PROUVER : AMENER A L'EVIDENCE OU CONTROLER DES IMPLICATIONS ?

N. ROUCHE

> Pour progresser dans la rigueur, le premier pas est de douter de la rigueur à laquelle on croit. Sans ce doute, on apprend peu de ceux qui vous prescrivent de nouveaux critères de rigueur.
>
> H. Freudenthal.

L'objectif de cet article est de discerner les diverses façons de prouver depuis les propriétés géométriques élémentaires jusqu'aux théorèmes les plus abstraits et de montrer que les mutations de l'idée de preuve vont de pair avec des transformations du sens et des formes d'accès au sens de la matière mathématique travaillée. Pour ce faire, nous ne pouvons partir d'une définition *a priori* des mots *preuve* ou *démonstration*, puisque nous sommes précisément à la recherche des acceptions plausibles de ces termes selon les contextes, les acquis mathématiques et les intentions de ceux qui prouvent. Choisir d'emblée une définition serait préjuger des résultats de notre enquête.

On trouvera ci-après pas mal d'exemples de preuves. A peu d'exceptions près, ils sont empruntés à la géométrie, et même presque tous à la géométrie plane. Le choix de cette discipline ne s'imposait pas, et nous aurions pu prendre nos exemples en arithmétique, en analyse, ou ailleurs. Le plus important pour nous était de les concentrer sur une discipline ou une théorie, car on n'atteint pas pleinement l'idée de preuve en étudiant des preuves isolées : il est dans la nature des preuves de s'appuyer sur des propositions prouvées et de s'enchaîner ainsi les unes aux autres.

Mais le choix de la géométrie n'est pas sans conséquences, et nos conclusions, sans être probablement dénaturées, auraient été influencées par le choix d'une autre matière. Il serait intéressant de reprendre une étude comme celle-ci en s'appuyant par exemple sur la combinatoire ou la théorie des grandeurs et des nombres.

Dans un article récent, E. Barbin[1] a étudié les fluctuations historiques de l'idée de preuve. Elle oppose les preuves éclairantes aux preuves convainquantes, les premières souvent apparentées à la méthode qui a permis de les établir, les secondes forçant l'adhésion de l'esprit aux enchaînements déductifs, mais sans satisfaire pleinement l'intuition. On retrouvera cette distinction en filigrane dans la présente étude, liée entre autres et surtout aux difficultés de l'imagination face à des classes d'objets mathématiques croissant en nombre et en variété, et à la nécessité correspondante de détours logiques inattendus.

Dans un bref article de 1977, J. van Dormolen[2] a proposé une hiérarchisation des preuves fondée comme la nôtre sur l'examen des classes d'objets qu'elles atteignent.

Un peu plus tard, A. Bell[3] distingue trois niveaux dans la compréhension et l'utilisation des preuves : d'abord le "degré de régularité et de rationalité" englobant l'identification de la classe d'objets en cause dans la preuve, puis la "qualité explicative" et le recours à des connaissances antérieures, et enfin le "niveau de sophistication des techniques de preuve". Ces trois niveaux ont trait surtout à la forme et aux moyens de la preuve. On les retouvera pour l'essentiel dans notre analyse, mais nous tenterons de montrer en outre à quelles nécessités elles répondent sur le plan du sens. L'article de Bell contient une abondante bibliographie s'étendant jusqu'à 1979.

N. Balacheff[4] propose dans sa thèse en 1988 des définitions pour les termes *explication*, *preuve*, *démonstration* et *raisonnement*, ainsi qu'une hiérarchie des preuves dont les deux niveaux principaux sont ceux des *preuves par ostension ou pragmatiques* et des *preuves intellectuelles*, celles-ci se détachant de l'action pour recourir à la formulation des propriétés en jeu et de leurs relations. Ces considérations théoriques viennent en introduction à une étude expérimentale de la pratique des preuves chez des élèves de 11 à 12 ans et de 14 à 15 ans. La thèse de Balacheff contient aussi une abondante bibliographie s'étendant jusqu'à 1986.

Signalons enfin que la présente étude développe et approfondit le compte rendu[5] d'un atelier organisé en novembre 1988 dans le cadre d'une journée consacrée par la Société Mathématique de Belgique au thème de la démonstration dans l'enseignement. Elle doit beaucoup aux remarques et critiques de Ch. De Block-Docq, Th. Gilbert, Ch. Hauchart et H. Masy : merci à eux.

1. De l'intelligence des situations aux preuves : étude d'un cas

Considérons le premier cas d'égalité des triangles tel qu'il apparaît au Premier Livre des Eléments d'Euclide[6]. Voici son énoncé, en substance :

Proposition 1. Deux triangles sont égaux (entendez : isométriques) *s'ils ont un angle égal compris entre côtés égaux chacun à chacun* (nous ne cherchons pas à fignoler cet énoncé).

Preuve : La démonstration d'Euclide consiste, pour l'essentiel, à considérer deux triangles particuliers (ABC et DEF sur la Fig. 1), pour lesquels on suppose, dans des notations évidentes, que les angles en A et D sont égaux, que AB = DE et que AC = DF. On transporte alors le premier triangle sur le second de sorte que le point A vienne sur le point D, puis que AB prenne la direction de DE. On constate alors successivement, grâce aux hypothèses, que B vient sur E, que AC prend la direction de DF, et enfin que C vient sur F, ce qui achève la démonstration. ¶

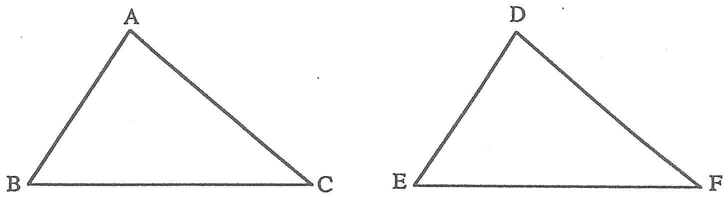


Fig.1

Cette preuve est aussi commentée par R. Bkouche[7], pour qui elle est une "lecture raisonnée du dessin".

Considérons ensuite ce jouet que l'on donne à de très jeunes enfants et qui consiste d'une part en une boîte dont le couvercle est percé de trous de formes diverses (un carré, un rond, un rectangle, un losange, un triangle, etc.), et d'autre part en diverses pièces dont les formes et les dimensions sont celles des trous. Le jeu consiste à faire passer chacune des pièces dans le trou correspondant.

Supposons qu'il s'agisse d'un trou triangulaire, de la forme par exemple des triangles de la Fig. 1. Sans raisonner et sans rien dire, l'enfant approchera la pièce du trou et amènera les deux triangles en coïncidence par une brève suite de manoeuvres que nous ne pouvons pas prévoir, car il y a trop de façons de le faire, mais dont on peut croire qu'elle est l'analogue de celle décrite dans la démonstration d'Euclide. Et ensuite la pièce passera par le trou : la bonne superposition des deux triangles sera constatée, rarement énoncée. Qu'est-ce qui différencie la démarche d'Euclide de celle de l'enfant, par delà leur évidente parenté ?

L'action de l'enfant relève de ce que H. Wallon[8] appelle *l'intelligence des situations*. L'exemple le plus commun qu'on en donne est celui du chimpanzé qui, apercevant une banane hors de portée et deux sections d'une canne à pêche, emmanche celles-ci et s'en sert pour faire tomber la banane. L'intelligence des situations se manifeste par la perception globale d'un ensemble de circonstances matérielles et par une action concrète, immédiate, relevant des capacités sensori-motrices. Elle comporte des "intuitions variables, appropriées aux circonstances[9]". A contrario, elle n'est pas verbale, elle est irréductible au raisonnement.

Bien que parente de l'intelligence des situations, la Proposition 1 s'en distingue par plusieurs traits.

D'abord par son objectif : alors que l'enfant voulait sans plus faire passer la pièce triangulaire par le trou, l'intention d'Euclide est de montrer que les deux triangles peuvent être superposés, c'est-à-dire entretiennent entre eux la relation d'égalité (ou si on veut d'isométrie), qui a préalablement fait l'objet d'un axiome[10] : "Des choses qui coïncident l'une avec l'autre sont égales entre elles".

Ensuite, et c'est le plus important, le théorème porte, par delà les deux triangles de la figure, sur tous les couples de triangles satisfaisant aux hypothèses. Dès qu'on rencontrera par ailleurs deux triangles dont on saura, pour des raisons quelconques (et généralement à la suite d'une démonstration) qu'ils satisfont aux hypothèses, on saura qu'ils sont égaux sans avoir à les transporter l'un sur l'autre. Ainsi le théorème envoie la pensée bien au delà des limites de l'ici et du maintenant, vers une infinité de triangles de toutes tailles et toutes proportions. Les deux triangles de la figure jouent le rôle de *représentants* des triangles possibles. On est encore loin de la pensée mathématique s'appuyant sur des symboles arbitraires, car les représentants ont une parenté de forme étroite avec les objets représentés, ce qui entraîne la possibilité de passer aisément des uns aux autres : la pensée peut s'engager sans obstacles vers l'imagination d'autres cas de figure en grand nombre. Mais c'est bien d'une possibilité qu'il s'agit, et non d'une démarche spontanée et constante. Il arrive même souvent que cette possibilité n'arrive pas à la conscience et que, surtout chez les débutants, l'attention demeure entièrement concentrée sur la figure accompagnant l'énoncé. Dans la mesure d'ailleurs où rien ne s'y oppose, le parcours d'autres figures possibles présente peu d'intérêt. Aucune figure particulière n'a de valeur spéciale, et seule est importante la possibilité d'en imaginer toujours d'autres sans rencontrer d'obstacle. Cette possibilité est constitutive de la preuve du théorème.

Enfin, troisième différence entre le jeu d'enfant et le théorème : celui-ci atteint son objectif par un discours justificatif. La figure à elle seule n'y suffit pas, il faut encore la commenter en enchaînant des mots, symboles des objets et des relations.

