PERIMETRE ET SURFACE DU CERCLE DANS LES MANUELS FRANCAIS DE LA FIN DU 18èME SIECLE : BEZOUT, PEYRARD, LEGENDRE ET LACROIX.

Pierre LAMANDE

Les quatre textes proposés contiennent tous des démonstrations des mêmes propositions : surface et périmètre d'un cercle. De plus, ils sont extraits de manuels français dont les dates de parution sont rapprochées. Le "*Cours de mathématiques à l'usage des gardes du pavillon et de la marine*" de Bézout eut sa première édition entre 1764 et 1769. A partir de 1795, ce traité fut republié par Peyrard qui y joignit de copieux additifs. La première version des "*Eléments de géométrie*" de Legendre date de 1794 et celle de "*Eléments de géométrie à l'usage de l'Ecole Centrale des Quatre Nations*" de Lacroix parut en 1799. Pour autant, et c'est là notre propos, les preuves fournies sont très diverses. Les différences observées ne sont pas conséquences de considérations pédagogiques ou didactiques, mais bien dues à des visions profondément divergentes sur la nature des théories mathématiques et de leur devenir. Nos quatre auteurs partent tous des mêmes données, théorème de Thalès et surface des triangles, pour établir les périmètres et les surfaces des polygones réguliers [1]. Ces résultats sont rappelés dans les n°135 et 150 de Bézout.

La démonstration du "*Cours de mathématique à l'usage des gardes du pavillon et de la marine*" est caractéristique de la tradition française inaugurée par Pierre de la Ramée, dit Ramus, et surtout par "*Les nouveaux éléments de géométrie*" d'Arnauld (Paris 1667). La tradition euclidienne déjà mise à mal par Descartes dans sa "*Géométrie*" (Leyde 1637) était abandonnée par les auteurs français au profit d'un appel à l'évidence, à l'intuition. L'ordre euclidien fut profondément bouleversé et les démonstrations par l'absurde pour l'essentiel abandonnées. Le lien entre les résultats prouvés sur les polygones réguliers et ceux désirés sur les cercles est obtenu de manière presque immédiate par un passage à la limite. Le cercle est en effet considéré comme un polygone régulier d'une infinité de côtés. Dans cette optique Bézout peut facilement conclure que "*les circonférences de cercle sont entre elles comme leurs rayons ou leurs*

---

[1] Là encore les méthodes utilisées pour aboutir à ces résultats diffèrent.

diamètres"(n°136) et que "*pour avoir la surface d'un cercle, il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon*"(n°151). Bézout donne ensuite des valeurs approchées du rapport de la circonférence au diamètre [2]. Ce type de preuve est totalement cohérent avec la philosophie de Bézout dans l'ensemble de ses traités . Certes des raisons pédagogiques peuvent être recherchées pour expliquer la nature simple , sinon simpliste , de ce type de justification. Les résultats obtenus sans grande difficulté permettaient d'établir rapidement le corpus nécessaire aux ingénieurs militaires destinataires de ces ouvrages. Il s'agissait de former non des mathématiciens mais des techniciens. Mais là n'est pas l'essentiel. Comme beaucoup d'auteurs de l'époque, Bézout se jugeait parfaitement en droit d'utiliser cet appel à l'intuition. Les mathématiques, issues du monde réel, n'ont pas pour lui à justifier leurs principes de base : leur évidence repose sur la perception sensible que nous en avons, fondement de notre connaissance. On retrouve ici l'influence condillacienne si forte durant le 18ème siècle français.

L'ironie peut être facile. Pourtant, lorsque nous définissons une courbe rectifiable AB comme celle où l'ensemble suivant est borné

$$\left\{ L_\sigma = \sum_{i=1}^{n} \|M_i M_{i-1}\| \quad \text{où } \sigma = M_0, M_1, \ldots, M_n \text{ est une suite de points de AB} \right\}$$

et que nous appelons longueur de cette courbe la borne supérieure de cet ensemble, c'est toujours la même idée qui est en jeu. [3]

La philosophie sous-jacente à ce genre de raisonnement avait déjà fait l'objet de critiques , notamment de la part de d'Alembert [4]. Il fallut cependant attendre la Révolution pour voir de nouveaux manuels qui allaient essayer de fonder la géométrie sur des bases différentes. Les principaux ouvrages, au moins par leur audience, sont les trois derniers titres dont nous avons tiré les démonstrations proposées.

Peyrard réclame un retour aux Anciens. Il les connaissait bien car c'est lui qui fit entre 1814 et 1818 l'édition trilingue (grec, latin, français) des *Eléments* d'Euclide , puis en 1819 l'édition française. Il traduisit Archimède en 1807. Pour autant, lors de sa réédition du Bézout, ses notes ne suivirent pas toujours la

---

2 il cite la valeur donnée par Archimède de 22/7, celle d'Adrien Métius de 355/113 sans donner aucune preuve. Archimède encadrait π entre 3+10/71 et 3+1/7 .

3 Lorsque la courbe AB est définie par $\{(x(t),y(t)) : t \in [ab]\}$ avec $t \to (x(t),y(t))$ de classe C^1 par morceaux, on retrouve que la longueur égale $\int_a^b \sqrt{x'(t^2) + y'(t^2)}\, dt$, formule souvent prise pour définition.

4 "Mélanges de littérature , d'histoire et de philosophie" Amsterdam 1759. Réédition partielle "Essai sur les éléments de philosophie" Paris 1986

logique des illustres grecs.[5] Cependant, dans les propositions que nous étudions, Peyrard copie scrupuleusement Euclide et Archimède. La proposition 85 n'est autre qu'Euclide X 1. La seconde (n°86), que l'on peut écrire en termes contemporains "si B est le milieu de l'arc AC, alors le triangle ABC est plus grand que la moitié du secteur angulaire $\widehat{ABC}$ compris entre l'arc $\widehat{AC}$ et le segment AC", est tirée d'Euclide XII 2 (cf. figure 48). La troisième (n°87), trouve son origine dans "*De la mesure du cercle*" d'Archimède. La quatrième (n°88) est toujours due à Archimède (Peyrard décompose en deux propositions la preuve archimédienne). La cinquième (n°90) reprend mot à mot Euclide XII 2. La dernière (notée faussement 87) est une conséquence directe des deux précédentes. Elle est pourtant absente chez les Grecs ; on retrouve ici l'évolution subie par la notion de rapport. En effet, Peyrard comme ses prédécesseurs ne reprend pas la définition euclidienne de rapport de grandeurs et ses conséquences, objet du livre V coeur des *Eléments*. Nombres et grandeurs sont identifiés , notamment grâce à l'approximation permise par le système décimal . Dans ces conditions, si C_1 et C_2 sont deux cercles, T_1 et T_2 deux triangles rectangles ayant pour côtés de l'angle droit le rayon et la circonférence respectivement de C_1 et de C_2, on déduit des deux résultats précédents l'égalité :

$$\frac{\text{aire } C_1}{\text{aire } C_2} = \frac{(\text{circonf } C_1)^2}{(\text{circonf } C_2)^2} = \frac{\text{aire } T_1}{\text{aire } T_2} = \frac{\text{diamètre } C_1 \times \text{circonf } C_1}{\text{diamètre } C_2 \times \text{circonf } C_2}$$

d'où $$\frac{\text{circonf } C_1}{\text{circonf } C_2} = \frac{\text{diamètre } C_1}{\text{diamètre } C_2}$$

Nous retrouvons donc globalement chez Peyrard l'esprit des anciens géomètres. Pour autant , si la démonstration par l'absurde est redevenue le principe essentiel de la rigueur mathématique, la philosophie grecque est profondément trahie. L'acceptation des grandeurs comme extension des nombres porte le sceau de l'évolution des mathématiques opérée depuis les premiers travaux algébriques des arabes et poursuivie par la tradition européenne.

