INTRODUCTION A L'AXIOME DU CHOIX

Michel GUILLEMOT

Pour de nombreux chercheurs en mathématiques "faire des mathématiques" c'est "mieux appréhender la notion d'infini". L'introduction des divers systèmes de numération, le cinquième livre d'EUCLIDE ou la conception grecque de l'infini potentiel en sont des exemples anciens bien connus. Mais nous devons attendre la fin du XIXème siècle pour que la potentialité qu'exprimait EUCLIDE à la proposition XX de son neuvième livre

"Les nombres premiers sont en plus grande quantité que toute quantité proposée de nombres premiers"

laisse place à l'actualité.

"L'ensemble des nombres premiers est infini",

autrement dit pour que certains mathématiciens osent considérer, dans leurs démonstrations, l'existence d'ensembles infinis.

Ceci ne s'est pas produit sans heurts et la polémique a culminé dans la période 1904-1908 après que la mathématicien allemand Ernst ZERMELO eut introduit dans ses raisonnements ce que nous nommons aujourd'hui l'axiome du choix. En Allemagne, en France, en Grande-Bretagne et, à un degré moindre, en Italie, les mathématiciens se sont sévèrement opposés entre eux. Aujourd'hui, depuis les travaux de Kurt GODEL et de Paul COHEN les clameurs se sont tues car nous savons que de nombreux pans de la mathématique seraient à reconsidérer entièrement si l'on en excluait l'utilisation de l'axiome du choix.

Il n'en demeure pas moins que l'histoire de cet axiome présente un intérêt véritable : elle est intimement liée à la naissance de la théorie des ensembles. En un certain sens, c'est pour en avoir ignoré ses prémisses que les vaillants propagandistes de l'introduction des mathématiques dites modernes ont échoué. En effet, ils n'ont pas vu que cette nouvelle école de pensée était nourrie de l'infini actuel et que par suite il était illusoire de ramener son champ d'investigation à des ensembles finis : par exemple, l'étude des propriétés des applications n'est pas du tout la même dans un cadre finitaire ou dans un cadre infini.

Même si "l'histoire ne repasse jamais" il est nécessaire de ne pas en oublier les faits. Déjà, dans ses "Leçons sur la théorie des fonctions" parues en 1898, Emile BOREL nous avertissait :

> *"c'est ce qui rend les raisonnements sur ces ensembles généraux si difficiles et parfois impossibles, c'est ce qui les rend aussi le plus souvent inutiles dans l'état actuel de la science, car il ne semble pas qu'il soit aisé d'introduire dans un raisonnement l'un de ces ensembles défini par une infinité non dénombrable de conditions" (p.110).*

1. L'axiome du choix.

Quel est donc ce principe que refusait BOREL et qui selon ZERMELO

> *"ne peut à la vérité, être réduit à un plus simple, mais qui est appliqué partout, sans hésitation, dans les déductions mathématiques" (p.516) ?*

Il le formule comme suit :

> *"pour une totalité infinie d'ensembles il y a toujours une correspondance qui à chaque ensemble associe un de ses éléments, ou exprimé formellement, que le produit d'une totalité infinie d'ensembles dont chacun contient au moins un élément, diffère lui même de zéro" (p.516).*

Aujourd'hui les formes équivalences de l'axiome du choix se comptent par centaines (voir l'ouvrage de RUBIN, H et RUBIN, J : "Equivalents of axiom of choice II". Nous n'en citerons que quelques unes.

1.1. Le principe du bon ordre.

C'est l'acte fondateur donné par ZERMELO en 1904 :

Tout ensemble peut être bien ordonné c'est-à-dire ordonné de telle sorte que toute partie non vide ait un plus petit élément.

Evidemment tout ensemble dénombrable est bien ordonnable. Mais nous ne connaissons pas de bon ordre effectif sur l'ensemble des nombres réels : accepter l'axiome du choix revient seulement à en supposer l'existence. Georg CANTOR croyait à la validité de ce principe et il écrivait en 1882

> *"dans un travail ultérieur, je reviendrai sur cette loi fondamentale ce me semble, très importante par ses conséquences et remarquable par sa généralité : on peut toujours mettre tout ensemble bien défini sous la forme d'un ensemble bien ordonné".*

Vaste programme dont nous savons aujourd'hui qu'il ne pouvait aboutir : on peut accepter ou rejeter ce principe mais non le démontrer à l'intérieur de notre mathématique.

1.2. L'existence d'une fonction de choix.

C'est la forme donnée par ZERMELO en 1904 que nous explicitons aujourd'hui comme suit :

Pour tout ensemble E il existe une fonction de choix c'est-à-dire une application f de l'ensemble des parties non vides de E dans E telle que pour toute partie non vide x de E, f(x) appartienne à x.

ZERMELO confesse qu'

> *"il doit à Monsieur Ehrard SCHMIDT l'idée que, en se référant à ce principe, nous pouvons prendre une correspondance quelconque comme base du bon ordre".*

Nous reviendrons sur la démonstration qu'ils ont proposée.

