L'ENSEIGNANT, LA DEMONSTRATION ET L'HISTOIRE

LETTRE DE GILLES ITARD, ENSEIGNANT, AUX COLLOQUIENS

Gilles ITARD

"Qu'on ne dise pas que je n'ai rien dit de nouveau ;
la disposition des matières est nouvelle".
PASCAL. Pensées XII,9.

I. Introduction

Il existe entre nous un débat sur la démontration. Débat vif, parfois âpre, à coup sûr moins futile que l'apparente querelle de mots (c'est une démonstration ! non ! ce n'est qu'une preuve !).

La démonstration nous pose problème et, avec elle, sa soeur jumelle Sainte Rigueur. Un problème bien posé est un problème résolu... à moins qu'une opinion bien formulée ne permette de poser le problème dont elle est la solution. J'en reste au fait : nous EN discutons.

Peut-être y-a-t-il une difficulté essentielle pour le Mathématicien (celui qui vit la Mathématique et la fait vivre) pris entre sa pratique et des archétypes. Mais il y a pour l'Enseignant d'autres enjeux, inconscients ou que l'on refuse de conscientiser. Réflexes de survie diraient certains.

Lorsque nous déclarons "ceci n'est pas une démonstration" (certains ajoutent "rigoureuse"... c'est à dire selon la règle) que défendons-nous ? n'est-ce pas notre pouvoir de juger (qui, à rebours, prouve notre appartenance à la classe des initiés) plus que l'Essence même des Mathématiques et un archétype universel et intemporel dont nous savons confusément... que nous ne savons rien ? n'est-ce pas une idée reçue, garante de notre confort, plus qu'une recherche de certitude ?

L'évolution de la pédagogie et de l'idéologie sous-jacente (la première imposée-acceptée, la seconde peu mise en lumière) exige de l'enseignant (celui qui transmet le savoir des signes) des révisions parfois déchirantes. Entre autres, s'il lui appartient toujours de faire acquérir des connaissances, il n'a plus à transmettre un savoir venu d'ailleurs mais à accompagner-diriger le jeune dans la construction de son savoir. L'enseignant passe du statut de prêtre-initiateur à celui de compagnon expérimenté. Cependant, rien n'est simple, la cohérence interne de ce savoir construit doit s'inscrire dans celle du savoir scientifique socialisé. L'expérience du guide est alors mise à rude épreuve : le chemin parcouru n'est pas la route balisée qu'il connaissait (ou croyait connaître) si bien. Nous voici en rase-campagne, mais nous ne marchons pas pour le seul plaisir de marcher, il y a des lieux de passage imposés. Comment puis-je les retrouver d'ici ? Comment puis-je, dans la négociation, infléchir la marche de ceux que j'accompagne, éviter au moins les impasses, alors que, inquiet, j'aurais bien envie de gagner les balises au plus court ?

Si le voyageur cherche son chemin c'est qu'il a une idée de l'étape à laquelle il veut aboutir, même s'il ne sait pas trop où il est actuellement. Il y a une tension : je doute de mon lieu, j'ai idée du lieu où je vais, comment vais-je y aller ? L'itinéraire apaise cette tension s'il est bien choisi. La route, même longue, apaise toute tension, mais elle part de là et non d'ailleurs. Hasard ou nécessité ?

L'enseignant doit réapprendre tout le paysage, tous les indices sur la piste et pour cela chercher à comprendre pourquoi et comment a été construite la route balisée, car il devient évident qu'elle a été construite. Que l'enseignant soit ou non le mieux placé pour débattre des Mathématiques, de la Démonstration, peu importe, il doit s'y risquer. Le sens même de son activité enseignante est en jeu.

II. Lignes de tension

Quelques textes proposés lors de l'atelier[1] aident à déterminer certains axes de tension. Clairaut (1765) et Poincaré (1909) distinguent, chacun à sa façon, les mathématiques coulées au moule qu'elles ont généré et l'élaboration de canalisations conduisant le commençant vers un idéal mathématique. Accord à 150 ans de distance : il y a les mathématiques et leur pédagogie. Cet accord va beaucoup plus loin : certes le débutant ne peut pas tout comprendre, tout relier (intelligere), mais, paradoxe de prime abord, le commençant ne peut pas s'approprier les commencements, bien plus, ceux-ci lui interdisent même toute compréhension.

