Sur ce dernier point, on doit, à mon sens, cependant lui objecter fortement qu'il ne s'agit pas ici de "rigueur", mais du procès si usuel de la création d'un nouvel objet mathématique, comme suite à la constatation d'un manque dans un théorème. De ce manque pointe un concept : la convergence uniforme.[9]

Cette lutte entre intuition et rigueur recouvre aussi pour Bachelard le conflit entre l'immédiat et le construit, ou bien entre l'inconscient et le volontaire. La rigueur en effet, pour Bachelard, est avant tout un produit de la conscience et de la volonté :"Si les conditions de clarté et d'évidence peuvent subsister, comme nous l'avons vu dans l'expérience, si les éléments de la persuasion les plus déterminants sont même attachés à

---

(8) C'est sans doute trop dire, et c'est probablement seulement d'une mise en forme qu'il s'agit !

(9) Il est certain que "notre intuition" est sur ce point celle de la convergence uniforme, c'est-à-dire celle de l'"écrasement", et non curieusement, celle de la convergence simple. Il ne faut pas chercher ailleurs que dans cette discordance entre intuition et écriture la source de ces quotidiennes surprises, paradoxes apparents que suscitent nombre d'exercices sur la convergence des suites de fonctions : telle suite converge uniformément vers zéro, cepndant que la distance pour la métrique uniforme tend vers l'infini.

l'exemple, les conditions de la rigueur sont au contraire entièrement solidaires de l'activité de l'esprit, allons plus loin, elles sont nettement solidaires de l'activité volontaire. Nous ne sommes sûrs que de nos actes pris à leur origine même." (pp .174)

Si on peut en effet recommencer un raisonnement, on ne peut certes pas décider de revivre une intuition. L'intuition a un caractère involontaire ; le raisonnement est un acte, répétable, donc scientifique dans une certaine mesure : "Dans la lutte entre la rigueur et l'intuition, pourquoi donnera-t-il finalement sa confiance à la reconstruction arithmétique du donné ? C'est sans doute parce qu'il est toujours libre de recommencer la construction et de vérifier sa solidité. Mais c'est aussi parce que les éléments géométriques, lignes surfaces, volumes, apparaissent, dans l'intuition même, comme unité d'une loi ou d'une fonction, confondu avec le mouvement qui pose un élément particulier" (pp .175).

Dans ces dernières lignes de conclusion, l'argument bachelardien nous parait très faible : ce serait parce que les éléments géométriques saisis par l'intuition seraient chaque fois des réalisations concrètes, des "unités" d'une loi ou d'une fonction, que toute accusation de solipsisme doit être écartée. On retombe ici abruptement dans un réalisme des lois et des fonctions (et quel réalisme !) .

Notons curieusement pour terminer le point de vue empiriste que Bachelard prête à Houël: l'évidence n'est rien d'autre que l'intériorisation d'une habitude expérimentale, son oubli, et son logement inconscient. (pp .172)

- l'arithmétique est purement subjective, elle a donc une certitude apodictique (et vice-versa..)

Tout nombre entier est un pur produit d'un esprit pur dans une synthèse finie d'actes de pensée. La preuve en est le caractère achevé, immédiat, sans faille, absolu de l'appréhension du nombre par le sujet. Et c'est parce que le nombre est ainsi purement subjectif que l'arithmétique, qui en est la science, est dotée d'une certitude sans conteste, nécessaire, et contenant en elle même sa propre necessité, c'est à dire qu'un sujet ne doit-ni ne peut - aller la chercher, cette nécessité, en dehors de la façon dont elle, l'arithmétique, s'impose à lui . Telles sont, me semble-t-il, les articulations résumées de la pensée première de Bachelard sur la question du nombre entier :
" Dès lors, le nombre est le moyen le plus propre à analyser adéquatement l'action de l'esprit dans sa tâche de reconstruction. D'ailleurs l'arithmétique, ne peut par réciproque, correspondre qu'à une expérience interne, toute entière du côté de l'esprit. En effet, en lui appliquant le critérium que M Russel applique à la géométrie, on peut énoncer le double principe suivant : si l'arithmétique a une certitude apodictique, son objet, c'est à dire le nombre, doit être a priori et comme tel, purement subjectif ; et réciproquement, si le nombre est purement subjectif, l'arithmétique doit avoir une certtude apodictique. Le nombre n'est qu'un moment de la numération et, toute numération est une méthode de pensée. On peut dire encore que le nombre est une synthèse d'actes. Si le nombre nous était donné par un enseignement du monde extérieur, il n'aurait pas l'absolu qui le caractérise. Le seul fait que l'unité soit nécessairement exacte, finie du premier coup, est la preuve qu'elle a son origine dans l'exercice de l'esprit." (pp .174-175)

La réciproque est donc également valable pour Bachelard, c'est -à-dire : si une science, à savoir l'arithmétique, s'impose à un sujet de façon apodictique, alors c'est que le nombre, qui en est l'objet d'étude, est purement subjectif. On se demande un peu comment Bachelard pourra esquiver l'inévitable accusation de solipsisme qui pointe ici. Notons en outre, dans la citation précédente, le caractère inattendu d'un affirmation qui définit le nombre comme un "moment".

Et c'est en effet à écarter cette question du solipsisme que Bachelard consacre les lignes qui suivent : " Mais si l'homme peut fonder l'arithmétique en quelque sorte les yeux fermés.....par quelle audacieuse transcendance ira-t-il au-devant du monde des objets avec des cadres si nettement subjectifs ?" (pp .175)

Cependant, la question est ici seulement posée, et il la reprendra plus loin. Soulignons au passage que c'est : "les yeux fermés par rapport à l'expérience, que Bachelard voit la construction de l'arithmétique dans un sujet..

- l'opposition continu/discontinu est une métaphore de la dualité : esprit / "actes" .

Précisons d'abord le sens bien particulier du "donné" chez Bachelard . Le "donné", en effet, est pour lui une fonction épistémologique, et non un "produit empirique plus ou moins élaboré". (pp .176). Fonction qui prend sens, seulement de s'opposer à la fonction de la connaissance rigoureuse : l'arithmétique. Autrement dit, tout ce qui n'est pas l'arithmétique, même d'autres parties des mathématiques, comme l'algèbre ou l'analyse, sont à ranger dans le "donné". Ces derniers cependant sont des donnés particulièrement adaptés à l'étude du mécanisme de l'approximation.
Bachelard développe alors toute une métaphore du continu-discontinu pour décrire ce couple d'opposés intuition - rigueur, qu'il vient d'étudier. (l'intuition serait évidemment du côté du "continu") :
"On pourrait dire que, comprendre un donné, c'est appliquer le continu des intuitions sur le discontinu des actes, ce qui ne peut se faire qu'en resserrant l'intuition, essentiellement continue .....sur l'intention qui tend à la reconstituer" (pp .175). Le "continu des intuitions", est sans doute ici l'immense univers des appréhensions intuitives possibles, et l'"intention", c'est le produit de la volonté consciente, ce que Bachelard a plus haut appelé la "rigueur".
Il y a malheureusement très vite quelques ennuis :"La simple correspondance d'un continu et d'un discontinu pose des difficultés mathématiques considérables." (pp .175). A tâcher de passer en effet d'un "continu" à un "discontinu", il y a nécessairement de la perte (ce "resserrement" qu'évoque Bachelard), et cette opposition n'étant donc pas mathématiquement facilement réductible, il en est de même du couple d'opposés intuition /rigueur, dualité en place de laquelle, très vite, Bachelard a substitué celui de esprit / objet .
C'est donc par des tentatives d'approximations successives du continu par le discontinu que procède ici la formation de la connaissance, selon Bachelard : " C'est à ce problème d'adéquation que s'attache l'approximation. Chacun des degrés de l'approximation traduit un état de reconstruction du donné."
Dans cette course poursuite par quoi Bachelard croit pouvoir décrire une tentative d'adéquation du sujet à l'objet, on voit déjà ici pointer une métaphore d'approximations successives qui sera reprise et magnifiée plus loin.

- le statut de réalité de l'objet mathématique est à la mesure de l'echec de sa représentation arithmétique. Nouvelle métaphore pour le couple subjet/objet.

Ou bien une connaissance entre directement et, immédiatement dans le champ de prise de la connaissance pure, rigoureuse, celle de l'arithmétique, ou bien elle demeurera toujours pour Bachelard en dehors de ce champ de la rigueur, ne recevant seulement qu' "une valeur pragmatique". (pp .176). En effet : "Si le réseau d'approximation arithmétique ne saisit pas l'intuition du premier coup, cette prise est à jamais manquée.

On pourrait donc s'étonner que l'approximation s'attache à représenter le non-représentable.." (pp .176)
Donc, le statut d'existant - c'est à dire en dehors du sujet - des notions mathématiques est précisément lié à ce que ces notions ne sont pas du domaine de la connaissance pure.
" A cet échec est lié, croyons-nous, l'aspect ontologique qu'on reconnaît parfois aux notions mathématiques (pp .176)."
Le propos de Bachelard évoque ici irrésistiblement la différence majeure que la métapsychologie moderne érige entre la "réalité extérieure" et la "réalité psychique".

Et Bachelard, logiquement, va au bout de sa pensée : la thèse selon laquelle les objets mathématiques pourraient exister en dehors du sujet - leur réalisme donc - n'aurait certes pas tenu la route si les objets mathématiques, avaient tous pu être obtenus à partir de l'arithmétique :
" Si la connaissance arithmétique eût pu analyser toutes les intuitions, il est à penser que les thèses du réalisme mathématique n'eussent jamais eu d'objet. Cette analyse eut entrainé, dans ces conditions, une assimilation complète." (pp .176)

De ce qu' il est des objets mathématiques non réductibles à l'Arithmétique, Bachelard croit tenir une preuve de réalisme. C'est donc une nouvelle - et forte - métaphore qui associe à la dualité sujet-objet le couple d'opposés arithmétique/irrationnel, le sujet étant évidemment du côté de l'arithmétique. Elle remplace sans doute celle de discontinu/continu. : " Mais l'échec de l'arithmétique devant l'irrationnel dressait dans les mathématiques un dualisme ausi accusé que l'opposition du sujet et du réel dans la connaissance ordinaire." (pp .177)
Bachelard continue logiquement : tout ce qui est un nombre pur est purement en provenance du sujet, mais donc aussi tout ce qui peut s'élaborer à partir du nombre pur par un nombre fini d'opérations -. Le *finiment engendré* reste donc dans le champ clos du sujet : "".....aucun gouffre épistémologique ne séparerait l'être défini des éléments de son explication..... " , et du coup sa "réalité" s'évanouirait, c'est-à-dire sa place en dehors du sujet.

Tout objet mathématique finiment engendré à partir du nombre est donc d'existence vacillante : son statut dépend de l'individuation du sujet qui le constitue.
C'est au contraire dans l'indétermination que réside la possibilité d'une vraie existence, et c'est à l'infinitude(10) qu'il faut faire appel pour créer un être mathématique doué d'une existence autonome, en dehors du sujet : "L'être mathématique ne peut avoir de consistance que par son inconnu. Est il vraiment le sujet d'un nombre infini, ou du moins indéterminé de prédicats ? Alors son existence est solide. Il est, lui aussi, un objet. N'est-il que le signe d'un nombre de relations, qui étant déjà connues, sont en nombre nécessairement fini ? Alors, sa solidité est en quelque sorte extrinsèque. Elle dépend de la solidarité des notions." (pp .177)

L'infinitude, parce qu'elle n'est pas directement appréhensible par le sujet, implique nécessairement l'extériorité, ce signe premier de l'existence : "une telle résistance aux actes vraiment simples de l'esprit rappelle l'irrationalité foncière du donné.Elle est alors prise pour signe d'une existence séparée." (pp .177)
Bachelard examine même une sorte de réciproque, tâche assez extrême : il précise en effet, qu' à l'inverse, considerer comme réellement existant un objet mathématique qui serait seulement *finiment engendré* ne peut être que le fait d'un artifice volontariste, sous-tendu par le désir de le vouloir faire exister à tout prix : " le réalisme mathématique apparait dans cette dernière hypothèse comme la manifestation d'un besoin ontologique, ou moins encore, comme une abréviation commode du langage scientifique."

---

(10) Noter ici chez Bachelard le glissement dialectique presque immédiat entre "indéterminé" et "infini".

- l'ordre, comme nécessité première.

La primauté de l'ordre est décidément une question majeure pour Bachelard qui a par exemple consacré le chapitre II de l'*Essai sur la Connaissance approchée* à montrer que pour lui,l'ordre est premier, fondateur ,par rapport à la quantité : la structure ordonnée fonde le numérique, et non l'inverse.
S'appuyant sur cette même pétition de principe , Bachelard nous expose dans le présent chapitre cet utopique regret qu'en en Mathématiques, l'ordre dans l'exposition des résultats ou des définitions ne soit pas lui aussi imposé par la doctrine elle-même, bref ne participe pas à la necessité des mathématiques.
Ce bien étrange regret est seulement le signe que c'est à une place décidément fort élevée, transcendante même, que Bachelard place les Mathématiques : "En réalité il serait bien difficile de concilier cette unité de développement avec le décousu qui subsiste dans une doctrine mathématique.." (pp .178). Et plus loin : : "l'introduction des diverses fonctions analytiques paraît bien obéir à un principe de complexité croissante, mais il s'agit toujours de complexité à un point de vue déterminé." (pp .179)

Il y a ici comme une confusion, me semble-t-il, chez Bachelard, entre le rigoureux et le nécessaire. Plus loin encore :" la déduction est tout au plus une méthode d'exposition." (pp .178)". Par exemple dans un livre de géométrie, on passe en toute indépendance du triangle au cercle et du cercle à l'ellipse, etc....On se réserve bien de faire ressortir après-coup.....mais ce n'est pas là justifier complètement l'ordre choisi ; on ne démontre pas qu'un ordre différent eut été illogique." (pp .178).

