ARBOGAST
OU LA FORMULE OUBLIEE

Jean-Pierre FRIEDELMEYER

Il est devenu courant et banal de stigmatiser une évocation de l'histoire qui se limiterait à des noms illustres et à des dates charnières. Cette attitude reste pourtant encore fréquente dans la perception que nous gardons de l'histoire des mathématiques. Nous retenons quelques noms de génies mathématiciens : ARCHIMÈDE, EULER, CAUCHY etc ..., rencontrés au fil de nos études, à l'occasion d'une formule ou d'un théorème. Nous oublions, ce faisant, que la science se constitue sur un terreau favorable ou défavorable, dans un cadre stimulant ou contraignant, au milieu d'une communauté scientifique qui favorise ou, au contraire, freine la recherche et l'invention. Nous oublions qu'autour des noms illustres qui nous sont restés, d'autres hommes, nombreux, moins connus, moins brillants sans doute, mais souvent ardents et persévérants dans leur travail obscur, ont préparé le terrain, dégrossi les problèmes, et ont ainsi contribué quelquefois de façon décisive, aux progrès d'une idée. C'est l'histoire d'un tel homme que je veux rapporter ici : celle de Louis François Antoine ARBOGAST. C'est son œuvre que je voudrais sortir de l'oubli. Qu'en plus cet homme soit né en Alsace et ait joué un rôle important à Strasbourg ne peut qu'augmenter notre intérêt : les mathématiciens alsaciens ne sont pas si nombreux, qui ont réalisé une œuvre importante. Plusieurs pourtant ont laissé des traces : le surprenant est que les traces soient restées, mais pas le nom de leurs auteurs. Qui sait, par exemple, que la notation factorielle $n!$ pour le produit $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ a été introduite par KRAMP un autre mathématicien alsacien, né à Strasbourg en 1760, et doyen de la faculté des sciences de cette même ville de 1810 jusqu'à sa mort en 1826?

La situation pour ARBOGAST est encore plus paradoxale : voici en effet un savant perçu par ses contemporains comme un des premiers géomètres de la fin du 18^{e} siècle. Qu'on en juge : LALANDE dans le 6^{e} supplément à l'Histoire des Mathématiques de MONTUCLA [1] évoque :

"Un de nos plus habiles géomètres (qui) a publié en 1800 une nouvelle espèce de calcul qu'on peut regarder comme une découverte dans l'analyse (...) Ce nouveau calcul influera nécessairement sur les progrès de l'analyse (...). Il semble que la méthode d'ARBOGAST est ce que Waring paraissait désirer quand il parlait d'une méthode de déduction, mais il fallait pour réaliser cette idée, un des premiers géomètres de ce siècle."

LACROIX, dans son '*Traité de Calcul différentiel et intégral*' [2] – lequel représente une sorte d'encyclopédie de l'analyse au début du 19^{e} siècle – ne fait pas moins de douze mentions d'ARBOGAST (plus que d'autres contemporains restés célèbres comme BEZOUT, CARNOT, CLAIRAUT, LAMBERT ou MAC-LAURIN) tant dans son

---

Avec l'aimable autorisation de L'OUVERT 53 et 54 (1988-1989)

introduction, que tout au long des trois volumes qui composent ce monumental traité.

LAGRANGE lui-même rend hommage à ARBOGAST dans l'introduction à sa '*Théorie des fonctions analytiques*' [3] lorsqu'il évoque "*son beau Mémoire où la même idée (celle développée par* ARBOGAST *) est exposée, avec des développements et des applications qui lui appartiennent*".

D'ailleurs les noms de LAGRANGE et d'ARBOGAST sont associés dans les propositions du Comité du Salut Public, lorsque celui-ci veut mettre en place l'Ecole Centrale de Travaux Publics (qui deviendra l'Ecole Polytechnique). On peut lire ainsi, dans le procès-verbal de la séance du 5 Frimaire an III (25 novembre 1794) [4] :

"Etat des principaux agents de l'Ecole Centrale des Travaux Publics, dont il est nécessaire et urgent que la nomination soit confirmée par les trois Comités de Salut Public, d'Instruction publique et des Travaux publics :

Instituteurs d'analyse : Lagrange — Arbogast — Ferry"

et ce commentaire (séance du 26 Frimaire - 16 décembre 1794) [4] :

"considérant combien il est important de donner à l'enseignement de l'Ecole Centrale des Travaux Publics toute la perfection qu'exige son objet en la proportionnant au degré où sont parvenues les lumières acquises, et en y employant les hommes les plus habiles dans les sciences mathématiques et physiques."

En fait, ARBOGAST refusera cette place "*pour ne pas donner prise à la calomnie*" et déclarera vouloir garder son poste de représentant. Cependant le Comité l'invita à faire son cours pendant un an (KUSCINSKI – Dictionnaire des Conventionnels [5]).

De quelle calomnie s'agit-il? Nous sommes à la fin de 1794, après la Terreur; avec la guerre extérieure et intérieure, le pays est exsangue et affamé. Comme nous le verrons, ARBOGAST était un des membres principaux du Comité d'Instruction publique de la Convention, lequel a mis en place, avec les Comités de Salut Public et des Travaux Publics, l'École Polytechnique. A un moment où la vie quotidienne, au niveau même de la simple subsistance, était très difficile pour tout le monde, il eût été tentant de jouer de son influence pour obtenir un poste aussi glorieux et rémunérateur. Le caractère foncièrement honnête et droit d'ARBOGAST lui interdisait de donner prise à la moindre suspicion.

On pourrait ainsi multiplier les témoignages de l'époque — cela ne ferait qu'accroître l'étonnement et la curiosité devant l'oubli patent dont est victime dans la France d'aujourd'hui l'œuvre mathématique d'ARBOGAST : quel est le mathématicien français, quel est le professeur ou l'étudiant de mathématiques qui connaisse aujourd'hui seulement le nom d'ARBOGAST?

Certes, on peut penser que les contemporains d'ARBOGAST sont mauvais juges pour apprécier les qualités des hommes qu'ils fréquentent; trop près, ils ont du mal à percevoir les lignes de forces en profondeur, à dégager ce qui est porteur d'avenir de ce qui est succès sans lendemain. En réalité l'œuvre d'ARBOGAST eut une fortune très différente selon les pays.

