LE MYSTERE DE LA PYRAMIDE
ou : le volume de la pyramide en 1ères S d'après les *Eléments de Géométrie* de Legendre.

Michèle GREGOIRE

Le tétraèdre, ou pyramide triangulaire, est le solide élémentaire à partir duquel on peut construire tous les polyèdres. Calculer le volume d'une pyramide est donc un problème très ancien et, bien que de formulation simple, il nécessite le recours à une méthode de nature infinitésimale. Regarder diverses démonstrations de ce calcul au fil des âges est l'occasion d'un parcours à travers l' histoire et la préhistoire du calcul infinitésimal.

Il est intéressant pour un enseignant de lycée de suivre quelques étapes de ce parcours et de montrer aux élèves comment la construction d'une notion et des outils théoriques appropriés peut nécessiter de nombreuses étapes.

C'est un des objectifs du groupe M: A.T.H. de l'IREM de Paris VII.

La lecture de deux démonstrations différentes de A. M. Legendre dans ses *Eléments de Géométrie* m'a paru éclairante à cet égard. Pourquoi deux démonstrations tirées des *Eléments* de Legendre ? Cet ouvrage, qui eut une énorme influence sur l'enseignement scientifique au 19e siècle, connut 21 éditions successives de 1794 à 1873; Legendre, jusqu'à sa mort en 1833, ne cessa de les remanier.Les deux démonstrations considérées reprennent des aspects de la démonstration qu'on trouve dans les *Eléments* d'Euclide, la plus ancienne qui nous soit transmise. Les *Eléments de Géométrie* de Legendre en général témoignent d'un retour à la rigueur euclidienne mais également d'un souci de simplicité et de clarté.

La première démonstration (qu'on trouve dans les éditions antérieures à la 12^{e}) (1) reprend le découpage de la pyramide en prismes et petites pyramides des *Eléments* d'Euclide, l'usage de la méthode d'exhaustion et d'un double raisonnement par l'absurde pour éviter le recours à l'infini.

La démonstration de la 12^{e} édition (1823) et des suivantes reprend d'autres aspects de la méthode d'Euclide mais abandonne sa décomposition de la pyramide pour adopter la décomposition en tranches parallèles. Cette décomposition est inspirée de la Géométrie des Indivisibles qui influença la plupart des démonstrations des ouvrages du 17^{e} et du 18^{e} siècle ; on la trouve aussi dans l'Encyclopédie de d'Alembert. Mais en considérant des tranches prismatiques dont l'épaisseur et le nombre sont finis, Legendre s'oppose aux méthodes des 17^{e} et du 18^{e} siècle comme par exemple celle des *Eléments de Géométrie* de Clairaut (1741).

Après avoir brièvement commenté la nécessité du recours aux méthodes "infinitésimales" (§ I), je propose donc :

- de suivre les principales étapes de la démonstration des *Eléments* d'Euclide. (§ II)
- de lire en détail la démonstration des premières éditions des *Eléments de Géométrie* de Legendre, qui a été étudiée par mes élèves en $1^{ère}$S. (§ III)
- d'étudier la démonstration de la 12^{e} édition du même ouvrage.(§ IV)
- de regarder la démonstration *Eléments de Géométrie* de Clairaut (1741) comme un exemple des démonstrations influencées par la Géométrie des indivisibles. (§ V)
- de présenter l'utilisation pédagogique de cette étude et les expérimentations en classes de 1ère et terminale scientifiques. (§ VI)

I. Peut-on faire l'économie du calcul infinitésimal ?

Les formules donnant les aires de différents polygones s'établissent avec des outils simples. Euclide déjà avec la "méthode des aires" basée sur l'équivalence de deux triangles qui ont même base et même hauteur a pu calculer simplement l'aire d'un parallélogramme, puis de tout polygone. Mais cette méthode ne se généralise pas en dimension 3. Pour établir l'équivalence de 2 pyramides de même base et même hauteur et, pour calculer le volume d'un polyèdre simple comme une pyramide triangulaire, on ne peut éviter une méthode infinitésimale. Cela n'est pas évident d'emblée : c'est le troisième des problèmes que posa Hilbert au Congrès de Mathématiques de Paris en 1900 (2). Il demande : " Peut-on appliquer la méthode de décomposition en polyèdres pour le calcul du volume d'un tétraèdre ?". La même année M. Dehn, étudiant de Hilbert montra qu'on ne peut décomposer un cube et un tétraèdre régulier de même volume en un nombre fini de polyèdres deux à deux identiques[3]. On ne peut faire, pour ce problème, l'économie du calcul infinitésimal.

II. La démonstration d'Euclide.

Dans l'atelier, nous avons suivi des extraits de la démonstration (voir Annexe 1), mais je ne vais ici qu'en reprendre les principales étapes. Cette démonstration se trouve dans les propositions III à VII du Livre XII des *Eléments*.

1) **La proposition III** présente le découpage de la pyramide triangulaire que je nomme Π en deux petites pyramides isométriques (Euclide dit égales et semblables entre elles) et semblables à Π et en deux prismes égaux. (le mot égal signifie ici "de même volume") (cf figure 1).

> a. Pour démontrer que les "petites pyramides" π et π' sont égales et semblables entre elles, Euclide montre que leurs faces triangulaires sont deux à deux semblables et de même aire (il s'appuie sur la définition 10 du livre XI) [9]. De même chaque "petite pyramide" ayant des faces semblables aux faces de la "grande pyramide" Π, est semblable à Π.

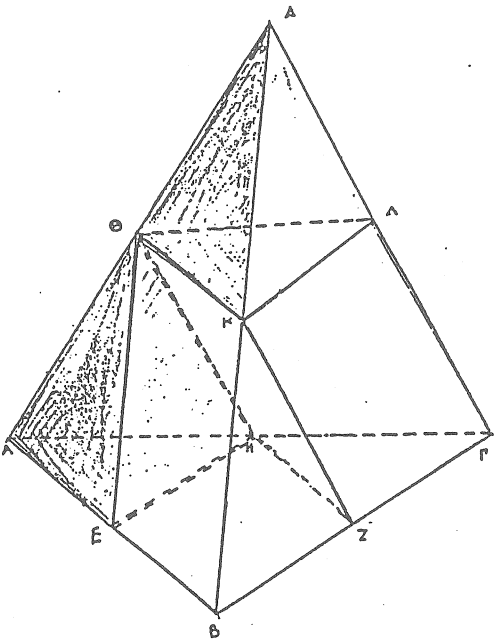


figure 1

b. Pour démontrer que les deux prismes, que je nomme P_1 et P_2 ont même volume, Euclide utilise la proposition 40 du livre XI, qui énonce à peu près : deux prismes de même hauteur (4), dont l'un (P_1) à pour base un parallélogramme d'une aire double du triangle base de l'autre prisme (P_2) , ont même volume. (cf fig 2).

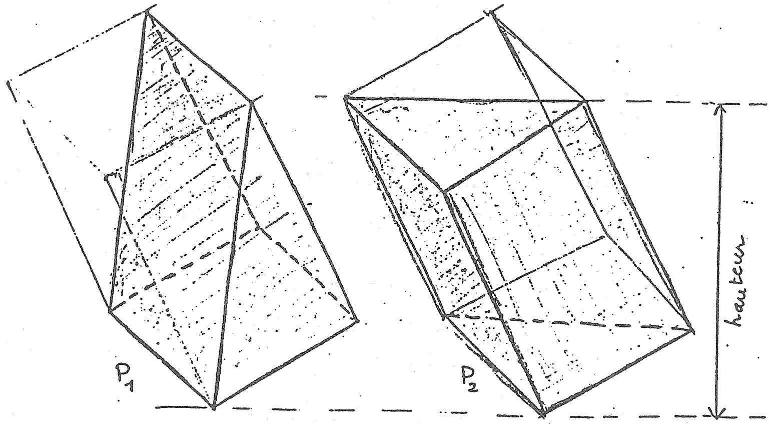


figure 2

Il suffit de compléter P1 et P2 pour obtenir 2 parallélépipèdes de même hauteur et dont les bases sont 2 parallélogrammes de même aire

Enfin, Euclide démontre la deuxième partie de la proposition III : chaque prisme ainsi découpé dans Π est plus grand que chacune des petites pyramides (5); donc "la somme" des deux prismes est plus grande que la moitié de la pyramide Π. (ce résultat permettra de mettre en oeuvre la méthode d'exhaustion dans la démonstration de la proposition V; voir 3) a)).

2) La proposition IV énonce que si on répète le même nombre de fois le découpage en prismes et petites pyramides de deux pyramides Π et Π' de même hauteur, (cf fig.3) on obtiendra le même nombre de prismes, dans chacune des deux pyramides Π et Π' et le rapport des sommes des volumes des prismes de Π et Π' ainsi obtenus est égal au rapport des aires B et B' des bases de Π et Π'. On peut écrire :

$$\frac{\Sigma \text{ prismes de } \Pi}{\Sigma \text{ prismes de } \Pi'} = \frac{B}{B'}$$

3) Dans la proposition V, noeud de la démonstration, Euclide montre que les volumes V et V' de deux pyramides triangulaires Π et Π' de même hauteur sont proportionnels aux aires B et B' de leurs bases

($\frac{V}{V'} = \frac{B}{B'}$). Son raisonnement procède par exhaustion et double réduction à l'absurde : (c'est la méthode apagogique des Grecs)

a) l'hypothèse du premier raisonnement par l'absurde équivaut à $\frac{V}{V'} < \frac{B}{B'}$: Euclide suppose qu'un solide de volume X plus petit que V' vérifie $\frac{V}{X} = \frac{B}{B'}$ (avec $X < V'$). Il découpe Π' en deux prismes et deux pyramides, puis divise les nouvelles pyramides en deux prismes et deux pyramides et ainsi de suite ...(cf. fig.3)

