

"AUTOUR DE L'AXIOME DU CHOIX"

Michel SERFATI

Le présent article, qui dérive d'un exposé en atelier fait en commun à Besançon s'articule autour de la thèse de 3^e cycle de Michel Guillemot ([1]), et utilise également l'annexe de la thèse d'Etat ([2]), Volume II, qu'il a soutenue en collaboration avec J Cassinet). Cette dernière renferme un grand nombre de traductions effectuées par l'auteur de textes (en anglais, italien et allemand), relatifs à l'axiome du choix et la théorie des ensembles.

Comme nous avons choisi pour dates-phares les deux articles de Zermelo (1904 et 1908) tous deux sur "le bon ordre", il est évidemment nécessaire d'expliquer d'abord de quoi il s'agit dans cette affaire de "preuve du bon ordre" et, pour cela, d'évoquer préalablement la situation sur le plan des idées mathématiques en cette année 1904.

Le début de ce siècle mathématique s'ouvre sur un fond de bouleversements majeurs qu'on a peine à imaginer aujourd'hui (dont on en prend cependant la mesure à relire les critiques et les réticences de Poincaré). Un ensemble d'articles de Cantor (1879-1884), avec deux papiers définitifs en 1895-1897 établit pas à pas, sur le modèle paradigmatique de l'arithmétique des entiers, une arithmétique de ces objets nouveaux que sont les "ensembles de points". "Grâce à ce raisonnement, la théorie des ensembles acquiert la même beauté que celle des entiers." Arithmétisation de l'infini, donc. En voici un bref exposé sous forme moderne.

Cardinalité : Si, à ces objets que sont les ensembles, on associe ces "flèches" adaptées que sont les bijections, alors de la relation d'"équipotence" émerge la notion de cardinalité et de nombre cardinal : deux ensembles E et F ont même cardinal s'ils sont équipotents. Cantor développe une arithmétique des cardinaux : somme, produit, exponentiation de cardinaux, mais aussi relation d'ordre sur les cardinaux : si α et β sont deux nombres cardinaux (tels que deux de leurs représentants soient les ensembles E et F), on dit que $\alpha \leq \beta$ s'il existe une bijection de E sur une partie de F. (3) pp 995/1005 et 1023/1031).

D'une part donc, la méthode cantorienne permet d'assurer un statut objectal aux cardinaux des ensembles infinis, donc de prétendre régler au bénéfice de l'infini actuel la vieille querelle : actuel/potentiel. D'autre part, et en sens inverse, elle nous autorise à reconnaître l'arithmétique comme un cas particulier, en laissant apparaître -de façon toute négative-, les ensembles finis comme ceux des ensembles qui ne sont pas "équipotents à une de leurs parties propres" : les cardinaux de ces ensembles sont les entiers naturels.

Ainsi présentée, la méthode cantorienne apparut un temps comme sans faille, éblouissante..... Cependant, on déchantait vite : d'abord, à l'époque même de Cantor, la théorie présente des questions insistantes, irritantes, sans solution, comme celle de la comparabilité des cardinaux : étant donnés deux ensembles quelconques, peut-on toujours assurer qu'il existe une bijection de E sur une partie de F ou une bijection de F sur une partie de E ? C'est-à-dire peut-on comparer pour l'ordre deux cardinaux quelconques ?

Plus inquiétantes apparurent ensuite des antinomies (que par la suite on baptisa pudiquement paradoxes), soit logiques ("ensemble de tous les ensembles"), soit sémantiques (paradoxe de Berry) qui, menaçant de ruiner la théorie depuis son intérieur, tournaient toutes -plus ou moins- autour de l'idée qu'on avait affaire à des collections "trop grosses" pour que la notion même d'appartenance puisse y être fondée.

De là, une situation de crise fondatrice, et qui peut faire penser au moment pythagoricien de la découverte des irrationnelles, Cantor étant ici -par hypothèse- dans une situation pré-euclidienne. On pense ici à un récit de Lebesgue à propos des soirées de discussion entre mathématiciens de l'époque : "Quand nous sortions, [...] nul n'avait aperçu comment resoudre une logique qui semblait brisée.....".