L'oeuvre de Legendre se situe à un autre niveau. Rompant avec l'architecture euclidienne, admettant lui aussi l'extension des propriétés des nombres aux grandeurs[6], Legendre s'est profondément interrogé sur les points délicats de la géométrie euclidienne (théorie des parallèles, égalité des polyèdres...) et a intégré dans sa géométrie des résultats récents , ouvrant ainsi

---

[5] P. LAMANDE. "L'enseignement de la géométrie en France à la fin du 18ème siècle : les ouvrages de Legendre, Peyrard et Lacroix." à paraitre.

[6] Legendre , contrairement à Bézout , Peyrard et Lacroix, n'a pas rédigé de traité complet, mais uniquement une géométrie. Il n'insiste pas beaucoup sur ce point apparemment acquis.

de nouvelles perspectives(conjecture d'Euler) [5]. La nature même des preuves données ici révèle l'évolution.

La proposition IX essaie de redémontrer ce qui pour Archimède était un axiome, à savoir la comparaison entre la longueur d'une ligne courbe et celle d'une ligne convexe qu'elle enveloppe. En fait, la démonstration n'aboutit pas. Bien que Legendre admette que par tout point d'une courbe convexe, il passe une droite qui ne rencontre cette courbe qu'au point, il ne réussit à établir (grâce à l'inégalité triangulaire qui est chez lui un axiome) qu'un résultat : si l'on se donne une ligne enveloppante différente de la courbe convexe, on peut construire une autre ligne enveloppante plus courte. Cette proposition n'est pas moins révélatrice de la volonté de Legendre de minimiser le nombre d'axiomes. La proposition X est la clé des autres démonstrations . Grâce aux constructions qu'il y développe , Legendre peut comparer le rapport des circonférences des cercles ou de leurs surfaces au rapport de leurs diamètres. Il ne rédige d'ailleurs que la démonstration concernant le rapport des périmètres[7]. Elle fait intervenir un raisonnement par l'absurde mais d'une manière beaucoup plus directe que chez Peyrard. La proposition XII affirme que l'aire du cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon. La preuve est toujours par l'absurde et repose sur les constructions de la proposition X. Le raisonnement est cependant beaucoup plus direct que la preuve euclidienne. On retrouve bien ici une caractéristique de Legendre. Il met systématiquement en application les voies les plus rapides. Si sa géométrie est fondamentalement de nature axiomatique, il désire avant tout diminuer le nombre de postulats admis et , pour ce, recherche le fondement des démonstrations géométriques . Le procédé de dichotomie, le principe d'Eudoxe (Euclide XI) , si chers aux grecs , ne sont plus chez Legendre les passages obligés. La comparaison avec Peyrard montre l'efficacité de la méthode adoptée. Cependant, celle-ci reste fondamentalement géométrique : dans le corps même du texte, Legendre se refuse à toute intrusion de l'analyse.[8]

Telle n'est pas la conception de Lacroix. On retrouve chez ce dernier la volonté de démonstrations directes, reflètant la "*méthode analytique*" qui lui est chère. Le n°150 par lequel nous commençons le texte , est le corollaire d'une proposition où est montré comment l'on peut , à partir d'un polygone régulier inscrit dans un cercle , construire un autre polygone régulier circonscrit ayant

---

5

[7]Il se contente de dire : "Un raisonnement et une construction entièrement semblables serviront à démontrer que les surfaces des cercles sont comme les carrés des rayons". Cette démonstration est pourtant plus simple, les inégalités entre surfaces étant plus faciles à admettre que les inégalités de longueur.

[8]Il faut excepter la "démonstration" donnée de la 3ème à la 8ème édition de son ouvrage, de l'égalité de la somme des trois angles d'un triangle à deux droits. Elle est basée sur la notion de fonction et la "loi d'homogénéité" .Elle fut reprise en note dans les éditions suivantes.

même nombre de côtés. (figure 87, on mène les tangentes aux sommets) et réciproquement. Le paragraphe n°150 exprime le rapport entre le côté du polygone circonscrit, celui du polygone inscrit et le rayon du cercle. La remarque 151 est fondamentale car elle note que si , par dichotomie , on double le nombre de côtés des polygones réguliers inscrits et circonscrits, la différence entre les deux périmètres diminue et peut être rendue aussi petite que l'on veut. Admettant le principe d'Archimède que Legendre voulait démontrer , Lacroix en déduit au n°152 que l'on peut construire un polygone régulier circonscrit au cercle tel que la différence entre le périmètre de ce polygone et celui du cercle soit moindre qu'une grandeur donnée. Suit la proposition 153 qui est un pur lemme d'analyse :" *Si deux grandeurs invariables A et B sont telles que l'on puisse prouver que leur différence A-B soit moindre qu'une troisième grandeur ∂, quelque petite que puisse être cette dernière, ces deux grandeurs sont égales entre elles.*"[9]. Grâce à ce résultat, il prouve immédiatement, que les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons. En effet, si $\frac{C}{C'}$ est le rapport invariable des circonférences, $\frac{R}{R'}$ le rapport invariable des rayons , $\frac{P}{P'}$ le rapport des périmètres des polygones réguliers circonscrits , on a $\frac{P}{P'} = \frac{R}{R'}$ et la différence entre $\frac{C}{C'}$ et $\frac{R}{R'}$ étant aussi petite que l'on veut , on en déduit l'égalité $\frac{C}{C'} = \frac{R}{R'}$. Ceci suppose évidemment ce qu'on appelle aujourd'hui la continuité du quotient. C'est un principe identique qui joue pour le calcul de la surface d'un cercle (n°185 à 187).

Lacroix évite complètement le raisonnement par l'absurde. On voit ici l'utilisation de la méthode analytique - passage du connu (aire et périmètre des polygones réguliers) à l'inconnu (aire et périmètre des cercles) grâce à la notion de limite dont les présupposés sont clairement dégagés. L'art d'inventer est dévoilé mais la théorie des proportions et les propriétés des réels étant largement utilisée[10] on s'éloigne autant des preuves purement géométriques d'un Legendre.

Aux notions largement intuitives et non justifiées sur lesquelles Bézout fondait ses preuves, nos trois auteurs ont opposé des rigueurs très variées. Peyrard retourne aux principes démonstratifs des Anciens . Legendre les réordonne dans une logique qui lui est propre, où les méthodes grecques sont réutilisées dans un nouveau cadre conceptuel . Lacroix enfin, conséquent avec sa foi en la prééminence de la méthode analytique, centre ses démonstrations sur la

---

[9]Manifestement il suppose A>B.