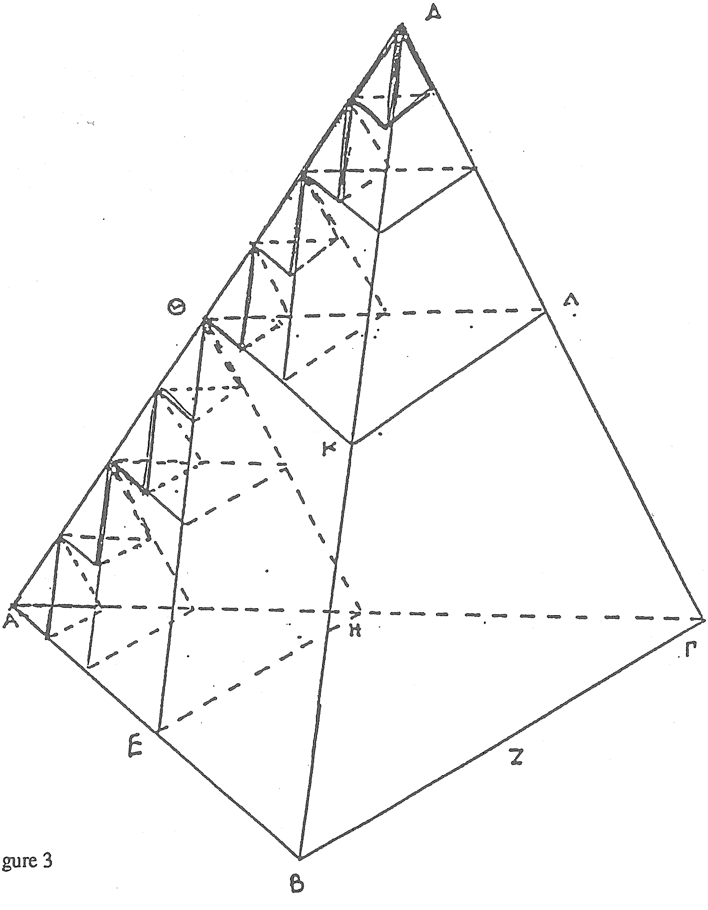


figure 3

A chaque étape, le volume des pyramides ainsi obtenues est inférieur à la moitié du volume des pyramides de l'étape précédente (cf 2eme partie de la proposition III) et, en vertu de la proposition I du livre X (6), à une certaine étape, le volume de la réunion des petites pyramides qui, d'autre part est égal à $V' - \Sigma$ prismes de Π', est inférieur à la grandeur $V' - X$. Donc le volume restant dans la pyramide, c'est à dire celui des prismes construits à l'intérieur de la pyramide Π', que je note Σ prismes de Π', est supérieur au volume X. On a l'inégalité :

(i) Σ prismes de $\Pi' > X$. Si on effectue le même découpage de la pyramide Π en prismes et pyramides, on obtient, grâce à la proposition IV ci-dessus, et à l'hypothèse du raisonnement par l'absurde :

$$\frac{\Sigma \text{ prismes de } \Pi}{\Sigma \text{ prismes de } \Pi'} = \frac{B}{B'} = \frac{V}{X}$$

donc $$\frac{\Sigma \text{ prismes de } \Pi}{V} = \frac{\Sigma \text{ prismes de } \Pi'}{X}$$

Les prismes de Π sont inclus dans Π, donc Σ prismes de $\Pi > V$; on obtient aussi l'inégalité :

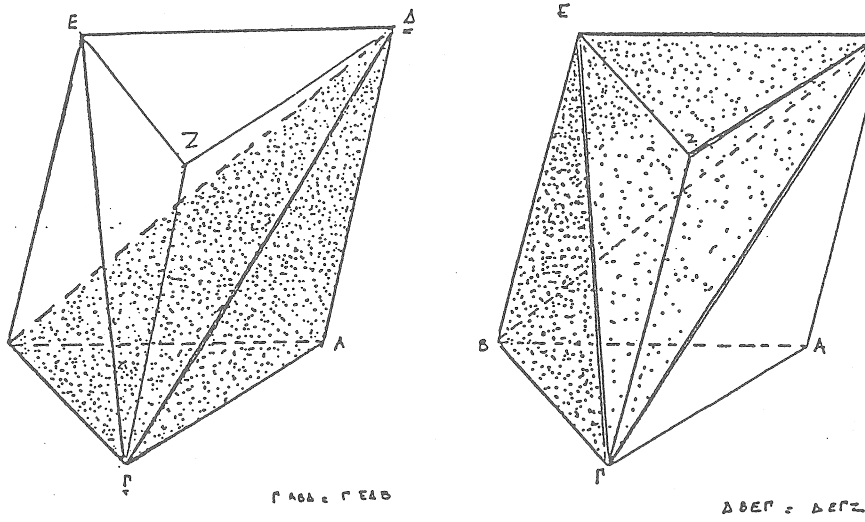
(i') Σ prismes de $\Pi' < X$, en contradiction avec l'inégalité (i).

b) L'hypothèse du deuxième raisonnement par l'absurde équivaut à $\frac{V}{V'} > \frac{B}{B'}$; Euclide suppose l'existence d'un solide de volume X plus grand que V vérifiant $\frac{X}{V} = \frac{B}{B'}$, il déduit qu'il existe un solide du volume W tel que $\frac{B}{B'} = \frac{X}{V} = \frac{V'}{W}$ et $W < V$. On est ramené à la même situation que plus haut (a), une fois échangés les rôles de Π et Π'. Les hypothèses $\frac{V}{V'} < \frac{B}{B'}$ et $\frac{V}{V'} > \frac{B}{B'}$ étant toutes deux à rejeter, on a bien $\frac{V}{V'} = \frac{B}{B'}$

4) Dans la proposition VII, Euclide montre qu'un prisme à base triangulaire peut-être décomposé en trois pyramides de même volume ; les comparant deux à deux il montre qu'elles ont, deux à deux, même hauteur et des bases d'aires égales.(cf fig. 4)

Le volume d'une pyramide à base triangulaire est donc le tiers du volume du prisme de même base et de même hauteur (7).

figure 4



les 2 pyramides ont même hauteur et pour bases les 2 moitiés du parallélogramme ABED

III. Une démonstration de Legendre.

Je vais présenter maintenant la démonstration d'Adrien-Marie Legendre dans une édition antérieure à la 12ème, des *Eléments de Géométrie;* (livre VI, propositions XVI et XVII; voir annexe 2). Elle s'inspire de celle d'Euclide, tout en réduisant le nombre d'étapes(8).

1) Dans la proposition XVI, Legendre reprend le découpage, identique à celui des *Eléments* d'Euclide, d'une pyramide Π, de base B et de hauteur h, en deux prismes de même volume (il dit "équivalents") et deux pyramides égales π et π '.

· Chacun des deux prismes p et p' est d'une manière différente, la moitié du parallélépipède GEFHCIYY (cf fig. 5)

. Les deux pyramides π et π ' sont égales car on peut "opérer leur superposition" : les faces BEG et EID d'une part, BEI et SEF d'autre part sont égales et "l'inclinaison des plans" ,dans l'une et l'autre pyramide, est la même. On voit apparaître la discussion critique que Legendre introduira à la 14ème édition, quant aux procédés utilisés par Euclide pour montrer l'égalité et la similitude de deux solides, qu'Euclide a précisé par la définition 10 du Livre XI [9].

Ensuite le raisonnement de Legendre s'éloigne de celui d'Euclide. De la proposition XVI, Legendre déduit deux corollaires :

. Corollaire I : Le volume V de la pyramide Π, est supérieur à $\frac{1}{4}$ Bh car il est supérieur au volume de la réunion des deux prismes p et p' qui ont chacun pour volume $\frac{1}{8}$ Bh.

Corollaire II : Le volume V de la pyramide est inférieur à $\frac{1}{2}$ Bh : chacun des deux prismes p et p' contient une pyramide égale à chacune des deux "petite pyramides" π et π'. V est donc inférieur au volume de quatre prismes tels que p et p' donc à $4 \times \frac{1}{8}$ Bh.

2) La proposition XVII établit alors la formule $v = \frac{1}{3}$ Bh, sans comparer, comme Euclide, les volumes de deux pyramides de même hauteur. Son raisonnement est dans la lignée des raisonnement par exhaustion, mais la démarche est différente de celle d'Euclide :

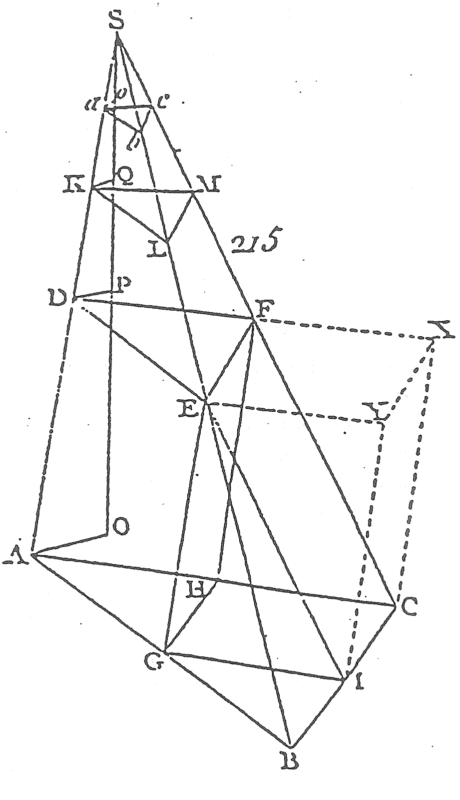


Figure 5

a) supposant d'abord $V > \frac{1}{3}Bh$, il pose $V = h(\frac{1}{3}B+M)$ avec M positif. Effectuant le découpage de la pyramide (cf. fig. 5), il calcule le volume v(SDEF), d'une des "petites pyramides" : v(SDEF) est égal au produit de sa hauteur SP par la somme du tiers de l'aire DEF de sa base et de la *même quantité M:*

$v(SDEF) = SP(\frac{1}{3}DEF + M)$. Recommençant ainsi le découpage des pyramides obtenues au fur et à mesure, il obtient une suite de pyramides dont les côtés décroissent en progression (géométrique) de raison $\frac{1}{2}$ et dont les aires des bases décroissent en progression de raison $\frac{1}{4}$ mais dont les volumes se calculent toujours avec la formule $v=h(\frac{1}{3}B+M)$; le nombre M reste le même à chaque étape. Dans cette suite de pyramides l'une d'elle Sabc de hauteur SP, a une base d'aire abc inférieure à 6M ; on a donc $\frac{1}{3}abc + M > \frac{1}{2}abc$ et le volume de Sabc vérifie :

$v(Sabc) = Sp(\frac{1}{3}abc + M) > \frac{1}{2}Sp \times abc$

Ce résultat contredit le corollaire II de la proposition XVI : "le (volume) d'une pyramide est moindre que la moitié du produit de sa base par sa hauteur".

b) supposant ensuite $V < \frac{1}{3}Bh$ il pose $V = h(\frac{1}{3}B - M)$ avec M positif. Il découpe à l'intérieur de la pyramide Π, la même suite de petites pyramides, dont les volumes se calculent tous avec la même formule $V = h(\frac{1}{3}B - M)$. L'une d'elle Sabc, de hauteur Sp, a une base d'aire abc comprise entre 12M et 3M et on a :

$0 < \frac{1}{3}abc - M \leqslant \frac{1}{4}abc$

Le volume de Sabc vérifie :

$v(Sabc) = Sp(\frac{1}{3}abc - M) \leqslant \frac{1}{4}Sp.abc$

Ce résultat contredit le corollaire I de la proposition XVI : "le volume d'une pyramide est plus grand que le quart du produit de sa base par sa hauteur" (10).