En France, à part quelques articles ou mentions publiés par son ami J.–F FRANÇAIS dans les premiers volumes des Annales de GERGONNE [6] l'œuvre mathématique d'ARBOGAST fut peu à peu oubliée.

Même infortune en Allemagne. Si l'on examine par exemple l'"*Essai d'un système complet et conséquent des mathématiques*" de Martin OHM (Vol. 4 – 1830) on y trouve énoncé le problème suivant

"Etant donnée une fonction $y(x)$, trouver $y^{(n)}(x)$ dérivée $n^{\text{ième}}$ de y directement, sans avoir besoin de calculer les dérivées d'ordres inférieurs."

Mais en fait M. OHM ne traite ce problème que pour quelques cas particuliers, là où la formule d'ARBOGAST donne une méthode tout à fait générale. Visiblement les idées d'ARBOGAST n'avaient pas réussi — trente ans après sa mort — à traverser le Rhin.

Oubliées sur le continent, ces idées eurent par contre un succès remarquable en Angleterre. Dès 1819 HORNER expose sa fameuse méthode de résolution approchée des équations numériques [7] en faisant référence au '*Calcul des dérivations*' d'ARBOGAST et à sa formule. Celle-ci ne cessera d'être commentée, expliquée, développée, utilisée dans les diverses revues mathématiques anglaises du 19^{e} siècle sous des signatures plus ou moins illustres comme DE MORGAN, CAYLEY, DOWKINS, ROBERTS, TANNER etc... (voir [8]).

DE MORGAN, par exemple, va jusqu'à souhaiter que "*la loi de formation d'*ARBOGAST *de n'importe quelle puissance de polynôme fasse partie de l'algèbre la plus élémentaire*" [9].

Et ROBERTS écrit :

"L'œuvre d'ARBOGAST sur ce sujet ("*Calcul de dérivations*") est si remarquable pour la généralité et la puissance de ses procédés, et pour l'expression distinguée du principe fondamental du calcul des opérations, une méthode alors inexistante dans quelque forme systématisée que ce soit, qu'il semble légitime de relier son nom à la question générale du développement (des fonctions)" [10].

Repères biographiques

Louis François Antoine ARBOGAST est né le 4 octobre 1759 à Mutzig, fils d'Antoine ARBOGAST secrétaire de bailliage et de Catherine SCHMITT. Je n'ai jusqu'à présent rien trouvé sur son enfance et ses premières études. Juste une allusion à un tuteur dans une notice nécrologique [11] permet de penser qu'il était orphelin dès son plus jeune âge.

"ARBOGAST réunissait aux qualités qui constituent le vrai savant, une grande droiture dans le caractère et un cœur noble et bienfaisant. Son tuteur étant détenu, il le nourrit pendant sa captivité, et fit tous ses efforts pour lui en adoucir les rigueurs."

Après des études de droit à l'Université de Strasbourg de 1779 à 1981, il exerce quelques temps le métier d'avocat au Bureau du Conseil Souverain d'Alsace à Colmar. Mais passionné depuis longtemps par les mathématiques (*cf.* [11]) il est nommé professeur de cette matière en 1783 au Collège Royal de Colmar, puis à l'Ecole d'Artillerie de Strasbourg, et aussi professeur de physique au Collège national de la même ville. Gagné par les idées révolutionnaires, il adhère à la Société des Amis de la Constitution le 26 octobre 1790 et est élu député du

Bas-Rhin à l'Assemblée Législative, en août 1791, réélu un an plus tard à la Convention. Apparemment discret au sein même des deux Assemblées, il participa par contre très activement aux travaux du Comité d'Instruction publique où il siégea sans désemparer depuis sa création en octobre 1791 jusqu'au début de 1795 (dernière mention dans les procès-verbaux du Comité d'Instruction publique [12] le 18 pluviose an III). D'abord sollicité, nous l'avons vu, pour enseigner à l'Ecole Polytechnique, il fut chargé en juillet 1795 de l'organisation de l'Ecole Centrale du Bas-Rhin qui remplaçait l'ancienne Université de Strasbourg. Il y enseigna les mathématiques pratiquement jusqu'à sa mort prématurée le 8 avril 1803 à l'âge de 43 ans. Il était correspondant de l'Académie des Sciences de Paris depuis le 18 août 1792, et membre associé, non résident, de la section de mathématiques de l'Institut National de France depuis le 28 février 1796.

L'œuvre mathématique

L'œuvre mathématique d'ARBOGAST présente trois pôles d'intérêt :
— une réflexion approfondie et originale sur les fondements du calcul infinitésimal et sur les objets qu'il manipule,
— l'invention d'une méthode de développement des fonctions, connue (au moins en Angleterre) sous le nom de "*formule d'*ARBOGAST" liée avec les premiers essais de ce qu'on appelle aujourd'hui le calcul opérationnel,
— un peu à part car touchant l'histoire des sciences, la constitution d'une importante collection de mémoires et de lettres inédites des mathématiciens français du XVII^{e} siècle.

La question des fondements

Si l'on veut connaître les grands problèmes qui préoccupaient la communauté scientifique au 18^{e} siècle, dans tous les domaines, une bonne information nous en est donnée par les questions mises à concours par les grandes Académies européennes, et particulièrement l'Académie de Berlin et l'Académie de Saint Pétersbourg.

Ainsi en 1787 cette dernière avait proposé un prix pour la meilleure réponse à la question suivante :

"Déterminer si les fonctions arbitraires introduites par l'intégration des équations différentielles qui ont plus de deux variables, appartiennent à des courbes ou surfaces quelconques, soit algébriques, transcendantes ou mécaniques, soit discontinues ou produites par le mouvement libre de la main; ou bien si elles ne peuvent légitimement être rapportées qu'à des courbes continues et susceptibles d'être exprimées par des équations algébriques ou transcendantes."

On reconnaîtra aisément dans cette question, ainsi que dans le vocabulaire utilisé, tous les éléments qui ont constitué cette longue et parfois violente querelle entre EULER, d'ALEMBERT et quelques autres à propos de l'équation des cordes vibrantes [13]. Sans vouloir reprendre en détail cette querelle, signalons simplement qu'elle touchait un problème de fond lié à une conception trop étroite que l'on se faisait alors des fonctions de l'analyse, et qu'elle joua un rôle moteur dans le progrès des mathématiques, faisant éclater le cadre conceptuel même de l'analyse classique.

