SUR L'HISTOIRE DES DEMONSTRATIONS DE LA REGLE DES VARIATIONS DE SIGNE DE DESCARTES.

Jacques BOROWCZYK

Quand un homme comme Descartes a voulu n' être pas clair, on pourrait présumer qu'il en a assez dit pour ne laisser aucune prise contre lui, et l'on devrait du moins peser soigneusement toutes ses paroles avant que de le critiquer.
(Histoire de l'Académie Royale, 1740, p.94)

Ce grand auteur avait laissé beaucoup à deviner, beaucoup à éclaircir et selon le caractère des livres originaux, son livre était propre à en produire plusieurs autres encore originaux.
(Fontenelle, Eloge de la Hire)

Ce théorème général sur les relations du concret à l'abstrait en mathématique, est l'une des plus belles découvertes que nous devions au génie de Descartes, qui l'a obtenue comme un simple résultat de l'observation philosophique convenablement dirigée.
(A. Comte, Philosophie première)

résumé : En d'autres termes, l'affirmation de Descartes revient à dire que, dans toute équation polynomiale, le nombre de racines positives ne peut surpasser le nombre de changements de signes (variations) de la suite de ses coefficients ; et, quand il est moindre, la différence est un nombre pair.
Elle peut se déduire aisément du théorème de Segner: si P(x) est un polynôme et a un réel strictement positif, le nombre de variations du produit (x-a).P(x) surpasse d'une unité au moins et toujours d'un nombre impair, le nombre des variations de P(x). Elle se généralise pour fournir un majorant du nombre de racines comprises entre deux réels donnés, ou ce nombre lui-même (théorème de Sturm).

A la fin de l'année 1789, Fourier se rendit à Paris, et lut devant l'Académie des sciences un *mémoire sur l'algèbre* concernant la résolution numérique des équations polynomiales de tous les degrés. Fils d'un tailleur d'habits installé à Auxerre, Fourier âgé de 21 ans, venait de quitter l'abbaye de Saint-Benoît. Il y avait rédigé des démonstrations de la règle de Descartes qui fournit un majorant du nombre de racines positives d'une équation polynomiale par l'inspection des changements de signe de la suite des coefficients et tentait avec ce *Mémoire sur l'algèbre* de la généraliser à un intervalle donné. Dans ses cours d'analyse algébrique donnés à partir du 19 janvier 1796 à l'Ecole centrale des travaux publics, il en présente une démonstration qui semble correspondre à ce mémoire et déclare :

"Descartes a trouvé et donné comme règle générale, qu'une équation ne pouvait avoir plus de racines positives que de variations de signe ni plus de racines négatives que de permanences. Mais il ne l'a pas démontré ; d'ailleurs, l'énoncé de cette règle qui n'est pas originairement aussi clair ni aussi positif qu'il l'est ici, soit à cause de l'imperfection du langage d'alors, soit pour toute autre cause, donna naissance à un progrès scientifique que les détracteurs du grand homme ont essayé de tourner à son désavantage. Quoiqu'il en soit, et bien persuadé que Descartes a connu la vérité et toute la vérité d'une règle qu'il a le premier énoncé, nous allons essayer de démontrer ce qu'il n'a fait que mettre en avant comme bien d'autres vérités découvertes par lui suivant l'usage du temps où il écrivait".

Dès mai 1788, Fourier avait adressé à Montucla, l'auteur de la monumentale *Histoire des mathématiques* une copie de ses travaux mais sa démarche semble-t-il, n'eut pas de suite. Cousin, Monge et Legendre furent chargés par l'Académie d'examiner son travail; la suite des événements révolutionnaires n'a pas permis de prendre en compte l'œuvre de première jeunesse de Fourier.

Cette preuve dont quelques fragments seulement nous sont connus [Navier 1831, Charbonneau 1976, 43-51] participe à la la longue histoire qui s'étire sur deux siècles des tentatives faites pour expliciter et prouver la règle des variations de signe proposée en 1637 par Descartes, histoire qui sera marquée surtout par les contributions de l'abbé de Gua et de Segner et qui ne s'achève vraiment qu'au début du XIXème siècle, lorsque Gauss fait paraître une démonstration rigoureuse dans un cadre général.