Premier axe de tension qui oppose la démonstration, chose achevée, conforme à une norme socialement privilégiée, dite universelle et intemporelle, reliant des définitions intangibles à des théorèmes, et la démonstration acte créant des résultats en même temps qu'il élabore ses bases et ses modes d'autorégulation.

La démonstration serait alors une démarche intellectuelle (c'est-à-dire de liaison) tendant à garantir de la certitude pour apaiser une tension Doute-Opinion. Elle impose la recherche des certitudes premières (jusqu'où mon doute remonte-t-il ?) et des méthodes susceptibles d'engendrer de la certitude (quand m'avouerai-je convaincu ?).

Le second axe de tension s'inscrit entre Esprit et Matière. Clairaut pose l'abstraction comme une qualité essentielle des mathématiques dans leur achèvement. Mais d'où viennent les mathématiques ? De la corporalité et de leur utilité dans l'étude de celle-ci. La naissance des mathématiques s'inscrit dans l'étude du corporel. Les présenter dans leur abstraction c'est verrouiller l'accès à leur essence. L'attitude de Poincaré est plus prudente : le passage par le corporel n'est pas posé comme constitutif mais comme étape nécessaire pour le débutant. Si Poincaré a vécu la "crise des fondements" (Krisis = choix), pour Einstein la cause est entendue : les mathématiques sont pur produit de l'intellect, vides de sens autre que leur auto-développement, elles sont certaines de toute la certitude de notre pensée. Leur utilité dans l'étude du corporel sera celle de modèles choisis selon des critères qui ne sont pas d'ordre mathématique.

Il n'est pas nécessaire (est-il même possible ?) que nous soyions d'accord sur un statut de Droit des mathématiques, mais il importe que nous soyions conscients de décalages, très en amont de nos pédagogies, entre nous, en chacun de nous et, bien sûr, entre nous et chacun de nos élèves.

---

(1) cf. annexes I et II.

La droite de Clairaut, donnée immédiate, celle d'Euclide et sa définition un rien étonnante, celle d'Hilbert presque privée d'existence jalonnent ces décalages et un rien d'éthymologie permet de repérer cet axe de tension.

On parle volontiers d'ETRE Mathématique alors que l'on dit OBJET Physique. Double opposition : "Objet-Etre", "Physique-Mathématique" que l'on peut renforcer par "Principe-Axiome" ou "Loi-Théorème".

Si l'objet est, éthymologiquement, ce qui "se jette en travers" (diabolique a le même sens... et longtemps l'Homme a réagi par la Techné... la ruse) il n'apparaît (phénomènes) qu'en interaction avec nos sens (perception). Il est irrémédiablement lié à la Physis, la nature, le monde du changement, le temporel.

"Etre" nous renvoie directement à l'Essence, l'être participe du divin, de l'intemporel. Il n'est peut être pas sans intérêt de constater que la "langue mathématique" n'utilise que le présent (et que le verbe Etre a dû emprunter "je fus" à la racine même de Physique).

"Mathématique", quant à lui, connote un apprentissage, une initiation, et "théorème" renvoie à la contemplation. Il y a du sanctuaire (et de la sanction) en arrière-plan. La faute mathématique est un peu la chute de l'ange et nos sociétés occidentales du vingtième siècle véhiculent cette idée qui est au coeur de notre débat.

J'ignore quand le mot "loi" émerge dans le discours physicien, au sens actuel, mais il fallait une forte volonté de déceler un ordre immuable, divin, dans le chaos apparent. L'emploi systématisé de "loi physique" ne doit donc pas remonter avant le 17ème siècle, époque où le plan de Dieu, créateur de la nature est moyen d'approche du plan moral de Dieu. Il serait intéressant d'établir l'histoire des Sciences en regard de celle des Théologies et de suivre dans ce face à face la place des mathématiques, accès suprême à la réalité des idées pures, puis accès au plan physique de Dieu pour finir par peser du poids que l'on sait dans une société athée.

Est-il certain que je m'éloigne du sujet ? La mise en question de notre rôle enseignant n'est-elle pas un peu vécue comme désacralisation des mathématiques et donc de ses prêtres ; la supposée perte de rigueur n'est-elle pas désobéissance à la Loi ?