2. Jugements d'une seule venue

Pour pouvoir, à la Section 4, analyser les circonstances qui conduisent à raisonner, voyons d'abord quelques cas de pensée mathématique immédiate ou, si on veut, de jugements "d'une seule venue".

2.1. Des intuitions sûres.

Examinons la proposition suivante.

Proposition 2. La médiatrice d'un segment (c'est-à-dire la droite perpendiculaire au segment en son milieu) *est le lieu des points équidistants de ses extrémités et réciproquement.*

La Fig. 2, qui illustre cet énoncé, rend la propriété évidente grâce à sa symétrie.

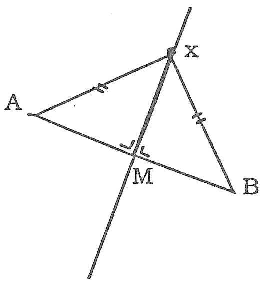


Fig.2

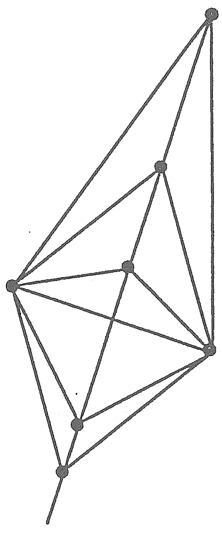


Fig. 3

De plus l'imagination embrasse d'un seul mouvement toutes les autres figures que l'on pourrait faire en partant d'autres points de la médiatrice (Fig. 3) et toutes celles que l'on construirait de même sur d'autres segments. La pensée ne peut évidemment parcourir toutes ces figures, puisqu'elles sont en nombre infini, mais en entamant un tel parcours, elle se convainc effectivement que rien ne l'arrêterait d'en parcourir de nouvelles indéfiniment. Elle accède potentiellement à toutes les figures imaginables.

En résumé, une double condition semble nécessaire et suffisante pour qu'une proposition soit vécue comme évidente, à savoir

a) qu'on en discerne à vue la réalisation sur un cas particulier ;

b) que la pensée s'engage sans accroc dans l'imagination de tous les cas possibles.

L'évidence soumise à ces deux conditions est celle qui est relative à la proposition considérée avec sa portée complète, c'est-à-dire englobant *tous* les cas satisfaisant aux hypothèses. Quand l'attention ne dépasse pas le cas effectivement considéré, le sentiment d'évidence ne tient qu'à la condition a). Dans le contexte de la géométrie, les cas s'identifient à des figures.

La Proposition 2 affirme la nécessaire concomitance de deux propriétés : celle qui définit la médiatrice et la propriété d'équidistance. La géométrie élémentaire recèle bien d'autres concomitances évidentes de deux propriétés.

Par exemple, les diagonales d'un losange (défini par l'égalité de ses côtés) sont perpendiculaires, ou encore la médiatrice d'une corde d'un cercle passe par le centre de celui-ci, etc.

Les deux exemples suivants sont intéressants parce qu'ils ont fait l'objet d'une analyse théorique. Pour entamer l'enseignement de la géométrie déductive à des élèves d'une douzaine d'années, D. Van Hiele[11] a introduit les deux notions de *scie* et d'*échelle*, deux types de figures représentés respectivement par les Fig. 4 et 5. Elle dit, et les élèves la suivent : "on reconnaît une scie au parallélisme des segments ou à l'égalité des angles", et de même pour une échelle. Elle n'amène pas ses élèves à démontrer l'équivalence mathématique des propriétés de parallélisme et d'égalité des angles. Elle appelle les scies et les échelles *des structures géométriques visuelles*. "A ce niveau, dit-elle, un motif géométrique est encore interprété comme la totalité de ses propriétés. Les élèves nesont pas encore capables de les différencier en définitions et propositions."

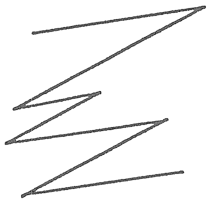


Fig.4

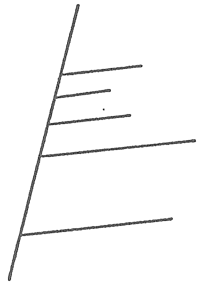


Fig.5

Par contre, elle fait jouer la concomitance des propriétés comme argument dans des démonstrations ultérieures (cf. Prop. 5).

Notons que la propriété des scies, comme celle des échelles, répond aux conditions a) et b) ci-dessus : évidence sur chaque figure particulière, extension potentielle de l'imagination à toutes les figures possibles.

Une nuance toutefois : les conditions a) et b) ne sont pas des absolus, car ce qui est évident pour un esprit peut l'être moins pour un autre. Ainsi par exemple, la propriété des scies est sans doute, pour certains, moins aisée à étendre à toutes les variantes possibles que la propriété des échelles.

2.2. Des intuitions hasardeuses.

Le sentiment d'évidence lié aux conditions a) et b) ci-dessus est parfois trompeur. Soit, par exemple, la proposition suivante.

Proposition 3. Pour construire un carré d'aire double d'un carré donné, il suffit de doubler la longueur du côté de celui-ci.

C'est ce que prétend un serviteur interrogé par Socrate dans le Ménon[12] de Platon, mais c'est aussi une illusion dont beaucoup d'élèves sont victimes. La figure type est constituée de deux carrés et il faut y lire que le côté de l'un est double du côté de l'autre et que l'aire de l'un vaut tant de fois l'aire de l'autre. Il s'agit donc d'apprécier un rapport de longueur et un rapport d'aires, ce qui n'est pas facile au premier coup d'oeil : d'où l'erreur. (Remarquons que pour les Propositions 1 et 2, ce qu'il fallait apprécier, c'était des égalités de segments ou d'angles, ce qui est plus facile.) Ainsi la condition a) ci-dessus est vérifiée, mais l'évidence correspondante est fausse. La condition b) est vérifiée aussi, car le sentiment d'évidence s'étend sans peine à toutes les figures possibles, mais ce qui se répand ainsi sur toutes ces figures est une erreur et non une vérité.

Soit maintenant la proposition suivante.

Proposition 4. On ne peut pas paver le plan avec des copies isométriques de n'importe quel quadrilatère.

Cette proposition fausse est très souvent conjecturée par des personnes qui connaissent les pavages du plan par des carrés et des parallélogrammes, voire des trapèzes. Tout pavage du plan avec des copies d'un quadrilatère particulier est une figure claire, puisque les conditions d'absence de lacunes et de recouvrements (les pavés sont bien jointifs) qui définissent un pavage sont reconnaissables à vue. Donc la condition a) ci-dessus est satisfaite. Par contre, la condition b) ne l'est pas : l'ensemble de tous les quadrilatères échappe à l'imagination. Celle-ci en évoque bien quelques-uns, mais s'épuise à chercher des pistes qui les engendreraient tous. Cette famille "sauvage" contient trop d'objets et trop divers, trop peu symétriques pour que l'on puisse croire facilement qu'ils satisferaient tous aux conditions dures qui définissent un pavage.

Enfin, il n'est pas difficile de trouver un exemple ou ni la condition a), ni la condition b) ne sont satisfaites. Il suffit d'évoquer n'importe quelle propriété dont la vérification ne peut résulter d'un simple coup d'oeil, ne serait-ce que parce qu'elle exige un comptage : il en va ainsi, entre beaucoup d'autres, de la proposition qui dit que le nombre des diagonales d'un polygone à n côtés est $n (n - 3) / 2$.

3. Des inductions

Avant d'aborder la pensée discursive (celle qui procède par étapes, cf. Section 4), regardons sous un autre jour les jugements d'une seule venue, objets de la section précédente. Chacun d'eux est une extension, sûre ou hasardeuse, vraie ou fausse, d'un constat fait sur une ou quelques figures, à un ensemble infini de figures. Ce sont des inductions, c'est-à-dire des inférences du particulier au général.

Cette définition suffit-elle à donner une idée fidèle de ce qui est en cause ici ? Il arrive souvent que l'induction d'une loi naturelle s'explique comme ceci : quand on a reproduit quelques fois une expérience (ou une observation) en veillant scrupuleusement à ne rien changer aux facteurs qu'elle met en jeu, c'est-à-dire quand seuls le temps et le lieu ont varié d'une expérience à l'autre, et si chacune de ces expériences a donné le même résultat, on pense que toute expérience future reproduite aussi exactement se déroulera de manière identique. "La méthode des sciences physiques" écrit H. Poincaré[13] " repose sur l'induction qui nous fait attendre la répétition d'un phénomène quand se reproduisent les circonstances où il avait une première fois pris naissance."

Par comparaison, les inductions mathématiques évoquées ci-dessus ne portent nullement sur des reproductions exactes d'une même figure, mais au contraire sur toutes les variantes possibles de l'une ou l'autre figure effectivement considérée. Envisagée étroitement, à la manière de Poincaré, l'induction ne conduit à décrire aucune expérience quelque peu nouvelle. Elle exprime seulement la confiance (jusqu'à plus ample informé) dans la possibilité de reproduire exactement une expérience, sans rien y changer. Nos exemples d'induction apportent au contraire une information sur une infinité de cas substantiellement différents. L'idée d'induction en tant que conduisant à du non familier, à de l'inconnu, est bien aussi celle de G. Polya dans *Induction and analogy in mathematics*[14]. A y regarder de plus près, on retrouve cette même idée de l'induction dans les sciences de la nature : les lois de la gravité et celles de Kirchhoff obtenues par induction s'appliquent aux projectiles et aux circuits les plus variés.