Le prix fut gagné par ARBOGAST âgé de moins de trente ans, et qui d'emblée acquit ainsi une certaine célébrité dans la communauté mathématique européenne. Non seulement il répondait aussi complètement que possible dans le cadre conceptuel du 18[e] siècle à la question de l'Académie (donnant raison sur le fond à EULER) mais son argumentation mettait en place une distinction essentielle en analyse, qui allait aider à dégager le concept moderne de fonction continue [14].

En 1784, une autre question fondamentale avait été mise ,à prix, cette fois par l'Académie de Berlin. LAGRANGE y était encore, lorsqu'elle demanda, sans doute à son initiative :

"Une théorie claire et précise de ce qu'on appelle infini en mathématiques"

ajoutant ce commentaire :

"On sait que la haute géométrie fait un usage continuel des infiniment-grands et des infiniment-petits. Cependant les géomètres et même les analystes anciens ont évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini; et de grands analystes modernes avouent que les termes grandeur infinie sont contradictoires. L'Académie souhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire, et qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique propre à être substitué à l'Infini..."

De nombreuses réponses furent apportées, directement ou indirectement à cette question, et leur examen mériterait à lui seul une ou plusieurs séances. Schématiquement on peut distinguer deux tendances. La plupart des mathématiciens tentent d'élucider ce qu'ils appellent *la métaphysique du calcul infinitésimal* en essayant de préciser ou de fonder les concepts "*d'infiniment petit*", "*infiniment grand*" ou de "*limites*", en restant donc dans la problématique paradoxale soulevée par la question de l'Académie. D'autres, comme LAGRANGE et ARBOGAST vont chercher à se situer dans une toute autre perspective, refusant ces notions, et essayant de trouver — selon les termes mêmes de l'Académie *un principe sûr et clair propre à être substitué à l'Infini.* On connaît le *Traité des fonctions Analytiques* de LAGRANGE, déjà cité. Voici comment ARBOGAST juge la théorie utilisant les infiniment-petits, et quelles sont ses propres intentions dans l'introduction à son **Mémoire sur de nouveaux principes de calcul différentiel et intégral, indépendants de la théorie des infiniment-petits et des limites** [15].

"...Cette théorie, par sa nature même, est peu susceptible d'être présentée d'une manière rigoureuse. Nous ne saurions en effet nous former aucune idée nette d'une quantité infiniment-petite, parce qu'une telle quantité regardée comme quelque chose de réel serait en d'autres termes capable d'augmentation ou de diminution qui ne saurait recevoir de diminution ultérieure. Aussi l'expression vague d'infiniment petit, quelque sens qu'on lui donne pour la justifier, nuit-elle toujours à l'évidence (...) et l'on n'éprouve pas le contentement qui naît de la conviction parfaite (...) Malgré ces défectuosités de la méthode infinitésimale, tous les plus grands géomètres de nos jours en ont conservé la caractéristique et les expressions et l'on a adopté pour théorie rigoureuse celle des limites. Il résulte de là que la caractéristique ne répond pas parfaitement à la théorie, celle-là supposant des différentielles isolées dy, dx, dz etc... et celle-ci n'attachant d'idée précise qu'à leurs rapports

$$dy/dx, dz/dx \text{ etc.}$$

Mon dessein est de proposer une autre théorie qui, appropriée aux notations reçues et ne laissant rien à désirer du côté de la rigueur et de la clarté, n'entraîne dans aucune longueur inutile; elle porte sur les idées les plus simples et me paraît répandre sur les calculs supérieurs la même évidence qui règne dans l'algèbre ordinaire. Je ne considère les différentielles que comme les termes successifs de la série qui exprime la différence ou l'incrément d'une fonction d'une ou plusieurs variables, la série étant ordonnée suivant les puissances des différences $\Delta x, \Delta y$ etc..."

ARBOGAST a envoyé ce mémoire à l'Académie des Sciences de Paris en 1789 soit huit ans avant la parution du "*Traité*" de LAGRANGE lequel avait d'ailleurs été chargé d'en faire un rapport, avec LEGENDRE.

Plus tard ARBOGAST exploitera à fond toutes les ressources de sa théorie pour en dégager un procédé algorithmique extrêmement simple et général de développement des fonctions en série de puissance de la variable, procédé connu sous la dénomination : formule de dérivation d'ARBOGAST.

Nous l'étudierons à la fin de cet article.

La collection d'Arbogast

Dans un article du Journal des Savants, en septemble 1839 le comte LIBRI-CARRUCCI faisait part d'une acquisition "*la plus heureuse que j'ai faite, de ma vie*", écrivait-il, acquisition qu'il venait de réaliser chez un libraire de Metz et comportant un lot important de manuscrits provenant de la bibliothèque de FRANÇAIS, lequel les avait lui-même reçus de son ami ARBOGAST. Ce lot comprenait de nombreuses lettres inédites de DESCARTES, J. BERNOUILLI, l'HOPITAL, d'ALEMBERT, VARIGNON, et surtout une collection de manuscrits et de lettres de FERMAT se composant :

"1. De quelques cahiers qui paraissent autographes et qui ne renferment que des recherches géométriques inachevées et des brouillons de calcul;
2. D'un volume qui entre autres choses contient une ancienne copie de lettres inédites de FERMAT, copie qui très probablement remonte à l'époque même où ces lettres ont été écrites;
3. D'un énorme cahier d'écriture moderne, où l'on a réuni toutes les lettres précédentes en y joignant plusieurs écrits mathématiques de FERMAT et quelques autres lettres que l'on a tirées de différents manuscrits. Vérification faite, ce cahier se trouve écrit de la main d'ARBOGAST."

Par un décret du 28 avril 1843, LIBRI avait été chargé par le Ministère de l'Instruction publique de réunir dans une publication d'ensemble tous les écrits de FERMAT mais le projet n'aboutit pas.