III. La définition, point final

Dans notre enseignement la définition est vécue (dirai-je "était" ?) comme point de départ et, me semble-t-il, pour deux raisons principales. D'une part les Eléments commencent manifestement par des définitions, et les Eléments fondent notre tradition même si nous ne les étudions pas en eux-mêmes. D'autre part un état d'esprit dit cartésien veut qu'avant de parler on sache de quoi l'on parle.

Sauf erreur de ma part le projet cartésien n'est pas de ne parler que de ce qui est déjà cerné mais bien de faire remonter le doute jusqu'au point ultime où il n'est plus acceptable, soit parce qu'il y a évidence, soit, plus subtilement, parce qu'il y aurait paralysie totale, suicide intellectuel. Le "cogito ergo sum" est, à mon sens, un point de non retour.

Si, forçant un peu l'éthymologie, je lis "De Finitio", "pour en finir", "pour délimiter" (le o"poi euclidien est "Borne" mais aussi "But") la définition s'inscrit dans la remontée du doute et, de ce fait, participe de la démonstration au même titre que la conclusion. La démonstration devient centrale et se développe dans deux sens. En fait, on ne peut isoler une démonstration mais un faisceau d'actes démonstratifs dont les remontées convergent vers ce qui sera définition. Les définitions sont alors réponses à une batterie de questionnements, à une problématique globale.

La ligne droite de Clairaut n'a pas à être définie, il y a idée claire, objet évident, immédiat. La problématique de Clairaut, dans ses Eléments, porte sur la mesure numérisée, sur le "comment mesurer". Il reconnait à la droite d'être le plus court chemin de A à B non comme définition mais comme propriété fondamentale répondant à un questionnement sur la distance.

La ligne droite d'Euclide est autre, elle exige définition et même le quasi enchaînement de quatre définitions(2) pour, finalement, n'être guère opérante : "une ligne droite est une ligne également placée entre ses points". En aucun cas nous ne pouvons partir de là pour construire. Nous pourrions (aurions-nous raison ?) accuser un élève de verbiage, mais Euclide ! Force est de reconnaître qu'il répond ainsi à un questionnement qui n'est pas énoncé, qui est sans doute la trace de vastes controverses. Cette définition est témoignage d'interrogation, presqu'aveu d'impuissance.

Parmi les enjeux on peut entrevoir la notion de grandeurs homogènes (longueur sans largeur), la particularisation du rectiligne et avec elle la notion de direction, j'aurais envie, pour agacer, de dire que la notion d'angle est déjà interrogée (comparer la définition 8 avec la tangente chez Roberval : direction du mouvement). Peu importe, il y a définition parce qu'il y a doute. Les demandes 1 et 2 (disons que nous savons ce qui est droit entre deux points et que nous savons conserver la direction proposée) achèvent la remontée du doute. Euclide nous place au point de rupture entre l'impossible, et désiré, contact avec la réalité des idées pures et une encore possible perception. Doutons un peu plus et tout bascule dans le vide. Il appartiendra aux axiomaticiens puis aux formalistes des 19ème et 20ème siècles d'accepter-désirer le saut, de faire remonter le doute au-delà du point d'équilibre euclidien. Ils devront vider les notions d'existence et de vérité au profit du seul discours déductif puis mettre celui-ci et sa logique en question. Hermann Günther GRASSMANN indique la ligne de rupture (Ausdehnungslehre - 1844) en disant qu'il faut écarter la géométrie de la catégorie des Sciences Formelles parce qu'elle se réfère à une réalité donnée, l'espace.

IV. Du questionnement

Il n'y a rien à définir lorsqu'il y a idée claire, il n'y a rien à démontrer s'il n'y a aucune tension Doute-Opinion.

Considérez un segment AB, une droite (d) et sur icelle un point C. Construisez sur (d) un segment CD égal à AB. C'est fait ? Je crois même que certains petits malins ont deux solutions, c'est ça qui est profond ! Avez-vous pris une ficelle comme pourrait le conseiller Clairaut, un double-décimètre parce qu'égalité sous-entend même mesure ou, pour faire plus euclidien, un compas ? Aucun doute ne vous a effleuré et vous n'avez rien eu à démontrer.