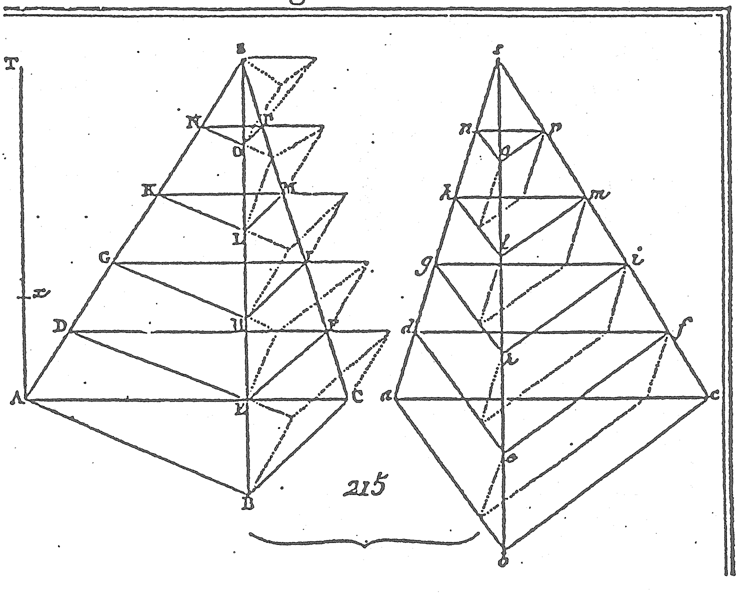
IV. Deuxième démonstration de Legendre.

Regardons maintenant la démonstration proposée à partir de la 12ème édition (1823) (voir Annexe 3) où l'on retrouve d'autres aspects de la démarche d'Euclide :

- établir que deux pyramides, de même hauteur et dont les bases ont même aire, ont même volume (proposition XVII du livre VI de la 12ème édition)
- décomposer un prisme triangulaire en trois pyramides de même volume (proposition XVIII); le raisonnement par exhaustion est abandonné.

figure 6

Legendre Elémens de Géométrie Pl. 10.



215

a) Pour prouver que deux pyramides de même hauteur et de bases d'aire B, ont même volume, Legendre utilise encore un raisonnement par l'absurde :

Il suppose qu'une des deux pyramides, SABC, a un volume V supérieur au volume v de l'autre, Sabc. Il considère un prisme de base B dont le volume est la différence V-v des volumes des deux pyramides . Il nomme Ax la hauteur du prisme.
Donc V - v = B . Ax.
Il coupe alors les deux pyramides par des plans parallèles au plan de leurs bases et équidistants ; la distance k, constante de deux de ces plans est choisie inférieure à Ax. (cf. fig 6). Les sections des deux pyramides par un de ces plans sont des triangles deux à deux de même aire (il l'a prouvé dans le corollaire de la proposition XVI). Il construit des prismes "extérieurs" à la pyramide de SABC et des prismes "intérieurs' à Sabc, de même hauteur k et dont les bases sont les sections successives des pyramides par des plans considérés. Le volume V_E de la réunion des prismes "extérieurs" à la pyramide SABC est plus grand que le volume de SABC. Le volume V_I de la réunion des prismes "intérieurs" à la pyramide Sabc est plus petit que le volume de Sabc. la différence V_E-V_I est donc supérieure à la différence B.Ax des volumes des deux pyramides. V_E-V_I > B..Ax. Mais il remarque que les prismes se correspondent deux à deux : le premier prisme "intérieur" de Sabc, à partir de la base, est égal au deuxième prisme "extérieur" de SABC ; le deuxième prisme de Sabc est égal au troisième prisme etc... La différence V_E - V_I entre le volume des prismes de SABC et celui des prismes de Sabc est donc exactement égal au premier prisme extérieur de SABC dont le volume vaut B x k. On obtient :

B.k = V_E - V_I > B..Ax   donc k > Ax ,   ce qui contredit l'hypothèse   k < Ax.
Les deux pyramides ont donc même volume.

b) La décomposition d'un prisme en trois pyramides de même volume n'est pas tout à fait la même que celle des *Eléments* d'Euclide, mais les raisonnements sont analogues. Le plan de cette démonstration à été repris par la plupart des auteurs du 19e et du 20e siècles ; on la trouve encore dans les manuels de géométrie des années 50 et 60.

V. La démonstration de Clairaut (cf Annexe 4)

Je propose de parcourir rapidement un exemple de démonstration utilisant le découpage de la pyramide en "un nombre infini de tranches" qui se trouve dans la quatrième partie des *Eléments de Géométrie* de Clairaut (1741) (propositions XXVI à XLIII). Celle-ci repose, sans y faire explicitement référence, sur le principe de la Géométrie des Indivisibles qui peut être explicité ainsi :
"Pour connaître le rapport de deux solides il suffira de trouver quel rapport ont entre eux tous les plans de ces figures, plans qu'on obtient par une sorte de découpage selon des conditions bien précises (la figure solide est entourée par deux plans parallèles et on fait glisser l'un des plans vers l'autre qui reste fixe ; on s'intéresse aux positions

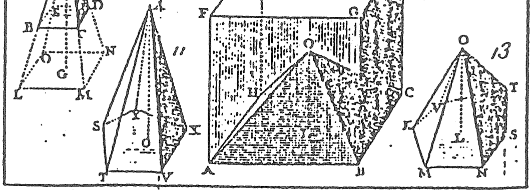
successives du plan mobile". ([11]). Ce principe a été justifié à posteriori par le calcul d'un volume à l'aide d'une intégrale simple (on peut en voir un exemple à l'annexe 6) .Voici à grands pas la démarche de Clairaut:

1) Si deux pyramides de même hauteur et dont les bases sont des figures égales "sont coupées par une infinité de plans parallèles à leurs bases(...) (les) coupes de pyramides donneront des (figures)' égales" et par conséquent, les deux pyramides peuvent être regardées comme des assemblages d'un même nombre de tranches qui (...) seront égales chacune à sa correspondante. Donc (...) la somme des tranches est la même de part et d'autre" . Les deux pyramides ont donc même volume. On trouve cet énoncé à la proposition XXX et une démonstration de la "similitude des tranches" est proposée dans les propositions XXXII à XXXVII.
2) Clairaut étend ensuite ce résultat à deux pyramides dont les bases ont même aire, sans être des figures semblables (prop. XXXVIII). Puis, pour deux pyramides de bases polygonales d'aires différentes (que je nomme B et B'), il établit, par une recherche de commune mesure (assez choquante à notre sens actuel de la rigueur), que le rapport des volumes de deux pyramides de même hauteur est égal au rapport de leurs bases. (proposition XXXIX) [12]
3) Il calcule alors le volume d'une pyramide particulière construite dans un cube dont le sommet est le centre du cube et la base une face du cube (voir figure 7). Le cube contient six pyramides égales à celle-ci ; le volume de la pyramide, la sixième de celui du cube, est donc le tiers du produit de sa base par sa hauteur (prop. XLI)
4) le volume V de tout autre pyramide Π de base B et de hauteur h pourra être comparé au volume V' de la pyramide à base carrée d'aire B', et de même hauteur h, inscrite dans un cube (dont le côté vaut donc 2 h). En termes actuels on a les relations : $\frac{V}{V'} = \frac{B}{B'}$ et $V' = \frac{1}{3} B'h$ donc

$V = \frac{1}{3} Bh$

"On découvre ce théorème général, qu'une pyramide a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

figure 7



VI. Travail en classe.

J'ai choisi de présenter aux élèves la première démonstration de Legendre : le langage en est accessible et elle présente la plus ancienne démonstration attestée,celle des *Eléments* d'Euclide. La démonstration d'Euclide serait plus ardue pour les élèves. Le calcul du volume d'un solide est un sujet suggéré pour les travaux pratiques de 1ère S ; la démarche et les méthodes développées par Legendre donnent l'occasion de mettre en oeuvre et de relier entre elles des notions très diverses du programme de l'année : ayant fait le choix de ne faire lire que les énoncés des résultats de la proposition XVI et de suivre le fil directeur de la démonstration sans en reprendre le mot à mot, j'amène les élèves à utiliser les translations et des homothéties ainsi que leurs effets sur les aires et les volumes. Pour cette étude les élèves doivent étudier et dessiner précisément des solides. Je fais lire la proposition XVII, qui présente un exemple de raisonnement par exhaustion. Cette démonstration peut-être comprise avec le langage des suites, qui est un des aspects importants du programme de 1ère ; elle amène à utiliser effectivement la définition de la limite d'une suite : une suite (u_n) tend vers 0 s'il existe un rang à partir duquel tous les termes $|u_n|$ sont inférieurs à un nombre positif donné. "Cette définition n'est plus explicitement présentée aux élèves, mais on doit leur faire sentir la propriété, c'est donc une excellente occasion de l'exhiber et de la faire reconnaître par les élèves.
Malgré la complexité du raisonnement de Legendre, l'exercice proposé (voir annexe 5) reste de difficulté raisonnable et dans les classes où le problème a été donné comme devoir à la maison [13], la plupart des copies ont témoigné d'une bonne compréhension des méthodes. Comme souvent ce genre de devoir enthousiasme les élèves qui sont intéressés par une réflexion approfondie.
La démonstration de Legendre a une valeur formatrice certaine, par les méthodes et les notions qu'elle met en jeu, mais elle n'est pas "éclairante" : elle ne permet pas de comprendre comment on peut "découvrir" le coefficient $\frac{1}{3}$, aussi, après la correction du travail, on peut selon l'intérêt et la curiosité des élèves, susciter une discussion et expliquer comment on a pu deviner un tel résultat. C'est l'occasion de raconter que les idées directrices de cette démonstration ont déjà été formulées deux mille ans auparavant, dans les *Eléments* d'Euclide, où l'on trouve déjà le découpage de la pyramide et de présenter la décomposition d'un prisme triangulaire en trois pyramides de même volume, qu'on retrouve également dans la deuxième démonstration de Legendre. On peut aussi, c'est très apprécié par les élèves, reprendre le calcul du volume de la pyramide à base carrée incluse dans un cube.

