LA COURBE BRACHYSTOCHRONE

l'histoire d'un problème (analogies, erreurs et incertitudes)

Jean-Luc Chabert

> " En raisonnant juste sur une hypothèse vraie, l'on arrive toujours à une conclusion vraie, en raisonnant juste sur une hypothèse fausse, l'on arrive toujours à une conclusion fausse (comme l'on voit par les démonstrations qu'on appelle ad absurdum); mais en raisonnant faussement sur une hypothèse fausse, il se peut faire, quelquefois qu'on arrive à une conclusion vraie; une fausseté, pour ainsi dire, corrigeant l'autre " (1)
>
> Jacques Bernoulli

L'évocation du Problème Brachystochrone ou recherche de la courbe de descente la plus rapide constitue classiquement une introduction au Calcul des Variations. Une approche historique de sa démonstration permet en outre d'y lire les prémisses de la Mécanique Ondulatoire. Quoiqu'il en soit, cette relecture récurrente, par l'analyse des preuves successivement élaborées, nous servira de prétexte à une flânerie à travers diverses disciplines.

Le Problème Brachystochrone et le Calcul des Variations

Jean Bernoulli énonce le Problème Brachystochrone[a] en 1696 dans les *Acta Eruditorum* de Leipzig [2] :

Datis in plano verticali duobus punctis A & B, assignare Mobili M viam AMB , per quam gravitate sua descendens, & moveri incipiens a puncto A , brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B .

Dans un style plus moderne :

Deux points A et B étant donnés, quelle courbe doit parcourir un mobile M soumis à la seule action de la pesanteur et partant au repos du point A pour arriver au point B en le temps le plus court ?

Il tombe sous le sens commun que cette courbe est nécessairement située dans le plan vertical contenant les points A et B. Le bon sens encore incite à penser que le chemin le plus rapide est le chemin le plus court, à savoir le segment de droite joignant les points A et B. Bien sûr, il n'en est rien. Il faut en effet considérer toutes les courbes reliant les points A et B et comparer les temps de parcours correspondants; il s'agit de trouver non pas un nombre ou un point qui optimise une certaine quantité, mais une courbe.

Or, lorsqu'on désire extrémiser la valeur d'une fonction f d'une variable x, on cherche les valeurs de x pour lesquelles $f'(x)=o$, c'est à dire pour lesquelles le graphe de f admet une tangente horizontale. Dans le cas d'une fonction f deux variables x et y, on cherche les couples (x,y) pour lesquels les dérivées partielles $f'_x(x,y)$ et $f'_y(x,y)$ sont nulles, c'est à dire pour lesquels le plan tangent à la surface d'équation $z=f(x,y)$ est horizontal. Bref, dans le cas d'un nombre fini de variables, les difficultés paraissent surmontables, l'approche du problème s'effectuant selon le Calcul Différentiel de Newton et Leibniz.

Ici, il faut imaginer une nouvelle théorie, une extension du Calcul Différentiel, où ce qui varie n'est plus un nombre ou un point, mais une courbe, une fonction. Cette théorie à créer s'appelle le Calcul des Variations, les variations étant celle d'une fonction. Mais, en 1696, cette théorie n'est pas encore fondée et notre problème, même simplifié, s'avère a priori d'un abord délicat. D'autant plus qu'il semble difficile de s'appuyer sur une intuition géométrique pure, le temps intervenant dans la formulation de ce qu'il faut optimiser.

La chute des corps et l'approche de Galilée

Avant même cet énoncé explicite du Problème Brachystochrone, Galilée l'envisage dans ses *Discours concernant deux sciences nouvelles* [8] de 1638.

Et tout d'abord comment, connaissant la loi de la chute des corps, optimiser la position d'un plan incliné de façon qu'un mobile partant au repos du point A atteigne la verticale D en un temps minimum (fig. 1) ? Accroître l'inclinaison du plan augmente la vitesse du mobile, mais augmente aussi la distance à parcourir.