La solution d'Euclide exige le tracé de 5 cercles. Pédantisme ? Désordre ? Labyrinthe protégeant l'accès du sanctuaire ? Nos élèves ne se posent-ils pas ces questions en suivant (terme lourd de sens) nos cours ?

---

(2) cf. annexe I.

Pourquoi cet "exercice" constitue-t-il la proposition 3 d'Euclide, avec enchaînement 3, 2, 1 ? Pourquoi devient-il chez Hilbert l'axiome III-1 ? Quelles tensions à apaiser ?

Suivons Euclide dans sa démonstration en essayant de dégager la ligne Doute-Opinion qui l'exige.

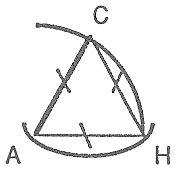

Fig. 1

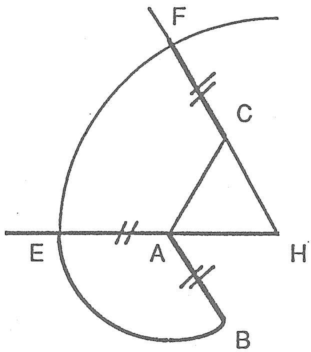

Fig. 2

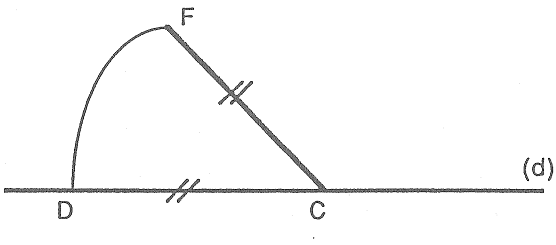

Fig. 3

Pour "porter" le segment AB sur (d) à partir de C, Euclide commence par porter AB à partir de C dans une direction CH qu'il ne maîtrise pas a priori car elle s'impose par la construction même (proposition 2)[3] ... il devra alors (proposition 3)[4] réorienter le segment. Mais la proposition 2 repose sur la construction d'un triangle équilatéral, véritable plaque tournante. Cette construction constitue la proposition 1 et repose tout

---

[3] cf. annexe I.

[4] cf. annexe I.

simplement sur l'intersection de deux cercles centrés aux extrémités d'un segment donné en grandeur et position. Tout simplement ? Ne disposons-nous pas de la définition du cercle (Déf. 15) et de sa constructibilité-existence (demande 3) ?

Mais alors la construction de la proposition 3 est très onéreuse, beaucoup trop, à moins que nous n'ayons cru disposer de moyens que nous n'avions pas. Les Demandes d'Euclide sont d'ailleurs étranges. Demande 1 : conduire une ligne droite entre deux points ; Demande 3 : décrire un cercle de centre et de rayon donné. "Quelle humilité cher Euclide ! nous avons tous une règle et un compas de bonne qualité"... " et quels sont donc vos critères de qualité ?".

La géométrie d'Euclide n'est pas celle de la règle et du compas mais celle de la rectilignité et de la norme du plan et pour celle-ci la remontée du doute euclidien est extrême, la proposition 3 donne du sens à la demande 3. Le pseudo-compas euclidien est local : si O et le segment OA, d'origine o, sont donnés accepter-vous qu'un tracé continu donne tous les points M tels que OM = OA ? Si oui je me charge du transport à travers le plan mais je ne peux faire plus.

Les démonstrations se déploient autant en amont qu'en aval des définitions et demandes qui essaient de dire ce qui n'est pas prononçable.

"Trois points O, A, B déterminent le plan, je suis en droit de poser a priori OA = OB quels que soient ces points, et même, si je veux, je peux décider que l'angle O se nomme droit. Comment, dans une direction quelconque trouver C tel que OC = OA = OB ?" Quiconque a osé se poser semblable question comprendra qu'Euclide fasse la demande 3, qu'il arrête le doute au moment où celui-ci anéantirait toute possibilité mathématique autre que purement axiomatique.

Quels sont les enjeux ? Il y a le report d'un segment certes, mais derrière lui la notion d'égalité de longueurs c'est-à-dire la notion même de longueur et par là de segment car le segment n'est pas longueur mais porte en lui de la longueur. Et qui penserait "longueur" s'il n'y avait rien d'autre, par exemple des surfaces ?