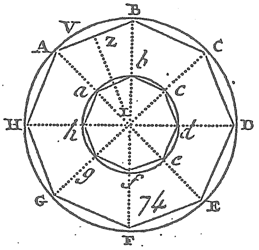
[10]Les grandeurs forment un corps archimédien totalement ordonné. La continuité des quatre opérations est également supposée.

notion de limite Si Peyrard n'ouvre pas de voie nouvelle , Lacroix et Legendre, chacun à sa manière, tendent bien à reconstruire l'édifice géométrique. Tous deux répondent à la demande de Laplace formulée à l'Ecole Normale de l'an III "*Préférez dans l'enseignement les méthodes générales, attachez vous à les présenter de la manière la plus simple et vous verrez en même temps qu'elles sont presque toujours les plus faciles.*"
Les trois manuels de Peyrard, Legendre et Lacroix ont une structure logique qui répond à des nécessités purement internes aux mathématiques. Dans les démonstrations que nous avons étudiées la question principale était la notion de limite . Peyrard et Lacroix dans les préfaces de leurs ouvrages expliquent longuement les principes qu'ils ont adoptés et qu'ils mettent en oeuvre dans l'étude du cercle entre autres (en fait les mêmes méthodes servent pour l'étude des corps ronds : sphères , cônes , cylindres , etc...).

Sous-jacent à toutes ces démonstrations et expliquant leur diversité, ce sont fondamentalement des optiques différentes sur les mathématiques et leur devenir qui ont guidé nos auteurs. Les méthodes de démonstration ne sont pas intemporelles. Elles renvoient à un corpus théorique et à une philosophie qui les justifie. Bien sûr, les soucis pédagogiques ou didactiques ne sont pas absents. Lacroix en particulier s'explique longuement sur ce point[11]. Mais, ils ne sont pas primordiaux. Le succès de Bézout, Legendre, Peyrard et Lacroix pendant plus de trente ans montre que leurs réflexions trouvèrent un écho. L'alliance de simplicité et de rigueur que nous trouvons aussi bien chez Legendre que chez Lacroix est le signe d'une pensée mathématique strictement organisée en fonction de quelques idées force. Leur richesse dépasse l'habileté du pédagogue pour développer une pensée à la fois exigeante et féconde. Leurs contemporains l'ont bien senti.

[11] Lacroix : Essais sur l'enseignement en général et celui des mathématiques en particulier"Paris 1805.

135. Si l'on conçoit la circonférence ABCDEFGH (fig. 74) divisée en tel nombre de parties égales qu'on voudra, et si, ayant tiré du centre I, aux points de division, des rayons IA, IB, etc. on écrit d'un autre rayon Ia, la circonférence $abcdefgh$, rencontrée par ces rayons aux points a, b, c, d, etc., il est évident que si dans chaque circonférence on joint les points de division par des cordes, on formera deux polygones semblables; car les triangles ABI, abI, etc. sont semblables, puisqu'ils ont un angle commun en I compris entre deux côtés proportionnels; car IA étant égal à IB, et Ia égal à Ib, on a évidemment AI : BI : : aI : bI, et la même chose se démontre de même pour les autres triangles. De là et de ce qui vient d'être dit (134), on conclura donc que le contour ABCDEFGH est au contour $abcdefgh$: : AB : ab, ou (à cause des triangles semblables ABI, abI) : : AI : aI. Comme cette similitude ne dépend point du nombre des côtés de ces deux polygones, elle aura donc encore lieu, lorsque le nombre des côtés de chacun sera multiplié à l'infini : or, dans ce cas, on conçoit qu'il n'y a plus aucune différence entre la circonférence et le polygone inscrit; donc les circonférences mêmes ABCDEFGH, $abcdefgh$ seront entre elles : : AI : aI, c'est-à-dire, comme leurs rayons, et par conséquent aussi comme leurs diametres.



74

136. Concluons donc, 1° *qu'on peut regarder la circonférence du cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés.*

2° *Les cercles sont des figures semblables.*

3° *Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons ou comme leurs diametres.*

150. *Si le polygone étoit régulier* (fig. 53); comme tous les côtés sont égaux, et que toutes les perpendiculaires menées du centre sont égales; en le concevant composé de triangles qui ont leur sommet au centre, on auroit la surface, en multipliant un des côtés par la moitié de la perpendiculaire, et multipliant ce produit par le nombre des côtés; ou, ce qui revient au même, en multipliant le contour par la moitié de la perpendiculaire.

151. Puisqu'on peut (136) considérer le cercle comme un polygone régulier d'une infinité de côtés, il faut donc conclure que *pour avoir la surface d'un cercle; il faut multiplier la circonférence par la moitié du rayon.*

Car la perpendiculaire menée sur un des côtés ne differe pas du rayon, lorsque le nombre des côtés est infini.

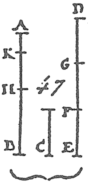
Peyrard

85. *Deux grandeurs inégales étant données, si de la plus grande on retranche une partie plus grande que sa moitié, si du reste on retranche une partie plus grande que sa moitié, et ainsi de suite, il restera enfin une certaine grandeur, qui sera moindre que la plus petite des deux grandeurs données.*

Soient les deux grandeurs inégales AB, C (47), et que C soit la plus petite; je dis que si de AB on retranche une partie plus grande que sa moitié, si du reste on retranche une partie plus grande que la moitié, et ainsi de suite, il restera enfin une certaine grandeur moindre que la grandeur C.

En effet, la grandeur C étant multipliée par un nombre convenable, deviendra plus grande que la grandeur AB; qu'elle soit multipliée, et que DE soit un multiple de C plus grand que AB. Partageons DE en parties égales chacune à C, et que ces parties soient EF, FG, GD. De AB retranchons une partie BH plus grande que sa moitié; de AH retranchons une partie HK plus grande que sa moitié, et ainsi de suite jusqu'à ce que le nombre des parties de AB soit égal en nombre aux parties de DE; que les parties de AB soient AK, KH, HB.

Puisque DE est plus grand que AB; que l'on a retranché de DE une partie EF plus petite que sa moitié, et que l'on a retranché de AB une partie BH plus grande que sa moitié, il est évident que le reste FD est plus grand que le reste HA. De plus, puisque FD est plus grand que HA; que l'on a retranché de FD une partie égale à sa moitié, et que l'on a retranché de HA une partie plus grande que sa moité, il est évident que le reste DG est plus grand que le reste AK. Mais DG est égal à C; donc AK est plus petit que C: donc il reste de la grandeur AB une grandeur moindre que la grandeur donnée C.

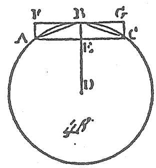


86. *Si un triangle est décrit sur une corde dans un segment plus petit que le demi-cercle, et si ce triangle a son sommet dans le milieu de l'arc, ce triangle sera plus grand que la moitié du segment.*

Soit le cercle ABC (fig. 48), que le segment ABC soit plus petit que la moitié du cercle ABC; que la corde AC soit la base du triangle ABC, ayant son sommet dans le milieu de l'arc ABC; je dis que le triangle ABC est plus grand que la moitié du segment ABC.

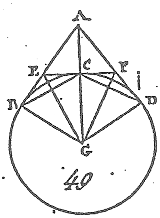
Menons le rayon DB, et par le point B la tangente FG; par les points A et C conduisons les droites AF, CG, parallele à DB. La figure AG sera un rectangle, et ce rectangle sera partagé en deux parties égales par le rayon DB.

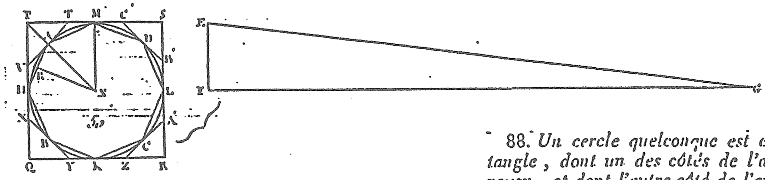
Puisque le triangle BEA est égal au triangle BAF, et le triangle BEC égal au triangle BCG, le triangle ABC sera égal à la moitié du rectangle AG; donc le triangle ABC est plus grand que la moitié du segment ABC; donc, etc.