Une autre conséquence immédiate de ce défaut en la nécessité de l'ordre est l'absence d'e toute taxinomie naturelle dans l'univers des objets mathématiques. La construction mathématique met au jour des objets distincts, mais elle ne fonde pas - en droit - des genres qui viendraient classifier et recouvrir ces objets : " En tous cas, s'il y a ontogénèse, il n' y a plus phylogénèse.." (pp .179)

Renonçant donc à un rêve où l'ordre de l'exposé eut été lui aussi un beau produit logique de la structure - dans le registre de la déduction donc -, Bachelard en revient à une autre de ses idées chères : une architecture des concepts en Mathématique qui serait dialectique, et non plus déductive :
" A y regarder de plus près, comme nous aurons l'occasion d'y revenir, si les notions s'apppellent, c'est plutôt par opposition que par déduction." (pp .179)

- contingence des objets géométriques et liberté du géométre créateur.

Bachelard nous donne en commençant l'image d'un concept *fondamental* en géométrie, qu'il déclare vouloir "simple"(11) et qui tient un peu de la métaphore des" origines" : concept-rocher, posé là , surgissant et solitaire, sans précedesseur, et même, tant qu'il n'est pas relié à d'autres, sans descendance :
" On pourrait parler, à certains égards, d'une contingence radicale de la géométrie ....les définitions mathématiques sont de véritables hypothèses qui posent librement les objets..." ....." Contrairement aux défintions physiques.....après l'examen attentif des phénomènes, les défintions mathématiques sont des bases que l'esprit fixe en conservant une telle liberté qu'elles ne prendront tout leur sens qu'après intervention des postulats.....L'objet ainsi défini n'a pas la moindre fécondité..... A bien y réfléchir,

---

(11) Bachelard écrit ailleurs que la simplicité est, entre tous, un concept compliqué. Elle ne vient qu'en second, après tous les autres.

si l'on veut qu'un concept soit un concept fondamental, il faut que ce soit un concept simple ...." (pp .179)

A partir de là, et de façon un peu inattendue chez lui, Bachelard développe alors un conception très hilbertienne de la géométrie, où tout sens est évacué[12], les mots n'ayant pas en eux-mêmes de signification, et où seules les relations entre eux sont signifiantes. Et Bachelard d'entonner à ce propos un chant de gloire à la liberté (du créateur) et la contingence (de l'objet créé) :
" L'esprit n'apparaît donc comme nullement lié par la position des concepts fondamentaux", s'exprime M.Mac Leod " (pp .180) Avant le choix des postulats les mots exprimant les concepts fondamentaux seront censés représenter des objets choisis n'importe comment, sans restrictions ". Il ajoute : "La liberté initiale nous paraît donc absolue." (pp .180) Bachelard : "L'esprit va-t-il la restreindre par la liaison des postulats ?"..." l'esprit ne nous semble lié par aucune intuition ; aucune matière ne l'opprime. S'il se donne des règles, sa seule obligation sera de s'y astreindre." (pp .180)

Bachelard souligne certes ici avec raison que les règles sont l'essence même de la liberté du mathématicien. Mais jamais il n'envisage la question de la *consistance* du système obtenu - et ce n'est pas rien - : les "règles" doivent en effet être *non contradictoires*, et, si possible, indépendantes. Bachelard reviendra ensuite un plus bas sur ce seul dernier point. Cependant, et à cela près, le formaliste le plus pointilleux ne trouverait ici rien à redire à ce procédé d'évacuation du sens, à nouveau très hilbertien et très formaliste, et, tout de même un peu surprenant chez Bachelard, même si c'était évidemment un peu l'air du temps :
"Ainsi les concepts fondamentaux de point et de droite sont entièrement indépendants.....Le postulat d'appartenance ne doit pas nous tromper à cet égard.....tout bien considéré, le postulat d'appartenance n'affirme rien hors la liaison." (pp.180)Bachelard : "Il en serait de même des postulats d'appartenance suivants qui agglomèrent une droite et un point extérieur pour donner le plan, et un point extérieur pour donner l'espace. La construction progressive obéit à une véritable dialectique qui est un nouveau signe de notre liberté originelle dans les choix des notions successives, car la dialectique incline sans opprimer..." (pp .181)

Bachelard développe ensuite l'idée que, s'il ne suffit évidemment pas d'un seul axiome pour fabriquer une géométrie, la prise en compte des nécessaires couches successives d'axiomes ne modifie en rien la contingence de l'objet, ni la liberté du créateur : " A la suite de postulats d'appartenance, la géométrie usuelle introduit explicitement les postulats d'ordre, de congruenc, de continuité, de parallélisme.....Aucun d'eux séparément ne supprime la contingence des notions....mais réunis en un même système ne vont-ils pas coordonner les notions au point que les relations qu'ils déterminent entre elles deviennent nécessaires ? " (pp .182)
Comme déjà indiqué, Bachelard consacre plus loin quelques lignes à la question de l'indépendance des postulats, mais c'est d'abord par un surprenant discours, et une curieuse définition de l'indépendance. Bachelard voit en effet le modèle de l'indépendance, dans les deux termes d'une alternative - cette mise en acte du tiers - exclu - : or, quoi de plus *logiquement* lié au contraire que les deux termes d'une alternative, qui s'excluent mutuellement ! Bachelard, faisant à nouveau l'économie de la question de la consistance - ne l'a-t-il pas tout simplement confondue avec celle de l'indépendance ? -, veut ici nous signifier qu'il croit qu'il est possible d' ajouter un axiome ou sa négation, de façon librement consentie, à un corpus déjà existant :
"Rien de plus indépendant en soi que les deux termes d'une alternative. Aucune déduction ne peut tirer l'existence de l'un de l'existence de l'autre. Il faut affirmer l'un et l'autre par des actes qui sont foncièrement indépendants. Le besoin d'être complet et d'étudier les deux termes opposés ne correspond à aucune necessité" .

---

(12) On songe à ce passage fameux, dits des "bocks de bière".

Continuant d'ignorer la question de la consistance, Bachelard revient alors sur l'indépendance des axiomes, cette fois par l'aspect de la redondance :
" les postulats sont et doivent être indépendants. On a démontré que s'ils n'étaient pas indépendants dans leur ensemble, ce serait le signe d'une surabondance, d'une répétition déguisée. Leur nombre devrait alors être réduit....."
Bachelard, ensuite, et toujours sur le fond de cette contingence à laquelle il tient tant, persiste et signe : selon lui, plus on augmente librement le nombre d'axiomes entrant dans la composition d'une géométrie - par ce moyen universel, spécifié, d' y ajouter chaque fois un axiome ou son contraire - plus grand est le nombre de géométries distinctes qu' on peut obtenir ! La contingence est ici le produit de choix alternatifs successifs et indépendants :

" Tant que l'on se contente de géométries à petits nombre d'axiomes, comme les géométrie euclidienne, lobatschewskienne, riemannienne, le pouvoir de l'esprit peut sembler rapidement limité et il est bien vite oublié. Mais il n'en reste pas moins que la locution dichotomique " Ou bien - Ou bien " de Kierkegaard est à la base de l'activité mathématique comme de toute autre activité....Si l'on partait d'un plus grand nombre de postulats les géométries possibles se multiplieraient très rapidement " (pp .182/183)

C'est à nouveau croire que, d'abord on peut trouver un moyen de multiplier *ad libitum* les axiomes non contradictoires et indépendants (Bachelard fournit même un calcul combinatoire de dénombrement à ce sujet.....). Secondairement, c'est aussi ne pas voir, que, même chaque fois que c'est légitime, l'adjonction d'un nouvel axiome à une structure existante, nous fournit chaque fois une structure nouvelle incluse dans la précédente, donc plus riche et plus particulière .

Changeant alors pour une part de sujet, Bachelard tente à nouveau de concilier la contingence, cette absolue liberté dont il se veut le chantre, avec le caractère applicable des mathématiques. Eternelle question ! La réponse de Bachelard sur le sujet, quelque peu tautologique, n'est malheureusement ici guère satisfaisante :

" Nous avons démontré pour le moins, croyons-nous, que dans son formalisme l' élément géométrique se développe en laissant l'esprit libre de poser tel principe de combinaison qu'il voudra. Si les résultats d'une combinaison multiple et répétée des postulats rejoignent une expérience usuelle, c'est sans doute qu'au départ une première intuition a rempli les formes avec la matière même à laquelle on rapportera l'expérience ultime..." (pp .183)

- mythe ou réalité du concept de fonction : Riemann et Weierstrass.

C'est en principe à une exemplarisation du paragraphe précédent que Bachelard s'attache ensuite. D'abord, et puisque le cas du statut des êtres géométriques est censé être réglé (par la négative), qu'en est -il des autres êtres mathématiques, en particulier en Analyse : "auront-ils plus de réalité intrinsèque ? "

Bachelard conclut négativement par la même pétition de principe :

".... D'ailleurs on pourrait trouver mille traces de cet élément de liberté en examinant directement le domaine de l'Analyse." (pp .184)
Et, pour démontrer la chose, il propose alors de s'appuyer sur l'exemple du concept mathématique de fonction. Bachelard s'extasie d'abord sur le caractère de liberté et de contingence de cet objet mathématique, quand il est pris au sens riemannien du mot, c'est à dire pour nous, dans sa signification actuelle, moderne, épurée : une correspondance presque quelconque entre deux ensembles :

"Que l'on se reporte par exemple, à la définition de la fonction par Riemann. Cette définition n'implique, comme on sait, que l'idée de la correspondance. Cette correspondance est alors une véritable forme indifférente à toute matière, et en donnant à l'Analyse une base aussi générale, on va y incorporer, on va le voir, un véritable arbitraire." (pp .184)

Pour Bachelard, cet arbitraire riemannien est le signe d'un complet idéalisme, et il en conclut que l'objet de Riemann n'a pas de statut de réalité. Et de comparer ce qui est - selon lui - une différence majeure entre Riemann et le réaliste Weierstrass, cité ici à propos du principe de son prolongement analytique, Bachelard, en effet, opposant alors le cas d'une fonction analytique, déclare qu'on est "invinciblement amené à croire" que la donnée en un point d'une telle fonction entraîne sa connaissance partout où elle peut l'être. Et, comme s'il était question d'une sorte de permanence de l'objet, de conclure ici à une une preuve de réalisme :
"On est ainsi invinciblement amenés à croire que l'expression conditionne entièrement la fonction hors de son domaine normal de validité, au delà du domaine où elle était primitivement définie. C'est bien là la preuve habituelle du réalisme." (pp .184)

Rappelons ici d'abord qu' il ne s'agit certes pas d'une "croyance", mais d'un fait mathématique, valide dans un certain champ, et surtout que l'interprétation bachelardienne est abusive : le résultat de Weierstrass s'applique aux fonctions *analytiques* , c'est à dire à une catégorie bien connue de fonctions riemannienes, d'un type particulier cependant, puisque soumis à de fortes contraintes de structure : une fonction analytique, ce n'est pas n'importe quelle fonction. Et il arrive ici la contrainte qui s'exerce sur l'objet trouve en effet sa traduction - ou sa contrepartie - en ce que sa donnée en un point entraîne sa connaissance partout. Il n'y a là rien que de logique, et certes pas en tous cas coexistence de deux définitions de la notion de fonction qui seraient disjointes .

Si l'on voulait néanmoins interpréter en termes intuitifs le théorème du prolongement analytique, il serait sans doute plus convenable d'y déceler un passage du local au global, ou bien encore un fantasme de maîtrise .

Bachelard cependant s'est fondé sur cet exemple pour étayer une distinction entre les concepts de fonction chez Riemann et Weierstrass, à l'avantage du premier nommé, pour conclure inévitablement, en Analyse également, à la contingence des objets mathématiques, :
"Mais le moyen de Weierstrass est trop étroit....."l' "être en Analyse ne nous apparaît donc comme le résultat d'une construction..... c'est une construction libre."
De ce que la définition de Riemann n'entraine - évidemment ! - aucune sorte de prolongement *a priori* possible ,Bachelard y a donc décelé une preuve supplémentaire de liberté : liberté du créateur et contingence de l'objet sont donc pour lui pareillement valides en dehors du champ de la géométrie :

" En résumé ,tant dans la géométrie que dans l'Analyse(13). L'arbitraire initial est trop évident ,trop irréductible pour que nous y séparions nettement le domaine du possible et le domaine du réalisé. A aucun moment le réel mathématique n'est assez accentué pour que nous suivions ses traits préfigurés dans le possible." (pp .185).

---

(13) Noter la différence chez Bachelard dans l'emploi des majuscules.

- illusion de réalité et causes de l'illusion.

A ce point de sa démonstration, Bachelard fait une sorte de pause. Si tout objet mathématique est en effet une idéalité, et si sa contingence vaut pour preuve d'absence de réalisme, que dire de plus ?