Ordinalité : Si, à ces objets que sont les ensembles totalement ordonnés, on associe ces "flèches" que sont les isomorphismes d'ordre (bijections croissantes), alors émerge la notion de type d'ordre ou encore de *nombre ordinal*. Deux ensembles totalement ordonnés $(E, \leq)$ et $(F, \leq)$ ont même type d'ordre s'il existe entre eux un isomorphisme d'ensembles ordonnés.

Séparant ici ce qui était structurellement confondu dans les nombres entiers, c'est-à-dire la cardinalité et l'ordinalité, Cantor développe donc également, parallèlement, une arithmétique des ordinaux : somme, produit, exponentiation d'ordinaux, relation d'ordre sur l'ensemble des ordinaux : si α et β sont deux ordinaux (dont des représentants sont $(E, \leq)$ et $(F, \leq)$, on dit que $\alpha \leq \beta$ s'il existe une bijection croissante de E sur une partie de F . Il est clair que deux ensembles de même cardinal peuvent avoir des ordinaux différents : l'arithmétique des ordinaux est plus subtile et plus riche.

Cantor voudrait bien saisir la collection de tous les ordinaux, à la fois pour son intérêt propre, et aussi pour pouvoir définir avec précision des cardinaux transfinis plus grands (cf [3]). Cependant, pour ce faire il se limite à la collection des ordinaux des ensembles *bien ordonnés*, et, à cette fin, c'est lui qui donne cette définition du "bon ordre", que nous formulons comme suit :

On dit que $(E, \leq)$ est un ensemble *bien ordonné* si $\leq$ est une relation d'ordre sur E telle que toute partie de E contienne un plus petit élément pour $\leq$: il en résulte immédiatement que E est totalement ordonné : le bon ordre est une relation d'ordre total, d'un type privilégié, analogue à celui de l'ordre naturel sur $\mathbb{N}$.

Pour les ordinaux des ensembles bien ordonnés, Cantor est cette fois en mesure d'établir la relation de comparabilité, dont on a vu qu'elle était incertaine pour les cardinaux.

Cependant, en 1897, Burali-Forti propose un nouveau paradoxe, cette fois de type "ordinal", et relatif à la collection de tous les ordinaux d'ensembles bien ordonnés.

Signalons, pour terminer en demeurant dans la question de la relation entre les cardinaux et les ordinaux, ce "soupon" de Cantor : il existe une surjection strictement croissante de la collection des ordinaux sur celle des cardinaux (évidemment non injective...).(4) Chapitre VI 260/273 et 276/283).

2) La preuve du bon ordre de 1904

Il s'agit d'une lettre ([5], traduite dans [1]) de Zermelo à Hilbert publiée dans les *Mathematische Annalen*, où Zermelo déclare établir le résultat suivant : tout ensemble peut être bien ordonné.

Commentaire : Autrement dit, il y a toujours moyen, sur un ensemble quelconque (pensez à $\mathbb{R}$!) de fabriquer une structure d'ordre total analogue à celle des entiers. Pour le cas de $\mathbb{R}$ (le "continu"), il faudra donc trouver un ordre autre que l'usuel ! Si cette propriété est établie, la comparabilité des cardinaux en résultera aussitôt. C'est probablement ici un des motifs majeurs qui, selon Desanti, anime Zermelo.

La technique de Zermelo dans cette première démonstration est ici "constructive" (ce que note Desanti ([7]), pp 165). Dans ce bref article, on peut distinguer :

a) Exposé liminaire fondamental, que j'expose en termes légèrement plus modernes (M est ici un ensemble quelconque).