87. *Si d'un point pris hors d'un cercle BCD (fig. 49), on mene deux tangentes AB, AD à ce cercle, et si par le point C, milieu de l'arc BCD, on mene la tangente EF, le triangle EAF sera plus grand que la moitié de la figure BADCB, comprise par les droites BA, AD, et par l'arc BCD.*

Menons les cordes BC, CD, les droites GE, GA et le rayon GB. Les deux triangles GEB, GEC sont égaux, puisqu'ils sont rectangles, et qu'ils ont deux côtés égaux chacun à chacun; donc EB est égal à EC; mais AE est plus grand que EC, puisque AE est l'hypothénuse du triangle-rectangle AEC; donc AE est plus grand que EB; donc le triangle ECA est plus grand que le triangle ECB; donc, à plus forte raison, le triangle ECA est plus grand que la surface BECB, comprise par les droites BE, EC et par l'arc BC. Le triangle FCA est par la même raison plus grand que la surface DFCD comprise par les droites entre DF, FC, et par l'arc CD; donc le triangle entier AEF est plus grand que la somme des surfaces BECB, DFCD, dont la premiere est comprise par les droites BE, EC et par l'arc BC, et dont la seconde est comprise par les droites DF, FC et par l'arc CD; donc le triangle EAF est plus grand que la moitié de la figure BADCB, comprise par les droites BA, AD et par l'arc BCD; donc, etc.





88. *Un cercle quelconque est égal à un triangle rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est égal au rayon, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal à la circonférence.*

Soit le cercle ABCD (fig. 50), et le triangle EFG rectangle en F; que EF soit égal au rayon, et FG égal à la circonférence; je dis que le triangle EFG est égal au cercle ABCD.

Si ce triangle n'est pas égal au cercle à ABCD, il est plus grand que ce cercle, ou bien il est plus petit; qu'il soit plus petit que ce cercle, si cela est possible. Inscrivons dans ce cercle le quarré HKLM; ce quarré sera plus grand que la moitié du cercle, puisque ce quarré est la moitié du quarré circonscrit. Partageons les arcs MH, HK, KL, LM en deux parties égales aux points A, B, C, D, etc., et menons les cordes AH, HB, BK, etc. La somme des triangles MAH, HBK, etc. sera plus grande que la moitié de la somme des segmens MAH, HBK, etc. Partageons les arcs restans en deux parties égales; joignons les extrémités de ces arcs, et continuons de faire la même chose jusqu'à ce que la somme des segmens restans soit plus petite que l'excès du cercle ABCD sur le triangle EFG, ce qui est toujours possible (84).

Supposons que la somme des segmens restans AH, HB, BK, etc. soit plus petite que cet excès, c'est-à-dire, jusqu'à ce que l'excès du cercle ACD, sur le polygone inscrit, soit plus petit que l'excès de ce cercle sur le triangle; il est évident que le polygone inscrit sera plus grand que le triangle EFG.

Du centre N, menons la droite NR perpendiculaire sur AH. Le polygone AHBKCLDM sera égal à un triangle-rectangle, dont un des côtés de l'angle droit est égal à NR, et dont l'autre côté de l'angle droit est égal au contour de ce polygone; mais NR est plus petit que le côté EF, et le contour du polygone est plus petit que le côté FG; donc le polygone AHBKCLDM est plus petit que le triangle EFG; mais nous avons démontré que ce polygone est au contraire plus grand, ce qui est absurde : donc le triangle EFG n'est pas plus petit que le cercle ABCD.

Que le triangle EFG soit plus grand que le cercle ABCD, si cela est possible. Circonscrivons un quarré PQRS au cercle ABCD. Le quarré inscrit étant la moitié du quarré circonscrit, le cercle ABCD sera plus grand que la moitié du quarré circonscrit; par les points A, B, C, D, milieu des arcs MH, HK, etc., menons les tangentes TV, XY, ZA', B'C'. Le triangle TPV sera plus grand que la moitié de la figure HPMAH comprise par les droites HP, PM et par l'arc HAM (83). Il en est de même pour les trois triangles restans XQY, ZRA', B'SC'. Donc la somme des quatre triangles TPV, XQY, ZRA', B'SC' est plus grande que moitié de la somme des surfaces MPHM, HQKH, etc. Partageons ensuite les arcs AH, HB, BK, etc. en deux parties égales : par les points de divisions menons des tangentes, et continuons de faire la même chose jusqu'à ce que l'excès du dernier polygone circonscrit sur le cercle ABCD soit plus petit que l'excès du triangle EFG sur le cercle ABCD; ce qui est toujours possible (84).

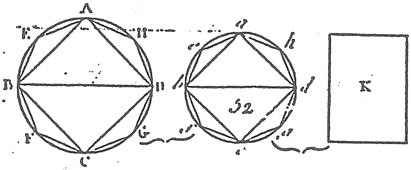
Supposons que l'excès du polygone TVXY, etc. sur le cercle ABCD soit plus petit que l'excès du triangle EFG sur le cercle ABCD; il est évident que le polygone sera plus petit que le triangle EFG, mais au contraire il est plus grand, puisque le polygone est égal à un triangle-rectangle, dont l'un des côtés de l'angle droit est égal à EF, et dont l'autre côté de l'angle droit est plus grand que FG, ce qui est absurde. Donc le triangle EFG n'est pas plus grand que le cercle ABCD. Mais on démontre qu'il n'est pas plus petit; donc il lui est égal. Donc, etc.

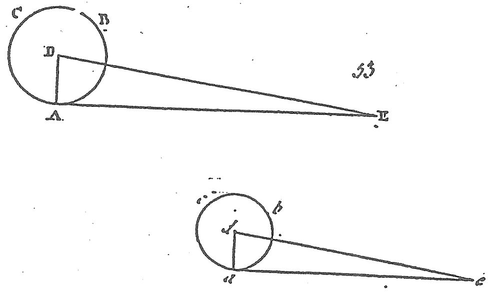
90. *Les cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diametres.*

Soient les cercles ABCD, *abcd* (fig. 52), et que leurs diametres soient BD, *bd*; je dis que le cercle ABCD est au cercle *abcd* comme le quarré de BD est au quarré de *bd*.