Revenons un moment sur la source des inductions. Les premières que nous avons examinées tirent leur évidence, comme nous l'avons vu, du fait qu'elles portent sur des relations faciles à percevoir dans une figure particulière et sur un ensemble de cas de figure maîtrisable par l'imagination. On peut croire inopportun de proposer à des débutants de démontrer ces propriétés qui tombent sous le sens. Quant aux inductions hasardeuses, elles sont souvent explicables, dans une certaine mesure, par le recours de la pensée à sa "ligne de plus grande pente". Ainsi par exemple, pour la duplication du carré, c'est l'idée de proportionnalité (entre la longueur et l'aire) qui vient d'abord à l'esprit, parce qu'il n'y a sans doute pas de fonctions plus simples que les linéaires. (A. Berté[15] a commenté et illustré ce piège de la linéarité). Ainsi encore, l'impossibilité de paver le plan avec un quadrilatère quelconque vient peut-être, comme nous l'avons suggéré, du manque de convenance trop sommairement constaté entre cette figure si libre et l'idée de pavage soumise à tant de contraintes. L'effet inverse se produit lorsque des élèves affirment[16] : “on doit pouvoir paver le plan avec des copies isométriques de n'importe quel polygone régulier”. Ici les polygones réguliers sont des objets très symétriques, et leur symétrie, leur régularité s'accorde bien a priori avec la régularité des pavages.

On peut repérer ainsi quelques idées simples, invoquées souvent comme explication parce qu'elles obéissent à la plus grande pente de la pensée. Certaines d'entre elles ont été dans l'histoire érigées en principes[17], comme par exemple le principe de raison suffisante, le principe de continuité, l'idée que “le tout est plus grand que la partie”, d'autres encore (dont certaines dans la Physique d'Aristote).

Les inductions fausses sont sources de contradictions fort utiles pour stimuler la réflexion mathématique et exhiber l'exigence de démontrer. L'expérience montre toutefois que des élèves abordant une problématique donnée manifestent une certaine tolérance aux contradictions, simplement parce qu'ils ont de la peine à en prendre conscience. Nous ne nous étendrons pas ici sur ce phénomène que nous avons analysé ailleurs[18].

4. La pensée discursive

A la Section 2.2, nous avons montré la pensée prise au piège d'une figure aux propriétés non évidentes, ou arrêtée dans son parcours d'un ensemble de figures trop touffu. Seule la pensée discursive peut alors prendre le relais. A. Lalande[19] la définit dans des termes très généraux mais qui nous suffiront : "Une opération de pensée est *discursive* quand elle atteint le but où elle tend par une série d'opérations partielles intermédiaires." Donnons-en quelques exemples.

Proposition 5. La somme des angles d'un triangle est un angle plat.

Preuve. En effet, n'importe quel triangle pave le plan, comme une seule figure suffit à le montrer (Fig. 6). Or en chaque noeud du pavage se retrouve deux fois chacun des angles du triangle.

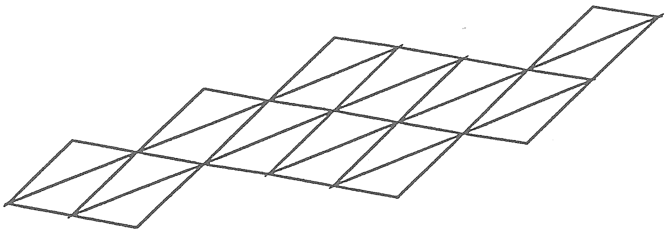


Fig. 6

Autres preuves[20]. En ajoutant un trait à un triangle, comme sur la Fig. 7, on y discerne deux scies. Les trois angles du triangle sont rassemblés et forment un angle plat. De même sur la Fig. 8, les deux traits ajoutés font apparaître une scie et une échelle. ¶

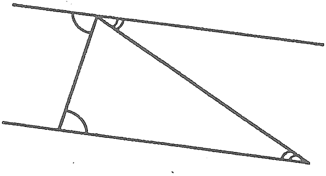


Fig. 7

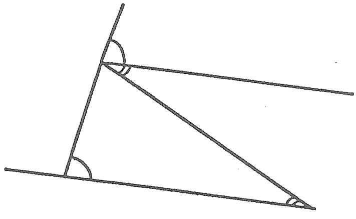


Fig. 8

Proposition 6.La somme des angles d'un polygone convexe à n côtés vaut (n - 2)p.

Preuve. On peut décomposer un polygone de ce genre en n - 2 triangles, comme le montre la Fig. 9. Le résultat annoncé découle alors de la Proposition 5. ¶

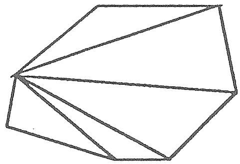


Fig. 9

Proposition 7. On peut paver le plan avec des copies isométriques de n'importe quel quadrilatère.

Preuve. Soit (Fig. 10(a)) un quadrilatère quelconque dont les angles sont marqués de 1 à 4. Accolons-lui un deuxième quadrilatère obtenu par rotation d'un demi-tour autour du milieu du côté (4,1), ce qui donne la Fig. 10(b). Faisons tourner le quadrilatère ainsi obtenu autour du milieu de son côté (4,3), ce qui conduit à la Fig. 10(c). Enfin faisons tourner le dernier quadrilatère obtenu, toujours d'un demi-tour, autour du milieu de son côté (3,2), ce qui donne la Fig. 10(d). Les angles 1, 2, 3 et 4 sont ainsi rassemblés autour d'un point et s'y ajustent exactement puisqu'en vertu de la Proposition 6, la somme des angles du quadrilatère vaut 2p. La Fig. 10(d) considérée globalement montre un octogone dont les côtés sont deux à deux isométriques et parallèles, en vertu de la façon dont ils ont été obtenus. Cette figure reproduite par translation peut donc recouvrir tout le plan, comme le montre la Fig. 11. ¶

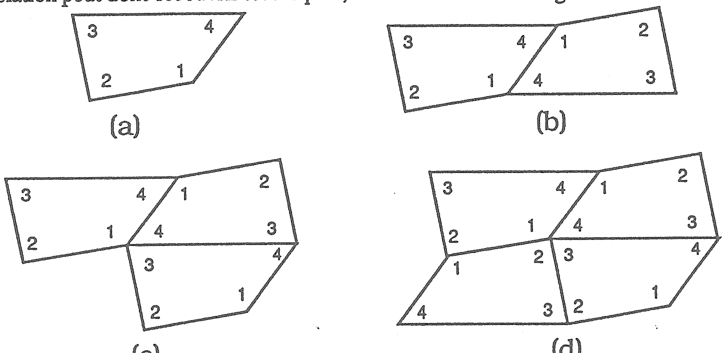


Fig. 10

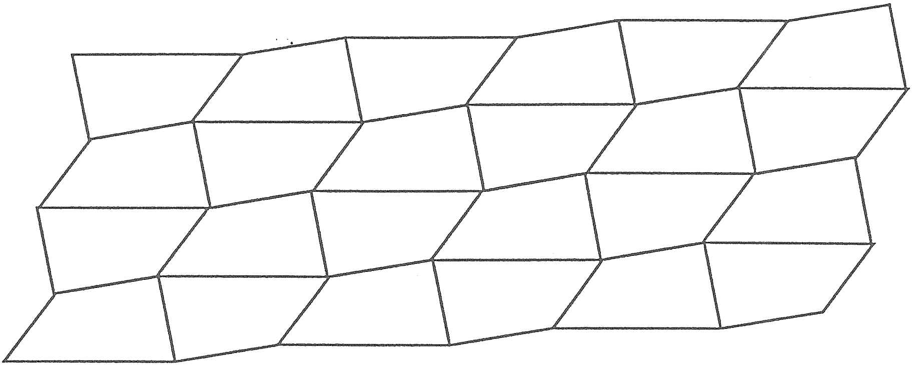
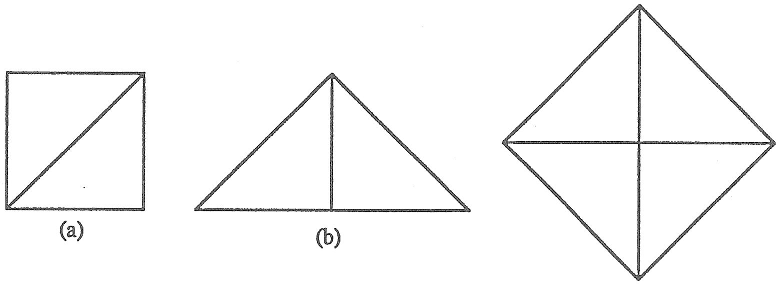


Fig. 11

Proposition 8. Pour construire un carré d'aire double d'un carré donné, il suffit de prendre pour côté du carré à construire la diagonale du carré donné.

Preuve. En effet, soit le carré de la Fig. 12(a). Sa diagonale le divise en deux triangles isométriques que l'on peut réarranger pour en faire un demi-carré, comme à la Fig. 12(b). D'où la solution, présentée à la Fig. 12(c). ¶



(a) (b) (c)

Fig. 12

Terminons cette brève suite d'exemples par une proposition empruntée à la géométrie de l'espace.

Proposition 9. Si un angle droit projeté orthogonalement sur un plan a pour image un angle droit, un de ses côtés au moins est parallèle au plan de projection.

Preuve. Montrons que si aucun des deux côtés de l'angle droit donné n'est parallèle au plan de projection, alors l'image de l'angle n'est pas un angle droit. Par hypothèse, les deux côtés de l'angle droit donné (ou leurs prolongements) percent le plan de projection.

Supposons d'abord que ce soient les deux côtés (et non leurs prolongements). Considérons que le plan du dessin (Fig. 13(a)) est le plan de projection et soient A et B les deux points de percée. Rabattons l'angle droit donné autour de AB comme charnière, ce qui donne par exemple $A\hat{C}B$. Si on remonte $A\hat{C}B$ autour de AB comme charnière, il occupe toutes les positions intermédiaires possibles, du type de $A\hat{X}B$, entre $A\hat{C}B$ et $A\hat{C}'B$. Tous les angles $A\hat{X}B$ sont obtus. L'un deux est la projection de l'angle donné.