Supposons, dit Zermelo : "qu'à tout sous ensemble M' de M , soit associé un élément quelconque m'_i appartenant à M' lui-même que l'on pourra appeler élément distingué. Ceci donne une "correspondance" y particulière entre l'ensemble $P(M)$ de toutes les parties de M et l'ensemble M ."

Commentaire : Si l'ensemble M était bien ordonné (ce qu'il s'agit précisément de démontrer), alors, on pourrait toujours choisir un élément "distingué", dans toute partie, et qui en serait le premier élément. Zermelo fait donc ici l'hypothèse qu'une sorte de réciproque est valide.

b) Idée de la démonstration

Zermelo se déplace, comme dit Desanti, dans "le champ paradigmatique des nombres ordinaux". Techniquement, il utilise ici les "moyens du bord".

La méthode de Zermelo consiste en effet à supposer le problème résolu, en définissant ce qu'il appelle les y -ensembles de M , par une sorte d'axiomatisation des sections commençantes fermées (*).

On appelle y -ensemble de M tout sous ensemble bien ordonné F tel que :

$$(\forall a_0 \in F) \ a_0 = y(M - A_0) \text{ où } A_0 = \{t \in F; t < a_0\}.$$

Autrement dit, l'élément distingué du complémentaire de la section finissante ouverte $A_0 =] \ , a_0]$ n'est autre que a_0 .

Commentaire : Comprenons ce discours volontariste : Si M était bien ordonné (ce qu'il s'agit précisément de démontrer.....), le complémentaire de A_0 serait évidemment la section commençante fermée $[a_0 \ , \longrightarrow [$ dont l'élément distingué est évidemment $a_0 \dots$ et le tour est joué.

Cela posé, Zermelo montre que :

a) Il y a dans M des y -ensembles.

b) Si F et G sont deux y -ensembles distincts (mais néanmoins associés à la même correspondance y), l'un d'eux est égal à un segment de l'autre.

Commentaire : cette propriété est évidemment vérifiée par les sections commençantes.

c) Zermelo appelle alors Ly l'ensemble de tous les éléments de M qui sont dans au moins un y -ensemble. "Cette totalité peut être ordonnée de telle sorte qu'elle soit elle-même un y -ensemble et qu'elle contienne tous les éléments de M ".

M peut donc être bien ordonné : "en conséquence, à chaque correspondance correspond un bon ordre sur M , entièrement déterminé." Et Zermelo de conclure sur la comparabilité des cardinaux : "Quoiqu'il en soit, un tel bon ordre doit exister... et chaque ensemble pour lequel la totalité des ensembles partiels a un sens et sa puissance peut être considérée comme un aleph..... Il s'ensuit que, pour toute puissance transfinie, deux ensembles sont comparables entre eux.....".

(*) Dans un ensemble ordonné $(E, \leq)$ (partiellement en général), rappelons qu'on appelle section commençante fermée (resp. ouverte) tout sous ensemble de la forme

$$[a \ , \longrightarrow [\text{ (resp.) } a \ , \longrightarrow [\ , \text{ c'est-à-dire : } [a \ , \longrightarrow [= \{t \in E \text{ tel que } t \geq a\}$$

Desanti pense que c'est là, dans l'incomparabilité des cardinaux, dans ce "défaut de la théorie" que se niche le ressort de la démarche de Zermelo.

c) Critique par Zermelo de sa propre démonstration :

celle-ci repose en effet sur le "principe de choix" exposé et admis au début voici ce qu'en dit Zermelo : *"..... même pour une totalité infinie d'ensembles, il y a toujours une correspondance qui à chaque ensemble associe un de ses éléments, ou, exprimé formellement, que le produit d'une totalité infinie d'ensembles dont chacun contient au moins un élément diffère lui-même de zéro. Ce principe logique, ne peut à la vérité être réduit encore à un plus simple, mais il est appliqué partout, sans hésitation, dans les déductions mathématiques. Par exemple, la validité de la proposition affirmant que le nombre de parties dans lequel se décompose un ensemble est plus grand ou égal au nombre de tous ses éléments ne peut être démontrée autrement que si l'on pense associer à chacune de ses parties en question un élément".*