Il est intéressant de comparer les méthodes de Legendre à celle qui est utilisée dans des exercices classiques de calcul de volumes de solides (sphère, cône ...) : celle-ci consiste à encadrer le volume du solide par deux suites : l'une (u_n) est le volume de n cylindres d'épaisseurs égales inclus dans le solide ; l'autre (v_n) est le volume de n cylindres contenant le solide. La limite commune des deux suites est égale au volume cherché. On fait remarquer que, par contre, les méthodes de Legendre évitent le recours à l'infini.
En terminale, on peut reprendre le calcul du volume avec l'instrument nouveau des intégrales : je joins en annexe 6 le plan d'un T.P. sur ce sujet. Les élèves qui ont étudié au préalable une méthode de Legendre ont le sentiment du chemin théorique parcouru depuis la méthode d'exhaustion jusqu'au calcul intégral.
Cet exercice permet aux élèves de 1ère et terminale scientifiques d'approcher et de pratiquer différentes méthodes qui mèneront au calcul infinitésimal. De telles activités leur font prendre conscience des détours et des motivations des conceptualisations mathématiques. C'est souvent l'occasion de "faire faire des maths" d'une manière plus motivée et plus intéressante. La lecture d'un fragment de texte original en classe, prend tout son sens quand le professeur peut l'enrichir de la connaissance d'autres textes qui scandent l'histoire des notions ou des problématiques que ce fragment met en jeu.

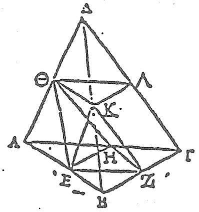
ANNEXE 1 :

PROPOSITION III.

Toute pyramide triangulaire peut se diviser en deux pyramides triangulaires égales et semblables entr'elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux; et ces deux prismes sont plus grands que la moitié de la pyramide entière.

Soit la pyramide dont la base est le triangle ΑΒΓ, et dont le sommet est le point Δ; je dis que la pyramide ΑΒΓΔ peut se diviser en deux pyramides triangulaires égales et semblables entr'elles, et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux, et que ces deux prismes sont plus grands que la moitié de la pyramide entière.

Car coupons les droites ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ, ΑΔ, ΔΒ, ΔΓ en deux parties égales aux points Ε, Ζ, Η, Θ, Κ, Λ, et joignons ΕΘ, ΕΗ, ΗΘ, ΘΚ, ΚΛ, ΛΘ, ΕΚ, ΚΖ, ΖΗ. Puisque ΑΕ est égal à ΕΒ, et ΑΘ égal à ΘΔ; la droite ΕΘ sera parallèle à la droite ΔΒ (2. 6). Par la même raison, la droite ΘΚ est parallèle à la droite ΑΒ; la figure ΘΕΒΚ est donc un parallélogramme; ΘΚ est donc égal à ΕΒ (34. 1). Mais ΕΒ est égal à ΕΑ; ΕΑ est donc égal à ΘΚ. Mais ΑΘ est égal à ΘΔ; les deux droites ΕΑ, ΑΘ sont donc égales aux deux droites ΚΘ, ΘΔ, chacune à chacune; mais l'angle ΕΑΘ est égal à l'angle ΚΘΔ; la base ΕΘ est donc égale à la base ΚΔ (29. 1); le triangle ΑΕΘ est donc égal et semblable au triangle ΘΚΔ. Par la même raison, le triangle ΑΘΗ est égal et semblable au triangle ΘΛΔ. Et puisque les deux droites ΕΘ, ΘΗ qui se touchent sont parallèles aux deux droites ΚΔ, ΔΛ qui se touchent et qui ne sont pas dans le même plan, ces droites comprendront des angles égaux (10. 11);

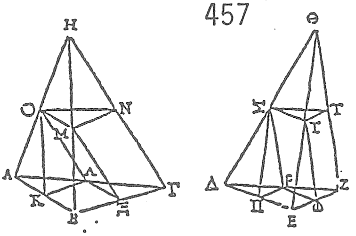


l'angle ΕΘΗ est donc égal à l'angle ΚΔΛ. Et puisque les deux droites ΕΘ, ΘΗ sont égales aux deux droites ΚΔ, ΔΛ, chacune à chacune, et que l'angle ΕΘΗ est égal à l'angle ΚΔΛ, la base ΕΗ sera égale à la base ΚΛ; le triangle ΕΘΗ est donc égal et semblable au triangle ΚΔΛ. Par la même raison, le triangle ΑΕΗ est égal et semblable au triangle ΘΚΛ; la pyramide dont la base est le triangle ΑΕΗ et dont le sommet est le point Θ est donc égale et semblable à la pyramide dont la base est le triangle ΘΚΛ et dont le sommet est le point Δ. Et puisque la droite ΘΚ est menée parallèlement à un des côtés ΑΒ du triangle ΔΑΒ, le triangle ΔΑΒ sera équiangle avec le triangle ΔΘΚ (29. 1); mais ces deux triangles ont leurs côtés proportionnels (4. 6), le triangle ΔΑΒ est donc semblable au triangle ΔΘΚ. Par la même raison, le triangle ΔΒΓ est semblable au triangle ΔΚΛ, et le triangle ΔΑΓ semblable au triangle ΔΛΘ. Et puisque les deux droites ΒΑ, ΑΓ qui se touchent sont parallèles aux deux droites ΚΘ, ΘΛ qui se touchent et qui ne sont pas dans le même plan, ces droites comprendront des angles égaux (10. 11); l'angle ΒΑΓ est donc égal à l'angle ΚΘΛ. Mais ΒΑ est à ΑΓ comme ΚΘ est à ΘΛ; le triangle ΑΒΓ est donc semblable au triangle ΘΚΛ (6. 6); la pyramide dont la base est le triangle ΑΒΓ et dont le sommet est le point Δ est donc semblable à la pyramide dont la base est le triangle ΘΚΛ et dont le sommet est le point Δ. Mais on a démontré que la pyramide dont la base est le triangle ΘΚΛ, et le sommet le point Δ, est semblable à la pyramide dont la base est le triangle ΑΕΗ et dont le sommet est le point Θ; la pyramide dont la base est le triangle ΑΒΓ, et dont le sommet est le point Δ est donc semblable à la pyramide dont la base est le triangle ΑΕΗ et dont le sommet est le point Θ; chacune des pyramides ΑΕΗΘ, ΘΚΛΔ est donc semblable à la pyramide entière ΑΒΓΔ. Et puisque ΒΖ est égal à ΖΓ, le parallélogramme ΕΒΖΗ sera double du triangle ΗΖΓ (41. 1). Mais deux prismes de même hauteur, dont l'un a pour base un parallélogramme, et dont l'autre a pour base un triangle, sont égaux entre eux, lorsque le parallélogramme est double du triangle (40. 11); le prisme compris sous les deux triangles ΒΚΖ, ΕΘΗ et sous les trois parallélogrammes ΕΒΖΗ, ΕΒΚΘ, ΘΚΗΖ est donc égal au prisme qui est compris sous les deux triangles ΗΖΓ, ΘΚΛ et sous les trois parallélogrammes ΚΖΓΛ, ΛΓΗΘ, ΘΚΖΗ. Mais il est évident que chacun de ces prismes et celui dont la base est le parallélogramme ΕΒΖΗ opposé à la droite ΘΚ, et celui dont la base est le triangle ΗΖΓ opposé au triangle ΚΛΘ est plus grand que chacune des pyramides dont les bases sont ΑΕΗ, ΘΚΛ et les sommets les points Θ, Δ; parce que si nous joignons ΕΖ, ΕΚ; le prisme dont la base est le parallélogramme ΕΒΖΗ opposé à la droite ΘΚ, est plus grand que la pyramide qui a pour base le triangle ΕΒΖ et pour sommet le point Κ. Mais la pyramide qui a pour base le triangle ΕΒΖ et pour sommet le point Κ, est égale à la pyramide qui a pour base le triangle ΑΕΗ et pour sommet le point Θ (déf. 10. 11), car elles sont comprises sous des plans égaux et semblables; le prisme qui a pour base le parallélogramme ΕΒΖΗ opposé à la droite ΘΚ, est donc plus grand que la pyramide qui a pour base le triangle ΑΕΗ et pour sommet le point Θ. Mais le prisme qui a pour base le parallélogramme ΕΒΖΗ opposé à la droite ΘΚ, est égal au prisme qui a pour base le triangle ΗΖΓ opposé au triangle ΘΚΛ; et la pyramide qui a pour base le triangle ΑΕΗ et pour sommet le point Θ est égale à la pyramide qui a pour base le triangle ΘΚΛ et pour sommet le point Δ; les deux prismes dont nous venons de parler sont donc plus grands que les deux pyramides qui ont pour bases les triangles ΑΕΗ, ΘΚΛ et pour sommets les points Θ, Δ; la pyramide entière qui a pour base le triangle ΑΒΓ et pour sommet le point Δ, a donc été divisée en deux pyramides égales et semblables entr'elles, et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux qui sont plus grands que la moitié de la pyramide entière. Ce qu'il fallait démontrer.

PROPOSITION IV.

Si deux pyramides triangulaires de même hauteur sont divisées l'une et l'autre en deux pyramides égales entr'elles et semblables à la pyramide entière et en deux prismes égaux, si chacune des pyramides engendrées est divisée de la même manière, et si l'on fait toujours la même chose, la base de l'une de ces pyramides sera à la base de l'autre pyramide comme tous les prismes contenus dans l'une de ces pyramides sont à tous les prismes contenus dans l'autre pyramide, ces prismes étant égaux en nombre.

Soient deux pyramides triangulaires de même hauteur ayant pour bases les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, et pour sommets les points Η, Θ; que chacune de ces pyramides soit divisée en deux pyramides égales entr'elles et semblables aux pyramides entières et en deux prismes égaux; concevons que chacune des pyramides engendrées soit divisée de la même manière, et faisons toujours la même chose; je dis que la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ comme tous les prismes contenus dans la pyramide ΑΒΓΗ sont à tous les prismes contenus dans la pyramide ΔΕΖΘ, ces prismes étant égaux en nombre.



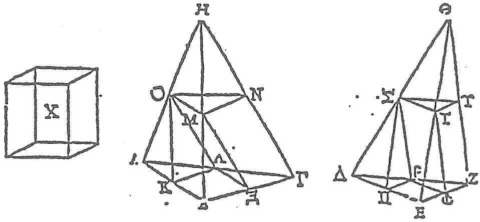
LEMME.

Nous démontrerons de la manière suivante que le triangle ΑΞΓ est au triangle ΡΦΖ comme le prisme qui a pour base le triangle ΑΞΓ opposé à ΟΜΝ, est au prisme qui a pour base le triangle ΡΦΖ opposé à ΣΤΦ.