Suit alors cette assertion, profonde à notre avis, et comme inspirée d'une "sorte de principe de réalité ", au sens freudien du terme :

" Cependant quand la preuve serait faite que le réalisme mathématique est illusoire, les causes de cette illusion demeureraient qui réclameraient une explication supplémentaire. A y bien réfléchir, une métaphore aussi solide, c'est déjà, dans le domaine de la connaissance une réalité." (pp .185)
On n'a en effet rien à objecter à semblable déclaration de principe qui vaut pour méthode.

- la construction dialectique de l'objet : mouvements du sujet et approximations successives .

C'est alors sur une nouvelle voie que Bachelard nous lance ! D'abord, dit-il, l'origine du réalisme mathématique réside dans "la nécessité épistémologique qui pousse l'esprit à réaliser ce qu'il s'applique à connaître "(pp .185), autrement dit que l'homme construit des objets (théoriques) à la figure de ce qu'il imagine *in petto* .

Et d'appeler Meyerson à la rescousse : "Une ontologie projetée nous paraît correspondre en mathématiques à cette ontologie extraite de l'objet que M. Meyerson a reconnue dans toutes les parties des sciences physiques." (pp .185)

Deuxième point, essentiel : ce mouvement de construction est pour Bachelard, toujours inachevé, *potentiel* donc, au sens ou le mot s'oppose à actuel (dans les questions relatives à l'infini), et *dialectique,* au sens il est le produit, le fruit et le compromis de ces deux mouvements en sens contraire : l'incorporation et le rejet. On reconnaît ici des fragments de théorie psychanalytique sur la construction de l'objet .

C'est d'abord une construction en perpétuel achèvement : "Cette ontologie constructive n'est jamais à son terme puisqu'elle correspond plutôt à une action qu'à une trouvaille. L'objet est-il un instant assimilé, effacé en tant qu'obstacle, réduit par l'analyse à sa véritable nature de notion ? Le même processus constructif le mettra en rapport avec un irrationnel nouveau. La généralisation en Mathématiques tend à absorber les domaines qui bordent le domaine primitif." (pp .185)

Le caractère dialectique de la construction apparaît alors une nécessaire conséquence pour Bachelard de sa propre métaphore de l'ontologie projetée : "A notre point de vue, ce n'est pas le monde qui vivrait d'oppositions et de réconciliations successives, mais l'esprit lui-même dans sa tâche épistémologique ou créatrice. A tous les niveaux de la connaissance, l'opposition ferait correspondre un objet, la réincorporation de cet objet dans le compris se ferait par des méthodes élargies qui tomberaient à leur tour en défaut, du fait d"une nouvelle opposition." (pp .186)
Il faut cependant ici souligner : dans ces dernières lignes, Bachelard a enfourché avec fracas son grand cheval épistémologique : la réification est l'exact produit de ce procès dialectique entre l'intégration (ce sont les "conditions"), et le rejet (ce sont les "oppositions.").

Et de poursuivre un peu plus loin l'image d'une construction proprement dialectique, par une *succession* de doubles mouvements, où le maître mot est certainement "opposition" :

" ...Un donné est posé avec tout un cortège de conditions. Mais par voie d'opposition, un donné inconnu se présente aussitôt qui déborde ces conditions. Il en résulte vraiment une réification progressive."(pp .186)

Suit alors ce que curieusement Bachelard présente comme une exemplarisation de la théorie précédente, et qu'il fonde sur le caractère*relatif* des notions de rationnel et d'irrationnel : un nombre est en effet, dit Bachelard, toujours "irrationnel -par - rapport" à d'autres : il y aurait donc, une "réification" de l'irrationnalité, au delà des objets irrationnels eux-mêmes :
"En Mathématiques, le genre reçoit, sous ce point de vue, une réalité qui n'appartient pas aux espèces" (pp .187).

En conséquence, regarder par exemple un entier comme un rationnel particulier, puis de la même façon comme un réel particulier, et pareillement un rationnel comme un réel particulier est un abus commode, mais qui postule en fait une existence véritable sous jacente et souhaitée, et qui serait le fait d'un réalisme espéré(14) :

" Ce réalisme construit déposera donc tout une série de donnés successifs. Les éléments prendront dans ces domaines des existences vraiment différentes, et ce sera par un abus d'ontologie que nous oublierons les conditions qui ressortissent uniquement à ces domaines pour en faire des propriétés appartenant réellement aux entités." (pp .187)

- l' hétérogénéïté des "domaines", source du statut de réalité et du caractère nécessaire de l'approximation de la connaissance

Au bout de tous ces détours et controverses, voici maintenant un certain retour raisonné de Bachelard vers ce point crucial qu'il a précédemment évoqué au début : l'absolue nécessité du double point de vue dans la construction de l'objet mathématique. Nécessité qui cependant se conjugue maintenant avec deux faits supplémentaires : d'une part Bachelard envisage désormais ce double point de vue à l'intérieur même des mathématiques, d'autre part l'accent mis qu'il met sur ce qui serait pour lui le " domaine d'origine " d'un objet.

L'existence de deux méthodes différentes pour connaître l'objet est, comme on l'a vu, la source et, dans un certaine mesure, la garantie de son objectivation. Bachelard précise davantage : un signe clair de l'objectivation, un sûr garant, c'est ici la présence d'une "resistance", d'une "opacité", due à la simultanéité sur un même observable de deux méthodes différentes, c'est à dire pour Bachelard, presque contraires..
Bachelard fournit d'abord l'exemple du nombre π, étayé sur l'"hétérogénéïté des domaines en mathématiques" :
" Ainsi le nombre π est défini très exactement par le rapport de la circonférence à son diamètre dès qu'on accepte l'intuition géométrique comme une donnée. C'est dans son évaluation par les moyens arithmétiques que cette notion est frappée d'inexactitude. Il ne s'agit donc pas d'un inconnu en soi, mais d'un inconnu par rapport à un moyen de connaître spécifié." (pp .188)
Bachelard a utilisé ici, à des fins démonstratives, un point de vue assez ancien sur les Mathématiques, qui fait bon marché de leur actuelle unité. Il place en effet là, entre arithmétique et géométrie, une différence de nature, et aperçoit des "moyens de connaitre"

---

(14) En Mathématiques, *stricto sensu*, Bachelard a ici cependant raison : car, comme on sait, l'identification n'est pas une identité.

radicalement différents, là où il n' est évidemment plus aujourd'hui que des *modalités* de la mathématique.
Cependant, ceci l'autorise à conclure pareillement, en un obsédant *leit-motiv,* que c'est bien l'*ombre* portée sur un "domaine" par un "domaine étranger" (ici, par l'arithmétique sur la géométrie) qui permet - et elle seule - de savoir de *quoi l'on parle* dans le domaine initial.

En ces dernières pages, on est ici au cœur des métaphores bachelardiennes, et aussi de ses authentiques conclusions pour tout ce chapitre : à partir d'un seul "domaine d'explication", d'un seul sujet, d'un seul point de vue, le sujet en est vainement réduit à échafauder sans contrôle des objets sans consistance - des fantasmes ? - dans la fausse clarté qui émane de l'indifférenciation. Seule la confrontation avec l'Autre, distinct - c'est à dire, pour une part hostile, d'où les "résistances" : le glissement dialectique de Bachelard est ici frappant - permet de créer l'"apparence objective". Le propos est très directement métapsychologique.

"Cette hétérogénéïté des domaines est la source de la résistance à l'assimilation des notions mathématiques. C'est elle qui donne, croyons-nous, l'existence aux êtres de raison. La fonction "existence" apparaîtra au moment où l'on voudra appliquer l'un sur l'autre deux domaines étrangers, cette fonction correspondant à l'*opacité relative de deux méthodes différentes.*" (pp .188)

Bachelard encore : "D'ailleurs, un domaine d'explication est toujours pur et clair à l'égard de ses propres éléments. Une notion n'y porte ombre que si on essaie de l'analyser par des procédés indirects, étrangers au domaine naturel de la notion. Mais comme cette analyse est du même coup imparfaite, elle crée l'apparence objective. Comme nous le remarquions au début de cette discussion, c'est ici encore l'échec de la représentation qui entraine à postuler une réalité en quelque sorte hostile." (pp .189)

- Mathématiques et Physique .

Dans les toutes dernières lignes du chapitre, Bachelard tente alors de répondre à la question majeure posée à tout épistémoloque conséquent par l'adéquation entre mathématiques et sciences physiques : y a -t- il, en épistémologie des sciences exactes, un autre problème vraiment sérieux ?
Bachelard souligne que ce qui fait en effet ici réalité, c'est l'adéquation elle-même, dont on sait qu'elle n'est pas qu'approximative ! Cette réalité, dit Bachelard, est le fait, soit des choses elles-mêmes, soit le signe du divin :

"Mais où l'hétérogénéïté des domaines serait-elle plus accentuée que celle qui sépare les constructions de la raison des résultats de l'expérience physique ? Les mondes que la physique mathématique réussit à joindre sont si étrangers l'un à l'autre qu'une coïncidence approximative est invinciblement mise au compte d'une réalité,soit qu'on porte cette réalité sur les êtres de raison, soit qu'on y reconnaisse l'inscription dans la matière d'un esprit créateur " (pp .189)

Il poursuit par un ensemble d'exemples empruntés à Fourier, et où la "nature" semble par exemple connaître et utiliser les logarithmes.....:
"L'Analyse mathématique a des rapports nécessaires avec les phénomènes sensibles ; son objet n'est point crée par l'intelligence de l'homme ; il est un élément préexistant de l'ordre universel ,et il n'a rien de contingent et de fortuit ; il est empreint dans toute la nature". (pp .189) (Oeuvres Complètes ,t I ,pp 14)

Cependant, remarque Bachelard, les mathématiques reçoivent, en retour des "impulsions "de la théorie physique : " Etrange forme *a priori* qu'une matière suscite !" (pp .190)

Bachelard conclut alors - assez classiquement - par le point de vue d'un "physicien" sur les mathématiques, c'est à dire : c'est parce que les mathématiques sont "solidaires de la réalité" qu'on doit accorder statut à leurs objets. Faute de précision sur la nature de la "réalité" citée, la réponse paraîtra sans doute bien insuffisante à tout mathématicien.

Examinons néanmoins l'argumentation de Bachelard sur ce point: d'abord, et pour ce qui est des mathématiques *simples*, elles sont dans un premier temps immédiatement dérivées de l'expérience, même si, par la suite, elles "cacheront" soigneusement leurs origines. Cependant , à aucun moment , on ne voit ici chez Bachelard la moindre tentative d' une explication, pourtant épistémologiquement indispensable, sur l'origine et la phénoménologie de cette "dissimulation" :
" Sans doute, par la suite, elles cacheront sous des constructions logiques "l'origine expérimentale" de leurs concepts (Milhaud)"

Certes, il s'agissait là d'"expérience primitive et simple....", nous dit Bachelard. Cependant, et pour celles qui sont moins immédiatement accessibles, comme celles de la physique moderne, le procès est bien plus clair encore. Il conclut donc : les deux aspects, mathématique et physique, sont tellement liés, "inhérents" - ceci étant paradoxalement d'autant plus vrai qu'on s'éloigne du XVII° siècle - que c'est à un échange mutuel dans les deux directions qu'on assiste, comme à la mise en acte d'une bijection, pourrait-on dire..:

"Mais dans la physique mathématique moderne, il s'agit d'une expérience raffinée, et elle fait vraiment corps avec la théorie. L'examen attentif des lois physiques décèle entre les variables une fonctionnalité plus réaliste que riemannienne.....Dans ces conditions, comment se refuser à donner l'existence à des êtres de raison aussi solidaires de la réalité?" (pp .190)
Et plus loin : "Comment expliquer sans cela le succès vraiment physique d'un formalisme absolu ? Ce formalisme a plus que la cohérence intrinsèque, il a d'abord l'inhérence au réel..... Comme dit Condorcet, "l' inhérence de l'étendue à tous les corps est la première considération que prend le géomètre". Dans les théories modernes, cette inhérence est encore plus profonde. A rapprocher les domaines mathématique et physique, on rationalise le réel, mais en échange on réalise le géométrique." (pp .190)
Enfin Bachelard revient *in fine*, sur cette nécessaire condition d'objectivation qu'est pour lui l'altérité des points de vue, des regards, le statut objectal étant donc à l'exacte mesure de cette altérité. Comme conséquence, il y ajoute cette idée, qu'il développe au chapitre suivant : toute approximation est le nécessaire produit de la confrontation avec l'Autre :

"Ainsi le réalisme est-il en quelque sorte fonction de l'hétérogénéïté des domaines. Il est d'autant plus net, d'autant plus objectif que les interférences sont plus nombreuses, plus diverses. D'ailleurs l'approximation consiste toujours dans un essai de correspondance entre deux domaines différents. C'est même, comme nous allons le voir, en examinant l'ordre d'hétérogénéïté des domaines d'explication qu'on arrive à classer le plus rationnellement les procédés d'approximation." (pp 191).