LIBRI fut en effet soupçonné de vol de livres dans les bibliothèques dont il avait la charge, officiellement inculpé et condamné. Il eut cependant le temps de fuir à Londres où il vendit son inestimable bibliothèque (plus de 30000 volumes). La collection d'ARBOGAST se trouva ainsi dispersée, après divers avatars, en partie à la Bibliothèque Nationale de Paris, en partie en Italie, dans la collection du prince BONCOMPAGNI et surtout à la bibliothèque de Florence.

Finalement les copies qu'ARBOGAST avait faites des manuscrits et des lettres de FERMAT servirent de façon irremplaçable pour l'édition des œuvres de ce dernier, lorsque Paul TANNERY et Charles HENRY en furent chargés en 1891 par le Ministère de l'Instruction Publique. (Sur l'ensemble de cette question, *cf.* [16]).

Arbogast au comité d'Instruction Publique

Plusieurs raisons motivaient la présence d'ARBOGAST au Comité d'Instruction publique et y expliquent l'importance de ses activités , la variété de ses interventions.

Aux qualités de compétences touchant les sciences et plus particulièrement les mathématiques ARBOGAST joignait, aux dires de ses contemporains "*une grande droiture dans le caractère, et un cœur noble et bienfaisant*" [(Notice nécrologique de la Société libre des sciences et des arts)] [11]. Aussi fut-il constamment réélu au Comité, et plusieurs fois président ou secrétaire. Il traversa toutes les phases de la Révolution sans jamais être inquiété, alors que de tempéramment très modéré, il s'était préoccupé publiquement devant l'Assemblée Nationale de la sûreté personnelle du prince royal lors des évènements de 20 juin 1792, et avait refusé, bien que montagnard, de voter la mort de Louis XVI en janvier 1793.

Son origine alsacienne, sa connaissance de la culture et de la langue allemande lui firent confier tout ce qui concernait les informations sur l'organisation scolaire en Allemagne, laquelle avait bénéficié durant les dernières décennies du 18^e siècle d'un développement remarquable. En effet, les idées pédagogiques nouvelles développées par J.-J. ROUSSEAU dans l'Emile avaient eues une grande fortune un peu partout en Europe, mais elle était restée toute théorique en France. En Allemagne par contre elles furent mises en pratique par des gens comme BASEDOW et PESTALOZZI. Les idées et les méthodes de cette nouvelle école pédagogique d'outre Rhin avaient déjà pénétré dans les esprits en Alsace où de plus, comme le fait remarquer R. REUSS "*l'enseignement était peut-être plus développé (...) par suite de l'émulation naturelle que suscitait dans le clergé des deux cultes, l'antagonisme confessionnel des populations de notre province*" [17].

Aussi trouve-t-on mentionné dès le 3 novembre 1791 dans les procès-verbaux du Comité d'Instruction publique, qu'ARBOGAST est chargé de faire venir d'Allemagne des ouvrages sur l'organisation des écoles normales, des universités, des gymnases.

Le terme même d'Ecole Normale était emprunté à l'Autriche. Le prélat silécien FELBIGER chargé par Marie-Thérèse de la réorganisation de l'enseignement populaire, avait créé en 1774 le terme de *Normalschule* pour désigner une école type dans laquelle les instituteurs devaient trouver un modèle à suivre.

Les alsaciens J.-F. SIMON et Joseph SCHWEIGHAUSER avaient fait un stage au célèbre établissement de BASEDOW : le Philanthropinum de DESSAU. Ils étaient en relation avec plusieurs membres du Comité d'Instruction publique, et leur avaient proposé la création en France d'établissements semblables aux écoles normales autrichiennes.

Il serait trop long et fastidieux d'énumérer par ailleurs toutes les tâches confiées à ARBOGAST en raison de ses compétences scientifiques. Chaque fois qu'un problème, qu'une sollicitation concernait une question ou un homme de science, on en chargeait ARBOGAST. Que ce soit pour :

- des expériences météorologiques en ballon,
- un projet de canal de Dieppe à Paris,
- l'examen de mémoires mathématiques (RAFFRON, CAYRON, COUSIN etc...),
- la mise en place, avec ROMME d'un concours pour la construction d'une pendule décimale et pour l'instruction sur le nouveau calendrier;

et tant d'autres questions à caractère plus ou moins scientifique.

Il fut chargé aussi, avec GREGOIRE et THIBEAUDEAU, de constituer une bibliothèque à la disposition du Comité d'Instruction publique, bibliothèque formée à partir des bibliothèques privées, sous scellés, des Emigrés.

"Vu (...) le projet d'établir près du Comité d'Instruction Publique une bibliothèque qu'il serait facile de composer d'articles choisis dans les bibliothèques d'émigrés et des établissements supprimés, (...) arrête qu'il sera formé dans le local du Comité d'Instruction Publique une collection des meilleurs ouvrages sur les objets relatifs aux travaux des différents comités (21 nivose An III - 10 janvier 1794)" [12].

Est-là qu'ARBOGAST fut mis en présence des lettres et manuscrits des mathématiciens du 17^{e} siècle qu'il recopia méticuleusement, avec son honnêteté habituelle?

Surtout, ARBOGAST travailla sans relâche avec ses amis CONDORCET et ROMME à l'élaboration et l'adoption d'un plan général d'organisation de l'Instruction Publique, et ses interventions furent nombreuses pour défendre le projet de CONDORCET, en particulier la nécessité de cinq niveaux d'instruction.

Deux autres contributions importantes méritent d'être encore soulignées. Il s'agit de son rapport sur le nouveau système des Poids et Mesures, et de son "*rapport et projet de décret sur la composition des livres élémentaires destinés à l'Instruction Publique*".

On peut juger, sur ce dernier point combien les idées pédagogiques d'ARBOGAST étaient modernes — influencées sans doute par PESTALOZZI :

"Un préjugé, accrédité trop longtemps, et qui a contribué plus que tout autre à entraver l'instruction, c'est de croire que les facultés intellectuelles ne se développent que les unes après les autres; que les enfants ne sont capables que de mémoire et non de raisonnement, de manière que l'instruction ne s'est presque bornée qu'à faire apprendre de mémoire aux élèves ce qu'ils ne comprenaient pas, et ensuite à guider leur imagination."