Mais ce court mémoire ne met pas fin à toutes les investigations soulevées par ce sujet. La généralisation de Fourier est découverte simultanément par d'autres voies par Budan ce qui entraîne d'âpres controverses, alors que Sturm apporte, en 1829, une contribution essentielle en décrivant un procédé qui fournit, non pas un majorant, mais le nombre exact de racines réelles d'une équation polynomiale appartenant à un intervalle [a,b] donné.

1 Règle de Descartes ou de Harriot ?

C'est en juin 1637 qu'est publié à Leyde, sans nom d'auteur, le *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, plus *la Dioptrique, les Météores et la Géométrie* qui sont des essais de cette méthode. En employant la langue française et un vocabulaire aussi commun que possible, il semble que son auteur René Descartes (1596-1650) souhaitait assurer une diffusion de ses travaux en dehors des milieux traditionnels.

Sur les 418 pages des compléments du *Discours de la méthode* que sont ces trois Essais, 106 sont consacrées à la *Géométrie*. C' est un petit ouvrage de lecture difficile, qui manifeste des démarches nouvelles et aura une grande influence. Il fait notamment connaître les notations nouvelles utilisées par l'auteur. Dans certains passages, Descartes affirme des résultats qu'il laisse un peu trop facilement au lecteur «le plaisir de les inventer», lorsque des compléments sont nécessaires. Ce glissement d'une intuition fondée sur de multiples exemples à des généralisations trop hâtives, lui sera souvent reproché par ses contemporains.

C'est à l'article 8 du 3ème livre qu'est donnée, sans autre justification que l'examen de quelques exemples cette règle des variations de signe: une équation polynomiale ne peut pas avoir plus de racines réelles positives qu'il n'y a de changements de signe (ou variations) dans la suite de ses coefficients et plus de racines réelles négatives qu'elle n'a de permanences de signes.

Descartes construit un polynôme de degré 4 en multipliant les facteurs (x-2), (x-3),(x-4) et (x+5) pour obtenir l'équation

$$x^4 - 4\,x^3 - 19\,xx \;+\; 106\;x - \;120 \propto 0.$$

Ce symbole $\propto$ est en fait un æ couché, abréviation possible de *æquatur*. Descartes fait remarquer que ce polynôme n'est divisible par aucun autre binôme et que l'équation n'a que quatre racines 2, 3, 4 et -5. -5 est qualifiée de racine fausse, Descartes n'utilisant pas encore la notation -5 pour désigner la racine de (x+5).

Descartes écrit exactement :

> **Combien il peut y avoir de vrayes racines en chasque Equation.**
>
> On connaist aussy, de cecy, combien il peut y avoir de vrayes racines, & combien de fausses, en chasque Equation.
> A sçavoir : il y en peut avoir autant de vrayes que les signes + & - s'y trouvent de fois estre changés, & autant de fausses qu'il s'y trouve de fois deux signes +, ou deux signes -, qui s'entresuivent. Comme, en la dernière, à cause qu'après $+ x^4$ il y a $- 4\,x^3$ qui est un changement du signe + en - ; & après - 19 xx il y a + 106 x, & après + 106x il y a - 120 , qui sont encore deux autres changemens, on connaist qu'il y a trois vrayes racines; & une fausse, à cause que les deux signes - , de $4\,x^3$ & 19 xx, s'entresuivent.

Plus loin, article 17, il écrit :

> Au reste, tant les vrayes racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires : c'est à dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chasque Equation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celle qu'on imagine. Comme, encore qu'on en puisse imaginer trois en celle cy: $x^3 - 6\,xx + 13\,x - 10 \propto 0$, il n'y en a toutefois qu'une réelle, qui est 2, & pour les deux autres, quoy qu'on les augmente, ou diminue ou multiplie, en la façon que je viens d'expliquer, on ne scauroit les rendre autres qu'imaginaires.

Il est toujours difficile de savoir quels sont les travaux qui ont pu inspirer Descartes. Très avare de confidences sur ses lectures et sur les références qui l'inspirent, Descartes n'indique pas s'il a lu Cardan, qui avait remarqué que dans une équation de degré deux, trois ou quatre, si le terme constant est négatif alors une variation de signe équivaut à une et une seule racine positive, et si le terme constant est positif alors deux variations de signe correspondent à plusieurs racines positives ou à aucune. Descartes prétendit avoir pris connaissance, en quelques heures, de certains traités, comme celui de Harriot, sur lequel nous reviendrons.