THÉATRE ET PÉDAGOGIE
À propos d'une représentation théâtrale de "l'entretien de Mr DESCARTES et de Mr PASCAL LE JEUNE"[1] de J.C. BRISVILLE

Michel SERFATI (*)
Lycée Raspail - Paris

- Deux histoires pour une pièce de théâtre

C'est un texte réputé difficile, "philosophique", d'abord donné pour les quatre vingt deux spectateurs du Petit Odéon[2], où on le joua cinq semaines, comme d'ordinaire. Devant un authentique succès populaire, elle quitta l'Odéon pour les faubourgs, d'abord (c'est-à-dire rue Blanche), puis la Province (c'est-à-dire à Saint-Denis) et aussi, suprême consécration, à Bruxelles, pour une très remarquable version télévisée.[3]
La seconde histoire est plutôt celle d'une affaire de famille, question interne au passionnat Colloque d'Histoire et d'Epistémologie des Mathématiques de Strasbourg (mai 1987), à l'issue d'une table ronde sur les Mathématiques au XVIIème siècle.
La table ronde est un genre littéraire un peu périlleux, où les conférenciers développent trop souvent des discours parallèles. Pour les faire se rencontrer davantage, il nous est, après-coup, apparu qu'il aurait été plus instructif et bien plus drôle d'entendre et de voir les intervenants s'affronter sur des textes qu'ils auraient préparés.
Sautant alors un pas, je proposais que nous montions la pièce de Brisville dans le cadre de l'Université d'été de la Rochelle (août 1988). Cette mise en place que nous avons menée avec Evelyne Barbin, conduisit à la représentation du 30 août à la maison des jeunes de l'Arsenal à la Rochelle[4] .

- Théâtre et Pédagogie

Les philosophes, comme on sait, n'ont pas dédaigné à l'occasion de s'occuper de théâtre et, parfois de façon un peu surprenante : là où on aurait plutôt attendu Pascal, voici par exemple Descartes en personne, qui avait curieusement écrit cette "comédie en français poussée jusqu'au quatrième acte", qu'évoque Leibniz[5] .

---

(1) Pascal "le Jeune", désigne ici "notre" Blaise Pascal le fils, donc opposé à Etienne Pascal, son père qui, lui aussi, étudia les Mathématiques. C'est lui, le père qui est -avec Roberval- l'inventeur du "limaçon de Pascal".

(*) Union des Professeurs de Spéciales.

(2) Jean-Pierre Miquel en assurait la mise en scène. Daniel Mesguish était Pascal. Henri Vilorgeux était Descartes.

(3) Théâtre National de Belgique. Avril-Mai 1987. Mise en scène : J.C. Drouot (Descartes : Paul Roland ; Pascal : Julien Roy).

(4) Si le théâtre est un lieu d'illusions, il requiert organisation et infrastructure solides : rien de tout ceci n'aurait été possible sans l'appui logistique essentiel de l'I.R.E.M. de Poitiers, en particulier Annette Fontaine, Dominique Gaud et Jacques Borowczyck.

*(5) C'est Mme Rodis-Lewis qui nous a signalé la note manuscrite publiée dans : Œuvres Complètes de Descartes. Editions Adam Tannery, tome X, pp. 208. En juin 1947, elle a présenté une critique historique et une réflexion prolongeant la pièce de Brisville aux Journées organisées à "Descartes" par l'Université de Tours : "La rencontre de Descartes et Pascal - Réalité et fiction". Elle rectifia quelques points, Brisville ayant suivi la **Vie de Descartes** par A. Baillet qui croit que Pascal est allé voir Descartes chez les Minimes et non la lettre de Jacqueline Pascal à sa sœur Gilberte.*

Mais c'est sans doute en ce moment où un philosophe se préoccuppe de diffuser davantage dans le monde sa propre pensée, qu'il peut lui arriver de se tourner vers le théâtre. Je pense évidemment ici à Voltaire et Diderot, mais aussi, assez essentiellement, à Camus et Sartre. Ajoutée en effet à la batterie ordinaire de ses moyens de diffusion (livres, articles, conférences, une mise en scène -qui soit une mise en acte- de ses positions philosophiques, peut être pour un philosophe impliqué dans le monde, un fort bon avantage en forme de "court-circuit" pour la diffusion de ses idées. A côté de ce que serait par exemple un nécessaire étude sur "Réalisme et Idéalisme", que l'on songe au superbe exposé railleur qu'en fait Sartre dans le "Diable et le Bon Dieu" (par la bouche du Banquier...).
Au-delà de quelques rares déclarations de (bonnes) intentions, les scientifiques, pour leur part -et peut-être dans l'exacte mesure où leur fonction s'est peu à peu séparée de celle des philosophes- n'entendent guère aujourd'hui se servir du théâtre pour exposer des questions professionnelles et pédagogiques... Et pourtant...
Pour prendre ici un exemple précis, je soutiens qu'aujourd'hui, et après la représentation de La Rochelle, il est devenu bien plus simple d'intéresser nos collègues, mathématiciens, spectateurs, à la différence -majeure- entre les positions de Descartes et Pascal concernant la géométrie.
Or, cette opposition n'a pas qu'un intérêt historique. Elle est, au contraire, encore quotidiennement opératoire, et donc objet de disputes pratiques et théoriques quant à la façon dont la géométrie doit être aujourd'hui enseignée au Lycée. On peut en effet retrouver sous cette catégorisation des couples d'opposés autrement bien connus : géométrie pure/géométrie analytique, ou bien figure/calcul, ou bien encore, plus philosophiquement : synthétique/analytique.
Le théâtre, à mon sens, peut donc être un moyen de diffuser plus rapidement que dans dix conférences spécialisées et de façon très immédiate(6), l'état premier des idées scientifiques ou philosophiques sur une question, à l'attention d'un public scientifique non spécialiste du sujet. Même confronté à ce seul objectif de "pédagogie scientifique" -au sens large du terme-, le texte de J.C Brisville nous paraît donc ici fort bien adapté. Au-delà de certaines imprécisions historiques de détail qui seront en partie recensées ci-dessous, cette pièce, parce qu'elle "rebondit" admirablement sur le plan dramatique, exprime, en effet, authentiquement la réalité d'une opposition entre deux politiques scientifiques. Ainsi en est-il de la pédagogie...

Concluons pour un temps : on ne résume pas une pièce de théatre. Il faut la voir et l'entendre, soutenue qu'elle est par des hommes et des femmes, des voix et des corps(7). Aussi pourrais-je arrêter là cette courte analyse et renvoyer le lecteur à une éventuelle représentation de la pièce de Brisville. Je poursuivrai néanmoins brièvement, tâchant d'analyser sur quelques points choisis ce qu'il en est dans ce texte, de la réalité et de la fiction dramatique, et de mettre à jour, si c'est possible, certains procédés dramatiques qui rendent cette pièce si attachante.
Comme on pourrait ailleurs le soutenir, au-delà des inexactitudes de détails -sans importance dramatique, donc ici sans signification-, les deux moyens essentiels mis en oeuvre par J.C. Brisville sont le déplacement et la condensation.
Pour cette étude, j'utiliserai l'admirable édition des oeuvres de Pascal par J.Mesnard(8) et enfin, secondairement, l'édition de L. Brunschvig des *Pensées et Opuscules* de Pascal.

---

(6) Avec donc une nécessaire perte de "précision" ...

(7) On peut aussi la lire, même si ce n'est pas la même chose. "L'entretien de Mr Descartes et de Mr Pascal le Jeune", de J-C. Brisville. Collection "Papiers". Editions Actes Sud.

(8) Desclées de Brouwer. Paris (1964), tome II essentiellement.

- **l'Entrevue du 24 Septembre 1647**

Dans le texte d'accompagnement de la pièce nous lisons que celle-ci décrit le contenu "imaginaire d'une entrevue qui a réellement eu lieu".
Dès les premières lignes, il nous faut donc ici faire sa part -qui est grande- à l'artifice dramatique mis en place par Mr J.C. Brisville. Celui-ci se définit tout naturellement comme un "auteur dramatique" et non comme un philosophe, un historien ou un scientifique... Et c'est sans doute tant mieux pour le théâtre... Puisant dans les textes des deux auteurs -et sans excessif souci de chronologie-, J.C. Brisville a en effet imaginé, rempli le creux d'une journée : celle du 24 septembre 1647. Pour lui, Descartes reçoit Pascal à Paris, dans une cellule du couvent des Minimes que lui a prêtée son ami Mersenne.

Le résultat certain est, qu'auprès des spectateurs que nous sommes, deux visions du monde antagonistes jusque dans leur positions par rapport à l'infini(9) trouvent à bien s'incarner en ces deux hommes aux tempéraments et caractères irréductibles (nous en rencontrons tous les jours qui leur ressemblent, à qui manque le génie...)
Cependant, la réalité de l'entrevue elle-même nous est au contraire très précisément connue : on dispose en effet de l'admirable lettre, envoyée par Jacqueline Pascal à sa soeur Gilberte Périer... Qu'on imagine ici la jeune soeur, vierge véhémente et inspirée, poète à ses heures, future pensionnaire de Port Royal -faute de l'autorisation de son père elle dut, pour y entrer, attendre sa mort- écrivant au sujet de leur frère à l'ainée, la soeur mariée et bientôt mère de famille.

On peut lire d'abord dans la lettre de Jacqueline que c'est en fait Descartes qui rendit visite à Pascal et qu'il y eut aussi deux entrevues : le 23 au matin et le 24 au matin, et même qu'elles rassemblèrent beaucoup de monde, essentiellement des amis de la famille Pascal, mais aussi Roberval et "deux ou trois petits garçons". Ainsi en était-il des réunions scientifiques en ces années 1640 et peut-on comprendre le bénéfice que tous pouvaient en tirer, en particulier les "petits garçons."
La présence de Roberval a sans doute considérablement pesé sur l'atmosphère de la rencontre. Descartes, en effet, haïssait Roberval. Ne dit-il pas que s'il a rendu sa "Géométrie" plus obscure qu'il ne l'avait tout d'abord projeté, c'est pour que "le Roberval" et ses semblables n'y puissent commodément accéder ?(10)

Il est tout à fait certain que l'introduction chez Brisville d'un troisième personnage -un Roberval- aurait donné à la pièce un autre tour.
Comment d'abord Pascal et Descartes peuvent-ils ainsi se rencontrer à l'automne 1647 à Paris ? "Descartes est à Paris à l'occasion de la traduction française des Méditations et des Principes...". De son côté, en cet été 1647, la famille Pascal vient tout juste à nouveau de quitter Rouen pour Paris, retrouvant leur logis de la Rue Brisemiche, Blaise commençant à être sérieusement malade : cette maladie explique la visite en deux temps, et le retour de Descartes le lendemain matin.

---

(9) Ce dernier sujet, pour être aujourd'hui d'apparence byzantine, nous concerne sans doute tous... Et on peut penser que la position par rapport à l'infini est peut-être le seul problème philosophique vraiment sérieux ...

(10) "Ma Géométrie est comme elle doit être pour empêcher que le Rob [Roberval] et ses semblables n'en puissent médire sans que cela tourne à leur confusion car il ne sont pas capables de l'entendre et je l'ai composée ainsi tout à dessein en y omettant ce qui était le plus facile et n'y mettant que les choses qui en valent le plus la peine ... Mais je vous avoue que sans la considération de ces esprits malins, je l'aurais écrite tout autrement que je l'ai fait et l'aurais rendue beaucoup plus claire, ce que je ferai peut-être encore quelque jour si je vois que ces monstres soient assez vaincus ou abaissés". Lettre à Mersenne du 4 avril 1648, A.T., vol. 142.

Que s'y est-il dit ? Même si Jacqueline n'a assisté qu'à la première des réunions, il semble bien que le sujet central de ces entretiens scientifiques ait été le vide (ou la matière subtile !), point important que nous retrouverons donc brièvement un peu plus loin.

- Le personnage de Pascal

A lire le texte de la pièce, on aurait certes quelque peine à voir en Pascal le "génie effrayant" dont parle Chateaubriand(11), qui "à douze ans... avait créé les Mathématiques..."

Descartes : *Si vous pouviez en quelques mots me donner une idée de vos conclusions ?*
Pascal : *Elles ne m'intéressent plus... J'ai trop donné de moi-même à la science... Il y a, je le sais, depuis certaine rencontre que je fis , quelque chose de plus important que son objet...* (pp 14)

Blaise Pascal a cependant bien été d'abord ce bouillant jeune savant, épris de géométrie, passionné de Science -mathématique *et* physique-. Mais, sans doute ne pouvait-elle convenir à étancher ultimement sa soif d'absolu : dans la seconde partie de sa courte vie(12) et avec un égal emportement, Blaise Pascal se détourne en effet d'elle pour se plonger sous les auspices de Port Royal, en Dieu et en Jésus Christ.

L'artifice dramatique majeur de la pièce tient alors tout entier en cet anachronisme : J.C. Brisville nous présente un Pascal jeune (même s'il est malade), et donc dans une situation quasi-filiale par rapport au vieux maître Descartes. Cependant, dans la bouche de ce bouillant jeune homme, intransigeant et inspiré, J.C. Brisville a très adroitement mis des extraits des "Pensées", texte ultérieur et en tous cas postérieur à sa seconde conversion (la "nuit de feu" de novembre 1654)... C'est donc ici un paradoxal jeune homme qui viendrait annoncer son renoncement à la science et brûler ce qu'il a tant adoré !