PROPOSITION V.

Les pyramides triangulaires qui ont la même hauteur sont entr'elles comme leurs bases.

Que les pyramides dont les bases sont les triangles ΑΒΓ, ΔΕΖ, et dont les sommets sont les points Η, Θ, ayent la même hauteur; je dis que la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΖΘ.

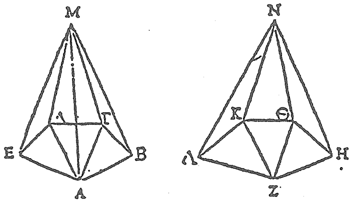


Car si la base ΑΒΓ n'est pas à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΖΘ; la base ΑΒΓ sera à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide plus petit que la pyramide ΔΕΖΘ ou à un solide plus grand. Que ce soit d'abord à un solide Χ plus petit; divisons la pyramide ΔΕΖΘ en deux pyramides égales entr'elles et semblables à la pyramide entière, et en deux prismes égaux; les deux prismes seront plus grands que la moitié de la pyramide entière (3. 12). Que les pyramides engendrées par cette division soient divisées de la même manière, et faisons toujours cela jusqu'à ce qu'il nous reste de la pyramide ΔΕΖΘ certaines pyramides qui soient plus petites que l'excès de la pyramide ΔΕΖΘ sur le solide Χ. Cherchons ces pyramides, et qu'elles soient par exemple ΔΠΡΣ, ΣΤΥΘ; les prismes restants de la pyramide ΔΕΖΘ seront plus grands que le solide Χ. Divisons semblablement la pyramide ΑΒΓΗ en autant de parties que la pyramide ΔΕΖΘ; la base ΑΒΓ sera à la base ΔΕΖ comme les prismes de la pyramide ΑΒΓΗ sont aux prismes de la pyramide ΔΕΖΘ (4. 12). Mais la base ΑΒΓ est à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est au solide Χ; la pyramide ΑΒΓΗ est donc au solide Χ comme les prismes de la pyramide ΑΒΓΗ sont aux prismes de la pyramide ΔΕΖΘ; donc, par permutation, la pyramide ΑΒΓΗ est aux prismes qu'elle renferme comme le solide Χ est aux prismes de la pyramide ΔΕΖΘ. Mais la pyramide ΑΒΓΗ est plus grande que les prismes qu'elle renferme; le solide Χ est donc plus grand que les prismes que renferme la pyramide ΔΕΖΘ. Mais, au contraire, il est plus petit; ce qui est impossible; la base ΑΒΓ n'est donc point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide quelconque plus petit que la pyramide ΔΕΖΘ. Nous démontrerons semblablement que la base ΔΕΖ n'est point à la base ΑΒΓ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ. Je dis enfin que la base ΑΒΓ n'est point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ. Car, si cela est possible, que ce soit à un solide Χ plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ; donc, par inversion, la base ΔΕΖ sera à la base ΑΒΓ comme le solide Χ est à la pyramide ΑΒΓΗ. Mais le solide Χ est à la pyramide ΑΒΓΗ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ, ainsi que cela est démontré; la base ΔΕΖ est donc à la base ΑΒΓ comme la pyramide ΔΕΖΘ est à un solide quelconque plus petit que la pyramide ΑΒΓΗ, ce qui a été démontré absurde; la base ΑΒΓ n'est donc point à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à un solide quelconque plus grand que la pyramide ΔΕΖΘ. Mais on a démontré que ce n'est point non plus à un solide Χ plus petit; la base ΑΒΓ est donc à la base ΔΕΖ comme la pyramide ΑΒΓΗ est à la pyramide ΔΕΖΘ. Donc, etc.

PROPOSITION VI.

Les pyramides qui ont la même hauteur, et qui ont des polygones pour bases, sont entr'elles comme leurs bases.

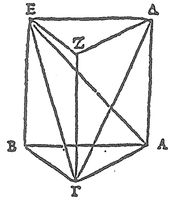
Que les pyramides dont les bases sont les polygones ΑΒΓΔΕ, ΖΗΘΚΛ, et dont les sommets sont les points Μ, Ν ayent la même hauteur; je dis que la base ΑΒΓΔΕ est à la base ΖΗΘΚΛ comme la pyramide ΑΒΓΔΕΜ est à la pyramide ΖΗΘΚΛΝ.



PROPOSITION VII.

Tout prisme ayant une base triangulaire peut se diviser en trois pyramides égales entr'elles, ces pyramides ayant des bases triangulaires.

Soit le prisme dont la base est le triangle ΑΒΓ opposé au triangle ΔΕΖ; je dis que le prisme ΑΒΓΔΕΖ peut être divisé en trois pyramides égales entr'elles, ces pyramides ayant des bases triangulaires.



COROLLAIRE.

D'après cela il est évident que toute pyramide est la troisième partie d'un prisme qui a la même base et la même hauteur qu'elle; car si l'une des bases du prisme est une autre figure rectiligne, la base opposée étant la même figure, ce prisme pourra être divisé en prismes qui auront des bases triangulaires, et dont les bases opposées seront des triangles.

: bc :: CD : cd, et ainsi de suite. Donc les polygones $abcde$, ABCDE, ont les angles égaux et les côtés homologues proportionnels; donc ils sont semblables.

Corollaire. Soient SABCDE, SXYZ, deux pyramides dont le sommet est commun et dont les bases sont sur un même plan, de sorte qu'elles ont la même hauteur : si on les coupe par un même plan parallèle au plan des bases, soit $abcde$ la section faite dans une pyramide, xyz la section faite dans l'autre; je dis que *les sections* $abcde$, xyz, *seront entre elles comme les bases* ABCDE, XYZ.

Car les polygones ABCDE, $abcde$, étant semblables, leurs surfaces sont comme les quarrés des côtés homologues AB, ab : mais AB : ab :: SA : Sa; donc ABCDE : $abcde$ :: $\overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2$. Par la même raison XYZ : xyz :: $\overline{SX}^2 : \overline{Sx}^2$. Mais, puisque $abcxyz$ n'est qu'un même plan, on a aussi SA . Sa :: SX : Sx; donc ABCDE : $abcde$ :: XYZ : xyz. Donc les sections $abcde$, xyz, sont entre elles comme les bases ABCDE, XYZ.

PROPOSITION XVI.

LEMME.

fig. 215. *Soit* SABC *une pyramide triangulaire dont* S *est le sommet et* ABC *la base; si on divise les côtés* SA, SB, SC, AB, AC, BC, *en deux parties égales aux points* D, E, F, G, H, I, *et que par ces points on tire les lignes* DE, EF, DF, EG, FH, EI, GH, *je dis qu'on pourra considérer la pyramide* SABC, *comme*

composée de deux prismes AGHFDE, EGICFH, *équivalents entre eux, et de deux pyramides égales* SDEF, EGBI.

Par suite de la construction, ED est parallèle à BA et GE à AS; donc la figure ADEG est un parallélogramme. La figure ADFH en est un aussi par la même raison; donc les trois droites AD, GE, HF, sont égales et parallèles; donc le solide AGHFDE; est un prisme*. *14. 5.

On prouvera semblablement que les deux figures EFCI, CIGH, sont des parallélogrammes, et qu'ainsi les trois droites EF, CI, GH, sont égales et parallèles; donc le solide EGICFH, est encore un prisme. Or je dis que ces deux prismes triangulaires sont équivalents entre eux.

En effet, si sur les arêtes GI, GE, GH, on forme le parallélepipede GX, le prisme triangulaire GEICFH, sera la moitié de ce parallélepipede*; * 6.
d'un autre côté le prisme AGHFDE, est égal aussi à la moitié du parallélepipede GX*, puisqu'ils ont * 12.
même hauteur, et que le triangle AGH, base du prisme, est moitié du parallélogramme GICH, base du parallélepipede. Donc les deux prismes EGICFH, AGHFDE, sont équivalents entre eux.

Ces deux prismes étant retranchés de la pyramide SABC, il ne reste plus que les deux pyramides SDEF, EGBI; or je dis que ces deux pyramides sont égales entre elles.

En effet, à cause des côtés égaux, savoir, BE =SE, BG=AG=DE, EG=AD=SD, le triangle BEG est égal au triangle ESD. Par une raison semblable le triangle BEI est égal au triangle SEF;

d'ailleurs, l'inclinaison mutuelle des deux plans BEG, BEI, est la même que celle des deux plans ESD, SEF, puisque BEG ne fait qu'un seul plan avec ESD, de même que BEI avec SEF. Donc si, pour opérer la superposition des deux pyramides SDEF, EGBI, on place le triangle EBG sur son égal SDE, il faudra que le plan BEI tombe sur le plan SEF; et, puisque les triangles EBI, SEF, sont égaux et semblablement placés, le point I tombera en F, et les deux pyramides SDEF, EGBI, coïncideront en une seule.

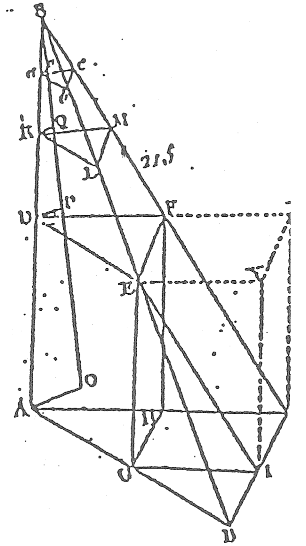
Donc la pyramide entière SABC, est composée de deux prismes triangulaires AGF, GIF, équivalents entre eux, et de deux pyramides égales SDEF, EGBI.