1.3. La forme cartésienne de l'axiome du choix.

Bien que le produit cartésien n'ait pas été correctement défini en 1904, ZERMELO s'y réfère pour donner, peut être, la formulation la plus simple de l'axiome du choix :

Tout produit cartésien d'ensembles non vides est non vide.

Il est immédiat que si l'on admet l'existence d'une fonction de choix, le produit cartésien d'ensembles non vides est non vide. En effet, une famille $(X_i)_{i\in I}$ d'ensembles non vides étant donnée, il suffit de choisir dans chacun des X_i un x_i pour obtenir l'élément $(x_i)_{i\in I}$ du produit $\prod_{i\in I} X_i$.

1.4. La loi de trichotomie ou de comparaison des ensembles.

Sans démonstration, CANTOR affirmait le 11 juillet 1887 que

> *"si deux multiplicités M et N ne sont pas de la même puissance ou bien M aura même puissance qu'une partie intégrante de N ou bien N aura même puissance qu'une*

partie intégrante de M"

c'est-à-dire que :

Deux ensembles M et N étant donnés, il existe soit une injection de M dans N, soit une injection de N dans M.

CANTOR aidé de Richard DEDEKIND avait déjà comparé certains ensembles : ils avaient démontré que l'ensemble des nombres algébriques était dénombrable mais que l'ensemble des nombres réels ne l'était pas. CANTOR avait ainsi démontré que l'ensemble des parties d'un ensemble avait une puissance strictement supérieure à cet ensemble. Mais il croyait pouvoir comparer tous les ensembles : Friedrich HARTOGS a démontré en 1915 l'équivalence de l'existence d'une fonction de choix et dela loi de trichotomie.

1.5. Le lemme de ZORN.

C'est sans doute, aujourd'hui, la forme la plus connue ou du moins la plus utilisée de l'axiome du choix.

Si (E, $\leqslant$) est un ensemble ordonné inductif, c'est-à-dire tel que toute partie totalement ordonnée de E possède un majorant, alors (E, $\leqslant$) possède un élément maximal.

Dès 1922 Kasimierz KURATOWSKI a formulé un principe de ce type.

2. Avant 1904.

Au XIX^{ème} siècle les mathématiciens sont amenés à préciser leurs conceptions infinitistes ; les constructions des nombres réels voient aussi le jour. Les travaux de Bernard BOLZANO, DEDEKIND, Charles MERAY et de "l'école de WEIERSTRASS" avec Heinrich HEINE et CANTOR sont bien connus. C'est toutefois ce dernier qui pousse le plus loin ses réflexions : nous avons déjà signalé ses formulations de la loi de trichotomie et du principe du bon ordre. Pour lui, ce sont seulement des énoncés qu'il croit certes fondamentaux, mais dont il remet la démonstration à plus tard. Nous pouvons penser que son introduction des nombres transfinis qui prolongent naturellement les entiers, le pousse à croire en la validité de ces énoncés. C'est un peu ce que dit BOREL, en 1905, lorsqu'il critique la démonstration proposée par ZERMELO

> *"Un tel raisonnement ne me paraît pas mieux fondé que le suivant : "Pour bien ordonner un ensemble M, il suffit d'y choisir arbitrairement un élément auquel on attribura le rang 1, puis un autre auquel on attribuera le rang 2, et ainsi de suite transfiniment, c'est-à-dire jusqu'à ce que l'on ait épuisé tous les éléments de M par la suite des nombres transfinis". Or aucun mathématicien ne regardera comme valable ce dernier raisonnement" (p.195).*

Disons, qu'en fait, les mathématiciens se sont vivement intéressés aux premiers travaux de CANTOR : BOREL, par exemple, a été un des premiers à les divulguer dans ses cours. Mais dès que les concepts sont devenus trop ensemblistes et par suite trop étrangers à la mathématique de l'époque, ils s'en sont détachés. Même plus tard, les nombres transfinis, par exemple, étaient parfois utilisés heuristiquement et ne devaient leur conservation qu'à l'absence d'autres méthodes démonstratives.

Pourtant, au premier congrès des mathématiciens, en 1900 David HILBERT pose comme premier problème à résoudre

> *"la question de savoir si le continu peut être envisagé comme un ensemble bien ordonné".*

Quatre ans après, au deuxième congrés des mathématiciens, Julius KONIG croit pouvoir répondre par la négative. Ce coup de poignard à la mathématique cantorienne ébranle fortement ses ardents défenseurs : ils ne peuvent pas croire à la ruine de l'édifice qu'ils sont en train de construire. Trés vite, ils s'aperçoivent que la démonstration de KONIG est fautive. Dans la lancée ZERMELO et SCHMIDT vont redonner vigueur au paradis cantorien.