"Les enfants raisonnent aussi bien, quelquefois mieux que les hommes, mais sur des choses à leur portée, et ces choses sont celles qui tiennent à des idées sensibles. Commençons donc de bonne heure à faire raisonner les enfants; que les premiers livres qui leur seront offerts les y mènent naturellement; alors et alors seulement vous formerez leur esprit et leur cœur. Alors l'étude ne sera plus pour eux un état de violence, mais ils s'y porteront bientôt par goût. Toutes les facultés se développent graduellement, mais à peu près également : occupons les toutes, mais occcupons les agréablement. Que par une pente douce on marche des idées sensibles aux idées abstraites; qu'on place les jeunes gens dans les mêmes circonstances où nous nous sommes trouvés nous-mêmes, lorsque nous nous sommes formés des idées exactes, et alors les progrès deviendront rapides, parce que le travail, rendu plus facile, sera toujours accompagné de ce plaisir qui, des succès obtenus, porte vers des succès nouveaux cf. [18]".

Pour ce qui est des Poids et Mesures on a de la peine à imaginer aujourd'hui le progrès immense qu'apporta la réforme du système métrique. Fernand BRAUDEL [19] l'a fort bien mis en évidence lorsqu'il écrit : "Cette diversité extravagante des mesures était le cauchemar des administrations. Pourrait-on donner aux fûts de vin une seule et même contenance, demandait-on à l'intendant du Poitou en 1684? Idée absurde, répond-il en citant aussitôt une multitude étourdissante de tonneaux dont les appellations et contenances varient de localité en localité (...). L'unité ce serait la quadrature du cercle".

Eh bien, cette quadrature du cercle, la Convention Nationale eut le courage de l'entreprendre et la volonté de la réussir. En sa qualité de rapporteur du Comité d'Instruction Publique, ARBOGAST fit adopter le 1er avril 1793 une loi introduisant le système métrique dans toute l'étendue de la jeune République.

"C'est sur un objet de bienfaisance universelle que votre Comité d'Instruction Publique vient fixer quelques moments les regards de la Convention Nationale. L'uniformité des poids et mesures était depuis longtemps un des vœux des philantropes; elle est réclamée à la fois par les sciences et les arts, par le commerce et par l'homme utile qui vit du travail de ses mains, et qui, le plus exposé aux fraudes, est le moins en état d'en supporter les effets. Ce nouveau moyen de cimenter l'unité de la République en présente encore d'estime et de liaison entre les Français et les autres peuples, entre la génération présente qui offre ce bienfait, et la postérité qui en jouira ou en vérifiera les bases" [20].

Tout cela, ARBOGAST le fit avec une compétence, une discrétion mais aussi un dévouement constants au service public. Un des derniers arrêtés du Comité de Salut Public du 12 brumaire an IV "Charge les conducteurs de charrois gratuitement à Strasbourg les livres, meubles et effets du représentant ARBOGAST dans des charriots couverts de la République" cf. [5].

On ne peut mieux décrire la personnalité d'ARBOGAST et la façon avec laquelle il vécut ces évènements, qu'en citant pour terminer la notice nécrologique donnée par la Société libre des Sciences et des Arts, qu'il avait contribué à créer à Strasbourg en 1796 [11].

"Ne désirant acquérir la célébrité que par l'étude des sciences, et non par les dignités et les honneurs publics, il ne fut, dans ces deux assemblées politiques, qu'un mathématicien que des circonstances extraordinaires avaient arraché à sa paisible retraite. Religieux à remplir les devoirs que la voix de ses concitoyens lui avait imposés, il les regardait comme une chaîne pesante, qu'il reprenait chaque jour avec exactitude, mais dont il s'affranchissait avec volupté, pour l'oublier dans le sein de ses studieuses occupations. C'était l'asile où se réfugiait ARBOGAST, qui, placé au foyer des évènements, contemplait toujours avec un sentiment d'effroi les grands et terribles spectacles de la révolution."

Le calcul des dérivations

Comme l'indique le titre, ce livre donne d'abord des méthodes de calcul formel, ce mot ayant l'acception que les anglais donnent au mot '*calculus*' pour désigner le calcul différentiel et intégral. Il est important aussi de ne pas se leurrer quant au sens du mot '*dérivation*' qui chez ARBOGAST doit être pris dans sa signification originelle et étymologique : "*avoir son origine dans ..., se déduire de ..., découler de ...*". C'est pourquoi nous utiliserons le mot "*différentiation*" pour le passage de $f(x)$ à $\frac{df}{dx} = f'(x)$, réservant le terme "*dérivation*" à l'usage qu'en fait ARBOGAST et que je vais expliquer maintenant.

Développement d'une puissance de polynôme.

Déjà en 1697, Abraham de MOIVRE avait tenté de généraliser la formule du binôme de NEWTON en proposant "*une méthode pour élever à n'importe quelle puissance un polynôme infini*" c'est-à-dire le développement de $(az + bz^2 + cz^3 + \cdots)^m$; et il donne explicitement les coefficients de z^m, z^{m+1}, z^{m+2} jusqu'à z^{m+6}. Aujourd'hui l'analyse combinatoire nous permet d'écrire

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_px^p)^r = \Sigma_{n=0}^{n=pr} A_n x^n$$

où le coefficient A_n est donné par

$$A_n = \Sigma \frac{n!}{\alpha!\beta!\gamma!\ldots\varpi!} . a_0^{\alpha} . a_1^{\beta} . a_2^{\gamma} \ldots a_p^{\varpi}$$

cette dernière somme étant effectuée sur tous les ensembles d'entiers naturels $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ vérifiant simultanément :

$$(1)\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma+\cdots+\varpi=r \\ \beta+2\gamma+\cdots p\varpi=n \end{cases}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}(a+bx+cx^2)^3 &= a^3+3a^2bx+(3a^2c+3ab^2)x^2+(6abc+b^3)x^3 \\ &= +(3ac^2+3b^2c)x^4+3bc^2x^5+c^3x^6.\end{aligned}$$

Mais la difficulté devient vite énorme pour trouver les coefficients A_n lorsque p et r augmentent. Le '*Calcul des dérivations*' d'ARBOGAST donne une réponse à la fois simple et efficace à ce problème, et cela de deux façons :
— l'une **récurrente**, permettant de déduire **directement**, sans aucun calcul **combinatoire**, le coefficient A_{n+1} du coefficient A_n,
— l'autre **ponctuelle**, permettant de calculer A_n **isolément** pour un indice n fixé, sans avoir besoin de calculer les coefficients d'indice inférieur.