Car si cela n'est point, le quarré du diametre BD sera au quarré du diametre *bd* comme le cercle ABCD est à une surface plus grande ou à une surface plus petite que le cercle *abcd*. Supposons d'abord que cette surface soit plus petite, et qu'elle soit K. Dans le cercle *abcd*, décrivons le quarré *abcd*; le quarré inscrit sera plus grand que la moitié de ce cercle, parce que le quarré inscrit dans un cercle est la moitié du quarré circonscrit, et qu'un cercle est plus petit que le quarré circonscrit. Partageons les arcs *ab*, *bc*, *cd*, *de*, en deux parties égales aux points *e*, *f*, *g*, *h*, et menons les cordes *ac*, *eb*, *bf*, *fc*, *cg*, *gd*, *dh*, *ha*. Chacun des triangles *aeb*, *bfc*, *dha* est plus grand que la moitié du segment dans lequel il est placé; partageons ensuite les arcs restans en deux parties égales; joignons leurs extrémités par des droites, et continuons toujours de faire la même chose, jusqu'à ce qu'il nous reste certains segmens de cercles dont la somme soit moindre que l'excès du cercle *abcd* sur la surface K: c'est-à-dire, jusqu'à ce que l'excès du cercle *abcd* sur le polygone inscrit, soit moindre que l'excès du cercle *abcd* sur la surface K. Qu'on ait le polygone inscrit, et que ce polygone soit *aebfcgdh*; il est évident que la surface K sera plus petite que le polygone. Décrivons dans le cercle ABCD un polygone AEBFCGDH semblable au polygone *aebfcgdh*; le quarré de BD sera au quarré de *bd* comme le polygone AEBFCGDH est au polygone *aebfcgdh*; mais par supposition, le quarré de BD est au quarré de *bd* comme le cercle ABCD est à la surface K; donc le cercle ABCD est à la surface K comme le polygone AEBFCGDH est au polygone *aebfcgdh*. Mais le cercle ABCD est plus grand que le polyone qui lui est inscrit; donc la surface K est plus grande que le polygone *aebfcgdh*; mais on a démontré qu'elle est plus petite, ce qui est impossible; donc le quarré de BD n'est point au quarré de *bd* comme le cercle ABCD est à une surface quelconque plus petite que le cercle *abcd*. Nous démontrerons semblablement que le quarré de *bd* n'est point au quarré de BD comme le cercle *abcd* est à une surface quelconque plus petite que le cercle ABCD.

Je dis ensuite que le quarré de BD n'est point au quarré de *bd* comme le cercle ABCD est à une surface quelconque plus grande que le cercle *abcd*. Car si cela est possible, supposons que le quarré de BD soit au quarré de *bd* comme le cercle ABCD est à une surface plus grande, et supposons que K soit cette surface. En mettant les antécédens à la place des conséquens, et les conséquens à la place des antécédens, le quarré *bd* sera au quarré de BD comme la surface K est au cercle ABCD; mais la surface K est au cercle ABCD comme le cercle *abcd* est à une surface quelconque plus petite que le cercle ABCD; car le second antécédent étant plus petit que le premier, le second conséquent doit être plus petit que le premier; donc le quarré de *bd* est au quarré de BD comme le cercle *abcd* est à une surface plus petite que le cercle ABCD, ce qui a été démontré impossible; donc le quarré de BD n'est pas au quarré de *bd* comme le cercle ABCD est à une surface quelconque plus grande que le cercle *abcd*. Mais on a démontré que le quarré de BD n'est point au quarré de *bd* comme le cercle ABCD est à une surface quelconque plus petite que le cercle *abcd*; donc le quarré de BD est au quarré de *bd* comme le cercle ABCD est au cercle *abcd*. Donc les cercles sont entre eux comme les quarrés des diametres.





87. *Les circonférences de cercles sont entre elles comme leurs diametres.*

Soient les cercles ABC, *abc* (fig. 53); je dis que les circonférences ABC, *abc* sont entre elles comme leurs diametres.

Par le point A et *a* menons les tangentes AE, *ae*, et que la droite AE soit égale à la circonférence ABC, et la droite *ae* égale à la circonférence *ae*, et joignons DE et *de*. Le triangle DAE sera égal au cercle ABC, et le triangle *dac* égal au cercle *abc*. Le cercle ABC sera donc au cercle *abc* comme le triangle DAC est au triangle *dac*, et par conséquent, comme le rectangle sous DAE est au rectangle sous *de* (*); mais le cercle ABC est au cercle *abc*, comme le quarré de DA est au quarré de *da* (89); donc le rectangle sous DAE est au rectangle sous *dac* comme le quarré de DA est au quarré de *da*, ou bien le rectangle sous DAE est au quarré de DA comme le rectangle sous *dae* est au quarré de *da*. Mais le rectangle sous DAE est au quarré de DA comme la droite AE est à la droite DA, et le rectangle sous *dac* est au quarré de *da* comme la droite *ae* est à la droite *da*; donc AE : DA : : *ae* : *da*, ou bien AE : *ae* : : DA : *da*; mais AE est égal à la circonférence ABC, et *ae* égal à la circonférence *abc*; donc la circonférence ABC est à la circonférence *abc*, comme le rayon DA est au rayon *da*; comme le diametre de la premiere est au diametre de la seconde.

Legendre

PROPOSITION IX.

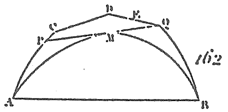
LEMME.

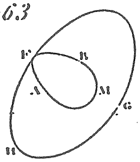
Toute ligne courbe ou polygone qui enveloppe d'une extrémité à l'autre la ligne convexe AMB *est plus longue que la ligne enveloppée* AMB.

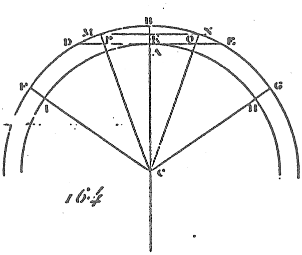
Nous avons déja dit que par ligne convexe nous entendons une ligne courbe ou polygone, ou en partie courbe et en partie polygone, telle qu'une ligne droite ne peut la couper en plus de deux points. Si la ligne AMB avait des parties rentrantes ou des sinuosités, elle cesserait d'être convexe, parce qu'il est aisé de voir qu'une ligne droite pourrait la couper en plus de deux points. Les arcs de cercle sont essentiellement convexes; mais la proposition dont il s'agit maintenant s'étend à une ligne quelconque qui remplit la condition exigée. fig. 162.

Cela posé, si la ligne AMB n'est pas plus petite que toutes celles qui l'enveloppent, il existera parmi ces dernières une ligne plus courte que toutes les autres, laquelle sera plus petite que AMB, ou tout au plus égale à AMB. Soit ACDEB cette ligne enveloppante; entre les deux lignes menez par-tout où vous voudrez la droite PQ, qui ne rencontre point la ligne AMB, ou du moins qui ne fasse que la toucher; la droite PQ est plus courte que PCDEQ; donc, si à la partie PCDEQ on substitue la ligne droite PQ, on aura la ligne enveloppante APQB plus courte que APDQB. Mais, par hypothèse, celle-ci doit être la plus courte de toutes; donc cette hypothèse ne saurait subsister; donc toutes les lignes enveloppantes sont plus longues que AMB.

fig. 163. *Scholie.* On démontrera absolument de la même manière qu'une ligne convexe et rentrante sur elle-même AMB, est plus courte que toute ligne qui l'envelopperait de toutes parts, soit que la ligne enveloppante FHG touche AMB en un ou plusieurs points, soit qu'elle l'environne sans la toucher.







PROPOSITION X.

LEMME.

Deux circonférences concentriques étant données, on peut toujours inscrire dans la plus grande un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la plus petite, et on peut aussi circonscrire à la plus petite un polygone régulier dont les côtés ne rencontrent pas la grande; de sorte que dans l'un et dans l'autre cas les côtés du polygone décrit seront renfermés entre les deux circonférences.

fig. 164. Soient CA, CB, les rayons des deux circonférences données. Au point A menez la tangente DE terminée à la grande circonférence en D et E : inscrivez dans la grande circonférence l'un des polygones réguliers qu'on peut inscrire par les problèmes précédents, divisez ensuite les arcs sous-tendus par les côtés en deux parties égales, et menez les cordes des demi-arcs; vous aurez un polygone régulier d'un nombre de côtés double. Continuez la bissection des arcs jusqu'à ce que vous parveniez à un arc plus petit que DBE. Soit MBN cet arc (dont le milieu est supposé en B); il est clair que la corde MN sera plus éloignée du centre que DE, et qu'ainsi le polygone régulier dont MN est le côté ne saurait rencontrer la circonférence dont CA est le rayon.

