SUR LA DEMONSTRATION DE L'IRRATIONALITE CHEZ LES GRECS

Denis DAUMAS

"Il semble donc que c'est à la découverte de l'incommensurabilité linéaire que l'on doive l'apparition dans les mathématiques grecques d'un nouveau type de démonstration ainsi que le refus de l'empirisme et de l'intuition.

Arpad SZABO
(les débuts des mathématiques grecques - VRIN - p. 236)

Il n'est pas excessif de dire que les Eléments d'Euclide, considérés tant dans leur contenu mathématique -du moins pour sa majeure partie (livres II,V,VI,VII,VIII,X,XI,XII)- que dans leur forme théorique axiomatisée, ont été commandés par la question de l'irrationnalité"

Maurice CAVEING
(La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque - Université de Lille - p. 1600)

L'objectif de l'atelier etait de presenter quelques textes historiques sur la question de l'irrationalité et de l'incommensurabilité. Deux critères ont présidé au choix de ces textes :

- pedagogique : ils permettent de mener dans des classes de lycee des activites mathématiques ou interdisciplinaires à caractère historique

- epistemologique : ils temoignent d'approches tres diverses du probléme de l'irrationalite, d'impasses et de succes qui ont pu preceder ou accompagner la découverte de l'irrationalité:

Les travaux presentes ici s'intègrent dans une recherche menee par le groupe "Histoire des Mathematiques" de l'IREM de Toulouse sur Pythagore. Cette recherche a donné lieu à une première publication : "PYTHAGORE, quelques aspects de l'arithmétique pythagoricienne, activités mathematiques" disponible à l'IREM de Toulouse.

En ce qui concerne l'irrationalité, nous avons été contraints de déborder du pythagorisme, de puiser de nombreuses références dans les Elements d'Euclide. C'est pourquoi nous avons juge necessaire de consacrer un temps aux definitions euclidiennes, bien qu'elles se prêtent difficilement à des activites en classe. Nous n'avons pas eu le temps, lors de l'atelier, de traiter les activités menées en classe. Ces activités seront présentées dans une brochure de l'IREM de Toulouse qui doit paraitre en 1990.

Enfin il est impossible actuellement de faire l'historique de la découverte de l'irrationalité. Nous nous contenterons ici de donner quelques jalons :

BABYLONE : on trouve sur certaines tablettes des valeurs approchées de $\sqrt{2}$, une technique de calcul fournissant des approximations de racines carrées irrationnelles connue sous le nom d' "algorithme de babylone". Vous trouverez en annexe (documents 1 et 2) les traductions commentées de quelques tablettes. Les Babyloniens s'étaient donc trouvés confrontés à une impasse pour le calcul de certaines racines carrées. Mais on ne peut pas dire qu'ils ont eu ne serait-ce qu'une approche du probleme théorique de l'irrationalité : les textes mathematiques babyloniens se présentent comme des "recettes" et on trouve aussi, du fait de leur système de numération, l'impossibilité d'opérer certaines divisions.

PYTHAGORE : les légendes anciennes ne manquent pas. Par exemple : Pythagore, après avoir découvert l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré, aurait imposé le secret à ses disciples. On le comprend : le dogme majeur du pythagorisme, "tout est nombre", s'accommode mal de l'existence de deux grandeurs dont le rapport n'est pas celui de deux nombres (c'est a dire deux entiers). Melissos de Samos, un de ses disciples, aurait trahi le secret et aurait péri noyé dans une effroyable tempête déchaînée par la colère divine. Ces légendes sont amusantes mais peu fiables, parfois contradictoires, n'indiquent pas quelles ont été les voies de la découverte. Il semble bien aujourd'hui qu'on puisse attribuer au pythagorisme la découverte de l'incommensurabilité, et en particulier celle de la diagonale et du côté d'un carré. Mais les avis divergent sur la nature de la preuve : arithmétique, avec l'opposition pair/impair (type proposition 117 du livre X des Elements d'Euclide) ou geometrique, par anthypherese (nous en parlerons a propos d'un texte de Théon de Smyrne) ?

EUCLIDE : est-ce un savant ou une equipe qui portait ce nom qui a redige les "Eléments" ? Cet ouvrage de synthèse, somme théorique des mathématiques grecques du troisième siecle avant notre ère, a fait autorite pendant plus de vingt siècles et marque encore notre conception de la démonstration. Pour notre sujet, nous nous refererons essentiellement a deux livres des Eléments :

- le livre V reprend la théorie des grandeurs élaborée par EUDOXE DE CNIDE. Cette theorie permet de contourner l'obstacle de l'incommensurabilité avec une remarquable définition de la proportionalité.
- le livre X développe la théorie des grandeurs irrationnelles attribuée à THEETETE, disciple de THEODORE DE CYRENE. Ce dernier avait, selon PLATON, établi l'irrationalité de $\sqrt{3}, \sqrt{5}, ..., \sqrt{17}$.

La chronologie des auteurs grecs est donnee en annexe (Document 3).

I) La duplication du carré : texte extrait d'un dialogue de PLATON, "Ménon".

Le passage qui suit se prête tout particulièrement à une approche interdisciplinaire. Nous ne traiterons ici que l'aspect mathématique.

Le "Ménon" :

Le dialogue est engagé entre Socrate et Ménon sur le thème : la vertu peut-elle s'enseigner ? Le terrain est politique, il s'agit de l'art de gouverner la cité. Le dialogue se situerait en 402, à une époque où Athènes est en crise : elle a capitulé devant Sparte et est gouvernée par une oligarchie (les "trentes"). A la fin du dialogue, et pour etayer sa thèse selon laquelle la vertu ne s'enseigne pas, Socrate laisse entendre que si Athènes est si mal gouvernée, c'est bien que les grands hommes qui ont précédé (Thémistocle, Aristide, Périclès, Thucydide) n'ont pas pu transmettre leur vertu. Témoin de ce discours, Anytos, l'un des accusateurs du procès où Socrate sera condamné à boire la cigüe, avertit Socrate de se montrer plus circonspect dans ses propos.

Avant le passage qui suit, Socrate a réduit à néant toutes les tentatives de Ménon pour définir ce qu'est la vertu. Ménon s'est emporté, a comparé Socrate à une torpille qui engourdit tout ce qu'elle touche puis a déclaré : "il est impossible de chercher une chose dont on ne connait pas la nature puisqu'on ne sait même pas ce qu'on doit chercher". Faux! repond Socrate : l'âme, immortelle, a dans ses existences anterieures tout vu dans ce monde et dans l'autre, la science est en nous et c'est là qu'il faut la rechercher, apprendre c'est se ressouvenir. Pour prouver cette thèse (réminiscence), Socrate appelle un esclave qui n'a pas eu d'instruction et, en lui posant des questions appropriées (c'est l'art de Socrate d'accoucher les esprits ou maïeutique), va lui faire trouver la solution d'un problème délicat : quel est le carré double d'un carré donné ?

Un mot sur la conclusion du "Ménon" : la vertu n'est pas une science et ne peut donc s'enseigner. Elle se fonde sur l' "opinion vraie", inspiration divine qui permet de dire vrai sans en avoir la science.

Ce texte oppose clairement deux démarches : l'arithmétique, qui conduit à une impasse, et la géométrique, qui donne rapidement la solution.

GARNIER FLAMMARION

PLATON

PROTAGORAS EUTHYDÈME
GORGIAS MÉNEXÈNE MÉNON
CRATYLE

TRADUCTION
ET NOTES
PAR
E. CHAMBRY

GARNIER FLAMMARION — TEXTE INTÉGRAL

XV. — Donc, puisque l'âme est immortelle et qu'elle a vécu plusieurs vies, et qu'elle a vu tout ce qui se passe ici et dans l'Hadès, il n'est rien qu'elle n'ait appris. Aussi n'est-il pas du tout surprenant que, sur la vertu et sur le reste, elle puisse se souvenir de ce qu'elle a su auparavant. Comme tout se tient dans la nature et que l'âme a tout appris, rien n'empêche qu'en se rappelant une seule chose, ce que les hommes appellent apprendre, elle ne retrouve d'elle-même toutes les autres, pourvu qu'elle soit courageuse et ne se lasse pas de chercher; car chercher et apprendre n'est autre chose que se ressouvenir. Il ne faut donc pas écouter cet argument captieux : il nous rendrait paresseux et il n'est agréable qu'aux oreilles des hommes indolents. Le mien au contraire les rend actifs et les incite à la recherche. Comme je suis assuré qu'il est vrai, je veux bien chercher avec toi ce qu'est la vertu.

MÉNON

Soit, Socrate. Mais qu'est-ce qui te fait dire que nous n'apprenons pas, mais que ce que nous appelons apprendre c'est se ressouvenir. Peux-tu me démontrer qu'il en est ainsi ?

SOCRATE

Je t'ai dit tout à l'heure, Ménon, que tu étais un rusé; et maintenant encore tu me demandes si je puis t'enseigner une chose, à moi qui soutiens qu'il n'y a pas d'enseignement, mais des réminiscences. Tu tiens donc à faire voir

344 MÉNON/82 a-82 c

tout de suite que je suis en contradiction avec moi-même ?

MÉNON

Non, par Zeus, Socrate, ce n'est point dans cette intention que je te l'ai demandé, mais par habitude. Si pourtant tu peux me montrer par quelque moyen qu'il en est comme tu dis, montre-le-moi.

SOCRATE

Ce n'est pas chose facile; cependant je ferai de mon mieux par égard pour toi. Appelle-moi un de ces nombreux serviteurs qui t'accompagnent, celui que tu voudras, afin que je te le montre sur lui.

MÉNON

Volontiers. Approche ici.

SOCRATE

Est-il Grec et parle-t-il grec ?

MÉNON

Parfaitement : il est né chez moi.

SOCRATE

Maintenant fais attention quelle solution va se produire : s'il va se ressouvenir ou apprendre de moi.

MÉNON

J'y ferai attention.

SOCRATE

XVI. — Dis-moi, mon garçon, sais-tu que le carré est une figure comme celle-ci ?

L'ESCLAVE

Oui.

SOCRATE

Alors, dans un carré, toutes ces lignes, il y en a quatre, sont égales ?

L'ESCLAVE

Certainement.

SOCRATE

Et celles-ci, qui le traversent par le milieu, ne sont-elles pas égales aussi [130] ?

L'ESCLAVE

Si.