Plus bas, Zermelo écrit qu'il faut se débarrasser de la "mystique de l'ordre cantorien". Il s'agit là, très certainement, chez Zermelo, d'une pièce maîtresse de sa pensée. L'ordre n'est qu'une certaine sorte de mise en relation. La relation $a < b$ n'a rien d'intrinsèque, de magique : chaque correspondance en produit une : *"..... nous pouvons prendre une correspondance quelconque comme base du bon ordre ; ma mise en forme repose alors sur la fusion des y-ensembles possibles distincts, c'est-à-dire sur les segments bien ordonnés résultant du principe du bon ordre".*

3) La nouvelle preuve du bon ordre (1908) ([6], traduite dans [2])

a) Depuis la preuve de 1904, les critiques ont fleuri : elles ont grandement irrité Zermelo. Aussi déclare-t-il, à la fois qu'il ne renonce pas à sa précédente méthode, mais en même temps qu'il va donner une nouvelle démonstration, qui n'utilise pas de théorèmes spécifiques de la théorie des ensembles. Cette deuxième démonstration est plus "abstraite". Zermelo commence son article là où s'achève le précédent, c'est-à-dire qu'il assure que le bon ordre *"n'a rien à voir avec un arrangement spatio-temporel"*. Il pose ensuite quelques définitions ensemblistes, nécessaires pour l'époque, par exemple l'intersection d'une famille quelconque d'ensembles.

b) Idee de la méthode.

De même que dans l'article précédent, Zermelo commence, par demander qu'on lui accorde l'existence de ses correspondances y . Voici une version très légèrement modernisée de son énoncé liminaire :

Théorème : Si, pour une certaine loi y , à chaque sous-ensemble qui ne disparaît pas (i.e : non vide) d'un ensemble M , est associé un de ses éléments en tant qu'élément "distingué", alors il existe une et une seule famille W de parties de M telle que, pour tout $P \subset M$, il existe $P_0 \in W$ tel que $P \subset P_0$ et $y(P_0) \in P$.
 M est bien ordonné par W .

Commentaire : Comme plus haut, la définition de W est une formalisation adroite des sections commençantes d'un ensemble bien ordonné. Zermelo essaie d'établir ici la bijection entre les éléments et les sections commençantes dont ils sont les premiers éléments.

Zermelo démontre ce résultat, puis particularise aux cas où P est un singleton, puis une paire :

* Si $P = \{a\}$ (où $a \in M$), alors il existe $P_0 \in W$ tel que $\{a\} \subset P_0$ et $y(P_0) = a$.
Donc, pour tout élément a de M , il existe P_0 dans la famille W qui contienne a pour élément distingué. Notons $P_0 = R(a)$ (le "reste" de a).

* Si $P = \{a, b\}$ (où $(a, b) \in M^2$, et sont distincts) alors, il existe $P_0 \in W$ tel que $\{a, b\} \subset P_0$ et $y(P_0) = a$ ou b .

Alors, si $y(P_0) = a$ on a $P_0 = R(a)$ et $R(a)$ contient b .
si $y(P_0) = b$ on a $P_0 = R(b)$ et $R(b)$ contient a . On a nécessairement, pour deux éléments distincts, l'une ou l'autre des éventualités, mais pas les deux.

Si donc, par exemple $a \in R(b)$ on dira que b précède a (*penser toujours aux sections commençantes*) ou encore $b < a$.

Zermelo montre que la relation ainsi définie et associée à y est un bon ordre sur M .

c) Commentaires : *"Les deux démonstrations sont épistémologiquement liées". (Desanti, ([7], pp 165)). La seconde, plus abstraite, est concomitante du travail sur l'axiomatisation de la théorie des ensembles que Zermelo est précisément en train d'édifier en cette année 1908.*

d) Réponses de Zermelo aux objections à sa première démonstration.
Elles occupent une vingtaine de pages dans cet article ! Nous n'en ferons qu'un résumé. Zermelo, particulièrement véhément, classe les objections en quatre types :

1) Objections au principe de choix. Ce point est évidemment essentiel pour Z , car tout repose sur l'existence qu'il demande pour ses correspondances, et qui sont autant de fonctions de choix.