Sachant que le temps mis pour décrire AB est proportionnel à la longueur parcourue AB et inversement proportionnel à la racine carrée de la chute BC :

$$t_{AB} = \frac{k\ AB}{\sqrt{BC}} \quad {}^{(b)},$$

Galilée prouve par des considérations géométriques que c'est la position moyenne, le plan incliné à 45°, qui est optimale (fig. 2).

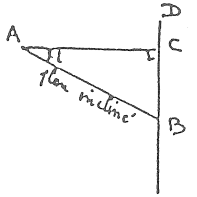


figure 1

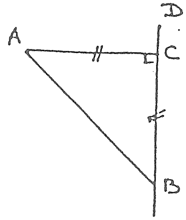


figure 2

En fait, Galilée sait que, partant au repos d'un point A (fig. 3), les temps de descente le long d'un plan incliné jusqu'au point B sont tous égaux, lorsque A décrit un cercle dont B est le point le plus bas. On voit bien là comment l'inclinaison à 45° est celle qui permet d'aller le plus loin.

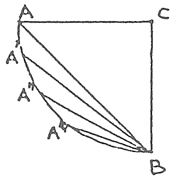


figure 3

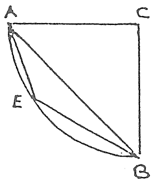


figure 4

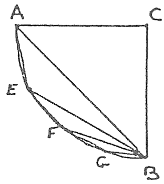


figure 5

Galilée montre ensuite qu'il est possible de diminuer ce temps de descente en remplaçant le segment AB par deux segments consécutifs AE et EB où E désigne un point quelconque du quart de cercle AB de centre C (fig. 4). Ainsi, partant de A au repos, il est plus rapide de parcourir AE puis EB que de parcourir AB.

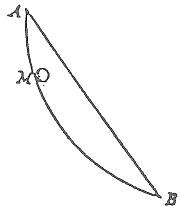
Raisonnant alors par une sorte d'induction, Galilée pense que le temps sera diminué encore en remplaçant le segment EB par deux segments EF et FB, puis en remplaçant FB par deux segments FG et GB, et ainsi de suite ... (fig. 5); à la limite, la ligne polygonale AEFGB se rapprochant du quart de cercle,
"*il semble possible de conclure que le mouvement le plus rapide entre deux points n'a pas lieu le long de la ligne la plus courte c'est à dire le long d'une droite, mais le long d'un arc de cercle* " [c].

Ce résultat est inexact, le passage de deux à trois segments étant seulement fondé sur une intuition. Le Problème Brachystochrone est considérablement plus délicat que celui que Galilée se posait à l'origine : trouver l'inclinaison i d'un plan de façon que le temps t(i) mis par un mobile sur ce plan pour joindre le point A à la verticale D soit minimal, c'était un simple problème d'extremum pour la fonction t(i). Galilée enrichit la question avec l'introduction de lignes polygonales, avancée en direction du Problème Brachystochrone, mais limitée finalement à la seule considération de lignes polygonales et de cercles.

A la suite du problème de son frère, Jacques Bernoulli pose la question suivante : une ligne verticale étant donnée, quelle est de toutes les cycloïdes ayant le même commencement et la même base horizontale, celle suivant laquelle le corps pesant arrive le plus tôt à la ligne verticale?

Cet énoncé rappelle la version préliminaire de Galilée où il s'agissait de trouver le plan incliné passant par un point donné et permettant d'atteindre le plus tôt une verticale donnée. Jean Bernoulli montre que la cycloïde en question est celle qui arrive horizontalement sur la droite donnée et, plus généralement, celle qui permet d'atteindre le plus rapidement possible une certaine droite oblique est celle qui la coupe à angle droit.

Cette cycloïde qui, on vient de le dire, est une courbe brachystochrone, est aussi, on le savait avec Huygens depuis 1659, une courbe tautochrone :



Les corps qui tombent dans une cycloïde renversée arrivent à son sommet dans le même temps, de quelque hauteur qu'ils commencent à tomber.

Cette propriété peut être rapprochée de celle observée par Galilée : l'égalité des temps de parcours sur les cordes d'un même cercle.

On sait que Huygens utilise cette propriété pour construire -en théorie- ses horloges isochrones. Mais revenons au Problème Brachystochrone.