Deux éditions latines de la Géométrie furent publiées par leur traducteur F. Schooten en 1649 et 1659. L'influence immédiate des travaux mathématiques de Descartes fut limitée: un Hollandais Jan Hudde (1628- 1704) d'Amsterdam, s'inscrit parmi ses successeurs; c'est lui qui écrit le premier polynôme dérivé formel dans une lettre adressée en 1658 à F. Schooten, que celui-ci publie dans sa seconde édition latine de la *Géométrie*, et est l'auteur de la règle dite des racines égales. En France, l'un des premiers successeurs de Descartes est Florimond de Beaune (1601-1652) qui, dans des écrits posthumes, *De limitis aequationum,* insérés pages 121 à 152, dans l'édition de Chooten de 1659 de la *Geometria* , fournit un majorant et un minorant - on parlait alors de limites inférieure et supérieure - des racines d'équations, quadratiques et cubiques.

La règle proposée par Descartes fut aussitot vivement attaquée. Certains contemporains penseront lui opposer des contre-exemples. Dans la lettre, que Descartes écrit à La Haye le 17 août 1699, en réponse aux attaques de ce résultat, il écrit à propos de Roberval [77ème lettre du troisième Tome]:

> "Sa seconde objection est une fausseté manifeste ; car, je n'ay pas dit, dans la page 373 ce qu'il veut que j'aye dit, à sçavoir, qu'il y a autant de vrayes racines que les signes + et - s'y trouvent changez, ny n'ay eu aucune intention de le dire. J'ai dit seulement qu'il y en peut avoir ; et j'ay montré expressément dans la page 380, quand c'est qu'il n'y en a pas tant, à savoir quand quelques une des vrayes racines sont imaginaires".

Retenons peut-être cette appréciation de J. Itard [1956, 279]:

> «On pourra toujours trouver, chez tel ou tel auteur contemporain ou plus ancien, telle ou telle des idées émises par Descartes dans sa Géométrie. Mais il n'a suivi personne ou bien il a marché d'un même pas que la cohorte des chercheurs de son temps. Il ne doit rien à Harriot quoi qu'en aient dit Beaugrand, Roberval, Cavendish et surtout Wallis».

2 Un siècle pour préciser le sens et prouver l'énoncé de Descartes:

John Wallis (Ashford 1616-Londres 1703), professeur de Géométrie à Oxford, publie à Oxford en 1685 puis en 1693, une *Algèbre historique et pratique* dont le retentissement sera important; il y révèle notamment la publication posthume d'un ouvrage de Thomas Harriot, publié à Londres en 1631 mais écrit vers 1610.

Thomas Harriot (Oxford 1560-Londres 1621) est l'un des premiers grands algébristes anglais. Son œuvre est publiée en 1631 par Walter Warner sous le titre *Artis analyticæ praxis ad æquationes algebraïcas nova, expedita, et generali methodo resolvendas.* Harriot apporte des modifications au procédé d'approximation des racines de Viète. Il introduit avec Recorde le signe = , considère les équations comme produit de facteurs linéaires, et en déduit des relations entre les coefficients et les racines.

D'après ce que Wallis écrit, il semble que la méthode de Viète était bien connue et pratiquée. Farouche restaurateur de la gloire d'Harriot, Wallis "a grossi le catalogue des inventions de cet analyste, en même temps qu'il travaillait à exténuer celles de Descartes" [Montucla, 1802, 110]. Wallis attribue à son compatriote Harriot un grand nombre de découvertes d'algèbre de Descartes ; en particulier, il croit lire la règle des signes dans l'ouvrage de Harriot et accuse Descartes de plagiat.

Lord Cavendish fit connaître ces renseignements à Roberval qui accusa à son tour successivement Descartes de plagiat, puis de s'être attribué une erreur en communicant à l'Académie des sciences des exemples d'équations numériques où certains énoncés de la règle des variations de signes sont en défaut. Roberval multiplie l'équation :

$x^4 + 6x^3 + 111\,xx + 1993\,x + 35378 = 0$ par $x-18$, ce qui donne:

$x^5 - 12x^4 + 3x^3 - 5xx + 4\,x - 645804 = 0$; la première équation a 4 permanences et la seconde 5 variations or elle ne peut avoir 5 racines positives.