A) Objection d'indémontrabilité.

S'opposant ici particulièrement à Borel et Peano, Zermelo explique que, décidément, indémontrabilité n'équivaut pas à non validité, que d'ailleurs ni Borel, ni Peano n'ont démontré l'indémontrabilité (ils "l'obligeraient bien" en le faisant), et qu'enfin on ne peut tout démontrer puisque toute preuve utilise elle-même nécessairement des arguments plus fondamentaux qui ne sont pas démontrés.

Voici Zermelo : *"..... jusqu'à un certain point, elles sont relativement justifiées, car je ne prouve pas précisément ce postulat. Messieurs Borel et Péano dans leur critique notent l'absence de preuve..... ils ont uniquement adopté mon propre point de vue... ils m'obligeraient en démontrant l'indémontrabilité, c'est-à-dire l'indépendance logique..... Maintenant, aussi en mathématiques, indémontrabilité n'équivaut pas non-validité puisqu'après tout, tout ne peut être démontré mais toute preuve suppose des principes qui sont à nouveau non démontrés....."*

B) Zermelo se lance ensuite dans une très violente critique des positions mathématiques que Peano est alors en train d'édifier : *"Même le formulaire de Mr Peano qui veut réduire toutes les mathématiques aux syllogismes (au sens de la scholastique aristotélicienne) repose fondamentalement sur un nombre entier de principes indémontrables, et l'un d'eux est équivalent au "principe de choix....." Mais l'axiome général que... je me suis permis d'appliquer à des ensembles quelconques ne se trouve justement pas parmi les principes de Mr Peano et Mr Peano lui-même nous assure qu'il ne pouvait les déduire d'aucun d'entre eux. Il se contente de constater cela, et de ce fait, pour lui, il en a fini avec le principe. L'idée qu'il soit possible que son formulaire soit incomplet....."*

C) Zermelo ensuite énumère longuement des situations mathématiques où le principe de choix est indispensable :

"Mais pour répondre objectivement à la question de sa nécessité [du principe de choix] pour la science, j'aimerais soumettre ici, en une sorte de jugement l'énumération des problèmes et propositions qui, à mon sens, ne pourraient être traités totalement sans le principe du choix".

1) Le cardinal d'une réunion d'ensembles est au plus égal à la somme des cardinaux.

"Pour prouver ceci, nous devons mentalement associer à chacune de ses parties un de ses éléments". Notons ici l'irruption du "mental" ("penser" à un élément), qu'on retrouve sans cesse dans chacun des commentaires sur la démonstration de Zermelo qu'on trouve dans les "Cinq Lettres". (cf ci-dessous).

2) Tout produit cartésien d'ensembles non vides est non vide.

3) la comparabilité des cardinaux.

4) toute réunion dénombrable d'ensembles finis ou dénombrables est elle-même dénombrable.

5) "existe-t-il une "base" de tous les nombres réels, c'est-à-dire un système de nombres réels tel qu'aucune combinaison linéaire avec un nombre fini de coefficients entiers n'ait lieu entre eux et que tout autre nombre réel en puisse être obtenu par combinaison linéaire à coefficients entiers ?