Voici le principe sur lequel est basé cette méthode. Soit u une fonction développée en série entière selon la formule de TAYLOR (il s'agit en fait d'un développement formel, ARBOGAST ne s'occupant pas ici de problèmes de convergence). On a donc :

$$\begin{aligned}u(t+x) &= u(t)+u'(t)x+\frac{1}{2!}u''(t)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}u^{(n)}(t)x^n+\cdots \\ &= a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots\end{aligned}$$

avec $a_0=u(t)$; $a_1=u'(t)$; $a_2=\frac{1}{2!}u''(t)$; $\ldots$; $a_n=\frac{1}{n!}u^{(n)}(t)$. Ces coefficients $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont des fonctions qui "*dérivent*" les unes des autres et que nous noterons avec ARBOGAST

$$a_1=Da_0\ ;\ a_2=Da_1=D^2a_0\ ;\ldots, a_n=D^na_0$$

et pour tous entiers naturels n et p : $n\geq 0$; $p\geq 1$; $D^pa_n=a_{n+p}$.

Réciproquement, ARBOGAST pose que tout développement formel, fini ou non, de la forme

$$a+bx+cx^2+\ldots \text{ etc } \ldots$$

où $a, b, c, \ldots$ sont des coefficients **indéterminés**, peut être considéré comme le développement d'une fonction u telle que $u(t+x)=a+bx+cx^2+\cdots$ avec

$$a=u(t)\ ;\ b=u'(t)=Da\ ;\ c=\frac{1}{2!}u''(t)=D^2a=Db \text{ etc}\ldots$$

Soit alors φ une autre fonction, telle que,

$$\varphi[u(t+x)]=\varphi(a+bx+cx^2+\cdots)=A_0+A_1x+A_2x^2+A_nx^n+\cdots$$

On a $A_0 = \varphi(a)$ appelé origine des dérivations et $A_n = D^n A^0 = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{dx^n}(\varphi_0 u)(t)$ dérivé d'ordre n pour lequel ARBOGAST établit la formule fondamentale suivante :

$$\begin{aligned} D^n A_0 =&(\Delta^n A_0)b^n + (\Delta^{n-1}A_0)Db^{n-1} + \cdots \\ &+ (\Delta^{n-k}A_0)D^k b^{n-k} + \cdots + (\Delta A_0)D^{n-1}b \quad (2) \end{aligned}$$

où $\Delta^p A_0 = \frac{1}{p!}\frac{d^p}{da^k}\varphi(a)$ (différentiation classique) et $D^s b^m$ est le dérivé de b^m d'ordre s au sens d'ARBOGAST c'est-à-dire le coefficient de x^s dans le développement de $(b + cx + dx^2 + \cdots)^m = b^m + (mb^{m-1}c)x + \cdots$

Limitons nous pour l'instant au cas d'une fonction φ puissance, c'est-à-dire à $\varphi(u) = u^r = (a + bx + cx^2 + \cdots)^r$. ARBOGAST démontre la double règle suivante pour "*dériver*" le coefficient A_{n+1} du coefficient A_n.

Après avoir disposé les lettres suivant leur ordre de succession :

$\boxed{R_1}$

"*On ne fera varier, dans chaque terme, que la dernière lettre ou sa puissance, en suivant les règles de différentiations, et en mettant simplement b pour Da, c pour Db, d pour Dc etc... sans autre coefficient que l'unité : c'est-à-dire* $Da^s = sa^{s-1}b$; $Db^m = mb^{m-1}c$ *etc...*"

$\boxed{R_2}$

"*On fera de plus varier* "suivant les règles de différenciations" *l'avant dernière lettre ou sa puissance, si elle se trouve être la lettre qui, dans l'ordre alphabétique précède immédiatement la dernière du terme; et comme la puissance de la dernière lettre augmente alors d'une unité, on divisera par l'exposant ainsi augmenté.*"

Illustrons cela en supposant que A_n contienne un terme en $a^2b^3c^5$. Alors A_{n+1} contiendra par "dérivation"

selon $\boxed{R_1}$ $5a^2b^3c^4d$; selon $\boxed{R_2}$ $3a^2b^2\frac{c^6}{6}$.

Ainsi nous pouvons développer très simplement et de proche en proche n'importe quelle expression $(a+bx+cx^2+\cdots)^r$. Considérons par exemple $(a+bx+cx^2+dx^3)^5$. L'origine des dérivations est ici $a^5 = A_0$ qui donne

par $\boxed{R_1}$ $A_1 = 5a^4b$ lequel donne à son tour

par $\boxed{R_1}$ et $\boxed{R_2}$ $A_2 = 5a^4c + 20a^3\frac{b^2}{2} = 5a^4c + 10a^3b^2$

puis $A_3 = 5a^4d + 20a^3bc + 10a^2b^3$.

Dans A_4, comme le dérivé de d est nul : $Dd = 0$ (il n'y a pas de terme ex^4 dans l'expression initiale), le terme $5a^4d$ ne donne rien ni par $\boxed{R_1}$, ni par $\boxed{R_2}$ (puisque a ne précède pas immédiatement d). Par contre les deux autres termes donneront chacun deux termes par $\boxed{R_1}$ et $\boxed{R_2}$

$$A_4 = \underset{\text{par } \boxed{R_1}}{20a^3bd} + \underset{\text{par } \boxed{R_2}}{10a^3c^2} + \underset{\text{par } \boxed{R_1}}{30a^2b^2c} + \underset{\text{par } \boxed{R_2}}{5ab^4}$$

D'où le développement :

$$\begin{aligned}(a+bx+cx^2+dx^3)^5 = a^5 + 5a^4bx + (5a^2c + 10a^3b^2)x^2 \\ +(5a^4d + 20a^3bc + 10a^2b^3)x^3 \\ +(20a^3bd + 10a^3c^2 + 30a^2b^2c + 5ab^4)x^4 \\ +(20a^3cd + 30a^2b^2d + 30a^2bc^2 + 20ab^3c + b^5)x^5 \\ +(10a^3d^2 + 60a^2bcd + 10a^2b^3 + 20ab^3d + 30ab^2c^2 + 5b^4c)x^6 \\ + \text{etc}\ldots \qquad (3)\end{aligned}$$