La découverte de la solution par Jean Bernoulli est basée sur une analogie et la démonstration reste rudimentaire, intuitivement convaincante, mais non satisfaisante mathématiquement. Son frère Jacques lui en fait la remarque et formule d'autres problèmes d'extremum -du type problème isopérimétrique- cherchant à mettre ainsi en évidence l'insuffisance de la méthode de Jean, méthode par analogie qui ne peut fonctionner que dans ce problème particulier. Une longue controverse s'installe alors, début d'une brouille définitive entre les deux frères, mais naissance aussi du Calcul des Variations.

La mathématisation du problème

C'est Euler qui le premier formule des méthodes générales pouvant s'appliquer aux principaux problèmes du Calcul des Variations. Il reprend et développe systématiquement ses travaux des années 1730 dans son *Methodus inveniendi lineas curvas* (6).

Un problème de calcul des variations se présente généralement de la façon suivante :

Il s'agit de trouver une courbe, graphe d'une fonction y de x, qui minimise ou maximise une certaine quantité, parmi toutes les courbes astreintes à certaines conditions (pour le Problème Brachystochrone, la courbe joint deux points A et B). La quantité à extrémiser (ici, le temps de parcours) s'exprime généralement sous la forme d'une intégrale :

$$I(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

où y désigne la fonction à trouver, y' sa dérivée, x la variable, F une certaine fonction.

Euler traite le problème comme un problème limite d'une recherche d'extremum ordinaire en discrétisant la question de la façon suivante : on considère la courbe comme une ligne polygonale formée de n segments d'extrémités $(a=x_o, y_o)$, (x_1, y_1), ..., $(b=x_n, y_n)$, il s'agit de trouver les valeurs des ordonnées $y_o, y_1, ..., y_n$ qui extrémisent la quantité :

$$W(y_o, y_1, ..., y_n) = \sum_{o \leq k \leq n-1} F(x_k, y_k, (y_{k+1}-y_k)/(x_{k+1}-x_k))\,(x_{k+1}-x_k)$$

Faisant tendre n vers l'infini, Euler en déduit l'équation différentielle :

$$(*) \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = o$$

que doit vérifier toute solution y. Il ne s'agit bien sûr que d'une condition nécessaire, on ne prouve pas ainsi l'existence d'une solution.

Lagrange apportera des simplifications considérables à la méthode d'Euler, utilisant le symbolisme des δ pour les variations de la fonction.

Dans le cas du Problème Brachystochrone, on a :

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\,dx\,, \quad v = \sqrt{2gy}\,, T = \int_0^{x_1} \frac{ds}{v} = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}\,dx}$$

La fonction $F(x, y, y') = \dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}$ conduit à l'équation d'Euler- Lagrange, puis à la cycloïde que l'on détermine en écrivant que la courbe passe par les deux points extrémités.

" *Ainsi, Jean Bernoulli trouva, par analogie, une solution accidentelle d'un problème. Jacques Bernoulli développa une méthode géométrique pour la résolution des problèmes analogues. Euler généralisa à la fois les problèmes et la méthode géométrique. Lagrange enfin se libéra complètement de la considération des figures et donna une méthode analytique* ".

Mach, *La Mécanique* [12]

Maupertuis et le principe de moindre action

Faisons une digression qui prendra son sens dans un instant. Maupertuis énonce son principe en 1744 [13] et le reprend en 1746 [14] :

"*Lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'action nécessaire pour ce changement, est la plus petite qu'il soit possible* ".

L'action est évaluée de la façon suivante :

"*Lorsqu'un corps est transporté d'un lieu dans un autre, l'action est d'autant plus grande que la masse est plus grosse, que la vitesse est plus rapide, que l'espace par lequel il est transporté est plus long* "

Avec ce principe général, Maupertuis établit une sorte de jonction entre la Philosophie, la Physique et les Mathématiques : la Nature agirait de façon à minimiser son action; la description causale est abandonnée au profit d'un but à atteindre, marque d'une harmonie du monde et de la raison.