Corollaire I. Du sommet S soit abaissée SO perpendiculaire sur le plan ABC, et soit P le point où cette perpendiculaire rencontre le plan DEF parallèle à ABC; puisque SD$=\frac{1}{2}$SA, on aura SP$=$
15. $\frac{1}{2}$SO*, et le triangle DEF$=\frac{1}{4}$ABC. Donc la solidité du prisme AGHFDE$=\frac{1}{4}$ABC$\times\frac{1}{2}$SO, et celle des deux prismes réunis AGHFDE, EGICFH,$=\frac{1}{4}$ABC $\times$SO. Ces deux prismes sont moindres que la pyramide SABC, puisqu'ils y sont contenus; donc *la solidité d'une pyramide triangulaire est plus grande que le quart du produit de sa base par sa hauteur.*

Corollaire II. Si on mène les droites DG, DH, on aura une nouvelle pyramide ADGH, qui sera égale à la pyramide SDEF: car on peut placer la base DEF sur son égale AGH, et alors les angles SDE, SDF, étant égaux aux angles DAG, DAH, il est
23. 5, sch. visible que DS tombera sur AD; et le sommet S

sur le sommet D. Or la pyramide ADGH est moindre que le prisme AGHDEF, puisqu'elle y est contenue; donc chacune des pyramides SDEF, EGBI, est moindre que le prisme AGHDEF; donc la pyramide SABC, qui est composée de deux pyramides et de deux prismes, est moindre que quatre de ces mêmes prismes. Or la solidité de l'un de ces prismes $= \frac{1}{8}$ ABC×SO, et son quadruple $= \frac{1}{2}$ABC×SO. Donc,

_____, *la solidité de toute pyramide triangulaire est moindre que la moitié du produit de sa base par sa hauteur.*



PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

La solidité d'une pyramide triangulaire est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

Soit SABC une pyramide triangulaire quelconque, ABC sa base, SO sa hauteur; je dis que la solidité de le pyramide SABC sera égale au tiers du produit de la surface ABC par la hauteur SO, de sorte qu'on aura SABC$= \frac{1}{3}$ABC×SO ou $=$SO× $\frac{1}{3}$ABC. fig. 215.

Car, si on nie cette proposition, il faudra que la solidité SABC soit égale au produit de SO par une quantité plus grande ou plus petite que $\frac{1}{3}$ABC.

Soit 1.° cette quantité plus grande, en sorte qu'on ait SABC$=$SO×($\frac{1}{3}$ABC$+$M). Si on fait la même construction que dans la proposition précédente, la pyramide SABC sera partagée en deux prismes équivalents entre eux AGHFDE, EGICFH, et en deux pyramides égales SDEF, EGBI. Or la solidité du prisme AGHFDE est DFE×PO, et celle des deux prismes est par conséquent DFE×2PO ou DFE×SO. Retranchant les deux prismes de la pyramide entière, le reste sera égal au double de la pyramide SDEF, de sorte qu'on aura

$$2SDEF = SO \times (\tfrac{1}{3}ABC + M - DFE).$$

15. Mais, parce que SA est double de SD, la surface ABC est quadruple de DFE*, et ainsi $\frac{1}{3}$ABC—DFE $=\frac{4}{3}$DFE—DFE$=\frac{1}{3}$DFE ; donc

$$2SDEF = SO \times (\tfrac{1}{3}DEF + M).$$

Et ainsi en prenant les moitiés de part et d'autre

$$SDEF = SP \times (\tfrac{1}{3}DEF + M).$$

D'où l'on voit que, pour avoir la solidité de la pyramide SDEF, il faudra ajouter au tiers de sa base la même surface M qui avoit été ajoutée à la base de la grande pyramide, et multiplier le tout par la hauteur SP de la petite pyramide.

Si l'on divise SD en deux également au point K, et que par le point K on fasse passer le plan KLM parallèle à DEF, lequel rencontre en Q la perpendiculaire SP, la même démonstration prouve que la solidité de la pyramide SKLM sera égale à SQ×($\frac{1}{3}$KLM+M).

Continuant ainsi à former une suite de pyramides dont les côtés décroissent en raison double, et les bases en raison quadruple, on parviendra bientôt à une pyramide S*abc*, dont la base *abc* sera plus petite que 6M : soit S*p* la hauteur de cette dernière pyramide, et sa solidité, déduite de celles des pyramides précédentes, sera encore S*p*×($\frac{1}{3}$*abc* +M); donc, à cause de M>$\frac{1}{6}$*abc*, et par conséquent $\frac{1}{3}$*abc*+M>$\frac{1}{2}$*abc*, il s'ensuivroit que la solidité de la pyramide $Sabc$ seroit $> Sp \times \frac{1}{2} abc$. Résultat absurde, puisqu'on a prouvé dans le corollaire II de la proposition précédente, que la solidité d'une pyramide triangulaire est toujours moindre que la moitié du produit de sa base par sa hauteur; donc 1.° il est impossible que la solidité de la pyramide SABC soit plus grande que $SO \times \frac{1}{3} ABC$.

Soit 2.° $SABC = SO \times (\frac{1}{3} ABC - M)$, on prouvera, comme dans le premier cas, que la solidité de la pyramide SDEF, dont les dimensions sont deux fois moindres, est égale à $SP \times (\frac{1}{3} DEF - M)$; et, en continuant la suite des pyramides dont les côtés décroissent en raison double, jusqu'à un terme quelconque $Sabc$, on aura de même la solidité de la dernière pyramide $Sabc = Sp \times (\frac{1}{3} abc - M)$. Mais les bases ABC, DEF, LKM.... abc, formant une suite décroissante dont chaque terme est le quart du précédent, on parviendra bientôt à un terme abc, égal à 12M, ou qui sera compris entre 12M et 3M, de sorte qu'alors $\frac{1}{3} abc - M$ sera ou égal à $\frac{1}{4} abc$, ou compris entre $\frac{1}{4} abc$ et zéro, et la solidité de la pyramide $Sabc$ sera ou $= Sp \times \frac{1}{4} abc$ ou $< Sp \times \frac{1}{4} abc$. Résultat encore absurde, puisque, suivant le corollaire I de la proposition précédente, la solidité d'une pyramide triangulaire est toujours plus grande que le quart du produit de sa base par sa hauteur. Donc 2.° la solidité de la pyramide SABC ne peut être plus petite que $SO \times \frac{1}{3} ABC$.

Donc enfin la solidité de la pyramide $SABC = SO \times \frac{1}{3} ABC$ ou $= \frac{1}{3} ABC \times SO$, conformément à l'énoncé du théorème.

ANNEXE 3 : 12° édition des Eléments de Géométrie de Legendre

xyz, sont entre elles comme les bases ABCDE, XYZ. Donc si les bases ABCDE, XYZ sont équivalentes, les sections faites à égale hauteur sont pareillement équivalentes.

PROPOSITION XVII.

THÉORÈME.

Deux pyramides triangulaires qui ont des bases équivalentes et des hauteurs égales, sont équivalentes.

fig. 213. Soient SABC, *sabc* les deux pyramides dont les bases ABC, *abc*, que nous supposons placées sur un même plan, sont équivalentes et qui ont même hauteur TA ; si ces pyramides ne sont pas équivalentes, soit *sabc* la plus petite et soit A*x* la hauteur d'un prisme qui étant construit sur la base ABC, serait égal à leur différence.

Divisez la hauteur commune AT en parties égales plus petites que A*x*, et soit *k* une de ces parties ; par les points de division de la hauteur, faites passer des plans parallèles au plan des bases ; les sections faites par chacun de ces plans dans les deux pyramides, seront
16. cor. équivalentes, telles que DEF et *def*, GHI et *ghi*, etc. Cela posé, sur les triangles ABC, DEF, GHI, etc., pris pour bases, construisez des prismes extérieurs qui aient pour arêtes les parties AD, DG, GK, etc., du côté SA ; de même sur les triangles *def*, *ghi*, *klm*, *etc.*, pris pour bases, construisez dans la seconde pyramide des prismes intérieurs qui aient pour arêtes les parties correspondantes du côté *sa* ; tous ces prismes partiels auront pour hauteur commune *k*.

La somme des prismes extérieurs de la pyramide SABC est plus grande que cette pyramide, la somme des prismes intérieurs de la pyramide *sabc* est plus petite que cette pyramide; donc par ces deux raisons la différence entre les deux sommes de prismes devra être plus grande que la différence entre les deux pyramides.

Or à partir des bases ABC, *abc*, le second prisme extérieur DEFG est équivalent au premier prisme intérieur *defa*, puisque leurs bases DEF, *def*, sont équivalentes et qu'ils ont une même hauteur *k*; sont équivalents par la même raison le troisième prisme extérieur GHIK et le second intérieur *ghid*, le quatrième extérieur et le troisième intérieur, ainsi de suite jusqu'au dernier des uns et des autres. Donc tous les prismes extérieurs de la pyramide SABC, à l'exception du premier ABCD, ont leurs équivalents dans les prismes intérieurs de la pyramide *sabc*. Donc le prisme ABCD est la différence entre la somme des prismes extérieurs de la pyramide SABC et la somme des prismes intérieurs de la pyramide *sabc*; mais la différence de ces deux sommes est plus grande que la différence des deux pyramides; donc il faudrait que le prisme ABCD fût plus grand que le prisme ABCX; or au contraire il est plus petit, puisqu'ils ont une même base ABC, et que la hauteur *k* du premier est moindre que la hauteur Ax du second. Donc l'hypothèse d'où l'on est parti ne saurait avoir lieu; donc les deux pyramides SABC, *sabc*, de bases équivalentes et de hauteurs égales, sont équivalentes.

PROPOSITION XVIII.

THÉORÈME.

Toute pyramide triangulaire est le tiers du prisme triangulaire de même base et de même hauteur.

Soit SABC une pyramide triangulaire, ABCDES un fig. 216.

prisme triangulaire de même base et de même hauteur, je dis que la pyramide est le tiers du prisme.

Retranchez du prisme la pyramide SABC, il restera le solide SACDE, qu'on peut considérer comme une pyramide quadrangulaire dont le sommet est S et qui a pour base le parallélogramme ACDE; tirez la diagonale CE et conduisez le plan SCE qui partagera la pyramide quadrangulaire en deux pyramides triangulaires SACE SDCE. Ces deux pyramides ont pour hauteur commune la perpendiculaire abaissée du sommet S sur le plan ACDE; elles ont des bases égales, puisque les triangles ACE, DCE, sont les deux moitiés du même parallélogramme; donc les deux pyramides SACE, SDCE, sont équivalentes entre elles; mais la pyramide SDCE et la pyramide SABC ont des bases égales ABC, DES; elles ont aussi même hauteur, car cette hauteur est la distance des plans parallèles ABC, DES. Donc les deux pyramides SABC, SDCE, sont équivalentes; mais on a démontré que la pyramide SDCE est équivalente à la pyramide SACE; donc les trois pyramides SABC, SDCE, SACE, qui composent le prisme ABD sont équivalentes entre elles. Donc la pyramide SABC est le tiers du prisme ABD qui a même base et même hauteur.

Corollaire. La solidité d'une pyramide triangulaire est égale au tiers du produit de sa base par sa hauteur.

PROPOSITION XIX.

THÉORÈME.

fig. 214. *Toute pyramide* SABCDE *a pour mesure le tiers du produit de sa base* ABCDE *par sa hauteur* AO.