Comme l'école anglaise, Leibniz attribue cette règle à Harriot [Opuscules et fragments inédits, p.100].

Cependant, dès le XVIIème siècle, certains auteurs ont tenté de prouver l'inégalité de Descartes: Shooten, le P. Rabuel, jésuite, et Jean Prestet, prêtre de l'Oratoire, professeur de mathématiques à l'université d'Angers et de Nantes, qui répondit aux attaques de Rolle.

Michel Rolle (1652-1719), en effet, transmet à l'Académie des sciences des observations et note que cette règle n'est pas générale (*Journal des Sçavants*, 1684, p. 250), en proposant les équations $z^3 - 2zz + 4z - 3 = 0$ et $z^4 + z^3 + 1zz - 154z - 18 = 0$.

Jean Prestet publie à Paris en 1689 une seconde édition de ses *Eléments de Mathématiques* où il répond aux objections de Rolle (pp. 362-366): "Les deux exemples que l'on vient de rapporter ne peuvent rien conclure contre M. Descartes". Prestet tente de prouver la règle de Descartes.

En 1690, paraît le *Traité d'Algèbre* de Rolle; c'est un ouvrage au vocabulaire étrange et aux notations peu adaptées, ce qui l' empêche d'être mieux connu. Rolle y montre comment transformer une équation de telle sorte que tous ses coefficients soient entiers et que le coefficient de la plus grande puissance soit l'unité ou bien que toutes ses racines soient changées de signe, ou bien encore que les signes (de certaines équations) soient alternativement plus et moins.

Rolle annonce un théorème indiquant que les racines d'un polynôme sont séparées par celles d'un polynôme auxiliaire appelé cascade (le polynôme dérivé: on multipliera tous les termes de l'égalité par son propre exposant, on divisera la somme de tous les produits par l'inconnue et l'on supposera que le quotient est égal à 0.)

La méthode des cascades est ainsi décrite: à partir du plus grand coefficient négatif d'une équation, Rolle détermine un entier positif h, qui est un majorant - dans son langage, une limite supérieure - des racines positives. Il prend alors 0 et h comme extrémités ou *hypothèses* de l'intervalle des racines positives. Tout couple de valeurs de la variable qui donne à f(x) des valeurs de signes opposés est appelé "hypothèses". Il trouve alors des "hypothèses" intermédiaires en prenant la moyenne arithmétique des extrémités et en effectuant des tests pour localiser les racines. En répétant ce procédé, il peut ainsi déterminer des approximations d'une racine. Ce sont ces considérations qui le conduisirent à la méthode des cascades. Dans une équation en X dont les coefficients sont alternativement positifs et négatifs, on pose $X = x + y$ et on ordonne le résultat par rapport aux puissances décroissantes de x. Les coefficients de x^n, x^{n-1} ,. ... , x sont appelés "cascades", où l'on peut reconnaître les dérivées successives du polynôme de départ en X.

C'est alors qu'intervient ce qui sera le théorème de Rolle: les racines de chaque cascade, en commençant par la dernière cascade, et en remontant jusqu'à l'équation de départ, sont toujours des hypothèses (des limites) de la cascade de degré immédiatement supérieur. S'il y a des racines imaginaires, ce théorème nécessite quelques restrictions, comme le reconnaît Rolle.

La version actuelle de ces considérations peut se dire ainsi: entre deux racines successives de $f'(x) = 0$, il ne peut pas y avoir plus d'une racine de $f(x) = 0$. Pour s'assurer des limites des racines d'une équation donnée, Rolle commence par la cascade de plus bas degré et remonte en résolvant chacune d'elles. Ce procédé est donc très laborieux. Dans son *algèbre*, il ne donne pas la démonstration de son théorème, mais dit qu'il a l'intention de publier d'ici peu des preuves.

Ce que les manuels modernes appellent le théorème de Rolle est tout à fait différent du théorème publié par Rolle dans son *Algèbre* [Verley].