Si un des côtés de l'angle donné et le prolongement de l'autre percent le plan de projection, la situation est celle de la Fig. 13(b) et la projection de l'angle donné est un angle aigu. Si ce sont les deux prolongements qui percent le plan, la projection est à nouveau un angle obtus (Fig. 13(c)).

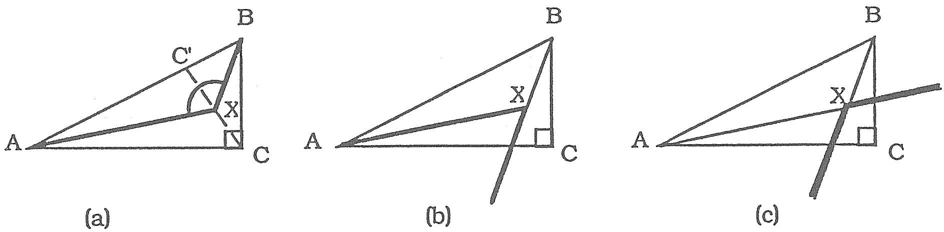


Fig. 13

Chacun des trois dessins de la Fig. 13 suffit à donner une intuition sûre de l'infinité non dénombrable de figures qu'il représente.

Ces quelques preuves relèvent de la pensée discursive. Au rebours des propriétés de la médiatrice ou des scies et des échelles, les Propositions 5 à 9 ne satisfont plus aux conditions a) et b) qui sont celles d'une évidence globale immédiate. Force sera donc de recourir à des évidences partielles, et par conséquent de les enchaîner dans un ordre propre à amener l'évidence de la proposition annoncée. La figure est disséquée, souvent complétée, elle recèle des relations entre ses parties, elle exhibe sa structure et se trouve ainsi saisie sur un mode qui se rapproche du mode conceptuel. Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que la condition a) ne soit pas réalisée, c'est-à-dire que l'évidence globale n'apparaisse pas sur un cas particulier. Si la condition b) ne l'est pas non plus, c'est-à-dire si l'ensemble des figures en cause s'avère inaccessible à l'imagination, cet ensemble ne sera plus saisi dans son extension, ce qui rend absolument nécessaire de le saisir en compréhension, c'est-à-dire par des propriétés qui le caractérisent et donc à nouveau sur le mode conceptuel.

La pensée se déroule alors dans le temps. Même si l'enchaînement des évidences partielles s'appuie sur la figure, sur des constructions, sur des gestes (montrer ceci ou l'articulation de ceci et cela), le recours à la langue s'impose. La longueur (et donc la durée) de la preuve devient un facteur significatif. La Prop. 7 par exemple, ne se prouve pas en un tournemain. Il ne faut pas s'enfoncer beaucoup dans la géométrie pour rencontrer "ces longues chaînes de raisons toutes simples et faciles, dont les géomètres ont coutume de se servir ..." dont parle Descartes[21]. Qu'elles soient simples et faciles mériterait quelque commentaire, mais leur longueur constitue déjà un obstacle pour les débutants, la vie quotidienne ne les ayant pas habitués à soutenir de tels efforts logiques.

Nos exemples montrent encore plusieurs choses.

Ainsi la Proposition 9 fait voir une division en cas de figures (ou si on veut en cas de raisonnement). La maîtrise de l'ensemble infini des figures imaginables est facilitée par la partition de cet ensemble en trois cas, ce qui amène à faire la preuve en trois temps. Ce n'est pas par hasard que l'on retrouve ici deux règles de la méthode cartésienne[22]" ... diviser chacune des difficultés que j'examinais en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour les mieux résoudre" et "faire partout des dénombrements si entiers et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre".

A contrario, toutes les preuves ne se laissent pas ainsi décomposer en cas de figure traitables en parallèle : par exemple, s'il est vrai que la Prop. 7 se prouve en deux étapes successives ménageant une sorte de respiration entre les deux, on ne voit pas comment on aurait pu partitionner l'ensemble des quadrilatères pour faciliter davantage cette preuve. Même la division en convexes et non convexes n'aurait pas éclairé la situation.

D'autre part, les Prop. 5, 6 et 7 montrent que des propositions établies servent vite à en prouver d'autres. Cela n'a guère de sens d'apprendre à prouver sur des questions isolées les unes des autres. Au contraire, et de même que les arguments s'enchaînent dans les preuves, les preuves s'enchaînent naturellement les unes aux autres, et on est bientôt amené à bâtir tout un pan de théorie organisant, structurant une famille de phénomènes.

Enfin, les preuves discursives s'appuient aussi sur des constructions constituant un contexte éclairant (Prop. 5, 6, 9) et sur des arguments qui ne sont pas à portée, qu'il faut aller chercher loin. Ainsi, songer à utiliser un pavage pour prouver la Prop. 5 est loin d'être immédiat, et de même l'expérience prouve que les élèves découvrent avec difficulté la triangulation du polygone de la Prop. 6. Comme le dit H. Wallon[23], "l'intelligence commence avec la nécessité du détour et sa découverte".

Ainsi, pour bâtir une preuve, faut-il disposer d'un réservoir suffisant d'arguments variés, d'une mémoire bien remplie de faits et de phénomènes ayant quelque relation (pas forcément étroite[24]) avec la chose à prouver. Dans une étude sur la capacité des jeunes Américains à résoudre des problèmes, Schoenfeld[25] désigne la richesse en connaissances comme l'un des facteurs principaux de cette capacité. Il n'y a pas lieu de choisir entre la tête bien faite de Montaigne, et la tête bien pleine de Rabelais : les deux servent. La mémoire doit en particulier accumuler les arguments qui, apparus une première fois comme des astuces ou des traits de génie, finissent par passer dans le savoir familier et disponible. On retrouve les sentiers cachés avec d'autant plus d'aisance qu'on les a empruntés quelques fois.

5. Quelle logique ?

Les propositions que nous avons examinées jusqu'à présent ont toutes mobilisé plutôt des *notions* (des *objets mentaux* au sens de H. Freudenthal[26]) que des *concepts* au sens habituel en mathématiques.

Nous nous sommes appuyés sur des emboîtements de figures familières et les propriétés d'additivité correspondantes pour les aires et les angles[27], sur le fait qu'un demi-tour change une droite en une droite parallèle, sur la conservation des distances dans une symétrie orthogonale (qui peut être vue comme un pliage), sur des mouvements continus de figures entre deux positions. (Il serait intéressant, en multipliant les exemples de preuves, de compléter l'inventaire des moyens de la pensée géométrique commençante.)

Nous n'avons donné ou rappelé aucune définition, ni utilisé aucun symbole. A l'exception de la Prop. 9, nos énoncés n'ont pas distingué explicitement des hypothèses et une thèse, chacun d'eux apparaissant davantage comme exprimant une propriété d'un objet ou l'existence d'un certain rapport entre deux objets. Les hypothèses étaient cachées dans les définitions non exhibées des objets étudiés. Bien entendu, le déroulement de la preuve obligeait, fut-ce de manière encore assez implicite, à discerner hypothèse et thèse. Enfin, chaque preuve a reposé sur l'examen d'une ou de quelques figures représentant tous les cas possibles.

Voilà donc de la géométrie très peu formalisée, loin de ce qu'on considère habituellement comme des théorèmes et des démonstrations avec ce que cela comporte de rigueur. Toutefois, les notions engagées dans nos preuves ont déjà timidement pris quelque distance par rapport au quotidien. Les droites et les points n'y ont (implicitement) pas d'épaisseur ; un pavage engagé dans une preuve y est débarrassé des joints de ciment entre les pavés et du cadre rectangulaire qui est nécessairement le sien dans les maisons. Les objets sont un peu idéalisés. Mais à part cela, nous ne trouvons aucun de ces caractères qui appartiennent aux mathématiques constituées : des concepts explicitement définis à l'aide de mots et de symboles, des figures présentées comme des illustrations mais dépourvues de rôle dans la preuve, les hypothèses et thèses explicitées séparément, et enfin des arguments empruntés exclusivement aux axiomes et aux propriétés déjà démontrées.

Faut-il conclure de ces oppositions multiples que les preuves exposées jusqu'ici sont vagues, peu sûres, non rigoureuses, voire que ce ne sont pas des preuves ? Il nous semble que non, dans la mesure où les notions évoquées sont claires et où leur usage dans les démonstrations est dépourvu d'ambiguïté, même si on n'en a pas donné ou rappelé les définitions ; dans la mesure où les évidences empiriques invoquées comme arguments sont sûres et univoques elles aussi ; dans la mesure enfin où les énoncés ne comportent pas d'incertitude sur ce qui est donné et ce qui est cherché. Si toutes ces choses sont claires, quoique souvent implicites, *elles contraignent l'esprit, qui ne peut prendre avec elles aucune liberté.* Et la logique la plus ordinaire est à l'oeuvre dans ces preuves : les déductions y sont de vraies déductions, on ne peut pas, sous peine de ne rien prouver, y utiliser la thèse comme argument, et lorsque, comme dans la Prop. 9, on recourt à la contraposée, il faut avoir une idée claire de cette forme évoluée de raisonnement. Quand on est amené, dans de telles preuves, à montrer des choses sur la figure (fut-ce avec des gestes si la preuve n'est pas simplement écrite), montrer ne s'oppose pas à démontrer : toute "monstration" qui contribue à l'univocité du sens est un instrument de la rigueur.

Ce type de preuves a été analysé par R. Bkouche[28] qui parle à leur propos d'une "déduction fondée expérimentalement, où on ne peut séparer le caractère formel de la déduction (c'est-à-dire la suite logique des assertions) de sa signification, celle-ci renvoyant à des notions d'ordre empirique".