Nous sommes au coeur de la problématique euclidienne : la notion de grandeur et celle de grandeurs homogènes.

Les "notions communes" portées à la suite des définitions et demandes ne sont pas là uniquement pour rappeler des règles telles que la transitivité de l'égalité. Elles disent aussi, par leur silence, que les grandeurs sont nécessairement comparables et additives, du moins celles qui sont homogènes. Les notions 8 et 9 (deux grandeurs qui s'adaptent entre elles sont égales. Le tout est plus grand que la partie) sont, à mes yeux, tout autre chose que banalités. Elles essaient de dire l'homogénéïté des grandeurs. A cet endroit et, quitte à irriter, seulement à cet endroit, la superposabilité joue tout son rôle. Mais elle rythme tout le corpus euclidien. Des grandeurs homogènes ne sont pas des grandeurs superposables mais, cependant, des grandeurs pour lesquelles la question (étrange réponse) de la superposition a du sens. Euclide sait très bien que cette homogénéïté par possible superposition porte en elle-même questionnement dès l'aire des figures planes qui se débordent mutuellement (que dire des solides pour lesquels l'impossibilité "physique" interdirait tout comparaison ?). Il sait aussi qu'elle ne dit pas tout ce qu'il y aurait à dire : le segment de droite n'est pas superposable à l'arc de cercle, on perçoit cependant une possible comparaison. Les définitions de la ligne et de la surface au livre I, du solide au livre XI effectuent ce dépassement en introduisant longueur, largeur et profondeur, mais Euclide ne compare jamais directement du rectiligne et du circulaire, le dépassement mentionné dans les définitions n'opère pas. Seule joue la superposabilité, devenue idéelle à travers les démonstrations. La problématique des grandeurs homogènes exige de transcender la notion première de superposabilité qui en est le fondement archaïque. Cet archaïsme n'affleure qu'en l'essentielle proposition (4 ; I) sur laquelle nous reviendrons (et plus ou moins en (8, I)...).

La nécessité de la proposition 3 apparaît : il s'agit, dès la grandeur la plus simple, le segment de droite, de vider la superposabilité de toute matérialité. Obstacle infranchissable si, comme Euclide, on veut conserver du sens, du contenu, à la superposabilité. La demande 3, possibilité du report de OA autour de O, marque le point extrême de la remontée.

Pour le report de OA en CD nous trancherions par translation, donc par parallélisme. Mais alors l'infini entre en jeu, Euclide vient de concéder la demande 3, il refuse de mettre en oeuvre la demande 5. Ceux qui ont voulu définir le parallélisme par équidistance étaient hors de la problématique euclidienne : définir l'équidistance.

La solution euclidienne passe par la construction du triangle équilatéral (proposition 1) et par "enjambements" de cercles -cercles abstraits, "jauges" de distance-. Mais nous critiquons la proposition 1 : pouquoi les cercles (A ; AB) et (B ; BA) se coupent-ils ? Et nous parlons d'une Géométrie des figures oubliant que celles-ci sont purement idéelles sauf en ce qui concerne la topologie. Il n'y a chez Euclide pratiquement aucun questionnement sur la topologie, en tous cas aucun questionnement global en géométrie. Non question, non réponse. L'évidence joue, la figure devient prégnante et véhicule de l'information. Pouvons-nous oublier que pour les pionniers du concept de fonction la continuité est naturelle ?

Pour résumer :

Il n'y a pas plus de "bonnes" démonstrations que de "bonnes" définitions hors de la problématique qui les génère. La structure même des démonstrations et leur enchaînement sont contenus dans le questionnement et se déploient avec lui. Le rôle de l'enseignant ne peut être de répondre a priori (à des non-questions) mais bien de mettre en lumière une problématique, même lors de séquences magistrales.

V. Une lecture à risque

Le livre I des Eléments et, par là, presque tout l'édifice, repose sur les propositions 1 et 4. Nous avons longuement parlé de la première, risquons une lecture de la seconde dans la seule perspective de la problématique.

Remarquons que, plus encore que la proposition 1, la proposition 4 a donné lieu à critique. Signalons aussi que les propositions 1, 2 et 3 sont des problèmes de construction (conclus par "ce qu'il fallait faire") et qu'à ce titre elles sont garantes d'existence, au contraire de la proposition 4, théorème hypothético-déductif (conclu par "ce qu'il fallait démontrer").