Or, Maupertuis introduit et justifie son principe de moindre action à propos de la loi de réfraction : pour lui, la lumière se propage de façon à minimiser la quantité $AI\ v_1 + IB\ v_2$ au lieu de $\frac{AI}{v_1} + \frac{IB}{v_2}$. Pour ce faire cependant, il affirme tout comme Descartes que la propagation de la lumière est plus rapide dans les corps plus denses [8] en contradiction avec le point de vue de Fermat et la mise en oeuvre de son principe. Du coup, pour Maupertuis, $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2}$ au lieu de $\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$ et on retrouve bien la loi des sinus de Descartes. En fait, si le principe de moindre action ne s'applique pas à l'Optique, il intervient efficacement en Mécanique.

Euler [6] en 1744, puis Lagrange [11] en 1760, l'ont repris, reformulé, rejustifié. Le principe peut s'énoncer ainsi :

Lorsqu'un système passe d'une configuration initiale P à une configuration finale Q, la trajectoire effectuée dans le mouvement réel -ou ce qui la représente dans l'espace des paramètres- est celle qui minimise, en fait rend stationnaire, l'action nécessaire pour passer de P à Q. En termes mathématiques, la trajectoire réelle est la courbe joignant P à Q dans l'espace des paramètres pour laquelle l'action à savoir :

$$A = \int_P^Q mv\ ds$$

est stationnaire parmi toutes les courbes joignant P à Q.

C'est Jacobi cependant qui énoncera dans ses Leçons [10] le principe d'une façon rigoureuse :

Il ne s'applique que dans le cadre de la conservation de l'énergie et l'on ne doit y comparer que des trajectoires pour lesquelles la valeur de l'énergie est une même constante.

L'Optique et la Mécanique

Nous avons dit que le principe de moindre action, principe de Mécanique, ne pouvait s'appliquer à l'Optique, à la loi de propagation de la lumière, contrairement au désir et à la conviction de Maupertuis. Pourtant, une analogie Optique/Mécanique avait autrefois permis à Jean Bernoulli de résoudre le Problème Brachystochrone. Le mouvement d'un corps dans le champ de gravitation terrestre et dont par suite la vitesse croit comme la racine carrée de l'écart des hauteurs y était mis en parallèle avec celui d'un rayon lumineux traversant un corps dont l'indice de réfraction varie de façon continue, de façon là encore inversement proportionnelle à la racine carrée des écarts des hauteurs.

Ainsi, Jean Bernoulli [4] écrit :

"*.... Car je fais voir, ce qui est admirable, que si un diaphane commençant par le point lumineux, et descendant verticalement change continuellement de rareté, en même raison que les vitesses acquises d'un corps pesant qui tombe du même point lumineux, la Courbe de la plus vite descente sera précisément la même que celle du rayon, c'est à dire, que l'une et l'autre sera la Roulette ou la Cycloïde.*"

Il y a de plus un parallèle entre -et ce point est intéressant :

"*... la courbure de l'Onde de la lumière, c'est à dire la ligne qui coupe perpendiculairement tous les rayons partant d'un même point lumineux*"

et la courbe Synchrone, "*savoir celle qui détermine les portions parcourues en temps égaux de toutes les cycloïdes décrites d'un même commencement, et sur une même base horizontale .*"

La courbe Synchrone est "*aussi parfaitement la même que celle de l'Onde qui se fait dans le dit diaphane par le point rayonnant; car l'une et l'autre sera perpendiculaire à ces Cycloïdes .*"

".... de sorte que ces deux spéculations prises de deux si différentes parties des Mathématiques, telles que sont la Dioptrique et la Mécanique, ont entre elles une liaison absolument nécessaire et essentielle." Jean Bernoulli, 1697

Hamilton [9] montrera dans les années 1830 comment cette analogie subsiste de façon formelle au niveau des principes. Il s'en sert d'ailleurs comme point de départ de sa Dynamique, prolongement de son Optique des milieux non homogènes. Le principe mécanique de moindre action peut en effet être mis en correspondance avec le principe optique de Fermat.

Rappelons le principe de moindre action : un système dynamique conservatif passe d'une configuration P à une configuration Q selon une trajectoire telle que l'action

$$A = \int_P^Q p \, dl$$

soit minimale (stationnaire) où p=mv désigne le moment et dl l'élément de chemin.