Ceci pour l'aspect récurrent de la formule d'ARBOGAST . Si nous nous intéressons à un coefficient isolément, par exemple A_8, celui-ci peut être obtenu directement par la formule (2).

$$A_8 = D^8a^5 = (\Delta^8a^5)b^8 + \Delta^7a^5Db^7 + \cdots + \Delta^2a^5D^6b^2 + \Delta a^5D^7b$$

$\Delta a^5 = 5a^4$	$\Delta^7 b = 0$
$\Delta^2 a^5 = 10a^3$	$D^6b^2 = 0$
$\Delta^3 a^5 = 10a^2$	$D^5b^3 = 3cd^2$
$\Delta^4 a^5 = 5a$	$D^4b^4 = 6b^2d^2 + 12bc^2d + c^4$
$\Delta^5 a^5 = 1$	$D^3b^5 = 20b^3cd + 10b^2c^3$
$\Delta^6 a^5 = 0$	$D^2b^6 = 6b^5d + 15b^4c^2$
$\Delta^7 a^5 = 0$	$Db^7 = 7b^6c$
$\Delta^8 a^5 = 0$	$b^8 = b^8$

La deuxième colonne est obtenue selon la même formule, ainsi pour obtenir D^4b^4, on développe $(b+cx+dx^2)^4$:

$$\begin{aligned}D^4b^4 &= (\Delta^4b^4)c^4 + \Delta^3b^4Dc^3 + \Delta^2b^4D^2c^2 + \Delta b^4D^3c \\ &= c^4 + 12bc^2d + 6b^2d^2 \quad (\text{car} D^3c = 0)\end{aligned}$$

En réalité ARBOGAST donne une règle de calcul de D^rb^s à partir de $D^{r-1}b^{s+1}$ ce qui lui permet d'écrire de proche en proche les termes de la seconde colonne.

Mais pour ne pas alourdir excessivement cet article, nous pouvons nous en passer et calculer chaque terme de cette colonne isolément, par la méthode indiquée. Signalons toutefois que les anglais ayant, comme je l'ai indiqué au début, beaucoup pratiqué cette formule ils ont établi une fois pour toute des tables de dérivation donnant $D^s b^m$ pour divers exposants s et m.

Nous obtenons donc pour A_8 :

$$A_8 = 30a^2cd^2 + 30ab^2d^2 + 60abc^2d + 5ac^4 + 20b^3cd + 10b^2c^3$$

résultat que l'on peut vérifier en continuant le développement (3).

Remarquons en passant, que ce coefficient A_8 nous donne aussi toutes les solutions du système

$$(1)\begin{cases} \alpha \quad +\beta \quad +\gamma \quad +\delta \quad = 5 \\ \qquad \beta \quad +2\gamma \quad +3\delta \quad = 8 \end{cases}$$

qui sont les exposants des termes $a^\alpha b^\beta c^\gamma d^\delta$, soit :

$$(2,0,1,2)\ ;\ (1,2,0,2)\ ;\ (1,1,2,1)\ ;\ (1,0,4,0)\ ;\ (0,3,1,1)\ ;\ (0,2,3,0).$$

Bien entendu la formule (2) est valable pour une fonction φ quelconque, dans la mesure où elle est développable en série entière. En voici une autre application utilisant le développement $\ell\eta(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \cdots$

Calcul des sommes des puissances $n^{\text{ième}}$ des racines d'un polynôme.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ les racines de $X^m + bX^{m-1} + cX^{m-2} + \cdots = 0$. En transformant l'équation par $X = \frac{1}{Z}$ et factorisant

$$(1-\alpha Z)(1-\beta Z)(1-\gamma Z)\ldots = 1 + bZ + cZ^2 + \cdots$$

D'où

$$\begin{aligned} \ell\eta(1 + bZ + cZ^2 + \cdots) = &-(\alpha+\beta+\gamma)Z - (\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\cdots)(Z^2/2) \\ &-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\cdots)(Z^3/3)\ldots\text{etc}\ldots \end{aligned}$$

Posant $S_1 = \alpha + \beta + \gamma + \cdots$; $S_k = \alpha^k + \beta^k + \gamma^k + \cdots$ et développant $\ell\eta(a + bZ + cZ^2 + \cdots)$ par la règle d'ARBOGAST , puis remplaçant a par 1 on obtient :

$$\ell\eta(a + bZ + cZ^2 + \cdots) = \ell\eta a + (a^{-1}b)Z + (-a^{-2}\frac{b^2}{2} + a^{-1}c)Z^2$$
$$+(2a^{-3}\frac{b^3}{3!} - a^{-2}bc + a^{-1}d)Z^3 + (-6a^{-4}\frac{b^4}{4!} + 2a^{-3}b^3c - a^{-2}bd - a^{-2}\frac{c^2}{2} + a^{-1}e)Z^4 + \cdots$$

D'où

$$S_1 = -b\ ;\ S_2 = b^2 - 2c\ ;\ S_3 = -b^3 + 3bc - 3d$$
$$S_4 = b^4 - 4b^2c + 4bd + 2c^2 - 4e \text{ etc } \ldots$$

et d'une façon générale $\frac{S_n}{n} = -D^n(\ell\eta a)$ que l'on pourra développer par la formule (2) en ayant soin de remplacer a par 1 dans le développement.

Les applications de cette formule (2) sont innombrables, d'autant plus qu'ARBOGAST la généralise aux fonctions de plusieurs variables, et au produit de fonctions. Il peut aussi calculer le terme général d'une suite récurrente linéaire simple ou multiple, sans passer par la résolution d'une équation caractéristique. Ou encore traiter ce qu'on appelait alors le problème général du "*retour des suites*" et qui peut s'énoncer ainsi :

Etant donnée la série $y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \cdots$ etc...
on demande d'exprimer x par une série en y sous la forme :
$x = ay + by^2 + cy^3 + \cdots$ etc...

Contentons nous, dans le cadre étroit de cet article, de montrer l'intérêt des méthodes d'ARBOGAST pour le calcul de la dérivée n$^{\text{ième}}$ d'une fonction composée (au sens classique, cette fois, du mot dérivée).