Dès la proposition 3 nous disposons du report général du segment (axiome III,1 de Hilbert). Il faut attendre la proposition 23 pour obtenir le report général des angles (axiome III,4 de Hilbert) et cette proposition met en jeu 17 des propositions antérieures dont les propositions 1, 2, 3 et bien sûr la proposition 4.

Le trouble d'Euclide est lié à son sens de l'équilibre, il ne peut charger la perception, le contenu, d'un coefficient nul mais il minimalise ce coefficient.

L'angle de Clairaut est, comme celui d'Euclide, inclinaison mutuelle, c'est-à-dire, a priori, une relation entre lignes, un "rapport" indépendant des longueurs. Là s'arrête la ressemblance. L'angle de Clairaut a du corps, il se reporte immédiatement grâce à un appareil (sorte de compas ou d'équerre articulée). L'angle d'Hilbert devient paire de demi-droites et s'il peut se reporter c'est axiomatiquement, toute la signification de ce report est dans le discours qui le fonde.

Les définitions 10, 11 et 12 d'Euclide font de l'angle rectiligne une grandeur en ce sens que deux angles sont susceptibles d'égalité et de comparaison. La sommation par concaténation en découle "sans question" chez Euclide. Remarquons que les définitions mentionnées, comme la définition 15 du cercle, sont parmi les rares définitions (une vingtaine sur quelques cent quarante) qui utilisent les termes "égalité" ou "plus grand que".

L'angle euclidien est donc grandeur mais, au contraire du segment, il n'est pas figure ("ce qui est compris entre une ou plusieurs limites"... la limite étant "ce qui est l'extrémité de quelque chose"). Il traîne dans l'angle sinon de l'infini du moins de l'indéfini. Comment mettre en oeuvre la superposabilité ?

La demande 4 (tous les angles droits sont égaux) n'est, à ma connaissance, jamais utilisée. A-t-elle quelque lien secret avec la demande 5 sur les parallèles ? Est-elle la trace d'une autre approche du report de l'angle ?

La proposition 4 annonce l'égalité de deux triangles (aires), de tous leurs angles, de tous leurs côtés dès que AB = DE et AC = DF et BAC = EDF. L'angle de l'arpenteur, de l'astronome, est lié au baton de Jacob c'est-à-dire à deux longueurs et à un angle droit. A l'angle droit près, Euclide est contraint d'en passer par là.

On sait porter sur AB, au besoin prolongée, un segment AB' = DE (du bon côté, topologie, silence) on a alors B' = B sinon la notion 9 donnerait AB' < AB ou AB' > AB. Mais nous ne savons pas construire l'angle BAC' = EDF. Ici joue un véritable transport conservant angles et longueurs, l'archéologie des grandeurs homogènes affleure un instant. La notion 8 fournit ensuite les égalités attendues.

Jacques PELETIER du Mans protestera : cette proposition 4 est une demande ou alors réduisons les démonstrations en utilisant systématiquement les transports ! Euclide ne le fait pas. L'idée pure de l'angle, dégagée des longueurs, exigeait une introuvable demande faisant le pendant de la demande 3 pour les segments. Euclide opère un repli par lequel il tente de sauver, de retrouver, l'essence de l'angle.

Or, la proposition 4 lance Euclide sur une autre piste. Il n'oublie pas l'objectif mais le questionnement se ramifie. Déjà il a fallu associer longueurs et angles, et voilà que la proposition parle aussi d'aires. Trois grandeurs, pourtant non homogènes, semblent liées. Il devient nécessaire, désirable, de savoir jusqu'où elles sont dépendantes. Et peut-être est-ce l'interrogation première, liée aux définitions 8 et 9 de l'angle "rapport" de lignes.

Si le questionnement prioritaire était resté le report général de l'angle, nous n'avions pas besoin de tant d'intermédiaires : en n'utilisant que des démonstrations d'Euclide nous pouvions l'avoir dès une proposition qui aurait été la septième à condition d'utiliser la demande 4 (les propositions en jeu seraient 1, 2, 3, 4, 5, 11 et demande 4). Mais la proposition 11 (mener de A une perpendiculaire à une droite passant par A) s'appuie sur les propositions 1, 2 et 3 relatives aux segments. Longueurs et angles sont imbriqués.