SOCRATE

N'y a-t-il pas de surface de cette sorte qui soit plus grande ou plus petite ?

L'ESCLAVE

Certainement si.

SOCRATE

Si donc ce côté-là avait deux pieds de long et celui-deux pieds, combien de pieds aurait le tout ? Considère chose de cette manière : s'il y avait de ce côté-ci deux piec et de cet autre un seul, n'est-il pas vrai que l'espace ser: d'une fois deux pieds ?

L'ESCLAVE

Oui.

SOCRATE

Mais comme il y a aussi deux pieds du second côté, cc ne fait-il pas deux fois deux ?

L'ESCLAVE

En effet.

SOCRATE

L'espace est donc de deux fois deux pieds.

L'ESCLAVE

Oui.

SOCRATE

Et combien font deux fois deux pieds ? Fais le calc et dis-le-moi.

L'ESCLAVE

Quatre, Socrate.

SOCRATE

Ne pourrait-il pas y avoir un autre espace, double ‹ celui-ci, mais semblable, ayant toutes ses lignes égal comme celui-ci ?

L'ESCLAVE

Si.

SOCRATE

Combien aurait-il de pieds ?

L'ESCLAVE

Huit.

SOCRATE

Eh bien, essaye de dire quelle serait la longueur ‹ chaque ligne de ce nouveau carré. Dans celui-ci, la ligı a deux pieds; quelle longueur aura-t-elle dans le car: double ?

L'ESCLAVE

Il est évident, Socrate, que cette longueur sera doubl

SOCRATE

Tu vois, Ménon, que je ne lui enseigne rien et que ne fais que le questionner. En ce moment il se figure qu' sait quelle est la ligne dont doit se former l'espace de hu pieds. Ne crois-tu pas qu'il a cette conviction ?

MÉNON

Si.

SOCRATE

Le sait-il donc ?

MÉNON

Non certes.

SOCRATE

Il croit qu'il se formerait d'une ligne double ?

MÉNON

Oui.

SOCRATE

XVII. — Regarde-le maintenant se souvenir progressi-'ement, comme on doit se souvenir. Réponds-moi, toi : tu :is que l'espace double se forme de la ligne double ? je .'entends point par là un espace long d'un côté, court de 'autre : il faut qu'il soit égal en tous sens, comme celui-ci, t qu'il en soit le double, c'est-à-dire qu'il ait huit pieds. 1ais vois si tu crois encore qu'on le formera en doublant ı ligne.

L'ESCLAVE

Je le crois.

SOCRATE

Cette ligne-ci ne sera-t-elle pas double de celle-là [40], si ous y en ajoutons une autre de même longueur en par-ınt d'ici ?

L'ESCLAVE

Sans doute.

SOCRATE

C'est donc, d'après toi, de cette ligne que sera formé espace de huit pieds, si nous tirons quatre lignes pareilles ?

L'ESCLAVE

Oui.

SOCRATE

Tirons donc, sur le modèle de celle-ci, quatre lignes ;ales. Est-ce là ce que tu appelles l'espace de huit pieds ?

L'ESCLAVE

Certainement.

SOCRATE

N'y a-t-il pas dans cet espace les quatre que voici, ont chacun est égal au premier, qui est de quatre pieds.

L'ESCLAVE

Si.

SOCRATE

De quelle grandeur est-il donc ? N'est-il pas quatre fois ıssi grand ?

L'ESCLAVE

Sans doute.

SOCRATE

Mais une chose quatre fois aussi grande qu'une autre en est-elle le double ?

L'ESCLAVE

Non, par Zeus.

SOCRATE

Alors, combien de fois est-elle plus grande ?

L'ESCLAVE

Quatre fois.

SOCRATE

Ainsi donc, mon garçon, le doublement de la ligne ne donne pas une surface double, mais quadruple.

L'ESCLAVE

C'est vrai.

SOCRATE

Car quatre fois quatre font seize, n'est-ce pas ?

L'ESCLAVE

Oui.

SOCRATE

Mais l'espace de huit pieds, sur quelle ligne le tracerons-nous ? Celle-ci ne donne-t-elle pas un espace quadruple ?

L'ESCLAVE

Si.

SOCRATE

Et l'espace de quatre pieds que voici ne se forme-t-il pas d'une ligne qui est la moitié de celle-là ?

L'ESCLAVE

Si.

SOCRATE

Bon. Mais l'espace de huit pieds n'est-il pas double de celui-ci, et la moitié de l'autre ?

L'ESCLAVE

C'est vrai.

SOCRATE

Ne sera-t-il pas formé sur une ligne plus grande que celle-là et plus courte que celle-ci ? Qu'en dis-tu ?

L'ESCLAVE

C'est mon avis.

SOCRATE

A merveille. Réponds-moi selon ta pensée et dis-moi :

Cette ligne-ci n'était-elle pas de deux pieds, et l'autre de quatre ?

L'ESCLAVE

Si.

SOCRATE

Il faut donc pour l'espace de huit pieds que la ligne soit plus grande que celle-ci, qui a deux pieds, mais plus courte que celle qui en a quatre.

L'ESCLAVE

Il le faut.

SOCRATE

Essaye de dire de quelle longueur tu crois qu'elle est.

L'ESCLAVE

De trois pieds.

SOCRATE

Si elle doit être de trois pieds, nous n'avons qu'à ajouter à celle-ci [41] la moitié d'elle-même et elle aura trois pieds. Car voici deux pieds, et en voici un; et pareillement de ce côté-ci deux, plus un, et cela fait l'espace que tu dis.

L'ESCLAVE

Oui.

SOCRATE

Mais si nous avons trois pieds d'un côté et trois pieds de l'autre, le tout ne sera-t-il pas de trois fois trois pieds ?

L'ESCLAVE

Evidemment.

SOCRATE

Or combien font trois fois trois pieds ?

L'ESCLAVE

Neuf.

SOCRATE

Mais combien devrait avoir de pieds la surface double ?

L'ESCLAVE

Huit.

SOCRATE

Ce n'est donc pas encore avec la ligne de trois pieds que se forme la surface de huit.

L'ESCLAVE

Non, assurément.

SOCRATE

Alors avec quelle ligne ? Tâche de me le dire exactement, et, si tu ne veux pas faire de calcul, montre-la-nous.

L'ESCLAVE

Mais, par Zeus, Socrate, je n'en sais rien.

SOCRATE

XVIII. — Remarques-tu encore, Ménon, à quel point il en est à présent dans le chemin de la réminiscence ? Au commencement, il ne savait pas quel est le côté du carré de huit pieds, ce que d'ailleurs il ignore encore. Mais il croyait alors le savoir et il répondait avec assurance comme s'il le savait, et il n'avait pas conscience de la difficulté. A présent il reconnait son embarras, et, s'il ne sait pas, il ne croit pas non plus savoir.

MÉNON

Tu dis vrai.

SOCRATE

N'est-il pas actuellement en meilleure disposition relativement à la chose qu'il ignorait ?

MÉNON

C'est ce qu'il me semble également.

SOCRATE

En le jetant dans l'embarras, en l'engourdissant comme la torpille, lui avons-nous fait quelque tort ?

MÉNON

Il ne me semble pas.

SOCRATE

En tout cas, nous avons fait, à ce qu'il me parait, quelque chose qui l'aidera à découvrir la vérité. Car à présent, comme il ne le sait pas, il cherchera sans doute volontiers, tandis qu'auparavant il était tout porté à croire qu'il aurait raison de dire et de répéter devant une foule de gens que, pour doubler un carré, il faut doubler la longueur des côtés.

MÉNON

Il y a apparence.

SOCRATE

Crois-tu donc qu'il se fût mis à chercher et à apprendre une chose qu'il pensait savoir, quoiqu'il ne la sût pas, avant d'être tombé dans l'embarras en se rendant compte de son ignorance, et d'avoir senti le désir de savoir ?

MÉNON

Je ne le crois pas, Socrate.

SOCRATE

Il a donc profité à être engourdi ?

MÉNON

Il me parait que oui.

SOCRATE

Examine maintenant ce qu'à la suite de cet embarras il va découvrir en cherchant avec moi, sans que je fasse autre chose que l'interroger, sans lui rien enseigner. Observe bien si tu me surprendras à lui enseigner et à lui expliquer quelque chose, au lieu de le questionner sur ce qu'il pense.

XIX. — Réponds-moi, toi. N'avons-nous pas ici un espace de quatre pieds [342]. Sais-tu ?

L'ESCLAVE

Oui.

SOCRATE

Nous pouvons lui ajouter cet autre-ci, qui lui est égal.

L'ESCLAVE

Oui.

SOCRATE

Et ce troisième ici, égal à chacun des deux autres ?

L'ESCLAVE

Oui.

SOCRATE

Ne pouvons-nous pas compléter en ajoutant celui-ci dans le coin ?

L'ESCLAVE

Nous le pouvons fort bien.

SOCRATE

N'avons-nous pas ici à présent quatre espaces égaux ?

L'ESCLAVE

Si.

SOCRATE

Et tout cet espace-ci, de combien est-il plus grand que celui-ci ?

L'ESCLAVE

De quatre fois.

SOCRATE

Or c'est un espace double qu'il nous fallait; ne t'en souviens-tu pas ?

L'ESCLAVE

Fort bien.

SOCRATE

Cette ligne tirée d'un angle à l'autre [343] ne coupe-t-elle pas en deux chacun de ces quatre espaces ?

L'ESCLAVE

Si.

SOCRATE

Nous avons donc ici quatre lignes qui enferment cet espace-ci ?

L'ESCLAVE

Nous les avons.

SOCRATE

Regarde maintenant : quelle est la grandeur de cet espace ?

L'ESCLAVE

Je ne le vois pas.

SOCRATE

De ces quatre espaces, chaque ligne n'a-t-elle pas séparé en dedans la moitié de chacun ? Qu'en dis-tu ?

L'ESCLAVE

Oui.

SOCRATE

Et combien d'espaces de cette dimension y a-t-il dans ce carré [344] ?

L'ESCLAVE

Quatre.

SOCRATE

Et combien dans celui-ci [345] ?

L'ESCLAVE

Deux.

SOCRATE

Et quatre, qu'est-il par rapport à deux ?

L'ESCLAVE

Le double.

SOCRATE

Combien de pieds a donc cet espace ?

L'ESCLAVE

Huit.

SOCRATE

Sur quelle ligne est-il construit ?

L'ESCLAVE

Sur celle-ci.