Car en faisant passer les plans SEB, SEC, par les diagonales EB, EC, on divisera la pyramide polygonale SABCDE en plusieurs pyramides triangulaires qui auront toutes la même hauteur SO. Mais par le théorème précédent chacune de ces pyramides se mesure en multipliant chacune des bases ABE, BCE, CDE, par le tiers de sa hauteur SO; donc la somme des pyramides triangulaires, ou la pyramide polygonale SABCDE, aura pour mesure la somme des triangles ABE, BCE, CDE, ou le polygone ABCDE, multiplié par $\frac{1}{3}$SO; donc toute pyramide a pour mesure le tiers du produit de sa base par sa hauteur.

Corollaire I. Toute pyramide est le tiers du prisme de même base et de même hauteur.

Corollaire II. Deux pyramides de même hauteur sont entre elles comme leurs bases, et deux pyramides de même base sont entre elles comme leurs hauteurs.

Scholie. On peut évaluer la solidité de tout corps polyèdre en le décomposant en pyramides, et cette décomposition peut se faire de plusieurs manières: une des plus simples est de faire passer les plans de division par le sommet d'un même angle solide; alors on aura autant de pyramides partielles qu'il y a de faces dans le polyèdre, excepté celles qui forment l'angle solide d'où partent les plans de division.

PROPOSITION XX.

THÉORÈME.

Deux polyèdres symmétriques sont équivalents entre eux ou égaux en solidité.

Car 1° deux pyramides triangulaires symmétriques, fig. 202.
telles que SABC, TABC, ont pour mesure commune

ANNEXE 4 : Eléments de Géométrie de Clairaut

Si les baſes des deux pyramides étoient d'autres poligones réguliers ou irréguliers BCDEF, *bcdef*, égaux entr'eux, il n'y a perſonne qui ne penſât encore, que toutes les tranches IKLMN, *iklmn*, de l'une & de l'autre de ces deux pyramides devroient être égales entr'elles ; & qui n'en conclut, par conſéquent, que les pyramides (*) ~~ſeroient toûjours les mêmes~~, lorſquelles auroient même baſe & même hauteur.

XXXI.

Tout cela eſt aiſé à imaginer après la démonſtration que nous avons donnée, de l'égalité des priſmes qui ont même hauteur ; cependant la ſimilitude entre la tranche quelconque IKLMN d'une pyramide & la baſe BCDEF, & l'égalité des tranchés IKLMN & *iklmn*, ſont de ces propoſitions, qui, quoique ſenſibles pour tout le monde, ont, à la rigueur, beſoin d'une démonſtration ; or pour trouver cette démonſtration, on eſt obligé d'entrer dans pluſieurs conſidérations ſur la ſimilitude des figures ſolides.

XXXVIII.

Si les baſes des deux pyramides, au lieu d'être les mêmes, étoient ſeulement égales en ſuperficie, les pyramides ſeroient encore égales en ſolidité ; car ſoit *abcdef* *, & *arſt*, deux pyramides qui ont la même hauteur *ah*, ſi on coupe ces deux pyramides par un plan quelconque paralléle à la baſe, il eſt évident qu'il y aura même rapport de l'aire *iklmn* à l'aire *bcdef*, que de l'aire *uxy* à l'aire *rſt* ; puiſque *iklmn*, *bcdef*, étant (Article XXXIV.) des figures ſemblables, elles ne différent (I. Part. Art. XLVIII.) que par leurs échelles *aq*, *ah*, &c. & que les figures *uxy*, *rſt*, étant auſſi ſemblables, elles ne différent, non plus, que par leurs échelles, qui ſont encore les lignes *aq*, *ah*.

Mais ſi les baſes *rſt*, *bcdef*, ſont égales en ſuperficie, leurs parties proportionnelles *uxy*, *iklmn*, ſeront donc égales. Donc toutes les tranches des deux pyramides *arſt*, *abcdef*, auront la même étenduë. Donc leurs aſſemblages, c'eſt-à-dire, les pyramides mêmes, ſeront égales en ſolidité.

Deux pyramides ſont encore égales, ſi ayant la même hauteur, leurs baſes, ſans être des polygones ſemblables, ſont égales en ſuperficie.

* Fig. 7. & 9.

Que si la base *rst* n'étoit pas contenuë exactement dans la base *bcdef*, mais que ces deux bases eussent une mesure commune X, on diviseroit chacune des deux bases *bcdef*, *rst*, en des parties égales à X, & on verroit que les deux pyramides *abcdef*, *arst*, seroient composées d'autant de pyramides nouvelles, toutes égales entr'elles,

M

que les deux bases contiendroient de parties X. Donc les pyramides *abcdef*, *arst*, seroient entr'elles comme leurs bases.

Et si les bases étoient incommensurables, on feroit toûjours voir, malgré cela, que les pyramides seroient entr'elles en même raison que leurs bases, en se servant d'une induction semblable à celle qu'on a employée dans un pareil cas (II. Part. Art. XXVIII.) lorsqu'il s'agissoit de comparer les figures dont les côtés étoient incommensurables; c'est-à-dire, qu'on diminuëroit à l'infini la mesure X, de façon qu'elle pût être censée mesure commune, tant de la base *rst*, que de la base *bcdef*.

XLI.

Puisqu'il ne s'agit donc que de mesurer une seule pyramide, pour sçavoir mesurer toutes les autres pyramides imaginables, proposons-nous-en une extrêmement simple, qu'on peut former en tirant des quatre angles A, B, C, H, d'une des faces d'un cube ABCDEFGH, quatre lignes au point O, centre de ce cube; c'est-à-dire, le point également distant de A, D, B, E, &c.

On voit, sans peine, que cette pyramide est la sixiéme partie du cube, puisqu'on peut décomposer le cube en six pyramides pareilles, en prenant chaque face pour base. Or la valeur du cube est le produit de la hauteur AF par la base ABCH. Donc, pour avoir la valeur de la pyramide, il faudra partager le produit de AF par ABCH, en six parties égales, ou, ce qui revient au même, il faudra multiplier la sixiéme partie de la hauteur AF par la base ABCH, & comme la sixiéme partie de la hauteur AF est le tiers de la hauteur OL de la pyramide OABCH, puisque sa hauteur OL est la moitié du côté du cube, il s'ensuit que la mesure de la pyramide OABCH est le produit du tiers de sa hauteur par sa base.

XLII.

SUPPOSONS présentement qu'on ait à mesurer une pyramide quelconque OKMNSTV, on imaginera un cube dont le côté AB ou AF soit double de la hauteur OL de la pyramide proposée, & on concevra dans ce cube, une pyramide OABCH, dont la pointe soit au centre, & qui ait pour base une des faces ABCH du cube. Cette nouvelle pyramide aura même hauteur que la premiere; & par conséquent, (Article XXXIX.) la solidité de OABCH sera à celle de OKMNSTV, comme la base ABCH à la base KMNSTV; or par l'Article précédent, le produit du tiers de la hauteur commune OL par la base ABCH, est la valeur de la pyramide OABCH; donc le produit du tiers de la même hauteur commune OL par la base KMNSTV, sera la valeur de la pyramide proposée OKMNSTV.

Et par-là, on découvre ce théorême général, qu'une pyramide a pour mesure le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

La solidité d'une pyramide quelconque, est le produit de sa base par le tiers de sa hauteur.

XLIII.

COMME nous avons vû (Article XXI.) que la solidité d'un prisme, est le produit de la base par la hauteur, il est clair, par l'Article précédent, que les pyramides seront toûjours le tiers des prismes qui auront même base & même hauteur.

La pyramide est le tiers du prisme qui a même base & même hauteur.

XXX.

Les réfléxions suivantes confirmeront ce soupçon.

Soient ABCDE, *abcde*, deux pyramides, dont les hauteurs AH, *ah*, soient les mêmes, & dont les bases soient deux figures égales, par exemple, deux quarrés égaux BCDE, *bcde*; si on conçoit que ces deux pyramides soient coupées par une infinité de plans paralléles à leurs bases, on imaginera, sans peine, que ces coupes de pyramide donneront des quarrés égaux IKLM, *iklm*, & par conséquent, que les deux pyramides peuvent être regardées comme des assemblages d'un même nombre de tranches, qui dans ces deux pyramides seront égales chacune à sa correspondante. Donc, conclura-t-on, la somme des tranches est la même, de part & d'autre : c'est-à-dire, que les deux pyramides ont la même solidité.

XXXIX.

Les pyramides qui ont même hauteur, sont entr'elles comme leurs bases.

SI la base *bcdef* de la premiere pyramide contenoit un certain nombre de fois la base *rst*, la solidité de la premiere pyramide *abcdef*, contiendroit le même nombre de fois la solidité de la seconde *arst*.

Car, en ce cas, la base *bcdef* étant divisée en plusieurs parties, dont chacune fût égale à la base *rst*, on pourroit concevoir la pyramide *abcdef*, comme composée de plusieurs autres pyramides, qui auroient pour bases les parties de *bcdef*. Or chacune de ces nouvelles pyramides seroit égale à la seconde pyramide *arst*, selon que nous l'avons prouvé dans l'Article précédent. Donc, &c.

ANNEXE 5 :

PROBLEME 1ère S

Le calcul du volume d'une pyramide d'après les *Eléments de Géométrie* de A.M Legendre (1794)

On suppose connue la formule V = Bh donnant le volume V d'un prisme de hauteur h et dont la base a pour aire B et on se propose d'établir une formule permettant de calculer le volume d'une pyramide.

I Démonstration de la proposition XVI (livre VI)

Soit SABC une pyramide triangulaire dont S est le sommet et ABC la base; si on divise les côtés SA, SB, SC, AB, AC, BC, en deux parties égales aux points D, E, F, G, H, I, et que par ces points on tire les lignes DE, EF, DF, EG, FH, EI, GH, je dis qu'on pourra considérer la pyramide SABC, comme composée de deux prismes AGHFDE, EGICFH, équivalents entre eux, et de deux pyramides égales SDEF, EGBI.

1) Faire la figure proposée. Donner la définition d'un prisme et démontrer que EGICFH, et, AGHFDE sont des prismes.
2) Soit O et P les projetés orthogonaux de S sur (ABC) et sur (DEF). Montrer que P est le milieu de (S,O). Montrer que le volume de AGHFDE vaut $\frac{1}{8}\mathcal{A}(ABC)\times SO$ ($\mathcal{A}(ABC)$désigne l'aire de ABC).
3) Soit X et Y les points définis par $\overrightarrow{CX} = \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{IY}$. Quelle est la nature du solide EGIYXFHC ? Calculer son volume, celui du prisme EGICF et comparer ce dernier avec le volume de AGHFDE. Comment doit-on comprendre l'expression "prismes équivalents" utilisée par Legendre ?
4) Démontrer que la pyramide SDEF a pour image EGBI par une translation à préciser. Que peut-on dire de ces 2 pyramides et de leurs volumes ?