Pascal renonce à la science, car il vient de rencontrer Port-Royal et la foi sous "une nouvelle voie". C'est ainsi que, par exemple, le Pascal de Brisville précise plus loin dans le texte la nature de la "rencontre" :

Pascal : *..Leur conversation me conduisit à me donner à Dieu suivant une nouvelle voie... celle qu'ont adoptée ces messieurs de Port Royal...*"

Or, en 1647, Pascal se prépare à de nombreuses années de travail scientifique producteur, tant en Mathématiques (les traités sur le triangle arithmétique, le triligne rectangle, la roulette(13) et ses défis !), qu'en Physique (traité des liqueurs).

---

(11) Il y avait un homme qui, à douze ans, avec des barres et des ronds, avait créé les Mathématiques ; qui, à seize ans avait fait le plus savant traité des coniques qu'on ait vu depuis l'antiquité ; qui, à dix-neuf ans réduisit en machine une science qui existe tout entière dans l'entendement ; qui, à vingt-trois ans démontra les phénomènes de la pesanteur de l'air et détruisit une des grandes erreurs de l'ancien physique ; qui, à cet âge où les autres hommes commencent à peine de naître, ayant achevé de parcourir le cercle des sciences humaines s'aperçut de leur néant et tourna sa pensée vers la religion ; qui, depuis ce moment jusqu'à sa mort, arrivée dans sa trente-neuvième année, toujours infirme et souffrant, fixa la langue que parlèrent Bossuet et Racine..., enfin qui, dans les courts intervalles de ses maux, résolut par distraction un des plus hauts problèmes de la géométrie et jeta sur le papier des pensées qui tiennent autant du dieu que de l'homme. Cet effrayant génie se nommait Blaise Pascal", cité pp. 41 dans "Pensées et Opuscules" de Blaise Pascal, publiés avec une introduction, des notices et des notes par Mr Léon Brunschvig. Classiques Hachette.

(12) Pascal est mort à trente-neuf ans.

(13) La cycloïde.

- Pascal, Descartes et la géometrie

Pascal, fils spirituel de Girard Desargues sur ce point de la géométrie(14) est ici un représentant de la méthode "ancienne", faite d'intuition, de figures et de regard, sans "méthode", dirait Descartes -à contre-courant (en ces années 1640)- et, pour tout dire : synthétique.

Et ses trouvailles dans l'"Essai pour les Coniques", comme le célèbre "théorème de Pascal" sont des procès de géométrie pure. On pourrait ainsi caractériser aujourd'hui ce résultat : sachant que cinq points déterminent -en général- une conique, comment rendre compte de cette nécessaire contrainte que doivent subir ensemble six points du plan, c'est dans cette mesure seulement, me semble-t-il, qu'on a affaire à un hexagone ou à deux triangles) pour être parties prenantes d'une même conique ? Comme on sait, on ne dispose pas des démonstrations de Pascal pour cet Essai qui n'est guère qu'un "prospectus" (comme dit J. Mesnard) pour allécher les autres savants, ses collègues. Néanmoins,l a façon qu'a Pascal de traiter des questions ultérieures, comme la "roulette" ne laisse guère de doute sur ses procédés heuristiques et visuels...
Ce qui est important pour Descartes c'est, au contraire, la possibilité de mettre à jour un système, tout un ensemble de règles valides pour mettre en équation *toute une classe* de problèmes contenant droites, cercles et coniques ! Y parvenir serait en effet une grande victoire de la raison. Même s'il emprunte également ses questions à l'antiquité -l'exemple originel par lequel s'ouvre la "Géométrie" est une question de Pappus-, il veut que sa voie soit rationnelle, déductive, "analytique" donc, le mot prenant sens de s'opposer à la méthode "synthétique" des anciens dont Pascal est ici le représentant.(15)

- La question de la matière subtile et du vide

Une question essentielle pour les hommes de science en ces années 1640, était la suivante : que l'on prenne un "vaisseau" -un tube-, dont l'une des extrémités est scellée et l'autre ouverte, qu'on le remplisse complètement par celle-ci de "vif-argent" -de mercure- et que tout en le laissant complètement immergé dans un bain de ce même vif-argent, on le retourne, puis qu'enfin on le redresse. On observe alors qu'il n'y a pas de vif-argent dans la partie supérieure du vaisseau. Qu'y-a-t-il donc ? : est-ce du vide ? est-ce du "rien" ? est-ce de l'air ? de la matière subtile ? Pour d'essentielles et métaphysiques raisons de doctrine, les physiciens (c' étaient autant de philosophes !) concluaient de façon radicalement différente.
Pour Descartes, il y a "identité entre la matière et l'étendue". En d'autres termes, là où il est de l'espace, il est nécessairement du quelque chose. Pour Descartes, le vide n'existe donc pas et il y a là, dans le haut du tube, une "matière subtile", position qu'il ne cessera de développer sans toutefois jamais l'expérimenter.
Pascal au contraire fait des expériences et tout d'abord en 1646 à Rouen, un an donc avant l'entrevue .
Et la rencontre réelle entre Pascal et Descartes est en vérité la source d'une -très canonique- querelle de priorité scientifique entre deux hommes sur le projet d'une seconde série d' expériences au sujet du vide, avec un protocole expérimental différent : il s'agit cette fois de faire l'expérience du "vaisseau", à la fois en haut et en bas d'une montagne élevée et d' observer une différence éventuelle entre les hauteurs de mercure dans les deux parties de l' expérience .

---

(14) Desargues qui fit grand cas du théorème d'alignement de Pascal, appela cette propriété "la Pascale".

(15) Descartes caractérise la méthode synthétique des Anciens comme "examinant les causes par leurs effets...". L. Brunschvig : "Les étapes de la Philosophie Mathématique", pp. 117.

Cette expérience, Pascal va la réaliser l'année d'après, en 1648, en Auvergne -au Puy de Dôme- avec un immense succès. En avait-il eu seul l'idée, ou bien Descartes la lui avait-il conseillée durant l'entrevue ? C'est tout l'enjeu de cette rencontre qui donna lieu à une longue dispute scientifique peu claire et recèle donc un vrai mystère (cf. à ce sujet : J. Mesnard, Tome II, pp 655-669).

Toujours est-il que Descartes a toujours affirmé qu'il était l'auteur de l'idée, qu'il en avait à la fois conseillé l'expérience à Pascal et prévu les résultats, comme il l'affirme dans sa correspondance avec Carcavi(16), mais surtout dans une célèbre lettre à Mersenne du 13/12/1649.(17)

Or, de son côté, Pascal n'a jamais reconnu que Descartes l'avait averti. La position de Descartes est tout de même bien un peu surprenante car, fervent adepte de la "matière subtile", il ne souscrit nulle part aux positions théoriques de Pascal sur le vide, qui sont pourtant censées gouverner cette expérience. Or, "En 1647, un partisan du plein et un partisan du vide ne pouvaient que se sentir fort éloignés".(18)

Terminons cette analyse par l'exposé de trois questions choisies dans la pièce : la métaphore du "centre" chez Pascal, l'Affaire Saint-Ange et la condamnation d'Antoine Arnauld.
Elles sont en vérité de nature fort différente : si l'importance de la question du centre -tout juste évoquée dans la pièce- nous aide à mieux comprendre qui était Pascal dans la réalité, les deux dernières permettent de mieux saisir *in vivo* l'artifice dramatique de Brisville.

- La métaphore du "centre"

Pascal : *Tout cela n'est qu'illusions. J'en suis persuadé : notre intelligence s'égare en de mauvais chemins. Pour ma part , j'en reviens au centre . Où est la vérité. Sa lumière...*
Descartes (rêveur) : *Au centre ...*
Pascal : *Oui, à ma seule certitude...* (pp15)

Ainsi Brisville décrit-il en quelques mots forts la prégnance chez Pascal de cette métaphore du "centre", qu'on trouve en effet tout à la fois dans son oeuvre mathématique et dans ses écrits apologétiques ultérieurs.
Tant il est vrai que le "désespoir de trouver un centre"(19) anime et torture Blaise Pascal. En effet, avec la venue de Galilée qui met fin en ces années 1630 au privilège d'un lieu (la terre), c'est le paradigme quotidien de l'existence d'un quelconque repère privilégié qui s'effondre : l'homme ne sait plus désormais à quel "rang se mettre", ni à quel centre se vouer. Tous les lieux sont désormais équivalents et cette terrible indifférence des choses pour les hommes vaut égarement, paralysie et signe de déréliction. Sans le nom de Dieu qui donnerait sens et origine, c'est une infinie blessure(20), qu' en premier lieu Pascal tentera de réparer (maladroitement ?) en élaborant un fragment de

---

(16) Des 13/06/1649 et 17/09/1649 : J. Mesnard, tome II, pp. 707-719. Descartes écrit à Carcavi (le 17 Août 1649) qu'il l'avait conseillée à Pascal en 1647, prévoyant un "succès entièrement conforme à ses propres principes"

(17) J. Mesnard, tome II, pp. 548-550.

(18) J. Mesnard, tome II, pp. 658.

(19) J-P. Clero : "La métaphore du centre" chez Pascal ; Bulletin de liaison Inter-Irem n° 5, pp. 3.

(20) Pour Freud c'est, comme on sait, la première chronologiquement parlant, des trois blessures narcissiques fondamentales chez l'homme.

théorie mathématique qui permette la détermination d'un centre (de gravité, dans *tous les cas*, c'est-à-dire pour les lignes et les surfaces *quelconques*[21] .

- l'Affaire Saint-Ange

Pascal (dans un souffle) : *Frère Saint-Ange...*
Descartes : *...de son vrai nom Jacques Forton.....le jeune homme le dénonça, document à l'appui, comme hérétique à l'Archêveque de Rouen....Il fut donc obligé de jeter son froc aux orties.... Et c'est ainsi qu'il était devenu mendiant sur le Pont Neuf. Où je le rencontrai...*
(Un temps)[22]
Pascal (bas) : *Je n'ai jamais voulu cela.*
Descartes : *Vous l'avez pourtant dénoncé...*
Pascal : *On ne pouvait accepter qu'il se répandit dans les campagnes...*
Descartes : *Allons, Monsieur, les bonnes gens qu'il assistait connaissaient sa marotte et vous êtes peut-être le seul qui prit au sérieux ses balivernes....* (pp 31-32)

Dans la structure dramatique de la pièce de Brisville, la venue de cette "affaire Saint-Ange" est fort importante, par l' image nouvelle des deux protagonistes qu'elle induit à ce moment chez les spectateurs. Voici soudain sur scène Descartes accusateur et Pascal délateur : Brisville met ici en effet dans la bouche de Descartes une assez longue réplique qui n'est qu'une accusation -argumentée- de délation à l'adresse de Pascal. Et cette affaire Forton/Saint-Ange apparaît alors dans la pièce comme fort peu à la gloire de Pascal : voilà en effet un militant dogmatique, l'intransigeance même[23], qui prend prétexte d'arguments théologiques obscurs et secondaires, pour dénoncer à l'Archevêque de Rouen ce pauvre homme inoffensif et un peu simplet, occupé à faire aux pauvres la charité tout en bavardant innocemment sur le dogme !

La réalité est assez différente, comme on va le voir et on ne peut, d'une certaine façon, s'empêcher de penser ici que le Descartes de Brisville règle un compte avec Pascal. Jacques Forton, frère de Saint-Ange, capucin, "homme de Dieu" n'était pas le pauvre homme que décrit le texte, mais un théoricien de la religion. A ce titre, et comme dit J. Mesnard : "nous aurions connu Saint-Ange, même s'il n'avait pas croisé la route de Pascal". Ce "*rationaliste théologien* " articulait en effet sur le dogme des énoncés théoriques et prétendait par exemple opérer par démonstration en matière de religion, là où seule la foi -révélée, elle est par nature hors le champ de la preuve déductive- doit en principe permettre à un chrétien de conclure.
Et il arriva que Pascal et deux de ses jeunes amis[24] furent choqués dans les principes mêmes de leur foi par les positions de cet hérétique rationaliste. Ce même Saint-Ange qui demandait une place dans l'Eglise (il postulait pour une cure), exposait publiquement en effet dans deux "conférences" -entendez des conversations- des "idées qui heurtèrent vivement ses auditeurs et leur parurent dangereusement suspectes". (J. Mesnard, Tome II, pp 364).
Dans sa seconde proposition, Saint-Ange affirme par exemple "Que la foi n'est aux faibles qu'un supplément au défaut de leur raisonnement", et, dans la septième, seule reprise dans le texte de Brisville, "Que la Vierge n'a point été faite du sang de saint Joachim ni de

---

(21) "Méthode générale pour le centre de gravité soit des lignes, soit des surfaces, soit des solides. "Lettre de Mr Dettonville à Mr de Carcavi. Oeuvres Complètes de Pascal. Editions de la Pleïade, pp. 230.

(22) Descartes ne semble pas avoir circulé dans le Nord de la France et il est peu probable qu'il ait rencontré Forton à Paris.

(23) "Intégriste", avons nous-même entendu durant le débat. Si la connotation est certainement hors de saison, elle indique néanmoins la façon dont la chose est perçue par les spectateurs modernes.

(24) Hallé de Monflaines et Auzoult. L'affaire se situe dans le début de cette même année 1647. Pascal a vingt-trois ans.

Sainte Anne, mais d'une matière nouvellement créée". (J. Mesnard, Tome II, pp 411-413).