SOCRATE

Sur la ligne qui va d'un angle à l'autre dans le carré de quatre pieds [346] ?

L'ESCLAVE

Oui.

SOCRATE

Cette ligne, les sophistes l'appellent diagonale. Si tel est son nom, c'est sur la diagonale, que selon toi, esclave de Ménon, se construit l'espace double.

L'ESCLAVE

C'est bien cela, Socrate.

L'impasse arithmétique :

Socrate trace un carré qu'il caractérise par : quatre côtés egaux et deux diagonales egales passant par le centre.

L'existence d'une figure semblable plus grande ou plus petite étant évidente, Socrate suppose que le carré tracé a comme côté deux pieds, fait voir à l'esclave sur la figure que le carré mesure quatre pieds et pose le problème : il faut trouver un carré double, de huit pieds.

L'esclave propose immédiatement de doubler le côté et reste insensible aux mises en garde de Socrate. Ce n'est qu'après construction de la figure correspondante qu'il admet avoir obtenu un carre quadruple et non double. Entre 2 et 4 il ne reste plus qu'à essayer 3 qui ne convient pas non plus.

Socrate : "alors, avec quelle ligne ? Tâche de me le dire exactement, et si tu ne veux pas faire de calcul, montre-la nous.

L'esclave : Mais par Zeus, Socrate, je n'en sais rien".

Par son intervention, Socrate indique qu'il est peut-être inutile de faire d'autres tentatives numériques et oriente la recherche vers la géométrie : sur la figure tracée il y a une ligne qui donne la solution, il suffit de la montrer. L'esclave, impressionné par l'impasse précédente, désespère.

Trois remarques avant de poursuivre :

1) Platon ne sort pas dans ce passage du domaine des entiers. Les grecs connaissaient les fractions, ou, plus précisément, les quantièmes égyptiens (fractions de la forme $\frac{1}{n}$) mais reservaient leur usage a la logistique (calculs) et ne leur donnaient aucun statut théorique. L'arithmétique, science des nombres, ne traite que des nombres entiers (voir plus loin les définitions du livre VII).

2) L'unité, qui n'est pas elle-même un nombre, est indivisible et Platon précise dans "la République" :

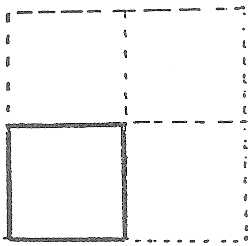
> *"Tu sais en effet ce que font les gens habiles en cette science si l'on essaie, au cours d'une discussion, de diviser l'unite proprement dite, ils se moquent et n'écoutent pas. Si tu la divises, ils la multiplient d'autant, dans la crainte qu'elle n'apparaisse plus comme une, mais comme un assemblage de parties".*
>
> *(Platon-La république-Livre VII 525e édition G.F. p. 284)*

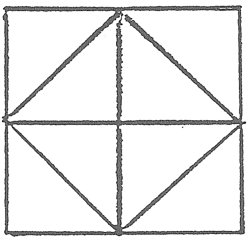
C'est precisement ce que fait Socrate : pour ne pas avoir à partager l'unite, il suppose que le côté mesure deux pieds. Ainsi, en constatant qu'un carré de côté 3 est plus grand que le double d'un carré de côté 2, il réalise en restant dans le domaine des entiers ce que nous faisons en vérifiant que $(\frac{3}{2})^2 > 2$.

3) Socrate-Platon ne poursuit pas la recherche avec des carrés de côtés 3,4, ... En effet, si on peut vérifier aisément que, pas plus que 2×2^2, 2×3^2, 2×4^2 ne sont des carres, il est impossible de prouver par cette méthode que, pour tout entier n, $2n^2$ n'est pas un carre. On ne peut pas realiser une infinite d'operations. La méthode ne mène à rien, c'est bien l'impasse.

La solution geometrique :

Le dénouement est rapide. Socrate adjoint au carré initial trois carrés qui lui sont isometriques, de façon à obtenir un nouveau carré, quatre fois plus grand.





Ayant fait constater par l'esclave qu'une diagonale coupe un carré en deux parties égales, il est aisé de voir que la figure construite sur les quatre diagonales est bien double du carré initial. Du reste, il est tellement fait appel à l'évidence que la nature carree de la figure obtenue n'est même pas évoquée.

Dans tout ce passage, Socrate montre, fait voir, mais ne démontre pas. Il est en effet parfaitement inutile de trouver ici une démonstration rigoureuse de résultats parfaitement connus de Platon et de ses lecteurs. N'oublions pas qu'il s'agit avant tout de prouver "expérimentalement" la thèse de la réminiscence et d'établir l'eficacité de la méthode de Socrate : commencer par balayer les fausses opinions (ici, il faut doubler le côté pour doubler les surfaces) pour permettre ensuite à l'esprit d'accoucher des vérites dont il est le porteur.

Réminiscence ou pas, l'esclave n'a-t-il pas appris davantage, n'est-il pas plus convaincu par cette "monstration" quil ne l'aurait été par des "démonstrations" de type euclidien ?

II. LES DEFINITIONS EUCLIDIENNES

Les grandeurs ne sont définies nulle part dans les "Eléments" mais l'usage qui en est fait permet de préciser : il s'agit essentiellement des objets de la géométrie, lignes, surfaces, volumes. Les figures qui accompagnent de nombreuses propositions représentent ces grandeurs par des segments de droite.

LE CINQUIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS

1. Une grandeur est partie d'une grandeur, la plus petite de la plus grande, quand la plus petite mesure la plus grande.

2. Une grandeur plus grande est multiple d'une grandeur plus petite, quand la plus grande est mesurée par la plus petite.

3. Une raison, est certaine manière d'être de deux grandeurs homogènes entr'elles, suivant la quantité.

4. Une proportion est une identité de raisons.

5. Des grandeurs sont dites avoir une raison entr'elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement.

6. Des grandeurs sont dites être en même raison, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois.

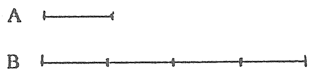
7. Les grandeurs qui ont la même raison sont dites proportionnelles.

8. Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde une plus grande raison que la troisième avec la quatrième.

9. Une proportion a au moins trois termes.

10. Lorsque trois grandeurs sont proportionnelles, la première est dite avoir avec la troisième une raison double de celle qu'elle a avec la seconde.

"Mesurer" qui intervient dès la définition 1 et dans la définition 2 pour définir respectivement les notions de "partie" et de "multiple" est une technique qui consiste à mettre bout à bout des grandeurs égales a une grandeur A pour reconstituer une grandeur B.



Ainsi, sur la figure ci-contre, B est formé de 4 segments égaux à A donc "A mesure B" ou "A est partie de B" ou "B est multiple de A".

La notion fondamentale de la théorie des grandeurs est la "raison" (logos), elle conduit à l'étude des proportions. Pour qu'il y ait "raison" entre deux grandeurs il faut deux conditions :

- l'"homogénéité" (Def 3) : on ne peut mettre en rapport que des grandeurs de même nature, ligne avec ligne, surface avec surface, volume avec volume.

- ce que nous appelons aujourd'hui l'"axiome d'Archimède" (Def 5). Nous pouvons traduire cette définition par : deux grandeurs a et b ont une raison entre elles lorsqu'il existe au moins deux naturels m et n tels que $m\,a > b$ et $n\,b > a$. Cependant, il faut se garder d'assimiler les grandeurs à nos réels positifs. Les nombres (entiers) ne sont pas des grandeurs, les termes "multiple" "partie" "raison" "proportionnel", sont repris au livre VII pour les nombres indépendamment des définitions du livre V.

Cette "raison" est un lien très précis entre grandeurs, l'identité des raisons définit la proportion (déf 7). Nous pourrons donc utiliser le terme "rapport", voire même la notation $\frac{a}{b}$, à condition de ne pas perdre de vue que les grandeurs ne sont pas des nombres, et qu'en particulier le produit de deux grandeurs n'existe pas. La "raison" entre a et b n'est ni un nombre, ni une grandeur.

C'est avec la définition 6 que la théorie des grandeurs prend son sens. "Traduisons" :

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ lorsque, quels que soient les naturels non nuls

m et n, on a : $ma > nb$ et $mc > nd$ (1)

ou

$ma = nb$ et $mc = nd$ (2)

ou

$ma < nb$ et $mc < nd$ (3)

(2) ne peut se réaliser que dans le cas où a et b d'une part, c et d de l'autre sont commensurables, mais la définition 6 est praticable dans tous les cas. La théorie d'Eudoxe permet effectivement de contourner l'obstacle de l'incommensurabilité.

Le contraste avec les définitions du livre VII, consacrées aux nombres, devrait permettre de mieux apprécier l'originalité de la théorie des grandeurs.
Toutefois Euclide utilise dans ses démonstrations une autre forme de la définition 6

si $ma > nb$ alors $mc > nd$
si $ma = nb$ alors $mc = nd$
si $ma < nb$ alors $mc < nd$.

LIVRE SEPTIEME

DÉFINITIONS.

1. L'unité est ce selon quoi chacune des choses existantes est dite une.

2. Un nombre est un assemblage composé d'unités.

3. Un nombre est une partie d'un nombre, le plus petit du plus grand, lorsque le plus petit mesure le plus grand.

4. Un nombre est parties d'un nombre, quand il ne le mesure pas.

5. Un nombre est multiple d'un nombre, le plus grand du plus petit, quand il est mesuré par le plus petit.

6. Le nombre pair est celui qui peut se partager en deux parties egales.

7. Le nombre impair est celui qui ne peut pas se partager en deux parties égales, ou bien celui qui diffère d'une unité du nombre pair.

8. Le nombre pairement pair est celui qui est mesuré par un nombre pair multiplié par un nombre pair.

9. Le nombre pairement impair est celui qui est mesuré par un nombre pair multiplié par un nombre impair.

10. Le nombre impairement pair est celui qui est mésuré par un nombre impair, multiplié par un nombre pair.

11. Le nombre impairement impair est celui qui est mesuré par un nombre impair multiplié par un nombre impair.

12. Le nombre premier est celui qui est mesuré par l'unité seule.

13. Les nombres premiers entr'eux sont ceux qui ont l'unité seule pour commune mesure.

14. Le nombre composé est celui qui est mesuré par quelque nombre.

15. Les nombres composés entr'eux sont ceux qui ont quelque nombre pour commune mesure.

16. Un nombre est dit multiplier un nombre, lorsque le multiplié est ajouté autant de fois qu'il y a d'unités dans celui qui le multiplie, et qu'un nombre est produit.