Je sais ma lecture risquée, mais il me paraît clair que c'est le questionnement d'Euclide (je dis Euclide, j'entends un nombre certain de ses contemporains et prédecesseurs) qui structure le livre I, ses démonstrations et leur enchaînement. On voudrait bien savoir pourquoi on a dû concéder la proposition 4 et, en particulier, Euclide explore le lien angle-longueur, lien entre égalités des uns et des autres, lien entre l'ordre, lien entre angles et alignement de points (rectilignité) ou direciton (parallélisme).

Pour terminer : une question vraiment ouverte, c'est-à-dire que je n'ai pas de réponse plausible... mais je ne suis pas mort. Pourquoi Euclide a-t-il peur de l'angle droit ? La demande 4 est inutilisée, le carré n'apparaît que dans les trois dernières propositions (46, 47 ou Pythagore, 48, sa réciproque) du livre I. L'angle droit est pourtant l'angle le plus "biologique" qui soit. La diagonale du carré et les irrationnels sont-ils en cause ? N'est-ce pas, après tout, ce problème qui, dans le "clan" euclidien donne le pas à la géométrie qui contient le continu ?

VI. Jirikuru mèn o mèn ji ro, a te ke bama ye (dicton Bambara)

Euclide, Clairaut, Hilbert... même combat ? Quel progrès ? Chacun d'eux rythme son ouvrage selon son questionnement, définit ce que sa problématique exige, structure démonstrations et enchaînements de démonstrations selon la dynamique engendrée par sa recherche, pas arbitrairement, pas par hasard, mais par nécessité d'apaiser une tension Doute-Opinion.

Devons-nous craindre dans nos classes de ne pas avoir défini ceci ou celà tant qu'aucune question ne se pose, d'avoir accepté ce qui semble évident ? Sont-ce là bonnes mathématiques ?... mais sommes nous sûrs de savoir ce que sont les bonnes mathématiques ?

Nous ne minons pas le terrain en abandonnant tels ou tels définitions ou théorèmes si nous saisissons au vol l'opinion de l'un, le doute de l'autre, si nous créons un doute réel ou si nous poussons à une opinion dont nous savons qu'elle sera vite douteuse car nous créons ainsi les conditons pour que nos élèves mettent en acte des mathématiques. Il n'y a pas de niveau pour celà, pas de section privilégiée.

Un bain de démonstrations magistrales ne fait pas de mal à un commençant, il n'en fait pas quelqu'un qui a soif de démontrer, qui sait ce qu'il démontre et pourquoi il le démontre.

"Le tronc d'arbre a beau rester longtemps dans le fleuve, il ne devient pas crocodile".

P.S. : A tout hasard : je ne dis pas que toute séquence magistrale, toute définiton... soit ridicule, néfaste et à proscrire.

ANNEXE I

Extrait des Eléments d'Euclide - Premier Livre

DÉFINITIONS.

1. Le point est ce dont la partie est nulle.
2. Une ligne est une longueur sans largeur.
3. Les extrémités d'une ligne sont des points.
4. La ligne droite est celle qui est également placée entre ses points.
5. Une surface est ce qui a seulement longueur et largeur.
6. Les extrémités d'une surface sont des lignes.
7. La surface plane est celle qui est également placée entre ses droites.
8. Un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction.
9. Lorsque les lignes, qui comprennent ledit angle, sont des droites, l'angle se nomme rectiligne.
10. Lorsqu'une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au-dessus est dite perpendiculaire à celle sur laquelle elle est placée.
11. L'angle obtus est celui qui est plus grand qu'un droit.
12. L'angle aigu est celui qui est plus petit qu'un droit.
13. On appèle limite ce qui est l'extrémité de quelque chose.
14. Une figure est ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites.
15. Un cercle est une figure plane, comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence; toutes les droites, menées à la circonférence d'un des points placés dans cette figure, étant égales entre elles.
16. Ce point se nomme le centre du cercle.
17. Le diamètre du cercle est une droite menée par le centre, et terminée de part et d'autre par la circonférence du cercle : le diamètre partage le cercle en deux parties égales.
18. Un demi-cercle est la figure comprise par le diamètre, et la portion de la circonférence, soutendue par le diamètre.