6) existe-t-il des solutions discontinues de l'équation fonctionnelle :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

S'agissant des deux dernières questions Zermelo note, que l'on y a apporté des réponses positives, en "s'appuyant sur un bon ordre possible du continu". Et il poursuit, en champion de la "science productive" : *"Dès lors, aussi longtemps que des problèmes relativement simples comme ceux mentionnés resteront inaccessibles aux expédients de Peano..... personne n'aura le droit d'empêcher les représentants de la science productive d'utiliser cette "hypothèse". et d'en développer les conséquences.... dès lors, il devient nécessaire de séparer les théorèmes qui requièrent l'axiome de ceux qui peuvent être prouvés sans lui, en vue de délimiter toute la mathématique de Peano comme une branche particulière et pour ainsi dire, comme une science artificiellement mutilée. Bannir les faits fondamentaux de la science simplement parce qu'ils ne peuvent apparaître au moyen de certains principes posés a priori reviendrait à interdire par exemple tout développement de la théorie des parallèles en géométrie parce que l'axiome concerné est prouvé être indémontrable..... En fait, les principes doivent être jugés... du point de vue de la science et non la science du point de vue des principes... La géométrie a existé avant les "Eléments" d'Euclide, et il en est de même de l'arithmétique et de la théorie des ensembles avant le "Formulaire" de Peano et tous les deux survivraient indubitablement encore à une telle tentative d'une systématisation à la manière d'un texte d'école".*

2) Objections concernant les définitions non prédictives.

C'est au tour de Poincaré d'être la cible de Zermelo, même si le ton est ici plus mesuré. C'est au nom d'autres positions, qu'il estime en effet plus respectables, qu'il s'oppose à Poincaré. Voici Zermelo en ses oeuvres : *"Le point de vue soutenu ici, que nous avons affaire à une science productive se fondant en dernier ressort sur l'intuition a été récemment soutenu, en opposition à la logistique de Peano par Monsieur H.POINCARE dans une série d'essais où il rend pleine justice au principe de choix qu'il considère comme un axiome indémontrable, mais cependant indispensable..."*

Zermelo, cependant, accuse Poincaré, tout à sa lutte contre les nouvelles théories, de jeter le bébé avec l'eau du bain : "il [Poincaré] pousse si loin son attaque qu'il identifie toute la théorie cantorienne....., cette intuition de génie..... avec la logique qu'il combat..... uniquement sur la base des "antinomies" non encore éclaircies".

Cette critique des positions générales de Poincaré publiées, Zermelo s'applique ensuite à réfuter celles, spécifiques, que celui-ci lui a opposées. On n'est ici guère convaincu par l'argumentation de Zermelo, qui, d'ailleurs, semble seulement se satisfaire *in fine* de reprocher à Poincaré de n'avoir pas été aussi vigilant avec d'autres qu'avec lui-même : "En fait, il apparaît que Monsieur Poincaré a laissé passer, dans sa critique l'existence de notions équivalentes, comme Monsieur G. Peano l'a particulièrement mis en valeur.....".

Dans les deux paragraphes qui suivent, Zermelo répond ensuite aux objections concernant, d'une part l'ensemble ω (par le truchement de l'antonomie de Burali-Forti), d'autre part "les principes particuliers de la formation" -il s'agit de formation des ensembles bien ordonnés.

3) Résumé.

Mis à part le cas de Poincaré (qui, selon Zermelo, "met en péril l'existence même des mathématiques à l'aide de sa critique logico-formelle"), restent donc à Zermelo deux types d'adversaires aux arguments mutuellement contradictoires :

- ceux qui n'ont "pas d'objection contre ses déductions, mais récusent un principe indémontrable" ;
- ceux qui, s'appuyant sur la théorie des ensembles, fondent des objections sur le paradoxe de Burali-Forti.

4) Axiomes équivalents à l'axiome du Choix et significations intuitives.

A) Formes équivalentes.

On a pu construire un volume ([10]), d'axiomes logiquement équivalents à l'axiome du choix! Cet énoncé, dont on ne sait guère à cette époque quelle place lui donner (axiome ou théorème ?), on commence donc par en citer nombre de formes logiquement équivalentes, mais qui, curieusement, ne nous paraissent pas toutes également intuitives.