17. Lorsque deux nombres se multipliant font un nombre, celui qui est produit se nomme plan; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés de ce produit.

18. Lorsque trois nombres se multipliant entr'eux font un nombre, celui qui est produit est appelé solide; et les nombres qui se multiplient, se nomment les côtés du produit.

19. Le nombre quarré est celui qui est également égal, ou celui qui est contenu sous deux nombres égaux.

20. Le nombre cube est celui qui est également égal également, ou bien celui qui est contenu sous trois nombres égaux.

21. Des nombres sont proportionnels, lorsque le premier est le même multiple du second que le troisième l'est du quatrième, ou lorsque le premier est la même partie ou les mêmes parties du second que le troisième l'est du quatrième.

22. Les nombres plans et solides semblables sont ceux qui ont leurs côtés proportionnels.

23. Le nombre parfait est celui qui est égal à ses parties.

Le texte est ici beaucoup plus accessible. Nous limiterons nos commentaires aux definitions 1, 4 et 21.

Def.1 : c'est la possibilité de considérer une chose globalement et isolément (comme élément unique d'un singleton dirions-nous aujourd'hui) qui définit l'unité. Cela permet une grande souplesse, nous l'avons observé dans le passage du "Ménon" : rien n'empêche de "dire une" une portion du côté d'un carré pour éviter par la suite de partager l'unite en quantiemes. L'unité est indivisible. La conception pythagoricienne du nombre, et au départ de l'unite, est très differente. Pour le pythagorisme, le nombre est la substance profonde des choses, par exemple des formes géométriques : nombres triangles, nombres carrés ... Nous retrouverons cette conception dans le texte de Théon de Smyrne.

Def.4 : quand un nombre a mesure un nombre b, a est "partie" de b, sinon a est "parties" de b. Curieusement le pluriel devient la marque de la négation. Une explication s'impose : si a n'est pas lui-même partie de b, on peut cependant décomposer a en parties de b, quitte s'il le faut à le décomposer en unités. Un exemple : 6 n'est pas partie de 4 mais 6 est trois fois 2, 2 est partie de 4, 6 est donc formé de trois parties de 4.

Ce point étant éclairci, nous relevons dans ce livre VII des termes communs au livre V tels "partie", "multiple". Mais ces termes sont totalement redéfinis, nous sommes ici dans un autre domaine, celui de l'arithmétique. De plus l'usage qui est fait du pluriel "parties" n'a pas de sens dans la théorie des grandeurs, une grandeur peut se partager indéfiniment. L'incommensurabilité, l'irrationalité ne sont pas du domaine de l'arithmétique, du nombre.

Def.21 : cette définition de la proportionalité peut se "traduire" ainsi :

a,b,c,d sont des nombres proportionnels

- lorsqu'il existe un entier n tel que ($a = nb$ et $c = nd$) ou ($na=b$ et $nc = d$)

ou

- lorsqu'il existe deux entiers m et n tels que $ma = nb$ et $mc = nd$

Pourquoi tant de précautions ? Parce que 1 n'est pas un nombre on ne peut pas poser $m=1$ ou $n=1$ dans le second cas pour retrouver le premier.

Le contraste avec la définition de la proportionalité du livre V est éclairant.

L'incommensurabilité et l'irrationalité sont traitées au livre X. Pourquoi avoir placé les livres arithmétiques (VII, VIII et IX) entre des livres consacrés aux grandeurs ? Une explication est fournie par la proposition 5 du livre X :

"Les grandeurs commensurables ont entre elles la raison qu'un nombre a avec un nombre"

Les notions jusque là très cloisonnées de "raison de grandeurs" et de "raison de nombres" sont identifiées dans le cas des grandeurs commensurables et de nombreuses propositions du livre X seront démontrées à l'aide de résultats arithmetiques.

La rigueur de la démonstration de la proposition X-5 est douteuse et certains auteurs y voient une faiblesse majeure de l'édifice euclidien.

LE DIXIÈME LIVRE

DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

DÉFINITIONS.

1. On appèle grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure.

2. Et incommensurables, celles qui n'ont aucune mesure commune.

3. Les lignes droites sont commensurables en puissance, lorsque leurs quarrés sont mesurés par une même surface.

4. Et incommensurables, lorsque leurs quarrés n'ont aucune surface pour commune mesure.

5. Ces choses étant supposées, on a démontré qu'une droite proposée a une infinité de droites qui lui sont incommensurables, non seulement en longueur, mais encore en puissance. On appèlera rationnelle la droite proposée.

6. On appèlera aussi rationnelles les droites qui lui sont commensurables, soit en longueur et en puissance, soit en puissance seulement.

7. Et irrationnelles, celles qui lui sont incommensurables.

8. On appèlera rationel le quarré de la proposée.

9. On appèlera aussi rationnelles les surfaces qui lui sont commensurables.

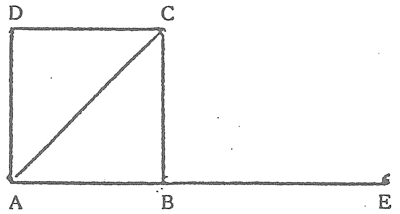
10. Et irrationnelles celles qui lui sont incommensurables.

11. On appèlera encore irrationnelles et les droites dont les quarrés sont égaux à ces surfaces, c'est-à-dire les côtés des quarrés, lorsque ces surfaces sont des quarrés; et les droites avec lesquelles sont décrits des quarrés égaux à ces surfaces, lorsque ces surfaces ne sont pas des quarrés.

Def.3 : la notion de "commensurabilite en puissance " est aujourd'hui disparue. Expliquons sur un exemple : la diagonale et le côté d'un carré sont incommensurables, mais le carre construit sur la diagonale est double de celui construit sur le côté. Voilà donc deux grandeurs dont la commensurabilité n'est pas realisee, en acte, mais seulement potentiellement. C'est une distinction comparable à celle que fait Aritoste à propos de l'infini : l'infini existe en puissance mais pas en acte. Par exemple, il n'existe pas de grandeur indivisible, une grandeur est donc infiniment divisible mais on ne peut pas réaliser, rendre "actuelle", cette infinité de divisions.

Def.6 et 7 : "irrationnelle" est indissociable d'"incommensurable" et a le même caractère relatif.

Soit par exemple un carré ABCD dont le côté AB est prolongé par BE tel que BE = AC. Posons AB = 1



AC est "irrationnelle" par rapport à AE car, même en puissance, AC et AE sont incommensurables ($AC^2 = 2$ et $AE^2 = 3 + 2AC$). AC est "rationnelle" par rapport à AB car AC et AB sont commensurables en puissance.

La "commensurabilité en puissance" confère à une grandeur la qualité de "rationnelle". En disant que le carré construit sur la diagonale est double du carre construit sur le côté, on a réussi à exprimer, même indirectement, le rapport entre ces deux grandeurs: "rationnel", indissociable de "commensurable" l'est aussi d' "exprimable".

Notons que dans les définitions 9 et 10 la commensurabilité en puissance n'intervient pas pour les surfaces : on peut construire un carré sur un segment mais il n'y a pas de construction analogue à partir d'une surface.

Dans la définition 11 il est posé qu'il existe un carré égal à une surface non carree. Trouver un tel carré est le problème de "la quadrature". Celle du cercle a occupé longtemps les mathématiciens.

III. LA METHODE DU PAIR ET DE L'IMPAIR : proposition X-117

Cette proposition n'est pas d'Euclide, elle a été rajoutée postérieurement aux *Eléments*. Elle ne figure pas dans l'édition anglaise des *Eléments* présentée par Heath. Il convient donc de se garder de théoriser sur le détail du texte.

Toutefois, nous la retenons ici : l'opposition pair/impair qui est au coeur de cette démonstration de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carre fait partie du vieux fond pythagoricien. Il n'est pas exclu que ce soit avec une démonstration de ce type que les premiers pythagoriciens aient établi le premier cas d'incommensurabilité.

Par ailleurs, la preuve de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté du carré par la méthode du pair et de l'impair est citée par Aristote comme modèle de démonstration "par l'absurde" :

> "Toujours, en effet, quand on effectue un raisonnement par l'absurde, on conclut le faux par syllogisme[2], mais la proposition initiale à démontrer est prouvée hypothétiquement quand une impossibilité résulte de la proposition contradictoire <à la proposition initiale>. On prouve, par exemple, l'incommensurabilité de la diagonale, par cette raison que les nombres impairs deviendraient égaux aux nombres pairs, si on posait la diagonale commensurable ; on tire alors la conclusion que les nombres impairs deviennent égaux aux nombres pairs, et on prouve hypothétiquement l'incommensurabilité de la diagonale par ce qu'une conclusion fausse découle de la proposition contradictoire[1].

ARISTOTE Premiers analytiques traduction Tricot Vrin pp.121-122

Encore aujourd'hui, cette démonstration présentée en des termes modernes ou des variantes, parfois avec des références historiques, figure dans de très nombreux manuels scolaires (voir en annexe les documents 4 et 5).

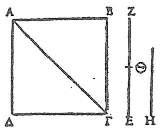
Proposition 117 du livre X d'EUCLIDE

LE DIXIÈME LIVRE DES ÉLÉMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION CXVII.

Qu'il nous soit proposé de démontrer que dans les figures quarrées la diagonale est incommensurable en longueur avec le côté.

Soit le quarré ΑΒΓΔ, et que ΑΓ soit sa diagonale; je dis que la droite ΑΓ est incommensurable en longueur avec ΑΒ.