Calcul de la dérivée n$^{\text{ième}}$ d'une fonction composée.

Soit $V = \varphi(a + bx + cx^2 + \cdots)$. Pour avoir $\frac{1}{n!}\frac{d^n\varphi}{dx^n}$ il suffit de remplacer x par $(x + dx)$ et de chercher le coefficient de $(dx)^n$ dans le développement de

$$\varphi\{a + b(x + dx) + c(x + dx)^2 + \cdots\}.$$

Limitons nous pour l'instant au cas où $V = (a + bx + cx^2)^r$ $(r \in \mathbb{R})$. Le lecteur pourra s'exercer à la manipulation de la formule (2) et calculer le développement de $V = \Sigma_{n\geq 0} A_n x^n$. Il trouvera

$$A_n = \Sigma_{0\leq k\leq [\frac{n}{2}]} \frac{r(r-1)\dots(r-n+k+1)}{k!(n-2k)!} a^{r-n+k} b^{n-2k} c^k.$$

Si donc nous y remplaçons x par $(x + dx)$, de sorte que a doit être remplacé par $a + bx + cx^2$, b par $b + 2cx$ et c reste c, nous aurons

$$\frac{d^n V}{dx^n} = n!\Sigma_{0\leq k\leq [\frac{n}{2}]} \frac{r(r-1)\dots(r+k-n+1)}{k!(n-2k)!} (a + bx + cx^2)^{r-n+k}(b + 2cx)^{n-2k} c^k.$$

Exemple 1 : $V = (1 - x^2)^{-1/2}$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\operatorname{Arc}\sin x) = \frac{n!}{2^n} \frac{x^n}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \Sigma_{0\leq k\leq [\frac{n}{2}]} C_n^k C_{2n-2k}^n \Big(\frac{1-x^2}{x^2}\Big)^k$$

Exemple 2 : $V = (1 + x^2)^{-1}$

$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(\operatorname{Arc}\tan x) = n!\frac{(2x)^n}{(1+x^2)^{n+1}} \Sigma_{0\leq k\leq [\frac{n}{2}]} (-1)^{n-k} C_{n-k}^k \Big(\frac{1+x^2}{4x^2}\Big)^k.$$

Pour terminer, appliquons la méthode d'ARBOGAST à une famille de polynômes qui ont été étudiés bien après sa mort par HERMITE, et définis ainsi :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}).$$

La formule (2) nous donne, pour $e^{a+bx+cx^2}$

$$D^n e^a = e^a \Sigma_{0\leq k\leq [\frac{n}{2}]} \frac{1}{(n-k)!} C_{n-k}^k b^{n-2k} c^k.$$

Pour obtenir $\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ remplaçons x par $x+dx$, a par $-x^2$, b par $-2x$, c par (-1) :

$$e^{-(x+dx)^2} = e^{-x^2-2xdx-(dx)^2}$$

et alors

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2}) = n!e^{-x^2}\Sigma_{0\leq k\leq \frac{n}{2}} \frac{1}{(n-k)!} C_{n-k}^k (-2x)^{n-2k}(-1)^k$$

et

$$H_n(x) = \Sigma_{0\leq k\leq [\frac{n}{2}]}(-1)^k k! C_n^k C_{n-k}^k (2x)^{n-2k}.$$

Ainsi

$$H_1(x) = 2x\ ;\ H_2(x) = 4x^2 - 2\ ;\ H_3(x) = 8x^3 - 12x$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12 \quad \text{etc}\ldots$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] MONTUCLA.- *Histoire des Mathématiques.*- Tome IV.- Publié par J. de la Lande (1802).
[2] LACROIX S.- F.- *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral.*- 2e édition (1810) chez Coursier, Paris.
[3] LAGRANGE J.-L.- *Théorie des fonctions analytiques.*- Imprimerie de la République, Paris (1797).
[4] AULARD. *Procès-verbaux du Comité du Salut Public.*
[5] KUSCINSKI A.- *Dictionnaire des Conventionnels.*- Paris, Société de l'Histoire de la Révolution Française (1916).
[6] Annales de GERGONNE.- Annales de Mathématiques pures et appliquées, Nismes entre 1810 et 1832.
[7] HORNER W.-G.- *Philosophical Trans. of the Royal Society.*- Vol. 109 (1819).
[8] LLOYD-TANNER H.-W.- *On the history of Arbogast's rule.*- Messenger of Math. XX 1890-1891.- p. 83-101.
[9] DE MORGAN A.- *Application of combinations to the explanation of Arbogast's method.*- C. & D. Math. Journal.- VOl. VI.
[10] ROBERTS S.- *On Arbogast's calculus of derivations.*- Q. J. Math.- Vol IV (1861).
[11] Mémoires de Société des Sciences agriculture et arts de Strasbourg.- Berger Levrault (1811).
[12] GUILLAUME.- *Procès-verbaux du Comité d'instruction publique.*
[13] TRUESDELL C. LEONHARDI EULERI *Opera omnia.*- Ser. II, Vol. 13 (1956).
[14] ARBOGAST L.- *Mémoire sur la nature des Fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles.*- Saint Petersbourg, Imprimerie à l'Académie impériales des Sciences (1791).

[15] ARBOGAST L.– *Mémoire sur de nouveaux principes de calcul différentiel et intégral.*– (1798) Manuscrit.– Bibliothèque Laurentiana Florence Cod. Laur. Ashb. App. (1840).
[16] TANNERY P.– *Mémoires scientifiques* VI, Paris (1926).
[17] REUSS R.– *Notes sur l'instruction primaire en Alsace pendant la Révolution.*– Berger Levrault (1910).
[18] ARBOGAST L.– *Rapport et projet de décret "Sur la composition des livres élémentaires destinés à l'Instruction Publique"* présenté à la Convention au nom du Comité d'Instruction publique par LFA ARBOGAST député du Département du Bas-Rhin.
[19] BRAUDEL F.– *L'identité de la France.*– Tome I.– Arthaud Flammarion (1986).
[20] ARBOGAST L. *Sur l'uniformité et le système général des Poids et Mesures, Rapport et projet de décret... par le citoyen* ARBOGAST.