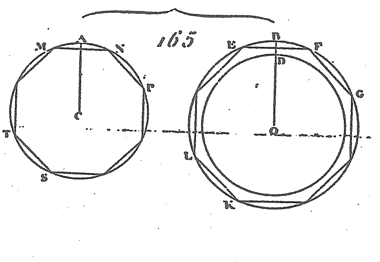
Les mêmes choses étant posées, joignez CM et CN qui rencontrent la tangente DE en P et Q; PQ sera le côté d'un polygone circonscrit à la petite circonférence, semblable au polygone inscrit dans la grande, dont le côté est MN. Or il est clair que le polygone circonscrit qui a pour côté PQ, ne saurait rencontrer la grande circonférence, puisque CP est moindre que CM.

Donc, par la même construction, on peut décrire un polygone régulier inscrit dans la grande circonférence, et un polygone semblable circonscrit à la petite, lesquels auront leurs côtés compris entre les deux circonférences.

Scholie. Si on a deux secteurs concentriques FCG, ICH, on pourra de même inscrire dans le plus grand une *portion de polygone régulier*, ou circonscrire au plus petit une portion de polygone semblable, de sorte que les contours des deux polygones soient compris entre les deux circonférences : il suffira de diviser l'arc FBG successivement en 2, 4, 8, 16, etc., parties égales, jusqu'à ce qu'on parvienne à une partie plus petite que DBE.

Nous appelons ici *portion de polygone régulier* la figure terminée par une suite de cordes égales inscrites dans l'arc FG d'une extrémité à l'autre. Cette portion a les propriétés principales des polygones réguliers, elle a les angles égaux et les côtés égaux, elle est à la fois inscriptible et circonscriptible au cercle; cependant elle ne ferait partie d'un polygone régulier proprement dit, qu'autant que l'arc sous-tendu par un de ses côtés serait une partie aliquote de la circonférence.

165



PROPOSITION XI.

THÉORÈME.

Les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons, et leurs surfaces comme les quarrés des rayons.

fig. 165. Désignons, pour abréger, par *circ.* CA la circonférence qui a pour rayon CA; je dis qu'on aura *circ.* CA : *circ.* OB :: CA : OB.

Car, si cette proportion n'a pas lieu, CA sera à OB comme *circ.* CA est à un quatrième terme plus grand ou plus petit que *circ.* OB : supposons-le plus petit, et soit, s'il est possible, CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OD.

Inscrivez dans la circonférence dont OB est le rayon un polygone régulier EFGKLE, dont les côtés ne rencontrent point la circonférence dont OD est le
* 10. rayon *; inscrivez un polygone semblable MNPTSM dans la circonférence dont CA est le rayon.

Cela posé, puisque ces polygones sont semblables, leurs périmètres MNPSM, EFGKE sont entre eux
* 8. comme les rayons CA, OB, des cercles circonscrits *, et on aura MNPSM : EFGKE :: CA : OB; mais, par hypothèse, CA : OB :: *circ.* CA : *circ.* OD; donc MNPSM : EFGKE :: *circ.* CA : *circ.* OD. Or, cette
* 9. proportion est impossible, car le contour MNPSM est moindre que *circ.* CA *, et au contraire EFGKE est plus grand que *circ.* OD; donc il est impossible que CA soit à OB comme *circ.* CA est à une circonférence plus petite que *circ.* OB, ou, en termes plus généraux, il est impossible qu'un rayon soit à un rayon comme la circonférence décrite du premier rayon est à une circonférence plus petite que la circonférence décrite du second rayon.

De là je conclus qu'on ne peut avoir non plus, CA est à OB comme *circ.* CA est à une circonférence plus grande que *circ.* OB; car si cela était, on aurait, en renversant les rapports : OB est à CA comme une circonférence plus grande que *circ.* OB est à *circ.* CA, ou, ce qui est la même chose, comme *circ.* OB est à une circonférence plus petite que *circ.* CA; donc un rayon serait à un rayon comme la circonférence décrite du premier rayon est à une circonférence plus petite que la circonférence décrite du second rayon, ce qui a été démontré impossible.

Puisque le quatrième terme de la proportion CA : OB :: *circ.* CA : X ne peut être ni plus petit ni plus grand que *circ.* OB, il faut qu'il soit égal à *circ.* OB; donc les circonférences des cercles sont entre elles comme les rayons.

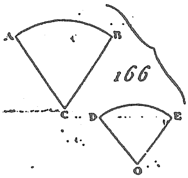
Un raisonnement et une construction entièrement semblables serviront à démontrer que les surfaces des cercles sont comme les quarrés de leurs rayons.

Nous n'entrerons pas dans d'autres détails sur cette proposition, qui d'ailleurs est un corollaire de la suivante.

Corollaire. Les arcs semblables AB, DE, sont fig. 166.
comme leurs rayons AC, DO, et les secteurs semblables ACB, DOE, sont comme les quarrés de ces mêmes rayons.

Car, puisque les arcs sont semblables, l'angle C est égal à l'angle O*; or l'angle C est à quatre angles droits comme l'arc AB est à la circonférence entière décrite du rayon AC*, et l'angle O est à quatre angles droits comme l'arc DE est à la circonférence décrite du rayon OD; donc les arcs AB, DE, sont entre eux comme les circonférences dont ils font partie: ces circonférences sont comme les rayons AC, DO, donc *arc* AB : *arc* DE :: AC : DO.

Par la même raison les secteurs ACB, DOE, sont comme les cercles entiers, ceux-ci sont comme les quarrés des rayons; donc *sect.* ACB : *sect.* DOE :: $\overline{AC}^2 : \overline{DO}^2$.



166

PROPOSITION XII.

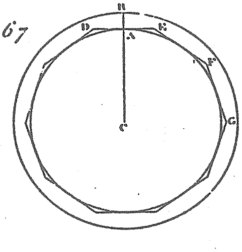
THÉORÈME.

L'aire du cercle est égale au produit de sa circonférence par la moitié du rayon.

Désignons par *surf.* CA la surface du cercle dont le rayon est CA; je dis qu'on aura *surf.* CA $=\frac{1}{2}$CA $\times$ *circ.* CA.

fig. 176. Car si $\frac{1}{2}$CA $\times$ *circ.* CA n'est pas l'aire du cercle dont CA est le rayon, cette quantité sera la mesure d'un cercle plus grand ou plus petit. Supposons d'abord qu'elle est la mesure d'un cercle plus grand, et soit, s'il est possible, $\frac{1}{2}$CA $\times$ *circ.* CA $=$ *surf.* CB.

Au cercle dont le rayon est CA circonscrivez un polygone régulier DEFG, etc., dont les côtés ne rencontrent pas la circonférence qui a CB pour rayon*; * 10.
la surface de ce polygone sera égale à son contour
* 7. DE + EF + FG + etc. multiplié par $\frac{1}{2}$AC*: mais le contour du polygone est plus grand que la circonférence inscrite, puisqu'il l'enveloppe de toutes parts; donc la surface du polygone DEFG, etc., est plus grande que $\frac{1}{2}$ AC $\times$ *circ.* AC, qui, par hypothèse, est la mesure du cercle dont CB est le rayon; donc le polygone serait plus grand que le cercle. Or au contraire; il est plus petit, puisqu'il y est contenu; donc il est impossible que $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ.* CA soit plus grand que *surf.* CA, ou, en d'autres termes, il est impossible que la circonférence d'un cercle multipliée par la moitié de son rayon soit la mesure d'un cercle plus grand.