Qu'elle lui soit commensurable, si cela est possible; je dis qu'il s'en suivrait qu'un même nombre serait pair et impair. Or, il est évident que le quarré de ΑΓ est double du quarré de ΑΒ (47. 10); mais ΑΓ est commensurable avec ΑΒ; la droite ΑΓ a donc avec la droite ΑΒ la raison qu'un nombre a avec un nombre (6. 10). Que ΑΓ ait avec ΑΒ la raison que le nombre ΕΖ a avec le nombre Η, et que les nombres ΕΖ, Η soient les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux; le nombre ΕΖ ne sera pas l'unité. Car si ΕΖ était l'unité, à cause que ΕΖ a avec Η la raison que ΑΓ a avec ΑΒ, et que ΑΓ est plus grand que ΑΒ, l'unité ΕΖ serait plus grande que le nombre Η, ce qui est absurde; ΕΖ n'est donc pas l'unité; ΕΖ est donc un nombre. Et puisque ΓΑ est à ΑΒ comme ΕΖ est à Η, le quarré de ΓΑ sera au quarré de ΑΒ comme le quarré de ΕΖ est au quarré de Η. Mais le quarré de ΓΑ est double du quarré de ΑΒ; le quarré de ΕΖ est donc double du quarré de Η; le quarré du nombre ΕΖ est donc pair. Le nombre ΕΖ est donc pair; car s'il était impair, son quarré serait impair; parce que si l'on ajoute tant de nombres impairs que l'on voudra, leur quantité étant impaire, leur somme est un nombre impair (23. 9); le nombre ΕΖ est donc un nombre pair. Partageons le nombre ΕΖ en deux parties égales en Θ. Puisque les nombres ΕΖ, Η sont les plus petits de ceux qui ont la même raison avec eux, ces nombres seront premiers entr'eux. Mais le nombre ΕΖ est pair; le nombre Η est donc impair. Car s'il était pair, les nombres ΕΖ, Η, qui sont premiers entr'eux, seraient mesurés par deux; parce que tout nombre pair a une partie qui en est la moitié, ce qui est impossible. Le nombre Η n'est donc pas un nombre pair; il est donc impair. Mais ΕΖ est double de ΕΘ; le quarré de ΕΖ est donc quadruple du quarré de ΕΘ (11. 8). Mais le quarré de ΕΖ est double du quarré de Η; le quarré de Η est donc double du quarré de ΕΘ; le quarré de Η est donc pair; le nombre Η est donc pair, d'après ce qui a été dit (29. 9). Mais il est aussi impair, ce qui est impossible; la droite ΑΓ n'est donc pas commensurable en longueur avec ΑΒ; elle lui est donc incommensurable. Ce qu'il fallait démontrer.

On remarquera de la ligne 11 à la ligne 14 une autre démonstration par l'absurde pour établir que EZ n'est pas l'unité, c'est à dire que EZ est un nombre.

Compte tenu des réserves que nous avons faites au début, nous ne commenterons pas davantage ce texte. Nous avons préféré approfondir la méthode du pair et de l'impair, regarder si elle peut s'appliquer à d'autres preuves d'irrationalité, en voir les limites.

METHODE DU PAIR ET DE L'IMPAIR (prolongements)

1) Nombres carrés et nombres triangulaires

DIOPHANTE : *"Tout nombre triangulaire, pris 8 fois, et augmenté de 1 unité, devient un carré".*

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$8T_n = \frac{8n(n+1)}{2} + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n+1)^2$$

réciproquement : le carré d'un nombre impair est égal à l'unité augmentée de 8 fois un nombre triangulaire.

2) Autres preuves d'irrationalité

Soit N un nombre impair.

Supposons qu'il existe une fraction irréductible $\frac{n}{p}$ telle que $N = (\frac{n}{p})^2$.

On a alors $Np^2 = n^2$ (1)

et n et p impairs : $n^2 = 8T+1$ et $p^2 = 8T'+1$

En posant $N = 2N'+1$, (1) s'écrit : $8NT' + 2N' + 1 = 8T + 1$

d'où, en simplifiant, $4NT' + N' = 4T$ (2)

a) N' impair. $4NT' + N'$ impair et $4T$ pair : contradiction

$\sqrt{N}$ est irrationnel quand $N = 3 ; 7 ; 11 ; 15 ; 19 ; ... ; 4k+3 ; ...$

b) N' pair : $N' = 2N''$ et (2) s'écrit $2NT' + N'' = 2T$ (3)

α) N'' impair. $2NT' + N''$ impair et $2T$ pair : contradiction

$\sqrt{N}$ est irrationnel quand $N = 5 ; 13 ; 21 ; ... ; 8k+5 ; ...$

β) N'' pair : $N'' = 2N'''$ et (3) s'écrit $NT' + N''' = T$ (4)

La méthode ne permet pas de conclure ($N = 8N'''+1$). Le premier cas sur lequel cette méthode ne permet pas de conclure est celui de $\sqrt{17}$ ($N''' = 2$).

Cette reconstitution de preuves d'irrationalité à l'aide de notions pythagoriciennes telles que "nombres carres", "nombres triangulaires", opposition pair/impair n'a toutefois aucune valeur historique. Nous ne cherchons pas à affirmer que telles ont été les premieres preuves de l'irrationalité de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ... En ce qui nous concerne, l'interet est surtout pédagogique : s'appuyer sur ce schéma pour proposer en classe des activités sur l'irrationalité $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, découvrir même une impasse pour $\sqrt{17}$ tout en restant dans le cadre de la proposition 117, l'opposition pair/impair.

Terminons par une curiosité :

> *"Théodore (...) nous avait tracé quelques figures à propos de racines et nous avait montré que celles de trois pieds et de cinq pieds ne sont point pour la longueur commensurables avec celle d'un pied, et, les prenant ainsi l'une après l'autre, il était allé jusqu'à celle de dix sept pieds et il s'était, je ne sais pourquoi, arrêté là".*

Platon - Théétète 147
édition Garnier-Flammarion page 86

Il semble donc, d'aprés Platon, qu'il y ait bien eu avant la démonstration de Théodore un obstacle pour la "racine" de 17 (entendre par "racine" de 17 le côté d'un carré de 17 pieds).

IV. L'algorithme de HERON D'ALEXANDRIE

Avec le texte qui suit, nous changeons complètement de registre. Héron ne se préoccupe guère de théorie et donne deux recettes. La première sert à calculer la surface d'un triangle quand on connaît les trois côtés, elle peut donner lieu à une activité en classe sur les relations dans un triangle mais sort de notre sujet. L'exemple qu'il choisit l'amène à calculer "le côté de 720", c'est à dire la racine carrée de 720, et c'est sur ce cas qu'il donne sa deuxième recette : un algorithme qui fournit des approximations de plus en plus fines d'une racine carrée.

> *Il y a une méthode générale pour trouver, sans perpendiculaire, la surface d'un triangle quelconque dont les trois côtés sont donnés.*
>
> *Par exemple, que les côtés d'un triangle soient de 7, 8 et 9 unités. Additionne 7, 8 et 9 : cela fait 12 ; retranche 7, il reste 5 ; de nouveau retranche de 12, 8, il reste 4 et retranche-lui de nouveau 9, il reste 3. Fais le produit de 12 par 5 ; cela fait 60 ; multiplie le par 4, cela fait 240 ; multiplie ce dernier par 3, cela fait 720. Prends le côte de celui-ci : ce sera la surface du triangle.*

Puisque 720 n'a pas de côte rationnel, nous extrairons le côte avec une très petite différence de la façon suivante. Comme le premier nombre carré plus grand que 720 est 729, qui a pour côté 27, divise 720 par 27 : cela fait 26 et $\frac{2}{3}$; ajoute 27 cela fait $53\frac{2}{3}$; prends en la moitié : cela fait $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$. Ainsi donc le côté de 720 sera très proche de $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$

En fait, $26\frac{1}{2}\frac{1}{3}$, multiplié par lui-même donne 720 $\frac{1}{36}$; de sorte que la différence (sur les carres) est $\frac{1}{36}$.

Si nous voulons rendre cette différence inférieure encore à $\frac{1}{36}$, nous mettrons 720 $\frac{1}{36}$ trouvé tout à l'heure à la place de 729, et, en procédant de la même façon, nous trouverons que la différence (sur les carrés) est beaucoup plus petite que $\frac{1}{36}$ "

("Algorithme au fil des Ages" IREM de Poitiers)

Nous trouvons dans ce texte les quantièmes egyptiens que les Grecs réservaient à la logistique. C'est une notation additive : $26\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$ signifie $26 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$. Pour éviter de trop longs développements sur les techniques de calcul égyptiennes, et pour réduire la place des calculs nous avons utilisé nos fractions.

Dans un premier temps, suivons le texte :

$729 > 720$: 27 est une approximation par excès de $\sqrt{720}$

$\frac{720}{27} < \frac{720}{\sqrt{720}}$: $26\,\frac{2}{3}$ est une approximation par défaut.

$$26\,\frac{2}{3} < 720 < 27$$

$26\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$ est la moyenne arithmétique de $26\,\frac{2}{3}$ et 27 ;

$(26\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3})^2 = 720\,\frac{1}{36} > 720$ donc $26\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}$ est à nouveau en excès.

En poursuivant, on obtient :

$720 : 26\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3} = 720 : \frac{161}{6} = \frac{4320}{161}$ (par défaut)

puis $\frac{1}{2}\,(\frac{161}{6} + \frac{4320}{161}) = \frac{51841}{1932}$ $(26\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}\,\frac{1}{14}\,\frac{1}{92}\,\frac{1}{1932})$

$(\frac{51841}{1932})^2 - 720 = \frac{1}{1932^2}$ $\quad$ $:\frac{51841}{1932}$ est en excès.

$26\,\frac{2}{3} < \frac{4320}{161} < 720 < \frac{51841}{1932} < 26\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3} < 27$

Cherchons maintenant, à la manière de HERON des approximations de $\sqrt{2}$:

APPROXIMATIONS SUCCESSIVES DE $\sqrt{2}$

$1 < 2 < 2^2$ $\quad$ 1ère valeur : 2

$\frac{1}{2}\,(2 + \frac{2}{2}) = \frac{3}{2}$ $\quad$ 2ème valeur : $1\,\frac{1}{2}$ (1,5)

différence : $(1\,\frac{1}{2})^2 - 2 = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{2}\,(\frac{3}{2} + \frac{2}{3}) = \frac{17}{12}$ $\quad$ 3ème valeur : $\frac{17}{12} = 1\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{12} \simeq 1{,}41666$

différence : $(\frac{17}{12})^2 - 2 = \frac{1}{12^2}$

$\frac{1}{2}\,(\frac{17}{12} + \frac{2}{\frac{17}{12}}) = \frac{577}{408}$ $\quad$ 4ème valeur : $\frac{577}{408} \simeq 1{,}4142157$

$(1\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{17}\,\frac{1}{51}\,\frac{1}{408})$

différence : $\left(\frac{577}{408}\right)^2 - 2 = \frac{1}{408^2}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{577}{408} + \frac{2}{\frac{577}{408}}\right) = \frac{665\ 887}{470\ 832}$ 5eme valeur : $\frac{665\ 887}{470\ 832} \simeq 1,4142136$

différence : $\left(\frac{665\ 587}{470\ 832}\right)^2 - 2 = \frac{1}{470\ 832^2}$

A la base de l'algorithme de Héron, il y a la proportionalité. La moyenne arithmétique, bien sûr, mais aussi les deux autres moyennes fondamentales : l'harmonique et la geométrique.