II Démonstration des corollaires I et II

1) Montrer que le volume de SABC est supérieur au double du volume de AGHDE et en déduire le corollaire I :
"solidité" signifie volume.

la solidité d'une pyramide triangulaire est plus grande que le quart du produit de sa base par sa hauteur.

2) Quelle est l'image de la pyramide SDEF par la translation de vecteur SD? Comparer les volumes de SDEF et AGHFDE. En déduire que le volume de SABC est inférieur à 4 fois le volume du prisme AGHFDE puis démontrer le corollaire II.

: la solidité de toute pyramide triangulaire est moindre que la moitié du produit de sa base par sa hauteur.

II Lecture de la proposition XVII

A.1.) lire les lignes 1 à 8.
Nous allons suivre la démonstration de Legendre, qui est une double démonstration par l'absurde (lire lignes 9 à 11).

Legendre veut d'abord montrer que le volume V de la pyramide SABC ne peut être supérieur à $\frac{1}{3}\mathcal{A}(ABC)\times SO$. Il suppose (hypothèse H_A) que

$V = (\frac{1}{3}\mathcal{A}(ABC) + M) \times SO$ avec M, réel strictement positif.

2°) Lire les lignes 12 à 34
Quelle formule obtient Legendre pour le volume de SDEF? Reprenez, avec vos propres termes la démonstration de cette formule.
3°) Legendre imagine alors une suite de pyramides de sommet S. Expliquer comment on obtient une pyramide à partir de la précédente (lire les lignes 35 à 43).

- Considérons la suite (h_n) des hauteurs de ces pyramides, $h_0=SO$.
Quelle est la nature de la suite (h_n)?

- Soit (a_n) la suite des aires des faces opposées à S de ces pyramides. $a_0=\mathcal{A}(ABC)$. Quelle est la nature de la suite (a_n) ? Exprimer a_n en fonction de n. Préciser le sens de variation et la limite de la suite (a_n).

4) Lire les lignes 43 à 48. Justifier l'existence de la pyramide Sabc telle que $\mathcal{A}(abc)<6M$. Quel est le volume de la pyramide Sabc?
Lire les lignes 48 à57. A quelle contradiction aboutit le raisonnement de Legendre? Que peut-on en conclure?

B. A partir de la ligne 58 Legendre veut montrer que le volume V de la pyramide SABC ne peut être inférieur à $\frac{1}{3}\mathcal{A}(abc).SO$.

Il suppose (H_B) : $V= SO\times(\frac{1}{3}\mathcal{A}(ABC)-M)$ (avec M un réel positif) et imagine la même suite de pyramides qu'en A.
1°) Démontrer que, avec l'hypothèse (H_B), le volume de SDEF est égal à $SP\times(\frac{1}{3}\mathcal{A}(DEF)-M)$.

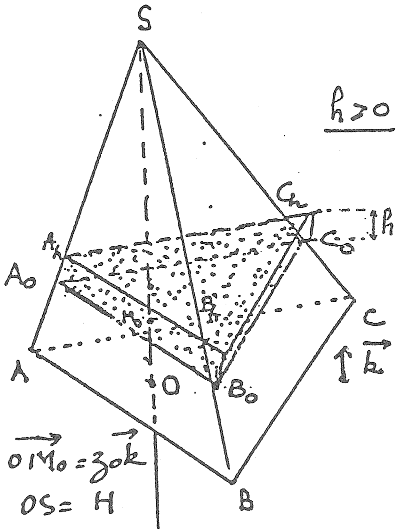
2°) Justifier l'existence de la pyramide Sabc vérifiant $3M < \mathcal{A}(abc) \leq 12M$.
A quelle contradiction aboutit le raisonnement? Quelle est donc la conclusion de Legendre?

<u>Question complémentaire :</u>
Cette formule peut-elle s'étendre à une pyramide dont la base n'est pas triangulaire? Justifier la généralisation de la formule.

Le texte joint est celui de la proposition XVII (Annexe 2)

<u>Conseil pour le professeur :</u> dans l'énoncé de la 1ère question, j'ai demandé aux élèves de rechercher la définition d'un prisme. La plupart ont eu recours aux dictionnaires, qui n'ont pas souvent donné de définition très commode ; certains élèves ont montré, de façon très

fastidieuse que toutes les faces des solides considérés étaient des parallélogrammes. Il est souhaitable d'orienter les élèves vers la définition du prisme à l'aide d''une translation qui transforme une base en l'autre.



ANNEXE 6 :

Volume d'une pyramide.

L'homothétie h de centre S de rapport $1-\frac{z_0}{H}$ est telle que :

$h(O)=M_0$
$h(ABC)=A_0B_0C_0$

Soit $a(z_0)$ l'aire de $A_0B_0C_0$

$a(z_0)=\left(1-\frac{z_0}{H}\right)^2 \times B$ avec $B=\mathcal{A}(ABC)$

. Soit $V(z_0)$ le volume du tronc de pyramide $ABCA_0B_0C_0$.

Pour $h > 0$, $V(z_0+h)-V(z_0)$ est le volume hachuré du tronc de pyramide $A_0B_0C_0A_hB_hC_h$

Ce volume est compris entre celui du "prisme intérieur" de base $a(z_0+h)$ et de hauteur h et celui du "prisme extérieur" de base $a(z_0)$ et de hauteur h.

$$a(z_0+h) \times h \leqslant V(z_0+h)-V(z_0) \leqslant a(z_0) \times h$$

$$a(z_0+h) \leqslant \frac{V(z_0+h)-V(c)}{h} < a(z_0)$$

donc $\lim\limits_{\substack{h\to o \\ h>o}} \frac{V(z_0+h)-V(z_0)}{h} = a(z_0) = B\left(1-\frac{z_0}{H}\right)^2$

Pour h<o on a : $a(z_0+h) \leqslant \frac{V(z_0+h)-V(z_0)}{h} \leqslant a(z_0+h)$ donc le même résultat donc

V est dérivable et $V'(z) = B\left(1-\frac{z}{H}\right)^2$ or $v(0)=0$

donc

$$V(H) = \int_0^H B\left(1-\frac{z}{H}\right)^2 dz = B\left[z-\frac{z^2}{H}+\frac{z^3}{3H^2}\right]_0^H = \frac{1}{3}BH$$

NOTES

* Je remercie le groupe M: A.T. H. et tout particulièrement Martine Bühler et Jean-Luc Verley pour leur aide, leurs critiques et leurs conseils.

(1) Je ne sais rien des trois premières éditions auxquelles je n'ai pas pu malheureusement avoir accès, mais dans la préface de la 12ème édition, Legendre indique qu'il transforme la démonstration, lui redonnant un caractère plus proche de celui de la démonstration de la 1ère édition

(2) Hilbert tentait de deviner le futur des mathématiques par un choix de 27 questions qui ouvrirent effectivement une grande partie du champ d'investigations du 20ème siècle.

(3) Dans un article des Nouvelles Annales de Mathématiques, R. Bricard en 1896 avait déjà devancé la question de Hilbert et répondu par la négative. La démonstration repose sur des relations entre les dièdres des solides et l'incommensurabilité du dièdre du tétraèdre régulier avec celui du cube.

(4) Ce qu'Euclide appelle hauteur du prisme P_1 ne correspond pas à la définition actuelle (distance entre les bases parallèles).

(5) L'un des prismes contient la pyramide KEBZ égale à chacune des deux "petites pyramides". Le volume des deux prismes est supérieur au volume des deux petites pyramides et supérieur à la moitié du volume de Π.

(6) Dans cette proposition, Euclide met à jour ce que nous pouvons comprendre comme une suite qui tend vers 0. "Deux grandeurs inégales étant données, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié et si l'on fait toujours la même chose, il restera une grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs données".

(7) Bien entendu, Euclide n'établit pas la formule V=\F(1,3) Bh comme le fera Legendre, il ne calcule pas un volume, mais le compare à un autre, connu.

(8) Le volume d'un prisme a été calculé auparavant et à la proposition XV, Legendre a montré qu'étant données deux pyramides de même hauteur et de bases B et B', situées dans un même plan, leurs sections S et S' par un même plan parallèle au plan des bases, sont semblables aux bases dans le même rapport. (\F(S,S') = \F(B,B')).

(9) Dans la définition 10 du livre XI : "Les figures solides égales sont celles qui sont comprises par des plans semblables, égaux en nombre et en grandeur", Euclide ne se préoccupe pas, comme Legendre, de l'égalité des angles dièdres (ce qui d'ailleurs ne pose pas de problèmes pour les solides considérés ici).

(10) On peut remarquer que Legendre évite tout usage de quantités négatives, même pour établir la contradiction d'un raisonnement par l'absurde.

(11) Je m'inspire pour cette définition de l'article de F. de Gandt dans la brochure APMEP n° 65 "Fragments de l'histoire des mathématiques II" (1987).
(12) Dans ses *Eléments de Géométrie* ,écrits pour des commençants, Clairaut ne fait pas usage du langage des rapports. Si les bases B et B' sont incommensurables, Clairaut suggère de "diminuer à l'infini" la mesure X pour qu'elle puisse être, à peu de chose près, considérée comme mesure commune à B et B'.
(13) L'expérimentation sous forme de devoir à la maison permet de tester clairement la lisibilité et la difficulté d'un énoncé. Mais cette activité peut être, par exemple, décomposée en un exercice préparé à la maison (1ère partie) et un T.P en classe (lecture et commentaire du texte).

BIBLIOGRAPHIE

EUCLIDE *Les Eléments* traduction Peyrard édition Blanchard 1966

EUCLIDE *The 13 books of the Elements*
traduction Heath édition Dover 1956

A.M. LEGENDRE *Eléments de Géométrie* (1794)
12° édition 1823

A.C. CLAIRAUT *Eléments de Géométrie* (1741)

S. LACROIX *Eléments de Géométrie* (1811)

Père LAMY *Eléments de Géométrie* (1685)

R. BRICARD in Nouvelles Annales de Mathématiques 1896 : *Sur une question de géométrie relative aux polyèdres*

E. BARBIN *Heuristique et démonstration en mathématiques : la méthode des Indivisibles au XVII° siècle* Brochure APMEP n° 65 1987

F. de GANDT *Naissance et métamorphose d'une théorie mathématique, la géométrie des Indivisibles en Italie.* Brochure APMEP n° 65 1987