Les trois jeunes gens portèrent l'affaire devant l'Archevêque de Rouen et Saint-Ange fut invité à préciser par écrit sa pensée, c'est-à-dire publier "une déclaration formelle de *"ce qu'il tient et ce qu'il ne tient pas"*. (J. Mesnard, Tome II, pp 373), ce qu'il fit fort honnêtement, en forme de rétractation . Pour ce qui est par exemple de la composition du lait de la Vierge, Saint-Ange déclare donc "Que la Vierge a été conçue par la voie ordinaire et que la matière qui a servi à sa conception n'a pas été nouvellement créée, mais faite de la propre substance de Saint Joachim et de Sainte Anne". (J. Mesnard, Tome II, pp 416-417).(25)
Contrairement au texte de la pièce, Saint-Ange ne fut pas ensuite inquiété et obtint une cure le 12 avril 1647.

- l'Affaire Arnauld

Les premiers instants de la pièce de Brisville sont assez naturellement ceux d'une prise de contact entre les deux savants -le jeune et le vieux-, conversation mondaine où les protagonistes commencent néanmoins de se mesurer, après quoi, et au milieu de disputes métaphysiques et théologiques, la pièce s'oriente d'abord vers un affrontement théorique passionné.
C'est alors, dans le creux d'un moment de calme, que le Pascal de Brisville, se rapprochant pour un bref temps de Descartes, vient lui exposer le véritable motif de sa venue :

Pascal : *Connaissez-vous Antoine Arnauld ?*
Descartes : *Je n'ai pas cet honneur, mais il m'a fait tenir quelques objections de détail à l'un de mes ouvrages et j'estime fort son esprit...*
Pascal : *Eh bien, Monsieur, cet homme qui a toute votre estime est menacé dans son honneur et dans sa situation et j'ose vous prier de m'appuyer dans sa défense. [...]. J ai pensé qu'une lettre, une lettre signée de nos deux noms [...] aurait de quoi frapper l'opinion de toutes les personnes intéressées dans cette affaire.* (pp 24-25)

La question de la pétition, seul événement véritablement extérieur dans la pièce(26) en est l'articulation dramatique essentielle, après quoi les choses basculent vers des questions de fait .

Après qu'il se soit insurgé contre une bulle du Pape, Antoine Arnaud, Docteur en Théologie, avait été gravement mis en cause "dans son honneur et dans sa situation"(27), et pour des questions touchant non seulement à la théologie mais "aussi à la morale", ce qui "nous concerne tous", en effet(28) Descartes connaissait fort bien Arnauld et les subtiles Quatrièmes Objections que celui-ci avait apportées à ses propres Méditations : l'éloge d'Arnauld que fait Descartes dans la lettre introductive aux "Réponses aux Objections" qu'il expédie au Père Mersenne -ici encore, intermédiaire obligé -, est tout à

---

(25) A propos du rôle de la foi (deuxième proposition, plus essentielle), Saint-Ange déclare "Que la foi[...] est un moyen et un fondement absolument nécessaire aux faibles et aux forts pour connaître les mystères de la religion et qu'ils ne peuvent y atteindre par l'effort de leur raisonnement". (Cf. J. Mesnard tome II pp 416-417)

(26) C'est sans doute pour cela -et cela seulement- que le Pascal de Brisville est venu voir Descartes.

(27) Brisville utilise là encore le même procédé de condensation dans le temps. L'entrevue date en effet de 1647 et la bulle du pape du 31 mai 1653.

(28) Et aussi pour des questions de droit des personnes qui nous semblent aujourd'hui aller de soi, comme la distinction entre le droit et le fait.

fait explicite[29] . On sait que pour soutenir Arnauld pourchassé, Pascal écrivit les "Provinciales" -sous le pseudonyme de Louis de Montalte-. H. Gouhier note cependant que cela se fit à trois (comme dans l'affaire Saint-Ange !) : "Si Pascal tint la plume, Arnauld et Nicole préparent la documentation."(Article "Blaise Pascal "de l'*Encyclopaedia Universalis* , pp 1190).
Les relations entre Pascal, Arnauld et Descartes semblent donc assez correctement évoquées dans la pièce. Cependant, et compte tenu du contexte de l'époque, l'idée même d'une pétition est tout à fait saugrenue et, en tous cas, très certainement vaine : le moyen réellement utilisé par Pascal est en fait celui -teriblement efficace !- des "lettres anonymes" (les *Provinciales*).

- Conclusions :

Je voudrais ici brièvement conclure à la fois sur le Rêve chez Descartes et la Science chez Pascal.
La brève allusion faite par le Descartes de Brisville aux "trois rêves " qui, sans conteste, décidèrent de son grand dessein nous laisse un peu sur notre faim. Cette fascinante question de la "Méthode" et du "Rêve" aurait en effet pu rebondir dans le texte, trouvant écho dans la bouche de Pascal, ce qui n'aurait nullement été invraisemblable. Le contenu de ces trois rêves constitue peut-être l'essence d'un renoncement de Descartes -mais d'un renoncement assumé et explicité, même si c'est en rêve ! -à des positions d'omnipotence enfantine (devenir Dieu), et qui l'autorise à s'insérer dans un grand dessein humain (sous le regard de Dieu).[30]
Sans doute le mouvement de Pascal au long de sa vie est-il, d'une certaine façon en sens inverse : il faudrait pour le montrer pareillement analyser ces autres "formations de l'inconscient" que sont sans doute le Mémorial et les notes de la "nuit de feu"[31] .
Que reste-t-il en tous cas aujourd'hui de l'oeuvre scientifique de Pascal, dont il apparaît clairement qu'elle est beaucoup moins bien connue que celle de Descartes, tant par les mathématiciens modernes que par les historiens des Sciences?[32]
D'abord -et cela est important-, une certaine première mise en forme d'une démonstration mathématique *par récurrence* ; c'est la partie : "Combinaisons" du traité du Triangle Arithmétique. Ensuite, et peut-être plus essentiellement à mes yeux, l'idée développée dans son traité sur le "triligne rectangle" d'une représentation graphique *quelconque* (en vue d'en mesurer l'aire ou le centre de gravité) qui apporte un point de vue *fonctionnel* neuf (même s'il est ici étroitement et intuitivement d'origine géométrique). Ajoutons aussi que sur le plan de la *méthode de calcul*, en ces premiers rudiments de calcul intégral, le traitement par Pascal des indivisibles nous paraît bien plus proche de notre moderne passage à la limite et bien mieux fondé que celui de Cavalieri.

Le 24 septembre 1651, quatre ans jour pour jour après l'entrevue entre Pascal et Descartes, meurt Etienne Pascal, le père de Blaise.

---

(29) Réponses de l'Auteur aux Quatrièmes Objections faites par Mr Arnaud, Docteur en Théologie. Oeuvres et Lettres de Descartes. Editions de la Pleïade, pp. 330-331.

(30) Ce sont les conclusions de Mme G. Rodis Lewis dans "L'alto e il basso" e i sogni di Descartes (Rivista Di Filosofia/ Vol. LXXX n° 2 - Juin 1989)

(31) Tout ceci est complètement absent du texte de Brisville et pour des raisons dramatiques claires, comme on l'a déjà souligné, tout indique en effet que Brisville place en fait son Pascal après cette nuit.

(32) Ce que note F. Russo (Article "Blaise Pascal" de l'Encyclopaedia Universalis). Il lui a été néanmoins consacré un volume : "l'Oeuvre scientifique de Pascal". Presses Universitaires de France, Paris (1964), par P. Costabel; K. Hra, J. Itard, J. Mesnard, J. Payen, B. Rochot, F. Russo, M. Sadoun-Goupil, L. Scheler, R. Taton. Avec une préface de R. Taton.

AMPERE ET LA DIFFÉRENTIABILITÉ DES FONCTIONS CONTINUES

Klaus VOLKERT
Bexbach - RFA

I - LA SITUATION A LA FIN DU 18è SIECLE

Aujourd'hui la différentiabilité est une qualité en plus des fonctions continues. Quand nous avons défini la différentiabilité, nous démontrons deux choses :

1) Toute fonction différentiable est continue.

2) Il y a des fonctions continues qui ne sont pas différentiables (p.e. la fonction $x \to |x|$. Nous ajoutons sans démonstration qu'il y a des fonctions continues qui ne sont différentiables en aucun point. Les mathématiciens du 18è siècle n'ont pas pensé comme çà. Il n'existait ni une seule notion de continuité (il y en avait trois) ni la notion de différentiabilité. A cette époque on connait trois doctrines sur la nature de la différentiabilité.

a) LA DOCTRINE DES LIMITES OU DES FLUXIONS :

La dérivée $f'(x_0)$ d'une fonction $f(x)$ est définie comme "dernière raison" ou comme "limite" du quotient $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ pour $h \to 0$. C'est la doctrine de NEWTON et de d'ALEMBERT, qui était propagée fortement par LACROIX vers la fin du 18è siècle. L'existence de la dérivée n'est pas discutée dans ce cadre théorique. Peut-être semblait-elle garantie par des idées physiques (vitesse instantanée). Il manquait aussi des contre-exemples intéressants (comme $x \sin\frac{1}{x}$).

b) LA DOCTRINE DES INFINIMENT PETITS :

La dérivée $f'(X_0)$ est le résultat d'une manipulation habile du quotient différentiel $\frac{dy}{dx}$ (où dx et dy sont des infiniment-petits). C'est la doctrine de LEIBNIZ et son école. L. CARNOT était un partisan ardent des infiniment petits (cf. ses "Réflexions sur la

métaphysique du calcul infinitésimal" (1797)). L'existence de la dérivée n'est pas non plus discutée dans la doctrine des infiniment petits. Peut-être son caractère algébrique en est la raison.

c) LA DOCTRINE DES SERIES :

Si on a un développement en série pour chaque fonction, on peut définir la dérivée comme un coefficient spécifique de cette série. C'était l'idée de LAGRANGE. Cette doctrine est formulée dans la "Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés, de toute considération d'infiniment-petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies" (1ère édition 1797). Le problème de l'existence de la dérivée est résolu par le théorème qui dit, qu'on peut développer chaque fonction en série.

Bien sûr on avait rencontré des cas particuliers, où se posaient des problèmes avec la différentiation. Au cours des débats sur la corde vibrante, d' ALEMBERT et EULER ont étudié les courbes, dont "la courbure fait un saut en quelque point" (c'est-à-dire que la dérivée a un saut fini, ce qui n'est pas possible dans notre théorie moderne). Mais l'intérêt pour ces cas était motivé par la physique.

II - LE MEMOIRE D 'AMPERE

En 1806 André-Marie AMPERE, qui était nommé répétiteur à l'école polytechnique en 1804, publiait un mémoire avec le titre "Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration du théorème de Taylor ; et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque". Ce mémoire est devenu célèbre car il a été interprété comme premier essai pour démontrer la différentiabilité des fonctions continues. Cette interprétation date de la fin du 19è siècle (cf. par exemple HANKEL, 1870, GILBERT, 1873, PRINGSHEIM, 1899, PASCH, 1914 et GUITARD, 1986). Je veux montrer que cette interprétation n'est pas correcte (pour les détails de mon argumentation cf. VOLKERT, 1989). Le passage décisif du mémoire ampèrien est le suivant :
"Je me propose d'abord de démontrer que la fonction de x et de i $\frac{f(x+1) - f(x)}{i}$ qui exprime le rapport de la différence de deux valeurs x et x + i d'une variable, et de la différence des deux valeurs correspondantes d'une quelconque de ses fonction f(x), ne peut devenir ni nulle ni infinie pour toutes les valeurs de x, lorsqu'on fait i = 0, . . . ; il

résultera nécessairement de cette démonstration que $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ se réduit, quand $i = 0$, à une fonction de x . . . nous la représenterons, . . . , par f' (x), et notre premier but sera d'en démontrer l'existence."

(AMPERE, 1806 ; 148f)

On a lu ce passage dans le sens suivant : AMPERE veut démontrer l'existence de la dérivée, c'est-à-dire l'existence de la limite $\lim_{n\to 8} \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ pour toutes les fonctions continues (il ne parle pas explicitement de la continuité, mais il use de la continuité de temps en temps). A mon avis, il faut être prudent à cet endroit pour deux raisons :

- Ampère n'était pas un partisan de la doctrine des limites. Il était fortement influencé par LAGRANGE (il a étudié les grands ouvrages de LAGRANGE en autodidacte) et adhérait à la doctrine des séries et à l'idée d'une "analyse algébrique" (cf. aussi AMPERE, 1826 et AMPERE, 1827). Mais nous avons déjà vu qu'il n'y a pas de place pour les questions d'existence dans la doctrine des séries.

- Le terme "existence" n'était pas courant à cette époque là. On parlait de l'existence d'un nombre (ou d'une variable) dans le sens que ce nombre (ou cette variable) ne s'avanouit pas. Cela veut dire que le nombre (ou la variable) prend une valeur finie qui n'est pas égale à zéro. Comparez le passage suivant : "Ils [les côtés d'un triangle] se sont approchés différemment de la non existence ; ils se sont évanouis différemment ; mais, une fois évanouis, ils ont tous la même manière de ne pas exister."