On commence avec a_0 tel que $a_0^2 > N$ puis on calcule $b_0 = \frac{N}{a_0}$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) = m_a(a_n.b_n) \text{ (moyenne arithmétique)}$$

$$b_{n+1} = \frac{N}{a_{n+1}} = \frac{N}{\frac{1}{2}\left(a_n + \frac{N}{a_n}\right)} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n} = m_h(a_n.b_n) \text{ (moyenne harmonique)}$$

$$a_nb_n = N \text{ donc } \sqrt{N} = m_g(a_n.b_n \text{ (moyenne géométrique)}$$

Or ces moyennes n'avaient guère de secret pour les Grecs, ils savaient en particulier que $m_a > m_g > m_h$ (voir en annexe le document 6) dont on peut tirer :

$a_0 > a_1 > ... > a_n > ... a_n > ... > \sqrt{N} > ... > b_n > ... b_1 > b_0$.

Poursuivons encore :

$$a_{n+1} - b_{n+1} = a_{n+1} - \frac{N}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{N}{a_n}\right) - \frac{N}{a_{n+1}} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}\frac{N}{a_n} - \frac{N}{a_{n+1}}$$

d'où, puisque $a_n > a_{n+1}$,

$$a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{1}{2}(a_n - b_n) \qquad (1)$$

Aujourd'hui nous dirions que (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes qui convergent vers $\sqrt{N}$. Les Grecs ne connaissaient pas la notion de limite, nous sommes allés un peu trop loin. Héron dit seulement qu' "*en procédant de la même façon, nous trouverons que la différence (sur les carrés) est beaucoup plus petite que* $\frac{1}{36}$".

Revenons, pour terminer, à Euclide. En effet, l'inegalite que nous avons notee (1) renvoie très précisément à la première proposition du livre X, sur la "dichotomie" :

PROPOSITION I.

Deux grandeurs inégales étant proposées, si l'on retranche de la plus grande une partie plus grande que sa moitié, si l'on retranche du reste une partie plus grande que sa moitié, et si l'on fait toujours la même chose, il restera une certaine grandeur qui sera plus petite que la plus petite des grandeurs proposées.

L'algorithme de Héron ne fournit pas une preuve d'irrationalité :

$$a_{n+1}^2 - N = \frac{1}{4}\left(a_n + \frac{N}{a_n}\right)^2 - N = \frac{1}{4}\left(a_n - \frac{N}{a_n}\right)^2 = \frac{1}{4a_n^2}\left(a_n^2 - N\right)^2$$

par conséquent, si $a_n^2 \neq N$, $a_{n+1}^2 \neq N$.

Il suffit donc que la première valeur choisie, a_0, ne soit pas $\sqrt{N}$ pour qu'aucun terme de la suite ne prenne la valeur $\sqrt{N}$.
Nous pouvons donc avoir une suite (a_n) infinie, dans le cas où $\sqrt{N}$ est rationnel.

V. LES NOMBRES LATERAUX ET DIAGONAUX : TEXTE DE THEON DE SMYRNE

Théon est un philosophe néopythagoricien, le passage qui suit est extrait de son ouvrage : "*Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon*". Dans un passage de "*La République*", dont la lecture prendrait ici trop de place, Platon parle de la "*diagonale rationnelle de cinq*". Le mot diagonale évoque la figure du carré, mais à la différence des nombres triangulaires, tétragones, pentagones ... représentés par les figures correspondantes d'une géométrie "discrete", il importe ici de bien distinguer diagonale et côté d'un carré, grandeurs incommensurables, et nombres latéraux et diagonaux (pour lesquels Platon rajoute l'adjectif "rationnel"), entiers toujours mesurés au moins par l'unité.

Des nombres latéraux et des nombres diagonaux

XXXI. De même que les nombres ont en puissance les rapports des triangulaires, des tétragones, des pentagones et des autres figures, de même nous trouverons que les rapports des nombres latéraux et des nombres diagonaux se manifestent dans les nombres selon des raisons génératrices, car ce sont les nombres qui harmonisent les figures. Donc comme l'unité est le principe de toutes les figures, selon la raison suprême et génératrice, de même aussi le rapport de la diagonale et du côté se trouve dans l'unité.

Supposons par exemple deux unités dont l'une soit la diagonale et l'autre le côté, car il faut que l'unité qui est le principe de tout soit en puissance le côté et la diagonale; ajoutons au côté la diagonale et à la diagonale ajoutons deux côtés, car ce que le côté peut deux fois, la diagonale le peut une fois *. Dès lors la diagonale est devenue plus grande et le côté plus petit. Or, pour le premier côté et la première diagonale, le carré de la diagonale unité sera moindre d'une unité que le double carré du côté unité, car les unités sont en égalité, mais un est moindre d'une unité que le double de l'unité. Ajoutons maintenant la diagonale au côté, c'est-à-dire une unité à l'unité, le côté vaudra alors 2 unités; mais, si nous ajoutons deux côtés à la diagonale, c'est-à-dire 2 unités à l'unité, la diagonale vaudra 3 unités; le carré construit sur le côté 2 est 4, et le carré de la diagonale est 9 qui est plus grand d'une unité que le double carré de 2.

De même ajoutons au côté 2 la diagonale 3, le côté deviendra 5. Si à la diagonale 3 nous ajoutons deux côtés, c'est-à-dire 2 fois 2, nous aurons 7 unités. Le carré construit sur le côté 5 est 25, et celui qui est construit sur la diagonale 7 est 49, qui est moindre d'une unité que le double (50) du carré 25. De nouveau, si au côté 5 on ajoute la diagonale 7, on obtient 12 unités; et si à la diagonale 7 on ajoute 2 fois le côté 5, on aura 17 dont le carré (289) est plus grand d'une unité que le double (288) du carré de 12. Et ainsi de suite en continuant l'addition. La proportion alterne : le carré construit sur la diagonale sera tantôt plus petit, tantôt plus grand, d'une unité, que le double carré construit sur le côté, en sorte que ces diagonales et ces côtés seront toujours exprimables.

Inversement les diagonales comparées aux côtés, en puissance, sont tantôt plus grandes d'une unité que les doubles, tantôt plus petites d'une unité. Toutes les diagonales sont donc, par rapport aux carrés des côtés, doubles alternativement par excès et par défaut, la même unité, combinée également avec tous, rétablissant l'égalité, en sorte que le double ne pèche ni par excès, ni par défaut; en effet, ce qui manque dans la diagonale précédente se trouve en excès, en puissance, dans la diagonale qui suit *.

"Ce sont les nombres qui harmonisent les figures", "l'unité est le principe de toutes les figures": Théon récite tout le credo pythagoricien, credo qui avait pu sembler être mis a mal par la découverte de l'irrationalité. Théon veut visiblement nous montrer qu'il n'en est rien, que les nombres sont bel et bien, "en puissance" et selon des "raisons generatrices", dans le rapport de la diagonale et du côté d'un carré. Voyons donc comment Théon construit ses nombres latéraux et diagonaux : (notons a le côté, d la diagonale, et utilisons pour simplifier le nombre négatif -1)

1) $a_1 = d_1 = 1$ — *La raison en est idéologique : 1 est principe de tout*

$d_1^2 - 2a_1^2 = -1$

2) $a_2 = a_1 + d_1 = 2$ — *En puissance (en élevant au carré), la diagonale est deux fois le côté : $d^2 = 2a^2$*

$d_2 = 2a_1 + d_1 = 3$

$d_2^2 - 2a_2^2 = +1$

3) $a_3 = a_2 + d_2 = 5$ — Par *"diagonale rationnelle* de cinq" Platon désignait donc 7

$d_3 = 2a_2 + d_2 = 7$

$d_3^2 - 2a_3^2 = -1$

4) $a_{n+1} = a_n + d_n$ "*et ainsi de suite en continuant l'addition*"

$d_{n+1} = 2a_n + d_n$

$d_n^{\ 2} - 2a_n^{\ 2} = (-1)^n$ "*La proportion alterne : le carré construit sur la diagonale sera tantôt plus petit, tantôt plus grand, d'une unité, que le double carré construit sur le côté.*

La fin du texte est obscure, M. CAVEING en donne une autre traduction :

> "*Toutes les diagonales seront rendues doubles en puissance de tous les côtés, l'excès et le défaut alternés de la même unité placés uniformément en toutes produisant une égalité et tendant à ce que, dans leur totalité, elles ne soient ni inférieures ni supérieures au double : car ce qui manque en puissance à la diagonale précédente est en excès à celle qui la suit immédiatement*".

"*Toutes les diagonales*", "*tous les côtés*", "*dans leur totalité*" : Théon actualise-t-il l'infini ? envisage-t-il $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n^{\ 2}$? N'allons pas jusque là et revenons au début du texte. Théon ne peut se contenter, comme Héron par exemple, d'approximations à l'aide de nombres latéraux et diagonaux du véritable rapport entre la diagonale et le côté d'un carré, il lui faut une identité. Or cette identité est fournie par un nombre pair d'additions :

$$\sum_{n=1}^{2p} d_n^{\ 2} = 2 \sum_{n=1}^{2p} a_n^{\ 2} \text{ puisque } S_{2p} = \sum_{n=1}^{2p} (-1)^n = 0$$

De là à généraliser, dans un infini qui reste potentiel, il n'y a qu'un faux pas ! $S_{2p+1} = -1$ et nous savons aujourd'hui que (S_n) ne converge pas.

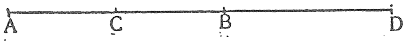
On peut par contre montrer, en utilisant la dichotomie, que $\frac{d_n^{\ 2}}{a_n^{\ 2}} - 2$ peut être rendu aussi petit que l'on veut.

On peut également généraliser la méthode des nombres latéraux et diagonaux pour des approximations de $\sqrt{N}$: il suffit, partant de $d = Na^2$, de poser $a_{n+1} = a_n + d_n$ et $d_{n+1} = Na_n + d_n$.