3. La démonstration proposée par ZERMELO en 1904.

A priori, la démonstration proposée par ZERMELO dans la lettre qu'il envoie à HILBERT le 24 Septembre 1904 peut surprendre. En effet, l'auteur met en oeuvre un principe qui est

> *"appliqué partout, sans hésitation, dans les déductions mathématiques".*

Le seul exemple qu'il nous donne est relatif au "nombre" des partitions d'un ensemble et nous pouvons dire qu'il se situe à l'intérieur du petit cercle d'initiés à la mathématique ensembliste de l'époque. De là à écrire partout, on eut aimé qu'en bon logicien il soit plus explicite. Vers 1916 seulement, les travaux de Waclaw SIERPINSKI permettront d'y voir plus clair. Mais la polémique sera bien moins forte à cet instant.

Pourtant des exemples assez simples ne manquent pas. Signalons seulement ici l'introduction de l'axiome du choix dans l'établissement de l'équivalence de certaines définitions, définitions des ensembles finis ou infinis (sur lesquelles il reviendra en 1909), définitions de la continuité (à l'aide de (ε, η) ou des suites)... Ni ZERMELO, ni ses détracteurs n'en parlent : pour se limiter aux mathématiciens français, BOREL, Henri LEBESGUE et René BAIRE resteront silencieux sur leurs utilisations implicites de l'axiome du choix et même pour les deux premiers, après la publication des articles de SIERPINSKI. Une telle myopie intellectuelle peut surprendre sauf à considérer le cadre dans lequel chacun de ses créateurs évolue. LEBESGUE ne réserve-t-il pas la logique à ceux qui ont des loisirs ? Le propos n'est pas neuf et aujourd'hui encore des chercheurs beaucoup moins talentueux ne méprisent-ils pas certains types d'activité : il leur suffit de croire ou de vouloir persuader leurs contradicteurs que leur domaine d'étude est celui de la seule mathématique universelle ! ZERMELO n'échappe pas lui aussi à cette sorte de critique. Dans le climat de désarroi crée par la communication de KONIG il lui suffit de proclamer que son principe est appliqué partout pour qu'il croie lui donner une va-leur reconnue <u>par tous</u>.

Quoiqu'il en soit ce principe est la base du bon ordre. Il suffit d'adopter le point de vue naïf énoncé par BOREL pour suivre la génèse de la démonstration proposée par ZERMELO. Cette fonction de choix sert à choisir le premier élément, puis le deuxième dans ce qui reste et ainsi de suite jusqu'à épuisement. Pour justifier cette exhaustion il ne suffit pas, comme l'affirme BOREL, d'invoquer une indexation transfinie mais il est nécessaire de se situer au plus près des concepts ensemblistes fondamentaux. Le schéma proposé va d'ailleurs se révéler plus fondateur qu'il ne paraît : il pourra, ultérieurement, être appliqué à de nombreuses démonstrations. De manière générale, un ensemble M étant donné il s'agit de prouver qu'il possède une certaine propriété P : ici P est le bon ordre. On considère alors l'ensemble des parties de M possédant outre la propriété P une propriété auxiliaire permettant d'achever la démonstration. En effet M doit alors devenir la réunion de telles parties et cette réunion doit posséder les propriétés indiquées. Ici la propriété auxiliaire utilise à la fois la conception naïve du bon ordre (on choisit dans ce qui reste) et l'outil fondamental des ensembles bien ordonnés : les segments ou sections finissantes (l'élément choisi vient après ce qui a été précédemment choisi) :

> *"on désignera par "γ-ensemble" tout ensemble bien ordonné M_γ formé seulement des éléments de M et possédant la propriété suivante : si a est un élément quelconque de M_γ et si A est le segment "associé" composé des éléments x de M_γ précédant a, c'est-à-dire tels que $x < a$, alors a est l'élément "distingué" [c'est-à-dire choisi] de M - A".*

Autrement dit a est bien l'élément choisi (à l'aide de la fonction de choix) dans ce qui reste, à savoir M - A. Compte tenu des propriétés des segments ou sections finissantes, la démonstration n'offre pas alors de difficulté majeure. Mais elle dénote, chez son auteur, une pratique et une force d'analyse ensemblistes que peu de ses contemporains étaient loin de posséder. Poursuivant son travail, ZERMELO élaborera peu après la première théorie axiomatique des ensembles qu'il publiera seulement en 1908 en même temps qu'une deuxième démonstration du théorème du bon ordre et une vive réponse aux critiques qui s'étaient élevées à propos de sa première démonstration.

4. Quelques compléments bibliographiques.

APERY, R et autres : Penser les mathématiques. Collection Points S 29 Le Seuil, Paris, 1982.

CASSINET, J ; GUILLEMOT, M : L'axiome du choix dans les mathématiques de CAUCHY (1821) à GODEL (1940). Thèse d'Etat Toulouse 1983.

DESANTI, J, T : Les idéalités mathématiques. Seuil, Paris, 1968.

KLINE, M : Mathématiques, la fin de la certitude. Bourgois. Paris 1989.

MOORE, G : Zermelo's axiom of choice : its origins, development and influence. Springer New York 1982.

NAGEL, E et autres : Le théorème de GODEL. Seuil, Paris, 1989.