Quant au principe de Fermat, il se formule : un rayon lumineux joint un point P à un point Q selon un chemin tel que le temps

$$T = \int_P^Q \frac{n \, dl}{c}$$

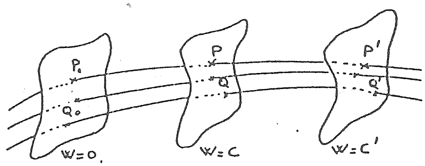
soit minimum (stationnaire) où n désigne l'indice de réfraction du milieu traversé et c la vitesse de la lumière dans le vide.

C'est le même type de condition conduisant au même type d'équation, il suffit de remplacer le moment $p=mv$ par l'indice $n=\frac{c}{v}$. Notons cependant que le principe de

Fermat fait intervenir le temps de façon essentielle alors que le principe de moindre action ne s'occupe pas de savoir comment se déroule le mouvement au cours du temps, il s'agit bien d'une analogie formelle.

Analogie importante toutefois puisque, de façon plus précise, toujours dans la lignée des remarques de Jean Bernoulli, le théorème de Malus selon lequel en Optique géométrique les trajectoires orthogonales à une surface restent orthogonales à toute une famille de surfaces -les surfaces d'onde, a sa traduction formelle en Mécanique

S'il existe une surface -en fait, une hypersurface dans l'espace des paramètres- en chaque point P_o de laquelle les trajectoires naturelles lui sont orthogonales, alors les trajectoires sont orthogonales à toute une famille de surfaces (hypersurfaces), ce sont les surfaces d'équation $W = C_{ste}$ où la fonction W représente l'intégrale de l'action de P_o à P.



Ainsi, les surfaces de temps égaux en Optique ont pour analogue les surfaces d'actions égales en Mécanique -pour une énergie E fixée. Cette assimilation de la Dynamique classique à l'Optique géométrique s'obtient en associant à la fonction potentiel U un indice de réfraction :

$$n = \sqrt{1 - \frac{U}{E}}.$$

Mais bien sûr ces surfaces d'actions égales ne correspondent pas, dans le cadre de la Mécanique, à des temps de parcours égaux.

Cette analogie Optique/Mécanique développée par Hamilton a inspiré de Broglie et Schrödinger [15] au cours des années 1920. A ce propos, notons bien tout d'abord que cette analogie ne concerne que l'Optique géométrique bien qu'il y soit tout le temps question de surfaces d'ondes, car la notion de rayon n'appartient qu'à l'Optique géométrique. Or, celle-ci n'est, comme l'on sait, qu'une approximation de l'Optique ondulatoire (elle ne fonctionne plus lorsque les objets rencontrés par la lumière sont petits relativement à sa longueur d'onde); on peut par suite avoir l'idée d'une Mécanique ondulatoire dont la Mécanique classique serait l'approximation macroscopique.

Ainsi, en introduisant la longueur d'onde λ, inversement proportionnelle à l'indice de réfraction n, le principe de Fermat peut se formuler en terme de stationnarité de l'intégrale :

$$\int_P^Q \frac{dl}{\lambda}$$

De même, si, selon la Mécanique ondulatoire, on associe à une particule de moment p une longueur d'onde λ définie par $p=h/\lambda$ où h désigne la constante de Planck, le principe de moindre action peut se formuler en terme de stationnarité de l'intégrale :

$$\int_P^Q \frac{dl}{\lambda}$$

Et l'analogie formelle devient troublante (en termes d'ondes, on parle des surfaces d'onde, et en termes de particules, on parle de trajectoires orthogonales).

C'est sur ce trouble que je voudrais conclure cette évocation du Problème Brachystochrone.

A la fin du XVII^{e} siècle, une jolie analogie permet à Jean Bernoulli de résoudre un problème particulier, en donnant une preuve intuitive, non satisfaisante mathématiquement. Cette méthode s'avère cependant impuissante à traiter d'autres problèmes du même type, il faudra pour cela les idées d'Euler et Lagrange pour fonder le Calcul des Variations au XVIII^{e} siècle.