Un autre commentateur de Platon, Proclus, attribue aux pythagoriciens la découverte du procédé de formation des nombres latéraux et diagonaux et indique que la preuve géométrique se trouve au livre II des Eléments, avec la proposition 10. C'est cette piste que nous allons suivre pour terminer, elle nous conduira à un nouveau type de preuve de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré.

La proposition II 10 dit, en substance, que si l'on ajoute à un segment AB un segment BD, et si C est le milieu de AB, alors

$$AD^2 + DB^2 = 2(AC^2 + CD^2)$$



Remarque : le livre II est consacré à ce que nous appelons l' "algèbre géométrique". En posant

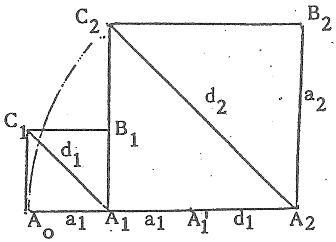
$$AC = x \quad \text{et} \quad BD = y$$

nous obtenons l'identité

$$(2x+y)^2 + y^2 = 2\ [(x+y)^2 + x^2]$$

Comment retrouve-t-on a partir de là la formation des nombres lateraux et diagonaux ?

Construisons, comme sur la figure ci-contre, un carré de côté a_1 et de diagonale d_1 puis, accolé, un carré de côté $a_2 = a_1 + d_1$.



On peut donc, d'après II 10 ecrire : $A_0A_2^2 + A'_1A_2^2 = 2\ (A_oA_1^2 + A_1A_2^2)$

Comme $A'_1A_2 = A_1C_1$ et $A_1C_1^2 = 2A_oA_1^2$, on obtient $A_oA_2^2 = 2A_1A_2^2 = A_2C_2^2$

Le côté du carré $A_1A_2B_2C_2$ est $a_2 = a_1 + d_1$, sa diagonale $d_2 = 2a_1 + d_1$

Incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré : preuve par anthyphérèse

La propriété des carrés que nous venons de voir se prête particulièrement à la méthode des soustractions alternées ou anthyphérèse. Le cas le plus connu d'application de cette methode est l'algorithme d'Euclide pour la recherche du plus grand diviseur commun de deux entiers :

étant donnés deux entiers a et b tels que $a > b$, on retranche b de a autant de fois qu'il est possible,

$$a = m_1 b + r_1 \quad \text{avec} \quad 0 < r_1 < b \quad \text{lorsque b ne divise pas a.}$$

Tout diviseur de a et b est diviseur de b et r_1.

- soit r_1 divise b, c'est alors le PGCD de a et b
- soit r_1 ne divise pas b et on recommence : on retranche r_1 de b autant de fois qu'il est possible,

$$b = m_2 r_1 + r_2$$

et on recommence avec r_1 et r_2.

Les restes successifs étant des entiers tels que $r_1 > r_2 > ... > r_n$ on est sûr que le processus s'arrête au bout d'un nombre fini d'opérations, au pire, lorsque a et b sont premiers entre eux, avec $r_n = 1$, les Grecs ne connaissant pas le zéro.

Il est possible de faire fonctionner le même algorithme avec deux grandeurs, mais il n'existe pas une grandeur plus petite que toutes les autres et l'anthyphérèse peut se poursuivre indéfiniment. Ce cas est précisément un critère d'incommensurabilité, c'est ce que démontre la proposition 2 du livre X :

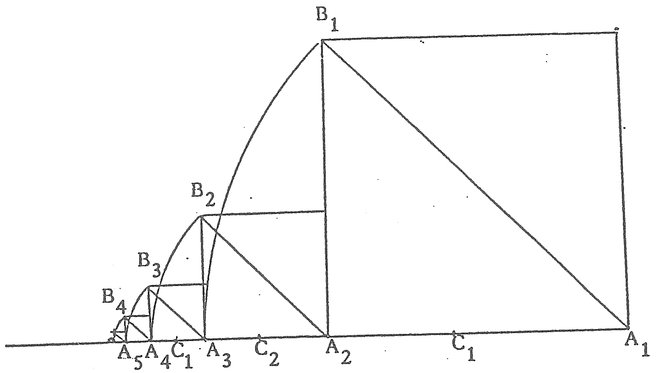
PROPOSITION II.

Deux grandeurs inégales étant proposées, et si la plus petite étant toujours retranchée de la plus grande, le reste ne mesure jamais le reste précédent ; ces grandeurs seront incommensurables.

Euclide ne donne dans la suite des *Eléments* aucun exemple d'utilisation de ce critère. Pourtant on peut penser que si Euclide lui donne une place et prend la peine de le fonder théoriquement, c'est qu'il a été fécond.

L'exemple qui suit n'est pas historique, mais vise à montrer comment peut fonctionner un tel critère :

Soit un carré de diagonale A_1B_1, de côté A_1A_2. Traçons sur la demi droite (A_1A_2) le point A_3 tel que $A_1A_3 = A_1B_1$. Le carré de côté A_2A_3 a comme diagonale A_2B_2. C_1 est le symétrique de A_3 par rapport à A_2. On recommence avec le carré de diagonale A_2B_2 pour obtenir le caré de côté A_3A_4, et ainsi de suite.



Il s'agit de démontrer l'incommensurabilité de la diagonale A_1B_1 par rapport au côté A_1A_2.

A_1A_2 ne mesure pas A_1B_1 car $\dfrac{A_1B_1^{\,2}}{A_1A_2^{\,2}} = 2$ et 2 n'est pas un carre.

1ère soustraction : $A_1B_1 - A_1A_2 = A_2A_3$

2ème soustraction : $A_1A_2 - A_2A_3 = A_1A_2 - A_2C_1 = C_1A_1 = A_2B_2$

(nous utilisons pour cette soustraction la propriété des carrés indiqués au paragraphe précédent).

Le reste A_2A_3 est le côté du carré de diagonale A_2B_2, on est ramené au point de départ : le côté d'un carré ne mesure pas sa diagonale. L'anthyphérèse va donc se poursuivre indéfiniment et nous pouvons conclure : la diagonale et le côté d'"un carré sont incommensurables.

Note : tous les textes analysés ici ont été distribués lors de l'atelier, mais le dernier n'a pas pu être abordé faute de temps.

ANNEXES

Document 1

APPROXIMATIONS BABYLONIENNES DE $\sqrt{2}$

Tablette du LOUVRE (A 06484 - 8) époque séleucide

La diagonale d'un carré est 10 coudées. Qu'est le flanc du carré ?
[Tu multiplieras] 10 par 42;30
[7;5 le flanc]
Tu multiplieras 7;5 par 1;25
[10;2;5 la diagonale]

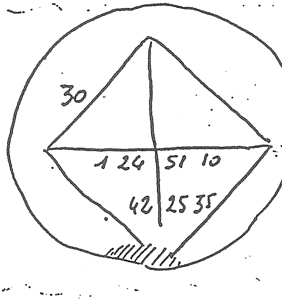
$d = 10$

$a = d\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{\sqrt{2}}{2} = 42;30$

$\sqrt{2} = 1;25$

Tablette YBC 7289 époque ancien age babylonien



$a = 30$

$\sqrt{2} = 1;24;51;10$

$d = a\sqrt{2} = 30 \times 1;24;51;10$
$= 42;25;35$

[ESSAI DE RECONSTITUTION AVEC $\sqrt{a^2+b} \approx a + \frac{b}{2a}$:

$\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1} \approx 1 + \frac{1}{2} = 1;30$

$\sqrt{2} = \sqrt{(1+\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}} \approx 1 + \frac{1}{2} - \frac{\frac{1}{4}}{2(1+\frac{1}{2})} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \boxed{1;25}$

$\sqrt{2} = \sqrt{(\frac{17}{12})^2 - \frac{1}{144}} \approx \frac{17}{12} - \frac{1}{144}\cdot\frac{12}{2\times17} = \frac{17}{12} - \frac{1}{24\times17}$ mais $\frac{1}{24\times17}$ ne peut pas se calculer en base 60 . $\frac{17}{12} - \frac{1}{24\times17} = \frac{577}{408} = \boxed{1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3}} + \frac{35}{60^4} + \cdots$]

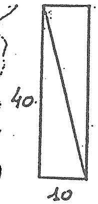
Document 2

ALGORITHME DE BABYLONE

TABLETTE VAT 6598/6

Une porte. Hauteur : un demi [ninda] et 2 coudées. Largeur : 2 coudées. Qu'est sa diagonale ?

Toi, carre 10, la largeur.
Tu trouveras 1;40, le sol.
Dénoue l'inverse de 40 - coudée - la hauteur.
Porte à 1;40, le sol, tu trouveras [2;] 30.
Fractionne en deux 2;30, tu trouveras 1;15.
[A]joute 1;15 [à 40, la hauteur], tu trouveras 41;15.
[la diagonale est 41;15. C'est la façon d'opérer.]



hauteur : H
largeur : L
diagonale : $\sqrt{H^2+L^2}$

1 ninda = 12 coudées
1 coudée = 5 donne
$L = 10$ et $H = 40$
$L^2 = 100 = 1;40$
$\frac{1}{H} = \frac{60}{40} = 1,5 = 1;30$
$H + \frac{1}{2}\left(L^2 \times \frac{1}{H}\right) = 40 + \frac{1}{2}\,2;$
$= 41;15$

$D = \sqrt{H^2+L^2} \approx H + \frac{L^2}{2H}$

ALGORITHME : on cherche des approximations de $\sqrt{N}$

Soit a_i une approximation, calculer le reste : $r = N - a_i^2$

puis $a_{i+1} = a_i + \frac{r}{2a_i}$

remarques : 1°) posons $N = a_i + \alpha$: $r = N - a_i^2 = 2\alpha a_i + \alpha^2$. On en tire $\frac{r}{2a_i} = \alpha + \frac{\alpha^2}{2a_i}$ puis une approximation de α : $\alpha \approx \frac{r}{2a_i}$