A la Section 3, nous avons expliqué que les évidences immédiates issues de la considération d'une figure pouvaient être considérées comme des inductions du fait de leur extension à la famille infinie des figures parentes. Le passage à des preuves discursives n'a pas pour effet d'enfermer l'esprit dans un univers de déductions pures. Les preuves procédant par enchaînement d'évidences partielles portent toujours sur l'infinité des figures possibles répondant à l'énoncé, et la connaissance qu'elles étendent du particulier au général, de la figure dessinée à toutes les figures imaginables, est d'autant plus significative et profonde que ces figures sont devenues difficilement imaginables. A défaut de pouvoir encore s'appuyer sur l'imagination aisée de toutes les figures, la pensée devenue plus conceptuelle et plus déductive produit des inductions impossibles sans elle. La pensée déductive ne prend pas le relais de la pensée inductive, elle la sert en y exhibant sa puissance.

6. Des concepts construits pour prouver

Les quelques preuves examinées jusqu'ici ont mis en oeuvre, comme nous l'avons dit, des objets mentaux obtenus à partir de notions quotidiennes par une idéalisation modeste, les appropriant au discours mathématique. Comme nous allons le montrer maintenant sur quelques exemples, il ne faut pas s'enfoncer bien loin dans la géométrie pour devoir forger des concepts beaucoup plus "mathématisés", situés à distance considérable des notions quotidiennes.

Supposons qu'on soumette la proposition suivante à des élèves qui ont une notion familière des déplacements (isométries directes) plans : ils savent faire glisser un polygone en carton sur leur table de travail, ont compris qu'un déplacement possédant un point fixe est une rotation (ils maintiennent le point fixe en piquant une épingle dans le polygone), ont compris aussi ce qu'est une translation du polygone et enfin qu'un déplacement est déterminé par la donnée de deux points et de leurs images (si deux points du polygone sont arrivés en position finale, celui-ci ne peut plus bouger).

Proposition 10. Tout déplacement plan est une translation ou une rotation.

Preuve. Soit un déplacement plan et A un point du plan ayant A' pour image. Si A = A', le point A est fixe et le déplacement est une rotation. Si A' ≠ A, considérons un deuxième point E = A', et soit E' son image. Puisqu'un déplacement conserve les distances, on a d(A',E') = d(A,E). Le point E' est donc sur le cercle de centre A' et de rayon d(A,E). S'il se trouve comme sur la Fig. 14(a), le déplacement est une translation décrite par le couple (A,A'). S'il se trouve comme sur la Fig. 14(b), le déplacement est un demi-tour autour du milieu de AA'. Si E' se trouve en n'importe quel autre point du cercle, les médiatrices de AA' et EE' se rencontrent et le déplacement est une rotation autour de leur point de rencontre comme centre (Fig. 14(c)). ¶

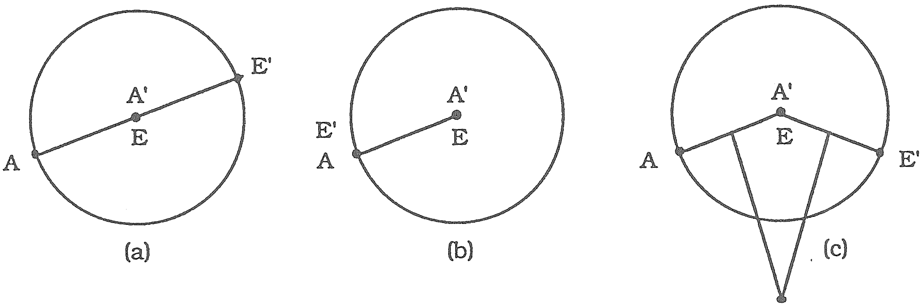


Fig. 14

Pour l'élève, au départ, un déplacement concerne toujours une figure bornée : quand on déplace un objet dans la vie, on n'entraîne pas tout l'espace avec l'objet. Mais la preuve ci-dessus donne un rôle clé à l'astuce qui consiste à choisir comme second point E à déplacer le point qui coïncide avec l'image A' du premier. Or si on imagine le déplacement comme portant sur une figure bornée, on ne peut être sûr que l'image d'un point A donné se trouve sur la figure au départ : le déplacement envoie peut-être la figure “au diable”. La preuve n'est pas possible, en toute généralité (c'est-à-dire en référence à toutes les situations qu'elle a vocation de couvrir) si on ne définit pas le déplacement comme affectant tous les points du plan. Qui plus est, la rotation perd aussi dans la preuve son caractère quotidien. En effet, si l'angle AA'E est très proche d'un angle plat, le centre de la rotation est envoyé bien loin. Et si le déplacement que l'on imagine est celui d'une figure bornée, il y a toutes les chances que le centre tombe en dehors de la figure. Il devient donc impossible de piquer une épingle dans celle-ci pour matérialiser la rotation. Les notions familières de déplacement et de rotation sont ainsi modifiées, dénaturées (déplacer tout le plan est vraiment en soi une idée étonnante) *pour les besoins de la preuve.*

Examinons deux autres exemples.

Proposition 11. On considère un polygone régulier à un million de côtés (un million-gone) *et d'aire égale à 1. On en considère un second construit en joignant les milieux des côtés successifs du premier. Puis un troisième construit de même dans le second, et ainsi de suite. Les aires de ces millions-gones tendent vers 0.*

Preuve. Tous ces million-gones sont semblables. Soit a le rapport de similitude de chacun d'eux (à partir du deuxième) au précédent. On a $0 < \alpha < 1$ (et a très proche de 1). La suite des aires en question est 1, α, α^2, α^3, .Il faut montrer qu'à partir d'un certain n, α^n devient plus petit que toute quantité $\varepsilon > 0$ donnée, si petite soit-elle :

$$\alpha^n < \varepsilon.$$

Or, montrer cela revient à montrer que :

$$1/\alpha^n = (1/\alpha)^n > 1/\varepsilon .$$

Mais $1/\alpha$ est plus grand que 1. On peut donc écrire $1/\alpha = 1 + \delta$ pour un certain $\delta > 0$. Il faut donc montrer qu'à partir d'un certain n

$$(1 + \delta)^n > 1/\varepsilon .$$

Or,

$$(1 + \delta)^n > 1 + n\,\delta,$$

ce qui résulte soit du développement binomial, soit d'une preuve simple par récurrence. Il suffit donc de montrer qu'à partir d'un certain n

$$1 + n\,d > 1/\varepsilon .$$

On considère ceci soit comme évident, soit comme découlant de l'Axiome d'Archimède.¶

Comparons cette proposition à celle que l'on obtient en y remplaçant les million-gones par des carrés : les aires des carrés de la Fig. 15 tendent vers 0.

Ces aires décroissent tellement vite que la propriété ne fait pas de doute.

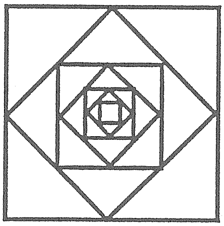


Fig. 15

Tel n'est pas le cas pour les million-gones dont la décroissance tellement lente provoque un doute chez certains. Mais comment prouver la limite nulle dans ce cas si on ne dispose que du concept intuitif de limite, qui pourtant exprime si clairement le comportement de la suite des carrés ? Il faut entreprendre de montrer que les aires des million-gones deviennent plus petites que n'importe quelle quantité donnée. Il faut donc prouver une inégalité. Mais où aller chercher celle-ci ? Il n'y en a pas dans la notion intuitive de limite nulle. Force est donc d'élaborer techniquement (dans le mesure nécessaire) le concept de limite en termes d'inégalités et de quantificateurs, *pour qu'il se prête à la conduite technique de la preuve.*

Proposition 12. Toutes les paraboles ont la même forme.

Preuve. Toutes les paraboles sont données à isométrie près par la courbe d'équation $y = ax^2$, dessinée en axes rectangulaires, avec $0 < a < \infty$. Considérons une parabole quelconque et la parabole d'équation $y = x^2$ (cf. Fig. 16). La droite $y = \alpha x$, où α est un réel quelconque, coupe la première parabole au point $(\alpha/a, \alpha^2/a)$ et la seconde au point (α, α^2).

On constate que l'application

$$(\alpha,\alpha^2) \longrightarrow \frac{1}{a}(\alpha,\alpha^2)$$

est une homothétie. D'où la thèse. ¶

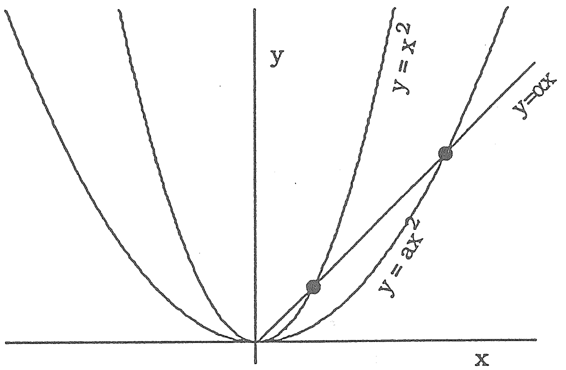


Fig. 16

Comparons cette proposition à celle qui dit que tous les cercles ont la même forme. Celle-ci est un truisme. L'autre non, pour des raisons qu'on peut analyser[29]. Quoiqu'il en soit, nous avons, *pour la prouver*, recouru à la définition analytique des paraboles et à une expression formalisée de l'homothétie, exprimée en termes de coordonnées.

I. Lakatos[30] appelle *proof-generated concepts* les concepts ainsi constitués pour s'adapter aux exigences des démonstrations. Il a montré sur deux exemples historiques (celui de la relation d'Euler dans les polyèdres et celui de la convergence uniforme) comment la recherche des preuves d'une proposition oblige à ajuster les concepts qui y sont engagés et par conséquent réagit sur l'énoncé lui-même. Lorsqu'on ne dispose pas au départ des instruments conceptuels adéquats (et c'est souvent le cas des élèves, soit qu'ils ne les aient pas rencontrés, soit, plus souvent, qu'ils ne les aient pas bien assimilés), établir un théorème consiste donc, à travers les contradictions et les reprises de la pensée, à ajuster progressivement les uns aux autres à la fois les concepts, l'énoncé et la preuve[31]. Ce n'est nullement un travail déductif, même si son objectif est de produire un morceau de pensée déductive.