DEMANDES.

1. Conduire une droite d'un point quelconque à un point quelconque.
2. Prolonger indéfiniment, selon sa direction, une droite finie.
3. D'un point quelconque, et avec un intervalle quelconque, décrire une circonférence de cercle.
4. Tous les angles droits sont égaux entre eux.
5. Si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits.
6. Deux droites ne renferment point un espace.

LE PREMIER LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

NOTIONS COMMUNES.

1. Les grandeurs égales à une même grandeur, sont égales entre elles.
2. Si à des grandeurs égales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront égaux.
3. Si de grandeurs égales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront égaux.
4. Si à des grandeurs inégales, on ajoute des grandeurs égales, les touts seront inégaux.
5. Si de grandeurs inégales, on retranche des grandeurs égales, les restes seront inégaux.
6. Les grandeurs, qui sont doubles d'une même grandeur, sont égales entre elles.
7. Les grandeurs, qui sont les moitiés d'une même grandeur, sont égales entre elles.
8. Les grandeurs, qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles.
9. Le tout est plus grand que la partie.

PROPOSITION PREMIÈRE.

Sur une droite donnée et finie, construire un triangle équilatéral.

PROPOSITION II.

A un point donné, placer une droite égale à une droite donnée.

PROPOSITION III.

Deux droites inégales étant données, retrancher de la plus grande une droite égale à la plus petite.

PROPOSITION IV.

Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés égaux sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restans, soutendus par les côtés égaux, seront égaux chacun à chacun.

ANNEXE II

Extrait de Science et méthode de Poincaré (1906) :

Puisque le mot comprendre a plusieurs sens, les définitions qui seront le mieux comprises des uns ne seront pas celles qui conviendront aux autres. Nous avons celles qui cherchent à faire naître une image, et celles où l'on se borne à combiner des formes vides, parfaitement intelligibles, mais purement intelligibles, que l'abstraction a privées de toute matière. [...]

Telles sont aussi les définitions que vous trouvez dans un livre justement admiré et bien des fois couronné, les "Grundlagen der Geometrie" de Hilbert. Voyons en effet comment il débute : *Pensons trois systèmes de CHOSES que nous appellerons points, droites et plans*. Que sont ces "choses"? nous ne le savons pas, et nous n'avons pas à le savoir ; il serait même fâcheux que nous cherchions à le savoir ; tout ce que nous avons le droit d'en savoir, c'est ce que nous en apprennent les axiomes, celui-ci par exemple : *Deux points différents déterminent toujours une droite*, qui est suivi de ce commentaire : *au lieu de déterminent, nous pouvons dire que la droite passe par ces deux points, ou qu'elle joint ces deux points, ou que les deux points sont situés sur la droite*. Ainsi, "être situé sur une droite" est simplement défini comme synonyme de "déterminer une droite". Voilà un livre dont je pense beaucoup de bien, mais que je ne recommanderais pas à un lycéen. Au reste, je pourrais le faire sans crainte, il ne pousserait pas la lecture bien loin.

J'ai pris des exemples extrêmes et aucun maître ne pourrait songer à aller aussi loin. Mais, même en restant bien en deçà de pareils modèles, ne s'expose-t-il pas déjà au même danger ?

Nous sommes dans une classe de 4ème ; le professeur dicte : le cercle est le lieu des points du plan qui sont à la même distance d'un point intérieur appelé centre. Le bon élève écrit cette phrase sur son cahier ; le mauvais élève y dessine des bonshommes ; mais ni l'un ni l'autre n'ont compris ; alors le professeur prend la craie et trace un cercle sur le tableau. "Ah ! pensent les élèves, que ne disait-il tout de suite : un cercle c'est un rond, nous aurions compris. "Sans doute, c'est le professeur qui a raison. La définition des élèves n'aurait rien valu, puisqu'elle n'aurait pu servir à aucune démonstration, et surtout puisqu'elle n'aurait pu leur donner la salutaire habitude d'analyser leurs conceptions. Mais il faudrait leur montrer qu'ils ne comprennent pas ce qu'ils croient comprendre, les amener à se rendre compte de la grossièreté de leur concept primitif, à désirer d'eux-mêmes qu'on l'épure et le dégrossisse.