2°) $a_{i+1} = a_i + \frac{r}{2a_i} = a_i + \frac{N - a_i^2}{2a_i} = a_i + \frac{N}{2a_i} - \frac{a_i}{2} = \frac{1}{2}\left(a_i + \frac{N}{a_i}\right)$

formule de Héron

Document 3

J. DHOMBRES
NOMBRE-MESURE ET CONTINU
EPISTEMOLOGIE ET HISTOIRE
CEDIC / NATHAN

Chronologie des mathématiciens

MATHÉMATICIENS ET AUTEURS	DATES	OEUVRES CARACTÉRISTIQUES
Ecole Ionienne		
Thalès de Milet	636-546	Fondateur traditionnellement reconnu de la géométrie.
Anaximandre	610-547	Astronome.
Héraclite	576-480	Philosophe du changement
Anaximène	550-480	
Anaxagore	500-428	Théorie de la perspective, quadrature du cercle.
Ecole des Eléates		
Xénophane de Colophon	570-478	Paradoxes sur le mouvement
Mélissos de Samos	Ve. s.	De l'Etre
Parménide	544-450	Sur la Nature
Zénon d'Elée	495-430	Paradoxes sur la flèche d'Achille et de la tortue etc...
Ecole des Pythagoriciens.		
Pythagore	585-500	Irrationalité de $\sqrt{2}$
Philolaüs de Crotone	470-?	Ecrits de Pythagore
Empédocle	490-430	Sur la Nature...
Archytas de Tarente	428-347	Duplication du cube
Hippasos de Métaponte	vers 450	Construction du pentagone et divulgation de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.
Ecole des Sophistes		
Leucippe	Ve. s.	Théorie atomiste
Démocrite	460-370	Publie un traité sur les irrationnels.
Hippocrate de Chios	470-400	Eléments de Géométrie et duplication du cube.
Hippias d'Elis	450-400	Quadratrice.
Antiphon	480-411	Tente la quadrature du cercle par exhaustion.
Bryson	520-450	Méthode d'exhaustion.
Dinostrate	IVe s.	Quadratrice. Aire du cercle.
Zénodore	IIe s.	Traité des Isopérimètres.
Ecole de Platon		
Platon	428-348	La République, Le Ménon...
Eudoxe	408-355	Livre V des Eléments.
Théodore de Cyrène	460-369	Irrationalité de $\sqrt{3}, \sqrt{5}$,...
Théétète	410-369	Théorie des nombres : étude des irrationnels.

MATHÉMATICIENS ET AUTEURS	DATES	OEUVRES CARACTÉRISTIQUES
Ménechme	375-325	Sections coniques.
Aristée	320-?	Géomètre.
Autolycus de Pilane	360-300	Géomètre.
Ecole d'Aristote		
Aristote	384-322	Considérations sur l'infini et le continu.
Eudème de Rhodes	IVe s.	Histoire de l'arithmétique, de la géométrie et de l'astronomie.
Aristoxène	350-?	Eléments d'Harmonie Musicale. Sur le rythme.
Ecole d'Alexandrie		
Euclide	vers 300	Les Éléments, Théorie des nombres irrationnels...
Archimède	287-212	La mesure du cercle. Conoïdes et sphéroïdes. Quadrature de la parabole, etc.
Apollonius de Perge	262-190	Les Coniques, De Locis Planis.
Eratosthène	284-192	Astronome, mathématicien, géographe.
Hipparque	190-125	Astronome ; précurseur de la trigonométrie.
Nicomède	IIe s.	Découverte de la conchoïde
Dioclès	IIe s.	Cissoïde pour la duplication du cube.
Théodore de Bithynie	Ier s.	Les Sphériques.
Héron	Ie ap. J.C	Les Métriques.
Ménélaüs	Ie ap. J.C	Les Sphériques.
Nicomaque de Gérasa	Ie ap. J.C.	Introductio Arithmetica
Ptolémée (Claude)	128-168	Syntaxis Mathematica (Almageste).
Théon de Smyrne	120-180	Exposé des « Connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon ».
Théon d'Alexandrie	IVe s.	Calcul à l'aide des fractions sexagésimales, extraction des racines carrées.
Porphyre	234-305	Explication sur les *Eléments* d'Euclide.
Diophante	325-409	Arithmetica.
Pappus	IVe s.	La Collection mathématique.
Hypathie	370-415	Fille de Théon d'Alexandrie Mathématicienne érudite.

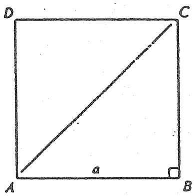
Document 4

MATHEMATIQUE SECONDE

M. GLAYMANN/J. MALAVAL - CEDIC

Dès l'antiquité, *les mathématiciens ont éprouvé des difficultés* à décrire certains rapports par des rationnels. Il a fallu un profond mûrissement à la fois d'ordre mathématique et philosophique pour arriver à concevoir que certains rapports *n'étaient pas rationnels.* Un exemple célèbre est fourni par *le rapport de la longueur d'un côté d'un carré à celle d'une de ses diagonales.*

Les côtés du carré de la figure ci-contre ont pour longueur a.
Le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle ABC conduit à



$$AB^2 + BC^2 = AC^2 \quad \text{avec} \quad AB = BC = a$$

d'où $$AC^2 = 2\,a^2$$

et $$AC = a\sqrt{2}$$

Ainsi $$\frac{AC}{AB} = \sqrt{2}$$

Dans ce cas *un multiple entier de AC ne sera jamais égal à un autre multiple entier de AB. Autrement dit, il est impossible de trouver deux naturels m et n tels que*

$$mAC = nAB$$

Il n'existe pas de rationnel $\frac{n}{m}$ tel que

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}$$

$\sqrt{2}$ est *irrationnel.* Cette découverte est ancienne : elle a été mise en œuvre par Pythagore et son école.
Voici une démonstration contemporaine de l'*irrationalité* de $\sqrt{2}$.

Supposons l'*existence* d'un rationnel $\frac{p}{q}$, tel que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
p et q sont *étrangers* (ils n'ont pas de facteur commun), sinon il est toujours possible de simplifier $\frac{p}{q}$ par le facteur commun.

Nous avons $\frac{p^2}{q^2} = 2$ ou encore $p^2 = 2\,q^2$.

Cette égalité ne peut avoir lieu que si p est *pair.* En effet, si p est *impair,* son carré p^2 est lui-même impair et ne peut être égal à $2\,q^2$, qui est pair. Il s'ensuit que q est *impair,* sinon p et q auraient en commun le facteur 2.
Comme p est pair, il existe un naturel k tel que $p = 2\,k$, et

$$4\,k^2 = 2\,q^2$$

et $$q^2 = 2\,k^2.$$

Cette égalité implique que q est *pair.*

Ainsi, l'existence d'un rationnel $\frac{p}{q}$ égal à $\sqrt{2}$ impliquerait que le naturel q est à la fois *pair* et *impair. Il y a contradiction.*

Il est ainsi prouvé qu'il n'existe pas de rationnel égal à $\sqrt{2}$.

Document 5

MATHEMATIQUES SECONDE

Collection TERRACHER - HACHETTE - 1986

[1] Calcul numérique

V. Compléments

1. Des nombres irrationnels

Nous nous proposons dans ce paragraphe de donner quelques exemples de nombres irrationnels, notamment ceux obtenus au moyen des racines carrées.

Exercice résolu

Le réel $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Solution

Supposons que $\sqrt{2}$ soit un nombre rationnel. Il existe alors un couple d'entiers non nuls p et q tels que $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, la fraction $\frac{p}{q}$ étant de plus irréductible.

En élevant au carré, on obtient $2=\frac{p^2}{q^2}$, c'est-à-dire $2q^2=p^2$.

Rappelons le résultat suivant[1] (appelé théorème de Gauss[2]). « *Si un nombre premier divise un produit d'entiers, il divise au moins l'un de ces entiers.* »

L'écriture $p^2=2q^2$ montre que 2 divise p^2 et donc 2 divise p; il existe alors un entier p' tel que $p=2p'$. Il s'ensuit $(2p')^2=2q^2$, soit $4p'^2=2q^2$, d'où $2p'^2=q^2$.

Cette dernière égalité montre que 2 divise q^2 et donc que 2 divise q.

Les entiers p et q sont ainsi tous deux divisibles par 2 : la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible.

Ce résultat est contradictoire avec l'hypothèse « $\sqrt{2}$ rationnel ».

Conclusion

Le nombre $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercices

35. En s'inspirant de la méthode ci-dessus, établir que $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ sont des irrationnels.

36. On sait que la somme, le produit, le quotient de deux rationnels est rationnel. En déduire que les nombres suivants sont irrationnels :

$$1+3\sqrt{2}\ ;\ \frac{\sqrt{3}-1}{4}\ ;\ \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Document 6

Le traité de la Musique d'ARCHYTAS DE TARENTE

Extrait du Traité de Musique d'ARCHYTAS traduit par Maurice CAVEING :

> "Il y a trois médiétés dans la musique : l'une est l'arithmétique, la seconde la géométrique, la troisième la subcontraire, que l'on appelle harmonique. Il y a médiété arithmétique lorsque trois termes sont en proportion quant à leurs différences de la manière suivante : de ce dont le premier excède le second, le second excède le troisième. Et dans cette proportion, il se trouve que l'intervalle des plus grands termes est plus petit et celui des plus petits plus grand. Il y a médiété géométrique quand les trois termes sont tels que le premier est au deuxième comme le deuxième est au troisième. Dans ce cas l'intervalle produit par les plus grands termes est égal à celui que font les plus petits. Il y a médiété subcontraire, que nous appelons harmonique, quand ils sont tels que de la partie de soi-même dont le premier terme excède le second, de cette même partie du troisième le moyen excède le troisième. Dans cette proportion, l'intervalle des plus grands termes est plus grand, et celui des plus petits plus petit". [III, p. 1179].

Pour plus de détails, voir la brochure "PYTHAGORE, quelques aspects de l'arithmétique Pythagoricienne", chapitre "médiétés"

BIBLIOGRAPHIE

Les textes d'Euclide sont tirés de :

LES OEUVRES D'EUCLIDE traduites par F.PEYRARD
préface de Jean ITARD BLANCHARD 1966

A.DAHAN-DALMEDICO/J.PEIFFER "Une histoire des mathématiques"
SEUIL collection POINTS SCIENCES

Ouvrage collectif "Mathématiques au fil des âges"
GAUTHIER-VILLARS

Maurice CAVEING "La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque"
LILLE 1982

Jean Toussaint DESANTI article "La découverte des nombres irrationnels"
in LOGIQUE ET CONNAISSANCE SCIENTIFIQUE
Encyclopédie de LA PLEIADE

Jean Louis GARDIES "L'héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide"
VRIN 1988

IREM de TOULOUSE brochure : "PYTHAGORE , quelques aspects de l'arithmétique pythagoricienne "

Paul Henri MICHEL "De Pythagore à Euclide "
LES BELLES LETTRES 1950

Arpad SZABO "Les débuts des mathématiques grecques"
VRIN