En voici quelques unes des plus immédiates :

- * principe du bon ordre : "Sur tout ensemble E, on peut construire une relation d'ordre $\leq$ tel que, toute partie non-vide de E contienne un plus petit élément.
- * principe de choix : "Etant donné un ensemble E, il existe une application de P (E) dans E qui, à toute partie non vide de E, fait correspondre un de ses éléments".
- * tout produit cartésien d'ensembles non vides est non vide.
- * deux nombres cardinaux quelconques sont comparables. Autrement dit, étant donnés deux ensembles E et F quelconques, il existe une bijection de l'un sur une partie de l'autre.
- * tout produit cartésien d'ensembles non vides est non vide.
- * tout produit cartésien d'espaces compacts est compact. (théorème de Tychonoff)

B) Significations intuitives.

C'est un domaine hasardeux que d'évoquer, en Mathématiques, les significations intuitives. L'axiome du choix est cependant ici une terre d'élection. On rencontre en effet à chaque pas le psychologique dans cette affaire, et on peut véritablement soutenir, avec Hermann, que "l'axiome du choix a une signification plus psychologique que logique".

Lorsqu'on expose à un "candide" la question en jeu (le "choix"), savoir la question de pouvoir choisir un élément *quelconque* dans un ensemble non vide, on s'attire la réponse obligée : il n'y a qu'à choisir n'importe lequel ! Et le fond de la question semble bien être ici en effet : "n'importe lequel, oui, mais lequel ?" Peut-on se satisfaire ici de l'argument d'Hadamard ("*Cinq lettres*") suivant lequel il ne faut pas se plaindre si "la mariée est trop belle.." ?

Zermelo nous dit en effet : "Dans chaque sous ensemble, choisissons un élément distingué". Or, dans cet énoncé, chaque mot fait problème. Que veut dire *choisir* un élément ? Pour un ensemble fini, ce peut être nommer ou décrire. Si l'ensemble est infini, cela n'est certes pas possible : "la vie est trop courte" (Lebesgue. "*Cinq lettres*"). Il faut donc donner une règle, une loi de construction de l'élément. Cela est sans doute possible dans le cas d'un ensemble dénombrable. Si l'ensemble n'est pas dénombrable, que peut bien signifier une "infinité transfinie de choix" ? C'est insoutenable - proprement inhumain - si les choix sont dépendants les uns des autres. Et que dire s'ils ne le sont pas ? En clair : si l'on ne se donne pas de règle (soit qu'on ne le veuille pas, soit qu'on ne le puisse pas, par exemple parce que l'ensemble n'est pas dénombrable), si l'on se contente seulement de "penser à" un élément, quelle signification cela a-t-il ?

En d'autres termes encore : Comment choisir sans règle de choix ? Comment est-on sûr de "penser toujours au même élément" (objection de Lebesgue à Zermelo), et l'on note l'irruption d'un argumentaire "mental" et du psychologique.

5) Les deux textes présentés à l'atelier.

A) Lebesgue :

Il s'agit d'un article de 1938, intitulé "Les controverses sur la théorie des ensembles et la question des fondements" ([8]).

Fort agréable à lire, c'est une fresque épistémologico-historique des mathématiques, depuis la venue au monde du bébé (qui se "mange les orteils"), jusqu'aux polémiques sur l'axiome du choix. On y lira, exposée avec force, une certaine idée de l'histoire des mathématiques : la question du fini et de l'infini, la méthode cantorienne d'arithmétisation de l'infini comme stupéfiante généralisation de l'arithmétique, enfin le vacillement simultané de la logique.

Sur l'axiome du choix, à proprement parler, Lebesgue (qui n'est pas pour ! ..), évoque une analogie avec le principe de continuité de Poncelet : admettre l'axiome du choix pour lui, c'est à peu près faire le raisonnement suivant "Toute propriété vraie pour les ensembles bien ordonnés est vraie pour tous les ensembles, à condition qu'il ne s'agisse pas d'ordre. Autrement dit, cela même qui est essentiel dans la construction de la preuve est évacué dans le postulat.