Par ailleurs, même si on a étudié la définition d'un concept et si on en a parcouru quelques illustrations, peut-on dire qu'on l'a assimilé tant qu'on ne l'a pas vu fonctionner dans des preuves, tant qu'on n'a pas reconnu sur le tas les pièges de la pensée que sa définition technique précise est supposée déjouer ? Apprendre à prouver, c'est aussi apprendre à utiliser les subtilités des concepts et souvent à les ajuster. Et de ce fait c'est apprendre à franchir les seuils épistémologiques[32] qui mettent la plupart des concepts mathématiques à grande distance de la pensée commune.

7. L'hypothético-déductif

Comme nous l'avons noté ci-dessus, beaucoup des propositions de la géométrie commençante apparaissent davantage comme des énoncés de faits que comme des implications, les hypothèses n'y étant pas clairement détachées de la thèse. Par ailleurs, on n'entreprend spontanément de prouver une proposition que si elle est douteuse. Mais tout de même, on incline à la croire vraie (par exemple, parce qu'elle a résisté à quelques tentatives pour produire des contre-exemples), car sinon pourquoi se fatiguer ? Pour la prouver, il faut s'appuyer sur des faits avérés, soit des évidences disponibles sur place ou ailleurs, soit des propositions acquises. D'où une naturelle séparation des hypothèses et de la thèse. Pour prouver un fait, il faut d'abord, en quelque sorte, construire un énoncé. Comparé à ces points d'appui que sont les hypothèses, la thèse est cette chose que l'on suppose vraie, dont on s'inspire même pour imaginer la preuve, mais que l'on tient à distance puisqu'il n'est pas permis de s'en servir dans la preuve (ce qui arrive parfois par inadvertance). Viser la thèse sans l'accepter est un effort d'autant plus difficile que le cheminement discursif est plus long. Nous ne nous étendrons pas davantage sur ce point que nous avons traité en détail ailleurs[33].

Ceci dit pour ce qui est de la thèse, montrons maintenant sur deux exemples que déjà au niveau de la géométrie à ses débuts, des contradictions apparaissent qui menacent le statut des hypothèses en tant que points d'appui clairs et fermes.

Proposition 13. La somme des angles d'un pentagone, un hexagone et un octogone tous trois réguliers égale 360°.

Preuve empirique[34]. Je dispose les trois angles en question autour d'un point et constate le résultat annoncé (Fig. 17). ¶

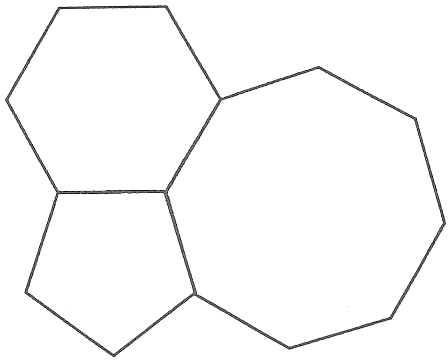


Fig. 17

Preuve du contraire. Grâce à la Proposition 6, on calcule que les angles des polygones mentionnés valent respectivement 540/5 = 108°, 720/6 = 120° et 1080/8 = 135°. Leur somme vaut 363°. ¶

Il faut résoudre cette contradiction entre l'expérience et la théorie. Mais d'où vient "la théorie" ? De la Proposition 6, elle-même dérivée de la Proposition 5 : la somme des angles d'un triangle vaut 180°. Or si cette dernière vient elle-même du constat expérimental qu'illustre la Fig. 6 (tout triangle pave le plan) alors il faut choisir entre croire au pavage de la Fig. 6 ou à celui de la Fig. 17.

En refaisant cette dernière avec beaucoup de soin, on s'aperçoit qu'elle conduit à un petit recouvrement des polygones. On décidera donc d'accepter la Proposition 5 et de rejeter la Proposition 13. Mais un doute peut naître : "Et si la Fig. 6 n'était elle-même pas tout à fait exacte ?". Ce doute peut contribuer à faire discerner les statuts respectifs des propositions physiques et mathématiques, en particulier en donnant à ces dernières la forme hypothético-déductive. On dira : "Si les triangles de la Fig. 6 sont supposés s'ajuster exactement, alors ...".

L'anecdote suivante montre que le choix entre deux propositions contradictoires ne s'impose pas toujours. Un professeur[35] propose à ses élèves un triangle rectangle isocèle, fait l'hypothèse qu'une commune mesure va m fois dans un côté de l'angle droit et n fois dans l'hypoténuse, en tire l'équation

$$2m^2 = n^2$$

par le théorème de Pythagore et en déduit une contradiction par le raisonnement classique sur la parité et l'imparité des deux membres. Elle tente d'amener la conclusion : "Ainsi, vous voyez, ce que nous avons admis au départ ne pouvait être vrai". "Donc", répond un élève, "le théorème de Pythagore est faux !". On imagine en effet sans peine que le théorème de Pythagore apparaisse moins évident que l'existence de la commune mesure (dont tant de personnes sont persuadées).

Des contradictions comme celles-là obligent à choisir parmi les points d'appui possibles de la théorie. Les élèves sont persuadés que le choix à faire est entre la vérité et l'erreur : ils n'imaginent pas la coexistence possible de théories mathématiques issues d'axiomes contradictoires. Pour eux, l'univers mathématique est certes distinct de l'univers réel dans la mesure où il est constitué d'objets idéaux, mais il demeure un univers unique et exempt de contradictions, un réservoir de faits vrais.

Toutefois, l'apparition d'une démonstration par l'absurde (la première dans notre suite d'exemples) marque une nouvelle transformation du rapport de celui qui prouve aux objets de la théorie. En effet, pour prouver par l'absurde, on raisonne dans un monde contradictoire, et alors de deux choses l'une : ou bien la contradiction est "visible à l'oeil nu" en ce sens qu'on ne peut produire aucun objet crédible satisfaisant à l'hypothèse "par l'absurde", ou bien la contradiction est cachée dans l'infiniment petit (ou grand) et noyée dans la précision du dessin (c'est le cas pour la démonstration de l'absence de commune mesure entre le côté et la diagonale du carré). Dans les deux cas, l'accès direct à des figures parlantes est barré et la pensée *doit* se rabattre sur la forme des concepts, puisque leur contenu en termes d'objets lui échappe.

Montrons maintenant sur un nouvel exemple le passage de la conception d'un univers exempt de contradictions (sauf momentanées et méthodologiques dans les preuves par l'absurde) à celle qui a découlé historiquement de l'émergence des géométries non euclidiennes et a abouti à déplacer la notion de vérité des faits vers les implications. La proposition suivante est la réciproque de celle qui fait découler la densité des rationnels de l'axiome d'Archimède.

Proposition 14. Dans un champ ordonné, la densité des rationnels implique la propriété archimédienne.

Preuve. Soient a et b deux nombres du champ, avec $a > 0$. Il faut montrer qu'il existe un nombre naturel n tel que $na \geq b$. Si $a \geq b$, il n'y a rien à prouver. Supposons donc $a < b$. Le nombre a/b est strictement positif. A cause de la densité des rationnels, il existe deux entiers positifs m et n tels que

$$0 < m/n < \alpha/\beta \, .$$

Mais alors on a aussi

$$0 < 1/n < \alpha/\beta$$

et par conséquent $n\alpha > \beta$. ¶

Il est hors de propos, à l'examen de cette proposition, de se demander si la densité des rationnels est vraie, ou si la propriété archimédienne est vraie. Il existe des champs qui ne possèdent ni l'une ni l'autre (par ex. les hyperréels de l'analyse non standard). Simplement, la première est ici supposée, et la seconde en découle. Des notions comme celles de vérité, de doute et d'évidence sont transformées par le déplacement de l'attention de la thèse vers l'implication. Douter de la thèse en soi ou la trouver évidente n'a pas de sens dans le monde des déductions pures, alors par contre qu'il est naturel de douter de l'implication, ou de la trouver évidente, et éventuellement vraie.

Dans le développement d'un système axiomatique, c'est-à-dire lorsqu'on a décidé de *tout* déduire de quelques axiomes, on est souvent amené à "prouver des évidences". C'est une chose paradoxale et perturbante, car qu'est-ce que *prouver une évidence* si prouver est conçu comme amener à l'évidence ? Selon Clairaut[36], "tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte, et n'est propre qu'à obscurcir la vérité et à dégoûter les lecteurs". Le paradoxe vient de ce que les "évidences" en question sont à prendre au premier sens : elles sont relatives à des faits, non à des implications. Et en effet, dans ce genre de circonstances, les implications sont au contraire particulièrement peu évidentes et les démonstrations sont glissantes, tellement l'esprit est attiré et séduit par l'évidence (au premier sens) de la thèse. Une évidence empêche l'autre.

Il n'est sans doute pas facile de passer, dans l'apprentissage de la démonstration, d'un monde de faits où toute contradiction est fautive à un monde d'implications où les contradictions sont domestiquées, non tolérées par endroits, tolérées et étudiées à d'autres. S'accommoder de l'indécidable n'est ni naturel, ni confortable.

Il faut, pour s'intéresser aux constructions axiomatiques, des mobiles forts. Mentionnons quatre d'entre eux parmi les plus visibles.

- On veut mettre de l'ordre dans une masse touffue de résultats ;
- ou on se pose des problèmes de fondement, et ceux-ci sont plus faciles à traiter si on arrive à les circonscrire à quelques axiomes ;
- ou on caractérise une structure par quelques axiomes de manière à ce que, quand on la reconnaît dans un contexte (un paysage) mathématique donné, on puisse y appliquer d'emblée toutes les conséquences des axiomes : la structure regarde, pour ainsi dire, vers son aval, vers ses modèles, ses cas particuliers ;
- ou enfin on veut transférer des intuitions d'une théorie donnée à une autre plus générale : la structure regarde alors vers son amont.