167

Je dis en second lieu que le même produit ne peut être la mesure d'un cercle plus petit; et, pour ne pas changer de figure, je supposerai qu'il s'agit du cercle dont CB est le rayon; il faut donc prouver que $\frac{1}{2}$CB $\times$ *circ.* CB ne peut être la mesure d'un cercle plus petit, par exemple, du cercle dont le rayon est CA. En effet, soit, s'il est possible, $\frac{1}{2}$CB $\times$ *circ.* CB $=$ *surf.* CA.

Ayant fait la même construction que ci-dessus, la surface du polygone DEFG, etc., aura pour mesure (DE + EF + FG + etc.) $\times\ \frac{1}{2}$CA; mais le contour DE + EF + FG + etc., est moindre que *circ.* CB qui l'enveloppe de toutes parts; donc l'aire du polygone est moindre que $\frac{1}{2}$ CA $\times$ *circ.* CB, et à plus forte raison moindre que $\frac{1}{2}$ CB $\times$ *circ.* CB. Cette dernière quantité est, par hypothèse, la mesure du cercle dont CA est le rayon; donc le polygone serait moindre que le cercle inscrit, ce qui est absurde; donc il est impossible que la circonférence d'un cercle, multipliée par la moitié de son rayon, soit la mesure d'un cercle plus petit.

Donc enfin la circonférence d'un cercle multipliée par la moitié de son rayon est la mesure de ce même cercle.

Lacroix

150. *Corollaire.* On peut trouver, d'après ce qui précède, la valeur du côté AB du polygone circonscrit, en considérant les triangles OGa et OAa qui sont semblables, comme ayant chacun un angle droit, l'un en G, l'autre en a, et un angle commun en O; et dans lesquels aG et Aa sont les moitiés des côtés ab et AE des polygones inscrit et circonscrit correspondans. On tire de là

$$OG : Oa :: aG : aA$$

ou

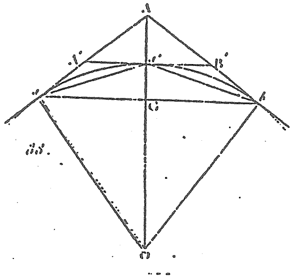
$$OG : Oa :: \tfrac{1}{2}ab : \tfrac{1}{2}AE,$$

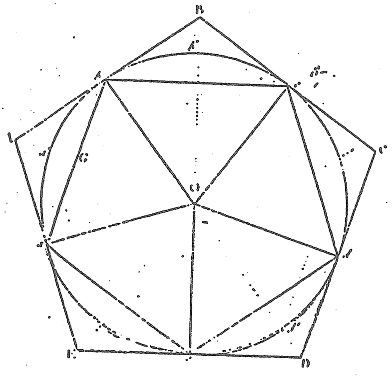
d'où il résulte

$$AE \text{ ou } AB = \frac{ab \times Oa}{\sqrt{\overline{Oa}^2 - (\frac{1}{2}ab)^2}},$$

en observant que le triangle rectangle OGa, donne

$$OG = \sqrt{\overline{Oa}^2 - \overline{aG}^2} = \sqrt{\overline{Oa}^2 - (\tfrac{1}{2}ab)^2}.$$





151. *Remarque.* Il est important d'observer qu'à mesure qu'on multiplie les côtés du polygone inscrit, son contour augmente; tandis que celui du polygone circonscrit diminue dans la même circonstance. En effet,
FIG. 88. si on divise en deux l'arc $aa'b$, *fig.* 88, et qu'on tire les cordes aa' et $a'b$, on aura deux côtés consécutifs du polygone inscrit, d'un nombre de côtés double de celui des côtés du polygone auquel appartient ab. Tirant ensuite $A'B'$ perpendiculairement à $a'O$, les droites aA', $A'a'$, $a'B'$, $B'b$, seront des demi-côtés du polygone circonscrit correspondant à celui dont aa' fait partie (149). Maintenant il est visible que les portions aAb, $aA'B'b$, ab, $aa'b$, seront contenues dans les polygones dont elles font partie, autant de fois que l'arc $aa'b$ l'est dans la circonférence entière, et seront par conséquent des parties semblables de chaque polygone; et puisque

$$aa' + a'b > ab,$$

le contour du second polygone inscrit surpassera celui du premier. Il n'est pas moins évident que

$$B'A' < AA' + AB' \ (15),$$

d'où il suit

$$aA'B'b < aA + bA,$$

et que par conséquent le contour du second polygone circonscrit est moindre que celui du premier.

Cela posé, puisque le polygone inscrit, toujours moindre que le polygone circonscrit correspondant, augmente de contour, quand on multiplie ses côtés, tandis que celui-ci diminue, il en résulte que la différence entre les deux polygones décroît aussi dans la même circonstance. On peut même, quelque petite que soit la quantité donnée δ, trouver deux polygones, l'un inscrit, l'autre circonscrit, tels que la différence de leurs contours soit moindre que cette grandeur. Pour s'en convaincre, il faut se rappeler que les contours de deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés, sont entre eux comme les rayons des cercles auxquels ils sont circonscrits (140); car si l'on désigne par P le contour du polygone $ABCDE$, *fig.* 87, FIG. 87.
et par p celui du polygone $abcde$, on aura

$$P : p :: Oa : OG;$$

d'où l'on conclura

$$P - p : P :: Oa - OG : Oa, \text{ et } P - p = \frac{a'G \times P}{Oa}.$$

Mais rien ne s'oppose à ce que l'on rende $a'G$ plus petit que telle grandeur donnée qu'on voudra; car, ayant porté sur le rayon Oa' une partie $a'G$ de la petitesse demandée, et tiré la corde ab, si l'arc $aa'b$ n'est pas aliquote de la circonférence, il n'y aura qu'à prendre une partie aliquote moindre que cet arc, et la ligne analogue à $a'G$ sera encore plus petite.

On peut donc, en multipliant, autant qu'il sera nécessaire, les côtés du polygone inscrit, rendre la quantité $P - p$ aussi petite qu'on voudra.

152. *Corollaire*. Puisque, d'après ce qui précède, les contours des polygones circonscrits diminuent sans cesse à mesure qu'ils approchent de la circonférence du cercle, tandis que ceux des polygones inscrits augmentent toujours dans la même circonstance, il est visible que la circonférence du cercle est moindre que le contour du polygone circonscrit, et plus grande que celui du polygone inscrit. Cette circonférence différera donc moins de l'un quelconque de ces contours, qu'ils ne diffèrent entre eux; et l'on pourra par conséquent trouver un polygone, soit inscrit, soit circonscrit, tel, que la différence entre son contour et la circonférence du cercle, soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite qu'elle soit.

C'est sur cette propriété que repose le procédé qu'Archimède employa pour parvenir à déterminer d'une manière approchée, le rapport de la circonférence au diamètre, et j'en ferai un usage semblable, lorsque j'aurai montré que ce rapport est le même dans tous les cercles; pour cela j'établirai un théorème qui pourra s'appliquer à toutes les propositions du genre de celle que j'ai à démontrer.

THÉORÈME.

153. *Si deux grandeurs invariables* A *et* B *sont telles qu'on puisse prouver que leur différence* A — B *est moindre qu'une troisième grandeur* δ, *quelque petite que puisse être cette dernière, ces deux grandeurs sont égales entre elles.*

Démonstration. En effet, si elles étaient inégales on aurait nécessairement $A - B = D$, D marquant leur différence; il ne serait donc pas possible de prendre δ au-dessous de D, et par conséquent aussi petit qu'on voudrait.