Mais d'un autre côté cette analogie réapparaît avec Hamilton au XIX^{e} siècle, établissant une correspondance formelle dans le traitement des problèmes de Mécanique et d'Optique géométrique. Au XX^{e} siècle enfin cette analogie démonstrative inspire à de Broglie et Schrödinger l'idée de la Mécanique ondulatoire.

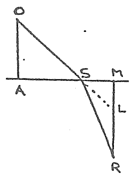
Notes

(a) Brachus = bref, brachysto = le plus bref, brachystochrone = temps le plus bref.

(b) Interprétation du théorème V de la Troisième Journée des Discours.

(c) Scolie suivant la démonstration du théorème XXII

(d) Snellius l'énonce sous une autre forme :
SL : SR = c^{ste}
pour tous les rayons.



(e) Descartes a peut-être connu les travaux de Snellius, mais c'est lui qui publie le premier ce résultat; il en donne une interprétation curieuse dans laquelle la vitesse de la lumière est d'autant plus grande que le milieu est plus dense.

(f) Critiquant les travaux de Descartes, Fermat applique son "principe" avec l'idée que la vitesse est inversement proportionnelle à la densité du milieu et obtient, à sa grande surprise, la formule de Descartes.

(g) La certitude expérimentale de ce que la vitesse de la lumière est plus grande dans l'air que dans l'eau ne sera établie qu'en 1850 avec Foucault.

Références

(1) Jacques BERNOULLI, lettre à Mr Varignon du 26 juin 1698.

(2) Jean BERNOULLI, *Acta Eruditorum* Leipzig, juin 1696. *Opera Omnia* , t. I, p. 161, Lausanne et Genève, 1742.

(3) Jean BERNOULLI, *Acta Eruditorum* Leipzig, mai 1697. *Opera Omnia* , t. I, pp. 187-193, Lausanne et Genève, 1742.

(4) Jean BERNOULLI, Sur le Problème des Isopérimètres, *Histoire des Ouvrages des Savants* , juin 1697. *Opera Omnia* , t. I, p. 194, Lausanne et Genève, 1742.

(5) René DESCARTES, *La Dioptrique* , essai en annexe au *Discours de la Méthode* , Leyde, 1637. *Oeuvres* publiées par Adam et Tannery, t. VI, rééd. Vrin, Paris, 1965.

(6) Leonhard EULER, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solutio problematis isoperimetrici,* Lausanne et Genève, 1744. *Oeuvres*, 1ère série, t. 24, Berne, 1952.

(7) Pierre de FERMAT, Lettre à M. de la Chambre du 1er janvier 1662.

(8) GALILEE, *Discours et démonstrations mathématiques concernant deux sciences nouvelles* , tr. M. Clavelin, Armand Colin, Paris, 1970.

(9) Sir William Rowan HAMILTON, On a General Method in Dynamics et Second Essay on a General Method in Dynamics, *Philosophical Transactions of the Royal Society* , 1834, 2ème partie, 247-308 et 1835, 1ère partie, 95-144. *Oeuvres* , t. II, Cambridge, 1940.

(10) Carl Gustav JACOBI, *Vorlesungen über Dynamik*, édition posthume, Leipzig, 1866 (sechste Vorlesung).

(11) Joseph-Louis de LAGRANGE, Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales définies, et Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique, *Miscellanea Taurinensia*, t. II, 1760-1761. *Oeuvres*, t. I, Paris, 333-468.

(12) Ernst MACH, *La Mécanique, exposé historique et critique de son développement*, 1883; trad. fr. Emile Bertrand, d'après la 4ème éd., Hermann, Paris, 1904; réimpr. Gabay, Paris, 1987.

(13) Pierre-Louis Moreau de MAUPERTUIS, Accord de différentes lois de la Nature, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, 1744, 417-426.

(14) Pierre-Louis Moreau de MAUPERTUIS, Les lois du mouvement et du repos déduites d'un principe métaphysique, *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, 1746, 267-294.

(15) Erwin SCHRÖDINGER, Quantisierung als Eigenwertproblem, *Annalen der Physik* , 4ème série, 1926, t. 79, 361-376.