Attardons-nous un moment sur cette dernière perspective, celle qui donne le plus de sens à la démonstration de thèses évidentes : cela vaut la peine de démontrer soigneusement une évidence intuitive de la géométrie plane ou de l'espace si on a l'espoir que cette démonstration inspirera la preuve d'une propriété non évidente (dans les deux sens) de $\hat{A}^n$ ou d'un espace infini-dimensionnel.

Un espace infini-dimensionnel ! Cette rencontre, à un stade avancé de la construction des mathématiques, des espaces de l'analyse fonctionnelle ou d'autres objets aussi abstraits, fait voir d'une part leur éloignement des réalités sensibles qui étaient le terrain de la géométrie à ses débuts (le seuil épistémologique est devenu très haut) mais aussi leur enracinement intuitif dans cet univers des perceptions et des mouvements par le biais des transferts d'intuition.

8. L'évolution du sens

Quitte à accepter certaines redites, résumons maintenant, pour les clarifier et les compléter, les étapes de la construction du sens mathématique que nous avons discernées jusqu'ici : sur quoi porte la pensée, à quoi renvoie le discours, quels sont ses référents et quels en sont les modes d'appréhension ?

Nous sommes remontés loin dans les origines de la pensée, jusqu'à l'intelligence des situations, celle qui saisit globalement l'articulation des objets perçus et s'exprime par l'action immédiate, sans discours. Nous avons vu la pensée déborder les frontières étroites de l'ici et du maintenant, étendant son sentiment d'évidence d'une situation perçue à l'ensemble infini des situations parentes, ce qui est possible quand celles-ci n'opposent pas d'obstacle à l'imagination : moment impressionnant où l'homme dépasse le primate en passant du singulier au général, étonnante présence de l'infini à ce stade précoce de la pensée. Puis l'évidence globale et immédiate disparaît lorsque la structure d'une situation particulière ne tombe pas sous le sens, ne se révèle pas au simple regard, ou lorsque l'imagination s'embarrasse dans l'engendrement des situations parentes. L'évidence immédiate cède alors la place à un enchaînement d'évidences partielles, à la preuve discursive. Le seul regard, du corps ou de l'esprit (la vue mentale des figures imaginées), ne révèle plus clairement toutes les relations en cause, et celles-ci sont saisies de plus en plus souvent sur le mode conceptuel. C'est un autre moment capital du développement de la pensée : celui où elle renonce à voir, ou du moins à tout voir, d'une classe de situations qui l'occupe, mais sans pour autant renoncer à la connaître. La pensée discursive conceptualisante atteint des objets en nombre infini qu'elle ne se représentera jamais, sauf pour un nombre infime d'entre eux. On peut considérer qu'un tel constat est banal. Il tire son sens de ceci : s'il est vrai que cette étape de la connaissance est en progrès sur la précédente du fait qu'elle atteint des classes d'objets de plus en plus nombreuses, vastes et compliquées, elle est aussi en régression par rapport à celle-ci dans la mesure où l'appréhension directe et concrète des choses est plus satisfaisante que leur maîtrise abstraite. Connaître de plus près est en un sens connaître mieux.

Nous avons désigné sous le nom d'*objets mentaux* les premiers instruments conceptuels de la pensée discursive : ce sont des notions quotidiennes modérément idéalisées pour les approprier aux premiers raisonnements. Mais les objets mentaux s'avèrent rapidement insuffisants pour saisir des situations mathématiques nouvelles. Nombre d'entre eux ne s'adaptent pas bien aux démonstrations, ne permettent tout simplement pas de les mener à terme. D'où la nécessité de les remplacer par des concepts techniquement construits sur le mode habituel en mathématiques, en recourant le plus souvent à des symboles arbitraires. Ces concepts résultent d'une véritable mais nécessaire dénaturation des notions quotidiennes (d'où le nom de seuil épistémologique). L'usage des symboles algébriques traduit un nouvel éloignement par rapport à la réalité perçue : une figure représentant une classe de figures parentes est un instrument de l'intuition. Le passage à des symboles marque aussi un progrès dans la mesure où il ouvre la voie à la connaissance de choses plus nombreuses et plus cachées, mais aussi une régression par rapport à la connaissance directe. Il ne se justifie sans doute, et n'est peut-être même possible, que parce que la pensée peut retourner à celle-ci, dans une certaine mesure.

A ce stade, et bien que les instruments conceptuels se soient déjà notablement écartés des notions de la pensée commune, la pensée mathématique renvoie toujours aux situations quotidiennes, dont elle fournit des interprétations cohérentes. Mais le moment vient, assez vite lui aussi, où ces mathématiques issues du monde empirique butent sur des contradictions (choisir entre deux pavages, choisir entre le théorème de Pythagore et la commune mesure pour le côté et la diagonale du carré, etc.). Elles ne peuvent donc plus, semble-t-il, rendre compte de la totalité de la réalité naïvement perçue. D'où, dans une première vue des choses, l'abandon de certaines connaissances quotidiennes dorénavant réputées fausses, et l'accord rétabli avec les autres connaissances communes dont les mathématiques continuent, croit-on, à exprimer la structure vraie : dans le monde physique, le théorème de Pythagore est vrai, la commune mesure du côté et de la diagonale du carré ne l'est pas, la vérité est connue. Mais sur le plan du sens, les mathématiques ont au passage écarté une partie de leurs référents, en aidant à révéler l'incohérence de la connaissance spontanée du monde. Cette découverte, ébranlant la confiance dans le bon sens, ne va pas de soi. Au moins laisse-t-elle subsister, quoique pas pour longtemps, l'idée d'*une* vérité physico-mathématique.

Avec les géométries non-euclidiennes, les mathématiques ne renvoient plus à un monde physique univoque, mais à des mondes imaginables, cohérents et contradictoires, dont l'un est peut-être réel. Avec l'étude des structures abstraites et en particulier, en géométrie, de Â^n et des espaces infini-dimensionnels, elles étendent leur champ d'investigation à des classes d'objets purement conceptuels : d'une part on ne peut plus les imaginer tous, ce qui était déjà le cas dans Â^2 ou Â^3, vu leur nombre et leur variété, mais la plupart ne sont même pas imaginables, ne sont pas réductibles aux catégories ordinaires de la perception. Et néanmoins on y pense en s'appuyant sur des intuitions à la fois imparfaites, indispensables et piégées, issues de la réalité sensible.

Les mathématiques constituées en systèmes purement hypothético-déductifs ont ainsi

- en larguant leurs amarres à la réalité, changé la nature des objets qu'elles étudient ;
- changé leur relation à la réalité : elles se sont constituées en modèles éventuellement disponibles pour l'étude de celle-ci ;
- augmenté considérablement l'ensemble et la variété de leurs référents, rendu plus difficile et le plus souvent impossible la connaissance directe de ceux-ci, et par conséquent forcé la pensée dans le registre conceptuel déductif, sans pour autant jamais évacuer ses rapports intuitifs, ses efforts incessants et féconds pour se représenter vaille que vaille des objets particuliers.

Evoquons enfin, fut-ce brièvement, les mathématiques contem-poraines issues de la théorie des ensembles et dont les théories s'ordonnent en allant des structures les plus pauvres vers les plus riches. Les structures pauvres renvoient chacune à un univers de sens tellement vaste que l'idée de la parcourir ne vient plus à l'esprit, tant elle est utopique. Mais cela ne signifie nullement, pour celui qui travaille une telle théorie, qu'il s'enferme dans son expression purement formelle. Au contraire, il a besoin sans cesse d'extraire de l'immense univers des référents de la théorie, des objets particuliers, sortes d'échantillons ou de témoins pêchés dans cet océan. Certains de ces objets sont des théories entières, modèles de la structure pauvre à l'étude.

On a tenté, il y a une vingtaine d'années, d'enseigner les mathématiques en commençant par les structures pauvres. En gardant la même image marine, on peut dire que les élèves se sont trouvés au bord d'un océan de sens dont ils n'ont même pas soupçonné l'existence. On leur a offert quelques illustrations naïves des théories, infimes animalcules rencontrés sur la plage. Ils n'ont pas partagé l'enthousiasme pourtant réel (et fondé) de leurs maîtres, qui avaient appris la pêche en haute mer.

Mentionnons pour mémoire la liquidation méthodologique (et provisoire) du sens par ceux qui s'occupent des problèmes de fondement. Cette extrémité de la pensée mathématique et sa relation à l'enseignement ont été bien commentées par R. Bkouche et D. Lehmann[37].

9. Conclusions

Que tirer pratiquement de tout ceci, et qui soit utile dans les classes ? Trois idées nous paraissent surnager.

a) Prouver, démontrer ne sont pas choses bien définies, qui se laisseraient prendre dans une formule. Cela s'apprend par étapes, des étapes marquées chacune non seulement par un changement (le plus souvent un accroissement) de l'univers du sens, mais encore par une modification du rapport au sens, des modes d'accès à l'ensemble des référents. Il est sans doute inopportun d'aborder n'importe quelle étape prématurément, c'est-à-dire sans que le sens et donc la motivation suivent, et peut-être plus encore de sauter des étapes.

b) A chaque étape sa forme de rigueur, sur laquelle il faut insister. On peut se tromper de rigueur en forçant dans une étape déterminée la rigueur d'une étape plus avancée. Il y a des étapes anté-euclidiennes où la rigueur s'appuie sur des dessins bien faits, des gestes, ... Il faut y veiller et ne pas instaurer à ce moment la rigueur euclidienne, encore moins la rigueur hilbertienne.

c) Une source de méprise sur la rigueur et sur son appropriation à chaque étape de la formation mathématique semble bien être la conception assez répandue selon laquelle la *démonstration* serait univoquement définie et qu'en particulier elle exclurait le recours à toute donnée empirique. A cela s'ajoute qu'elle devrait être enseignée à partir d'un certain âge, et enfin qu'avant cet âge on trouverait surtout des intuitions et pas de rigueur. Or la rigueur est non seulement possible, mais s'impose à chaque stade : est-elle autre chose que le sérieux de la pensée[38] ?