(L'HUILIER, 1786 ; 151)

Si on accepte cette interprétation, qui est proposée aussi par GRABINER, 1978, on peut relire le passage décisif de la manière suivante : Ampère veut démontrer que la valeur de f'(x) n'est pas nulle (non infinie). Bien sûr il faut exclure les fonctions constantes. AMPERE le fait en se restreignant aux fonctions strictement monotones par morceaux. L'existence de la dérivée dans le sens moderne est tacitement supposée par AMPERE. (La différentiabilité comme qualité explicite ne se trouve qu'à la fin du 19è siècle). En termes modernes on peut reformuler le "théorème d'Ampère" de la manière suivante :

"Soit $f : [a,k] \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et monotone. Alors il existe au moins un point x dans [a, k] avec $f'(x) = 0$". Ce théorème est pour nous une conséquence simple du théorème des accroissements finis. En analysant la démonstration d' AMPERE on aperçoit

qu'elle est "presque" une démonstration pour le théorème des accroissements finis (pour l'histoire de ce théorème cf. GRABINER, 1978).

1. Soit f(a) = A et f(k) = K. Parce que f est strictement monotone, on a A ≠ K. Maintenant on choisit un point e dans]a,k[. On a

$$\frac{K-E}{k-e} \leq \frac{K-A}{k-a} \leq \frac{E-A}{e-a} \quad \text{ou} \quad \frac{E-A}{e-a} \leq \frac{K-A}{k-a} \leq \frac{K-E}{k-e}.$$

On peut vérifier la proposition en calculant les différences

$$\frac{K-E}{k-e} - \frac{K-A}{k-a} \quad \text{et} \quad \frac{K-A}{k-a} - \frac{E-A}{e-a}$$

et en notant qu'elles ont le même signe.

2. On peut itérer ce 1er pas avec des points $a < b < c < d < e < f < g < h < k$:

"On démontra de même que parmi les huit fractions

$$\frac{K-H}{k-h}, \frac{H-G}{h-g}, \frac{G-F}{g-f}, \frac{F-E}{f-e}, \frac{E-D}{e-d}, \frac{D-C}{d-c}, \frac{C-B}{c-b}, \frac{B-A}{b-a}$$

il y en a nécessairement une plus grande et une plus petite que $\frac{K-A}{k-a}$.

(AMPERE, 1806; 153)

3. On peut choisir les points a, b, ..., h, k de la forme spéciale $\frac{k-a}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$). Si on fait $\frac{k-a}{n} = i$, on obtient les fractions

$$\frac{K-f(a+(n-1)i)}{i}, \frac{f(a+(n-1)i)-f(a+(n-2)i)}{i}, \ldots, \frac{f(a+i)-A}{i}.$$

Il s'ensuit du 2è point qu'il y a une telle fraction, qui est plus petite que $\frac{K-A}{k-a}$ et une autre qui en est plus grande.

On peut interpréter les fractions ci-dessus comme des valeurs particulières d'une fonction F(x,i), qui est définie par l'équation

$$F(x,i) = \frac{f(x+i)-f(x)}{i} \qquad (i \neq 0)$$

Soit $F(x_0, i)$ une fraction plus petite et $F(x_1, i)$ une fraction plus grande que $\frac{K - A}{k - a}$

(on a $x_0, x_1 \in \{a, a + i, a + 2i, \ldots, a + (n - 1) i, k\}$ et $i = \frac{h - a}{n}$).

Alors on a l'inégalité $F(x_0, i) \leq \frac{K - A}{k - a} \leq F(x_1, i)$

4. $F(x, i)$ est une fonction continue (si $i = 0$) de ses deux variables. A fortiori $F(x, i)$ est une fonction continue de x pour une valeur constante de i. Alors on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. On obtient une valeur x_i entre x_0 et x_1 avec (*) $> F(x_i, i) = \frac{K - A}{k - a}$ ("théorème fini des accroissements finis")

5. AMPERE veut finir sa démonstration d'une manière classique, c'est à dire avec une réduction à l'absurde. Supposons que pour tout x dans $]a,k[$ on ait $f'(x) = 0$. Cela est contradictoire avec 4. L'argument qui expose cette contradiction, n'est pas clair chez AMPERE. Mais l'idée intuitive (non correcte bien entendu) me semble claire : c'est la validité de l'équation (*) pour tout i et par conséquent pour la limite $i = 0$. Bien sûr la démonstration d'AMPERE n'est pas complète. Mais il est remarquable qu'on peut reformuler ses idées dans le cadre de l'analyse non-standard (cf. LUXEMBURG/STOYAN, 1976; 85). CAUCHY, qui connait bien les travaux d'AMPERE (AMPERE était un des professeurs du jeune CAUCHY à l'Ecole Polytechnique), use des méthodes ampériennes dans son "Résumé des leçons sur le calcul différentiel" (1823) pour démontrer le théorème des accroissements finis. L'interprétation, qu'on a donnée au mémoire d'AMPERE, repose donc sur un malentendu concernant le terme "existence". Ce malentendu a commencé peut-être avec le chef d'AMPERE. Je parle de Sylvestre LACROIX, professeur d'analyse à l'Ecole Polytechnique, qui a écrit un fameux "Traité du calcul différentiel et du calcul intégral" (1797). Comme nous avons vu ci-dessus, LACROIX était un partisan de la doctrine des limites. Dans la deuxième édition de son ouvrage on trouve la phrase suivante : "L'existence de la limite du rapport $\frac{f(x') - f(x)}{x' - x}$ peut être prouvée immédiatement d'une manière fort simple." (LACROIX, 1810; 241). Cette démonstration fort simple, qui est attribuée par LACROIX à "Mr BINET aîné, professeur de Mathématiques transcendantes au lycée de Rennes" (ibid), est une version simplifiée de la démonstration d'AMPERE. Pendant le 19è siècle on trouve "le théorème d'AMPERE" (qui dit : toute fonction continue est différentiable excepté en des points isolés) dans beaucoup de traités d'analyse (comparez VOLKERT, 1989). La discussion était tranchée définitivement contre LACROIX et ses successeurs (pas contre AMPERE !) par la

découverte des fonctions continues non-différentiables (c'est-à-dire différentiables en aucun point) par WEIERSTRAβ (1872) et DARBOUX (1875).

La discussion des singularités des fonctions continues commença d'une manière systématique dans le célèbre "Cours d'analyse algébrique" (1821) de CAUCHY. Là il examina pour la première fois l'exemple $\sin \frac{1}{x}$. Mais les conséquences tirées par CAUCHY ne sont pas les conséquences modernes : ". . . l' expression . . . lim $((\sin \frac{1}{x}))$ admet une infinité de valeurs comprises entre les limites -1 et +1." (CAUCHY, 1821; 26). Pour CAUCHY le cas de la non-différentiabilité se réduit au cas de la non-continuité (dans ce cas précis, la non-unicité) de la fonction dérivée. Le terme différentiable est défini d'une manière précise pour la première fois dans le mémoire de DU BOIS-REYMOND, 1875.

III - BIBLIOGRAPHIE

AMPERE, J.M. : 1806
Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de TAYLOR, et à l'expression finie des termes qu'on néglige lorsqu'on arrête cette série à un terme quelconque (Journal de l'Ecole Polytechnique 13, (1806); 148 -181).

AMPERE, J.M. : 1826
Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel, du calcul aux différences et de l'interpolation des suites, considérés comme dérivant d'une source commune (Annales de mathématiques pures et appliquées 16, (1826); 329 - 349).

AMPERE, J.M. : 1927
Démonstration du théorème de TAYLOR pour les fonctions d'un nombre quelconque de variables indépendantes, avec la détermination de l'erreur que l'on commet lorsqu'on arrête la série donnée par ce théorème à l'un quelconque de ses termes (Annales de mathématiques pures et appliquées 17, (1827) ; 317 - 329).

CARNOT, L. : 1797
Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal (Paris) - réimpression : Paris 1970.

CAUCHY, A.L. : 1821
Cours d'analyse de l'école royale polytechnique (Paris) - dans : Oeuvres complètes, 2ème série, tomme III (Paris, 1897).

CAUCHY, A.L. :
Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal dans : Oeuvres complètes, 2ème série, tome IV (Paris, 1899).

DU BOIS-REYMOND, P. : 1875
Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen (Journal für die reine und angewandte Mathematik 79, (1875) ; 21 - 37).

GILBERT, P. 1873
Mémoire sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues (Mémoires couronnées et autres mémoires publiés par l'académie royale de Belgique. Collection en -8°. 23, (1873) ; I - VI, 1 - 51).

GRABINER, J. : 1978
The Origins of Cauchy's Theory of the Derivative (Historia mathematica 5, (1978) ; 379 - 409).

GUITARD, T. : 1986
La querelle des infiniments petits à l'Ecole Polytechnique au XIXè siècle (Historia scientiarum 30, (1986) ; 1 - 61).

HANKEL, H. : 1870
Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen (Tübingen - cité suivant : Mathematische Annalen 20, (1882) ; 63 - 112).

LACROIX, S. : 1810
Traité du calcul différentiel et du calcul intégral. Tome I, 2ème édition (Paris).

LAGRANGE IX :
Oeuvres de Lagrange. Tome IX. Théorie des fonctions analytiques contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toutes considérations d'infiniment petits, d'évanouissements, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies ((Ed.) J.-A. Serret) Paris, 1881).

L' HUILIER, S.A.J. : 1876
Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs qui remporte le prix proposé par l'Académie royale des Sciences et Belles Lettres pour l'année 1784 (Berlin) - édition en latin : tübingen 1795.

LUXEMBURG/STOYAN : 1976
Introduction to the Theory of Infinite-simals (New York/San Francisco/London).

PASCH, M. : 1914
Veränderliche und Funktion (Leipzig-Berlin).

PRINGSHEIM, A. : 1900
Zur Geschichte des Taylorschen Lehrsatzes (Bibliotheca mathematica 3. Folge 1, (1900) ; 433 - 479).

VOLKERT, K. : 1987
Die Geschichte der pathologischen Funktionen. Ein Beitrag zur Entstehung der mathematischen Methode (Archive for History of Exact Sciences 37, (1987) ; 193 - 232).

VOLKERT, K. : 1989
Zur Differenzierbarkeit stetiger Funktionen - Ampères Beweis und seine Folgen (Archive for History of Exact Sciences 39 (1989) ; 37 - 112).

UNIVERSITE d'ETE 1988

Histoire des Mathématiques

LA ROCHELLE du 28 août au 2 septembre 1988

PROGRAMME

Dimanche 28 août 1988

9 h - 10 h Présentation de l'Université d'été

10 h - 12 h **Conférence** : M. GUILLEMOT : "Quelques algorithmes liés à des opérations élémentaires".

14 h - 16 h **Conférence** : J.P. LE GOFF : "Histoire, théorie et pratique de la perspective".

17 h - 19 h **Ateliers de type I série A** (au choix)
1. M. ABDELJAOUAD : Les problèmes ouverts de type diophantien chez Ibn Al Kharowam.
2. J.P. FRIEDELMEYER : Le concours de l'Académie de Berlin de 1784 : l'infini en mathématiques.
3. J. GUICHARD : Mais d'où vient donc la certitude ?
4. M. GUILLEMOT : Algorithmes au fil des âges : Euclide, Newton et résolution de systèmes linéaires.
5. Ch. GUIPAUD : La perspective au début du XVIe siècle.
6. O. KELLER : Algèbre en Chine antique et médiévale.
7. R. LAURENT : La perspective au début du XVIIIe siècle (origine et destinée).

Lundi 29 août

9 h - 12 h **Ateliers de type I série A** (suite)

14 h - 16 h **Conférence** : E. BARBIN : "La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques".

17 h - 19 h **Ateliers de type II** (au choix)
1. A. BOYE : Un PAE interdisciplinaire d'histoire des mathématiques en second cycle.
2. J.P. GUICHARD, J.P. SICRE : Apport de l'histoire des mathématiques à la didactique en premier cycle.
3. G. ITARD : La science interpellée à travers l'histoire des mathématiques.
4. A. LE BOULCH : Recherche des tangentes à une conique en Terminale.
5. J.L. OVAERT : Peut-on enseigner les méthodes en mathématiques ?
6. H. PLANE : Comment commencer ?
7. C. PERRINEAU : Archimède et le calcul de π . Applications pédagogiques.
8. J. SIP : Les nombres relatifs dans le premier cycle.

Mardi 30 août

9 h - 11 h **Conférence** : B. BELHOSTE : "Les mathématiques dans l'enseignement secondaire au XVIIIe et au XIXe siècle".

11 h - 12 h **Ateliers de type II** (suite)

14 h - 18 h 7 ateliers documentation (les thèmes seront précisés) bibliothèque municipale / sources documentaires.

18 h - 20 h Représentation de la pièce de J-C. BRISVILLE : L'entretien de M. Descartes avec M. Pascal le Jeune.

Mercredi 31 août

9 h - 10h30 **Exposés** (au choix) :
* J.P. GUICHARD : François Blondel (1618-1686).
* J.P. LE GOFF, D. LANIER : L'héritage arguésien.
* J. NOUET : La relativité restreinte : le rôle créateur d'Einstein.

10h30 - 12h **Exposés** (au choix)
* R. BKOUCHE : Le passage au projectif.
* J.P. LEVET : Gerbert d'Aurillac, le savant, le maître, le mathématicien.
* H. LOMBARDI : Mathématiques constructives : les mathématiques de demain ?

13 h Départ pour la croisière inter-îles.