B) Les "Cinq lettres" :

C'est un échange fort connu de correspondance entre Baire, Borel, Lebesgue et Hadamard (quatre fort bons mathématiciens...), à propos de la première démonstration de Zermelo, et des commentaires mathématico-philosophiques sur le statut des "correspondances" de Zermelo. ([9])

Les positions respectives des quatre protagonistes peuvent paraître bien inconciliables: Comme le dit admirablement Lebesgue dans le texte plus haut cité des "Controverses": "entre les deux parties en présence, aucune discussion n'était possible, car c'était la logique qui était en discussion". Cependant, même ces positions relatives sont difficiles à clarifier ! Aux deux extrémités, on peut cependant distinguer :

* Borel, finitiste impénitent : il a des objections même contre la théorie cantorienne ("l'antinomie du transfini").

* Hadamard, à l'autre bord, qui ne comprend pas qu'on puisse se refuser à admettre la possibilité du choix *quelconque*, sous prétexte que la "mariée est trop belle".

Entre deux, Lebesgue et Baire :

* Lebesgue est contre le principe du choix transfini (même s'il peut lui arriver de l'utiliser, sans le dire ou en le disant). Décortiquant finement (c'est le seul à véritablement le faire) le mécanisme zermellien, il développe de très fortes objections contre le principe de choix, comme celle-ci que rapporte Borel *"Comment Mr Z peut-il être assuré qu'il parle toujours du même élément puisqu'il ne le caractérise en rien pour lui-même ?"*. Et c'est Borel qui ajoute : "il ne s'agit pas d'un contradictoire possible. Il s'agit d'être cohérent avec soi-même".

* la position de Baire apparaît la moins claire. Sans doute écartelé, il finit curieusement par conclure, au delà même des positions de Borel, qu'*"en fin de compte, et en dépit des apparences, tout doit se ramener au fini"*.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GUILLEMOT M ; Baire, Lebesgue et l'axiome du choix, thèse de 3^e, Toulouse 1980 .
- [2] CASSINET J ; GUILLEMOT M ; L'axiome du choix dans les Mathématiques de Cauchy (1821) à Gödel (1940) (2 volumes) Thèse d'état Toulouse 1983.
- [3] KLINE M ; Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times. Oxford University Press New-York 1972.
- [4] DHOMBRES J ; Nombre, Mesure et Continu. Cedic Nathan 1978 Chapitre VI 260/273 et 276/283.
- [5] ZERMELO E ; Beweis dass jede Menge Wohlgeordnet kann ; Mathematische Annalen 59 (1904) traduction française ([1] 221-225 et [2] 451-457).
- [6] ZERMELO E ; Neuer Beweis für die Möglichkeit einer Wohlordnung, Mathematische Annalen (65) (1908) 107 - 128 ; traduction française [2] 521-555.
- [7] DESANTI J.T. ; Les idéalisés mathématiques. Le Seuil Paris 1968.
- [8] LEBESGUE H ; Les controverses sur la théorie des ensembles et la question des fondements. Entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des Sciences Mathématiques 1938 ; Zurich 1941 pp 109-141
= Oeuvres Scientifiques : L'enseignement mathématique ; Genève 1972 vol 5 pp 287-302.
- [9] BAIRE R ; BOREL E ; HADAMARD J ; LEBESGUE H ; Cinq lettres sur la théorie des ensembles. Bulletin de la Société Mathématique de France 33 (1905) 261 -273.
= Oeuvres de BOREL E, Editions du CNRS Paris 1972 ; Leçons sur la théorie des fonctions. Gauthier Villars Paris 1914, pp 150-160.
= Oeuvres de LEBESGUE H ; vol 3, pp 1253-1256.
= Oeuvres de HADAMARD J ; Editions du CNRS Paris 1968, vol 1, pp 335 -347.
- [10] RUBIN J et H ; Equivalents of the axiom of choice. North Holland. Amsterdam. 1963.
1^o édition ; 2^o édition : 1970 ; dernière édition 1985.