Notes

1 E. Barbin, *La démonstration mathématique : significations épistémologiques et questions didactiques*, Bull. A.P.M.E.P., 366 (1988), 591-620.

2 J. Van Dormolen, *Learning to understand what giving a proof really means*, Educ. Stud. Math. 8 (1977), 27-34.

3 A. Bell, *The learning of process aspects of mathematics*, Educ. Stud. Math. 10 (1979), 361-387.

4 N. Balacheff, *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège*, Thèse de doctorat, Univ. Grenoble, 1988, 609 pages. Cete thèse développe entre autres l'article suivant du même auteur : *Preuves et démonstrations en mathématiques au collège*, Rech. Did. Math. 3 (1982), 261-304. On trouve aussi dans ce dernier document un intéressant survol des conceptions de la preuve et de la démonstration dans l'enseignement et les programmes français de 1925 à nos jours.

5 N. Rouche, *Apprendre à prouver*, à paraître dans le Bull. Soc. Math. Belg.

6 *Euclid's Elements*, trad. T.L. Heath, 3 vol., Dover, New York, 1956.

7 R. Bkouche, *De la démonstration*, Colloque Inter-IREM de Géométrie, Montpellier, 1988; à paraître.

8 H. Wallon, *De l'acte à la pensée*, Flammarion, Paris, 1970.

9 H. Wallon, *op. cit.*

10 Euclide, *op. cit.*

11 D. Van Hiele, *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.*, Thèse de doctorat, Utrecht, 1957.

12 Platon, *Oeuvres complètes*, trad. L. Robin, Gallimard, Paris, 1940.

13 H. Poincaré, *La science et l'hypothèse*, Flammarion, Paris, 1943, p. 6. Au total, cette acception étroite du terme *induction* est bien celle qui ressort aussi de l'exemple paradigmatique suivant proposé par Popper : "Tous les cygnes sont blancs." Cf. K.R. Popper, *La logique de la découverte scientifique*, trad. N. Thyssen et P. Devaux, Payot, Paris, 1982.

14 G. Polya, *Induction and analogy in mathematics*, Princeton Univ. Press, 1954. On pourra retourner aussi aux analyses de Poincaré sur le même sujet. Il écrit : "L'égalité 2 + 2 = 4 n'a été ainsi susceptible d'une vérification [proposée par Leibniz] que parce qu'elle est particulière. Tout énoncé particulier en mathématiques pourra toujours être vérifié de la sorte. Mais si la mathématique devait se réduire à une suite de pareilles vérifications, elle ne serait pas une science. [...] Il n'y a de science que du général. On peut même dire que les sciences exactes ont précisément pour objet de nous dispenser de ces vérifications directes." Poincaré poursuit en analysant la capacité de l'induction (prise cette fois dans son sens mathématique de raisonnement par récurrence) de produire des vérités essentiellement nouvelles (synthétiques). Cf. H. Poincaré, *op. cit.*, p. 13.

15 A.Berté *et altr.*,*Enseignement des mathématiques utilisant la "réalité"*,IREM de Bordeaux,1987,142p.

16 Opinion d'élèves relevée dans un travail à paraître de Ch. De Block-Docq.

17 On trouvera davantage de développements sur ce sujet dans N. Rouche, Questions sur les erreurs, dans *Rôle de l'erreur dans l'apprentissage et l'enseignement de la mathématique*, C. Goupille *et altr.* ed., Université Sherbrooke, 1988, 97-121.

18 Ch. Hauchart, N. Rouche, *Apprivoiser l'infini*, CIACO, Louvain-la-Neuve, 1987. Pour compléter cette section sur les inductions, il faudrait remarquer que certaines propositions mathématiques ne portent pas sur une infinité d'objets, mais bien sur un petit nombre ou sur un seul. On trouve dans ce dernier cas les propositions à quantification existentielle et parmi elles les contre-exemples. Ne portant que sur un objet, ils conduisent à un très grand degré d'évidence. Comme dans la thèse de Popper relative à la science expérimentale, ils servent à infirmer ("falsifier") les inductions qui doivent l'être (cf. N. Rouche, *Apprendre à prouver*, voir Note 5).

19 A. Lalande, *Vocabulaire technique et critique de la philosophie*, Presses Univ. France, Paris, 1951.

20 Ces deux preuves sont dues la première à D. Van Hiele, *op. cit.*, et la deuxième à un de ses petits élèves.

21 R. Descartes, *Discours de la méthode*, rééd. Plon, Paris, 1945.

22 R. Descartes, *op. cit.* E. Barbin, dans l'article déjà cité, étudie les rapports de la méthode à la preuve et suggère qu'une preuve éclairante est sans doute souvent proche de la méthode qui a permis de la trouver.

23 H. Wallon, *Les origines de la pensée chez l'enfant*, Presses Univ. France, Paris, rééd. 1975.

24 Hadamard a montré la fertilité de la pensée large en mathématiques, cf. J. Hadamard, *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Gauthier-Villars, Paris, rééd. 1975. Sur l'importance de "penser à côté", voir aussi P. Watzlawick, J. Weakland et R. Fisch, *Changements, paradoxes et psychothérapie*, Seuil, Paris, 1975, Chapitre 2.

25 A.H. Schoenfeld, *Mathematical problem solving*, Academic Press, Orlando, 1985.

26 H.Freudenthal,*Didactical phenomenology of mathematical structures*,Reidel,Dordrecht,1983, Chap.2.

27 Sous la dénomination anglaise de *fitting*, l'exact ajustement de certains objets les uns aux autres est donné par Freudenthal comme source essentielle de la pensée géométrique : cf. H. Freudenthal, *Mathematics as an educational task*, Reidel, Dordrecht, 1973, p. 413. Les emboîtements de polygones, qui par ailleurs fondent la "méthode des aires" au début des Eléments d'Euclide, semblent bien avoir été le moyen de preuve le plus commun dans les mathématiques traditionnelles chinoises : cf. J.-C. Martzloff, *La démonstration dans les mathématiques chinoises*, à paraître dans les Actes du Colloque Inter-IREM de Besançon de mai 1989.

28 R. Bkouche,*Les mathématiques comme science expérimentale*,Bulletin APMEP 61 (1982), 306-324.

29 N. Rouche, *Apprendre à prouver*, voir Note 5.

30 I. Lakatos, *Preuves et réfutations, essai sur la logique de la découverte mathématique*, trad. N. Balacheff et J.-M. Lalande, Hermann, Paris, 1984.

31 Sur ce sujet, cf. la thèse de N. Balacheff citée à la Note 4. On y lit, p. 65 : "L'élaboration de preuves ne constitue que l'un des versants de la démarche de validation, un autre versant est celui de l'analyse critique des preuves, l'exploration des objets mathématiques dont la véritable nature est toujours questionnée. Comme l'histoire en témoigne la différenciation, la généralisation des concepts mathématiques n'est jamais terminée. [...] De telles évolutions obligent à reprendre les preuves, à reconsidérer leur domaine de validité, à préciser les objets sur lesquels elles portent." En résumé, les concepts changent au cours de l'histoire et les peuves doivent être ajustées aux formes nouvelles qu'ils prennent. Ce qui est tout à fait vrai, mais ne doit pas faire oublier que ce sont les défauts repérés dans les preuves grâce aux contre-exemples qui obligent à ajuster les concepts (d'où la notion centrale dans Lakatos de *proof-generated concept*). Quelle que soit l'opinion philosophique que l'on puisse avoir sur ce que signifie "la véritable nature" des concepts, ceux-ci apparaissent le plus souvent comme forgés sur des chantiers de preuves où ils servent d'instruments de raisonnement. Et quand on a ajusté un concept sur un chantier de preuve, il reste bien entendu à revoir toutes les autres preuves dans lesquelles ce concept est engagé.

32 Pour une analyse des caractères des concepts mathématiques qui les situent très à l'écart de la pensée commune, on pourra consulter GEM, *Lettre du GEM au GFEN*, Dialogue, 54 bis (1985), 10-27.

33 Voir C. Hauchart et N. Rouche, *op. cit.*

34 Cette configuration douteuse de polygones est apparue spontanément plusieurs fois dans des classes d'enfants de douze ans à la recherche de pavages semi-réguliers (cf. Ch. De Block-Docq, *op. cit.*).

35 L'anecdote est de Fr. Van Dieren-Thomas, professeur à Bruxelles.

36 A. Clairaut, *Eléments de géométrie*, rééd. Gauthier-Villars, Paris, 1920, p. XIII.

37 Voir en particulier R. Bkouche, *Axiomatique, formalisme et théorie*, Bulletin Inter-IREM, à paraître et D. Lehmann, *La démonstration*, communication au GREM (Groupe de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques), polycopie.

38 Cf. E. Wittmann, *The complementary roles of intuitive and reflective thinking in mathematics teaching*, Ed. Stud. Math. 12 (1981), 389-397 : "Je crois important de reconnaître que les mathématiques informelles sont d'*authentiques* mathématiques. Dans celles-ci les activités intuitives sont un mode *naturel* de la pensée mathématique. Elles ne doivent pas être comprises comme une concession aux élèves non encore mûrs pour des mathématiques au sens propre. Par conséquent, nous devrions résister aux pressions injustifiées vers la perfection conceptuelle et formelle et nous devrions faire davantage confiance aux mécanismes autorégulateurs du progrès intellectuel."