Jeudi 1er septembre

9 h - 11 h **Conférence :** M. CAVEING : "Problèmes épistémologiques et historiques posés par la démonstration de la quadrature de la parabole chez Archimède"

11 h - 12 h **Ateliers de type III** (au choix)
1. E. BARBIN, D. GAUD, J.P. GUICHARD : L'histoire des mathématiques dans les stages de formation.
2. D. BESSOT, J.P. LE GOFF : Enseignement d'histoire des sciences par les textes en DEUG scientifiques.
3. G. BONNEFOY, M.F. JOZEAU, H. PLANE, J. LECOQ : L'histoire des mathématiques dans les manuels.
4. J. BOYE : Traduction de textes latins ou grecs.
5. M. GREGOIRE, M.F. JOZEAU, C. PERRINEAU, M. HALLEZ : Un stage d'histoire des mathématiques dans la formation continue.
6. D. PIMM : Un cours d'histoire des mathématiques à l'Open University.

14 h - 16 h **Ateliers de type III** (suite)

17 h - 19 h **Ateliers de type I, série B** (au choix)
1. E. BARBIN, E. BONNEFON, G. ITARD : Démontrer : convaincre ou éclaircir ? Méthodes et démonstrations au XVIIe siècle.
2. R. BKOUCHE : De Riemann à Einstein.
3. M. CAVEING : Problèmes épistémologiques et historiques par la démonstration de la quadrature de la parabole chez Archimède.
4. J. GUICHARD, M. GUILLEMOT, J.P. FRIEDELMEYER (réseau Cantor) : Constructions des réels.
5. S. PROVOST : Calcul du volume de la sphère par Archimède.
6. M. SERFATI : Bachelard, connaissance approchée et épistémologie.
7. K. VOLKERT : La différentiabilité des fonctions continues.

Vendredi 2 septembre

9 h - 12 h **Ateliers de type I, série B** (suite)

14 h - 15 h Séance de clôture - bilan.

LISTE DES PARTICIPANTS
Université d'Eté - La Rochelle 1988

ABDELJAOUAD Mahdi	Mathématiques	ISEFC Le Bardo TUNISIE
ANDREIS Anne Marie	Mathématiques	Lycée Bonaparte, 5, Av. W. Churchill - 83100 TOULON
BARBIN Evelyne	Mathématiques	Université du Maine - LE MANS
BARTEZ Annie	Mathématiques	LPC Charles de Gaulle - RFA BADEN BADEN
BAUCRY Jean-Michel	Mathématiques	Lycée Technique E. Labbé B.P. 809 - 59508 DOUAI CEDEX
BELHOSTE Bruno	Histoire	INRP PARIS
BERNARD Alain	Mathématiques	Lycée Technique Dhuoda - 30000 NIMES
BESSOT Didier	Mathématiques	Lycée A. Fresnel - 14000 CAEN
BKOUCHE Rudolf	Mathématiques	Université de LILLE
BOISSIER Monique	Mathématiques	Lycée Van Doughen, 45, rue J. Mermoz - 77400 LAGNY
BONET Pierrette	Philosophie	Lycée Charlemagne - PARIS IV
BONNEFON Eliane	Mathématiques	Collège Les Sources - 72000 LE MANS
BONNEFOY Gilles	Mathématiques	Lycée Cl. Bernard - 69665 VILLEFRANCHE SUR SAONE
BOROWCZYK Jacques	Mathématiques	Université de POITIERS
BOYE Anne	Mathématiques	Lycée De Grand Air - 44500 LA BAULE
BOYE Jean	Lettres classiques	Lycée de Grand Air - 44500 LA BAULE
BREGEON Jean-Luc	Mathématiques	Ecole Normale, 42, rue du Progrès - 03000 MOULINS
BRU Annie	Mathématiques	Lycée Cours Gambetta - 33430 BAZAS
BRU Jean Michel	Mathématiques	L.E.T.G. 12, cours Gambetta - 33430 BAZAS
CAVEING Maurice	Philosophe	CNRS PARIS
CHARLIER Colette	Philosophie	Lycée E. Zola, B.P. 22 - AIX-EN-PROVENCE
CHEVRON Christian	Mathématiques	Lycée Monge, 2, Av. de St Julien - 08000 CHARLEVILLE
CHOLIERE Michèle	Mathématiques	Lycée Behanzin - PORTO NOVO - BENIN
DAUMAS Denis	Mathématiques	Lycée climatique - 65400 ARGELES GAZOST
DAVIAUD Daniel	Mathématiques	Lycée Jean Hyppolite - 17500 JONZAC
DELORD Robert	Mathématiques	Collège La Rochel Beaulieu - 24430 RAZAC S/ISLE
DICHTEL Mireille	Mathématiques	Lycée - 17400 SAINT-JEAN-D'ANGELY
EUNICE SYLVA	Mathématiques	PORTUGAL
FERREOL Gilles	Sciences sociales	Université - LILLE
FONTAINE Annette	Secrétaire	IREM de POITIERS
FONTAINE Marie-Danielle	Maths-physique	Collège des Fontaines - 35130 LA GUERCHE DE BRETAGNE

FRAYSSE Gaston	Philosophie	CNED - VERSAILLES
FRIEDELMEYER J. Pierre	Mathématiques	L.E.T. Louis Couffignal - 67100 STRASBOURG
GALIBERT Françoise	Mathématiques	Collège Dompierre - 17139 DOMPIERRE/MER
GANDOUIN Hélène	Maths-sciences	Collège - 17770 SAINT-HILAIRE-DE-VILLEFRANCHE
GAUD Dominique	Mathématiques	IREM de POITIERS
GOMEZ BERMUDEZ Carlos	Mathématiques	ESPAGNE
GOUGEON Alain	Mathématiques	Lycée Marceau - 28000 CHARTRES
GRANDEMANGE Philippe	Maths-Info.	Ecole Normale - CRETEIL
GREGOIRE Michèle	Mathématiques	Lycée Lavoisier - 75005 PARIS
GUICHARD Jacqueline	Philosophie	Lycée E. Pérochon - 79000 PARTHENAY
GUICHARD Jean-Paul	Mathématiques	Collège Mendès France - 79000 PARTHENAY
GUILLEMOT Michel	Mathématiques	Université Paul Sabatier TOULOUSE
HALLEZ Maryvonne	Mathématiques	Collège P. Bert - 75014 PARIS
ITARD Gilles	Mathématiques	Lycée Racan - 72500 CHATEAU DU LOIR
JABOEUF François	Mathématiques	Lycée Joffre, allée de la Citadelle - 34000 MONTPELLIER
JOLLIVET Marie-Claire	Maths-sciences	Collège Jules Verne - 16000 ANGOULEME
JOSSE Elise	Mathématiques	Lycée Jean Rostand - 60300 CHANTILLY
KELLER Olivier	Mathématiques	Lycée Pierre Brossolette - 69100 VILLEURBANNE
LALANDE Françoise	Mathématiques	Lycée Joffre - 34000 MONTPELLIER
LAURENT Roger	Mathématiques	IUT de SCEAUX
LE BOULCH Alain	Mathématiques	Lycée J. Cartier - 35403 SAINT-MALO
LE CHEVALIER Jean-Luc	Mathématiques	L.E.P.M. B.P. 810 - 59508 DOUAI CEDEX
LE COQ Josette	Mathématiqus	Lycée international - 78004 SAINT GERMAIN EN LAYE
LE GOFF Jean-Pierre	Mathématiques	Lycée Malherbe - 14000 CAEN
LEFORT Xavier	Mathématiques	NANTES - I.U.T. SAINT NAZAIRE
LELOUARD Monique	Mathématiques	Lycée "Les Bruyères" - 76300 SOTTEVILLE LES ROUEN
LEVET Jean-Pierre	Mathématiques	Université de LIMOGES
LIZE Christiane	Mathématiques	Lycée Sud - 72000 LE MANS
LOMBARDI Henri	Mathématiques	Université de BESANCON
MARCHESSEAU Françoise	Mathématiques	Collège et lycée St Joseph - MACHECOUL
MAREC Yannick	Histoire-géo.	Collège Jean Zay - 76770 LE HOULME
MICHEL PAJUS Annie	Mathématiques	Lycée Joffre - 34000 MONTPELLIER
MOREAU Marianne	Mathématiques	Collège H. Beaumont - 60000 BEAUVAIS
MULLER Alfred	Mathématiques	Lycée A. Schweitzer - 68200 MULHOUSE
NASSIET Francis	Mathématiques	Collège - CHATEAU d'OLERON
NOUET Jean	Physique	Université du Maine - LE MANS
NOUET Monique	Mathématiques	Lycée Montesquieu - LE MANS
PERRINEAU Catherine	Mathématiques	Collège V. Hugo - 75003 PARIS

PLANE Henry	Mathématiques	Lycée J. Amyot - AUXERRE
PLANE Marie-Jeanne	Mathématiques	Collège Duray - CREITEIL
PORCEL Nicole	Mathématiques	Ecole Normale du Jura - 39015 LONS LE SAUNIER
PROVOST Sylvie	Sciences Physiques	Lycée Diderot, Bd de la Villette - PARIS
PUISSANT Claudette	Mathématiques	L.T. F. BUISSON BP 209 _ 38506 VOIRON CEDEX
REMILLIEUX Marie-Claire	Mathématiques	Lycée H. Vogt - B.P. 109 - 55202 COMMERCY CEDEX
ROBIN Claude	Maths-physiques	Collège C. Guérin - 86210 VOUNEUIL SUR VIENNE
SCHLADENHAUFFEN Odile	Mathématiques	Lycée M. Curie - 67084 STRASBOURG CEDEX
SERFATI Michel	Mathématiques	Lycée Raspail - 75014 PARIS
SICRE Jean-Pierre	Mathématiques	Collège Tiraqueau CHARZAIS - 85200 FONTENAY LE COMTE
SIP Jacky	Mathématiques	Collège R. Desnos, rue de la Fabrique - 59176 MASNY
SLOWICK Claude	Mathématiques	CES BAPAUME - 62450 BAPAUME
SPIESSER Maryvonne	Mathématiques	Université Paul Sabatier - TOULOUSE
TRICOIRE Annette	Mathématiques	Lycée A. D'Aquitaine - 86000 POITIERS
TROTTOUX Didier	Mathématiques	Lycée Technique M. Leroy - 27000 EVREUX
VIRTEL Françoise	Mathématiques	I.G. LYON
VOLKERT Klaus	Mathématiques	BEXBACH - RFA

LISTE DES INTERVENANTS
Université d'Eté - La Rochelle 1988

BARBIN Evelyne	Mathématiques	Université du Maine - LE MANS
BKOUCHE Rudolf	Mathématiques	Université de LILLE
FRIEDELMEYER J. Pierre	Mathématiques	L.E.T. Louis Couffignal - 67100 STRASBOURG
GREGOIRE Michèle	Mathématiques	Lycée Lavoisier - 75005 PARIS
GUICHARD Jacqueline	Philosophie	Lycée E. Pérochon - 79000 PARTHENAY
GUICHARD Jean-Paul	Mathématiques	Collège Mendès France - 79000 PARTHENAY
GUILLEMOT Michel	Mathématiques	Université Paul Sabatier TOULOUSE
HALLEZ Maryvonne	Mathématiques	Collège P. Bert - 75014 PARIS
KELLER Olivier	Mathématiques	Lycée Pierre Brossolette - 69100 VILLEURBANNE
LE BOULCH Alain	Mathématiques	Lycée J. Cartier - 35403 SAINT-MALO
LEVET Jean-Pierre	Mathématiques	Université de LIMOGES
LOMBARDI Henri	Mathématiques	Université de BESANCON
NOUET Jean	Physique	Université du Maine - LE MANS
SERFATI Michel	Mathématiques	Lycée Raspail - 75014 PARIS
VOLKERT Klaus	Mathématiques	BEXBACH - RFA

Titre	Actes de l'Université d'Eté sur l'histoire des Mathématiques - La Rochelle 1988
Auteur	Commission Inter-IREM Epistémologie
Public concerné	Professeurs de mathématiques, de sciences physiques, de philosophie, d'histoire
Mots-clés	Histoire des Mathématiques - Epistémologie - Démonstration - Infini - Algorithmes - Relativité

Résumé

Ces actes rassemblent une partie des interventions qui ont été proposées lors de l'Université d'Eté :

- La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques.
- La naissance du projectif - De la perspective à la géométrie projective.
- L'infini en mathématiques.
- Ludwig Wittgenstein et le fondement de la certitude.
- François Blondel - Architecte et Mathématicien.
- A propos de quelques algorithmes liés à des opérations élémentaires.
- Un stage d'histoire des mathématiques pour la formation continue des enseignants du secondaire.
- Exemples de calculs algébriques en Chine antique et médiévale.
- La recherche des tangentes à une conique. L'histoire des mathématiques comme outil pédagogique en terminale.
- Gerbert d'Aurillac - le savant, le maître, le mathématicien.
- Mathématiques constructives : hier et demain.
- La relativité restreinte - Le rôle créateur d'Einstein.
- La philosophie mathématique de Gaston Bachelard.
- Théâtre et pédagogie - A propos d'une représentation théâtrale de "l'entretien de M. Descartes et de M. Pascal le Jeune" de J.C. Brisville.
- Ampère et la différentiabilité des fonctions continues.

Nombre de pages	373
Format	A4
Date	Mai 1990
Prix	50 Francs

IREM - 40, Avenue du Recteur Pineau - 86022 POITIERS CEDEX

ISBN 2-85954-031-8