Observation. Il faut bien faire attention dans la proposition ci-dessus au mot *invariable;* car on peut bien trouver, par exemple, une expression de $\sqrt{2}$ qui diffère de la vraie, d'une quantité moindre que telle autre qu'on voudra, sans cependant arriver jamais à la valeur exacte de $\sqrt{2}$; mais les résultats changent à chaque nouvelle approximation, tandis que les grandeurs A et B ne sont susceptibles l'une et l'autre, que d'une seule détermination.

THÉORÈME.

154. *Les circonférences des cercles sont entre elles comme leurs rayons ou leurs diamètres.*

Démonstration. Puisque, quel que soit le nombre de leurs côtés, pourvu qu'il soit le même dans l'un et dans l'autre, deux polygones sont entre eux comme les rayons des cercles dans lesquels ils sont inscrits, si on désigne par p et p' les contours de ces polygones, et par R et R' les rayons des cercles correspondans, on aura $\frac{p'}{p}=\frac{R'}{R}$; de plus, on peut concevoir que le nombre des côtés des polygones soit tel que les différences entre leurs contours, et la circonférence du cercle dans lequel chacun d'eux est inscrit, soient au-dessous de telle grandeur qu'on voudra. Si donc $\frac{C'}{C}$ est le rapport des circonférences, la différence entre les rapports $\frac{C'}{C}$ et $\frac{p'}{p}$, s'il en existe une, pourra être réduite à tel degré de petitesse qu'on voudra. Cette différence étant aussi celle des rapports invariables $\frac{C'}{C}$ et $\frac{R'}{R}$, puisque $\frac{p'}{p}=\frac{R'}{R}$, il s'ensuit que l'on peut prouver que la différence entre les quantités invariables $\frac{C'}{C}$ et $\frac{R'}{R}$, est au-dessous de toute grandeur donnée : on aura donc, par la proposition précédente,

$$\frac{C'}{C}=\frac{R'}{R}, \text{ ou } C : C' :: R : R',$$

ce qui donne aussi

$$C : C' :: 2R : 2R' \text{ ou } :: D : D',$$

en appelant D et D' les diamètres des cercles proposés (*).

de côtés, l'un inscrit, l'autre circonscrit, tels que la différence de leurs aires soit moindre qu'une grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur.

FIG. 87. En effet, on a évidemment, dans la figure 87,

$$ABCDE : abcde :: \overline{Oa}^2 : \overline{OG}^2;$$

désignant par P l'aire du polygone circonscrit, et par p celle du polygone inscrit, on aura

$$P : p :: \overline{Oa}^2 : \overline{OG}^2,$$

$$P - p : P :: \overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2 : \overline{Oa}^2,$$

d'où $$P - p = \frac{P\,(\overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2)}{\overline{Oa}^2},$$

valeur dans laquelle on peut rendre le facteur $\overline{Oa}^2 - \overline{OG}^2$ aussi petit qu'on voudra, en multipliant les côtés des polygones.

185. *Corollaire.* Le polygone circonscrit étant visiblement plus grand que le cercle, tandis que le polygone inscrit est moindre, il suit de ce qui précède que l'on peut toujours assigner un polygone régulier, soit inscrit, soit circonscrit, dont l'aire diffère aussi peu qu'on voudra de celle d'un cercle donné. Il suffit pour cela de prendre le polygone d'un assez grand nombre de côtés, pour que la différence entre le polygone inscrit et le polygone circonscrit ne surpasse pas la quantité assignée.

THÉORÈME.

186. *Si trois grandeurs A, B, X, sont telles, que la première A, que l'on suppose variable, mais néanmoins surpassant toujours chacune des deux autres B, X, qui ne changent point, puisse approcher de toutes deux en même temps, aussi près qu'on voudra, on aura nécessairement B = X.*

Démonstration. Soit, 1°. $X > B$; on aura, d'après cette hypothèse et en vertu de l'énoncé,

$$A > X,\ X > B,$$

d'où il résulte que si l'on prend A de manière que la différence $A - B$ soit moindre qu'une quantité quelconque δ, ce qu'on regarde comme toujours possible, la différence $X - B$ sera, à plus forte raison, moindre que δ.

2°. Soit $X < B$, on aura alors

$$A > B,\ B > X;$$

et prenant A de manière que $A - X$ soit moindre que δ, à plus forte raison la différence $B - X$ sera-t-elle moindre que δ.

Le raisonnement ci-dessus conduisant à prouver que la différence des deux grandeurs invariables X et B, est nécessairement moindre que toute grandeur donnée, quelque petite que soit cette grandeur, il s'ensuit que $B = X$ (153).

THÉORÈME.

187. *L'aire d'un cercle a pour mesure la moitié du produit de la circonférence par le rayon, ou $\frac{1}{2}$ CR, en nommant C la circonférence, et R le rayon.*

Démonstration. En effet, plus le nombre des côtés du polygone circonscrit augmente, plus aussi son périmètre P approche de la circonférence (152), et plus le produit $\frac{1}{2}PR$ approche de $\frac{1}{2}CR$, qu'il surpassera toujours, mais d'aussi peu qu'on voudra; d'un autre côté, l'aire du même polygone, toujours plus grande que celle du cercle, peut approcher de cette dernière d'aussi près qu'on voudra (185) : les produits $\frac{1}{2}PR$, $\frac{1}{2}CR$, et la vraie mesure de l'aire du cercle, sont donc trois quantités placées dans les mêmes circonstances que les quanti- $\frac{1}{2}CR$ est égal à la vraie mesure de l'aire du cercle (*).

188. *Corollaire.* Il suit de là que les aires des cercles sont entre elles comme les quarrés de leurs rayons ou de leurs diamètres. En effet, puisque l'on a cette proportion

$$C : C' :: R : R' \ (154),$$

si on la multiplie par la proportion

$$\tfrac{1}{2}R : \tfrac{1}{2}R' :: R : R',$$

qui est évidente, il viendra

$$\tfrac{1}{2}CR : \tfrac{1}{2}C'R' :: R^2 : R'^2;$$

proportion dans laquelle les deux termes du premier rapport sont, d'après ce qui précède, les mesures des aires des cercles dont les rayons sont R et R'; de plus, il est visible qu'on a

$$R^2 : R'^2 :: D^2 : D'^2,$$

en désignant par D et D' les diamètres, puisque $D = 2R$, $D' = 2R'$: donc $\frac{1}{2}CR : \frac{1}{2}C'R' :: D^2 : D'^2$, ce qui complète l'énoncé de la proposition.

Si on représente par π la circonférence dont le diamètre est 1, la surface de ce cercle sera $\frac{1}{4} \times \pi = \frac{1}{4}\pi$; on aura donc

$$\tfrac{1}{4}\pi : \tfrac{1}{2}C'R' :: 1 : D'^2,\ \text{d'où}\ \tfrac{1}{2}C'R' = \tfrac{1}{4}\pi D'^2,$$

ce qui montre que l'*aire d'un cercle est égale au quarré du diamètre multiplié par le $\frac{1}{4}$ du rapport de la circonférence au diamètre*. En mettant pour D'^2 sa valeur $4R'^2$, on aura $\pi R'^2$, ou le *quarré du rayon multiplié par le rapport de la circonférence au diamètre.*