Montucla parlant des tentatives de M. Rolle, "si profondes, qu'elles en sont quelquefois à peu près inintelligibles" ajoute: "cependant à travers cette obscurité, on entrevoit, dans sa méthode des cascades, de l'analogie avec celle que d'autres analystes, comme Newton, dans son *Arithmétique universelle* , ont donnée depuis, en s'étayant des principes du calcul différentiel et de la théorie des courbes". Dans l'*Arithmetica universalis* rédigée entre 1670 et 1680, mais publiée seulement à Cambridge en 1707, Newton énonce aussi sans preuve la règle des variations de signe. Dans cet ouvrage, Newton donne aussi une autre règle sur le nombre de racines réelles et imaginaires; elle restera sans preuve jusqu'à ce que Sylvester établisse, en 1864, un théorème général dont la règle de Newton est un cas particulier.

3 Les preuves de Gua et Segner :

Voici ce que peut écrire, à la fin du XVIIIème siècle, l'abbé Bossut dans le discours préliminaire de son *Cours de Mathématiques à l'usage des élèves du Génie* de 1795 :

> "L'algèbre est redevable à Descartes de plusieurs remarques importantes sur la nature des équations, et de l'ingénieuse méthode des indéterminées. On ne connaissait pas avant lui les racines négatives, et on les rejetoit comme inutiles; il fit voir qu'elles étaient tout aussi réelles que les racines positives, et que la seule distinction qu'on devait mettre entre les unes et les autres ne dépendait que de la manière d'envisager les quantités dont elles étaient les expressions. Il apprit à connaître, dans une équation qui ne contient que des racines réelles, le nombre des racines réelles et celui des négatives, par la combinaison des signes qui précèdent les termes de l'équation. La règle qu'il propose pour cela fut d'abord vivement attaquée; mais elle est aujourd'hui hors d'atteinte par la démonstration générale que l'abbé de Gua en a donné."

Vers le milieu du XVIIIème siècle, en effet, paraissent à peu près simultanément et indépendamment des mémoires contenant des démonstrations de la règle de Descartes.

La preuve de Gua de Malves:

Jean-Paul de Gua de Malves (1712-1785) donna deux preuves de la règle des signes de Descartes, en 1741. Elles suivaient sa première publication de 1740, *Usage de l'analyse de Descartes,* ouvrage de géométrie analytique inspiré à la fois des travaux de Descartes et de Newton *(Enumeratio linearum tertii ordinis).* Son but principal est de développer une théorie des courbes algébriques planes de tous les degrés, lignes géométriques de Descartes fondées essentiellement sur l'algèbre. Cependant il n'hésite pas à recourir au calcul infinitésimal, en vue de simplifier différents calculs.

Deux mémoires sont présentés à l'Académie royale des Sciences en 1741 ; ce sont :
Démonstration de la règle de Descartes, pour connaître le nombre de racines positives et négatives dans les équations qui n'ont point de racines imaginaires, et :
Mémoire qui contient une démonstration d'algèbre cherchée depuis longtemps par les plus fameux algébristes; sur la façon de rechercher le nombre de racines réelles ou imaginaires,
qui seront imprimés en 1744 dans les *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences.*

Ils présentent deux démonstrations de la règle de Descartes dans le cas où toutes les racines sont réelles.

La première s'appuie sur ces deux théorèmes, sur la réalité des racines:
si une équation $P(x)= a_dx^d+ a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_0 =0$ n'a que des racines réelles, alors toute équation de la forme $xP'(x) - \mu P(x) = 0$ aura toutes ses racines réelles .
Dans toute équation complète qui n'a que des racines réelles, le carré d'un coefficient quelconque est plus grand que le produit de deux coefficients voisins.

De Gua n'utilise pas ces termes, mais parle "de progression arithmétique quelconque ayant pour raison -1 écrite au-dessous de l'équation, et de la nouvelle équation obtenue en multipliant chaque coefficient par le terme correspondant". De Gua discute les différents cas issus des différentes valeurs numériques possibles des coefficients.

Dans la seconde démonstration, De Gua se sert de la considération des maxima et des minima des courbes de genre parabolique. Voici l'analyse qu'en fera Legendre en 1813:"supposons que l'équation proposée soit représentée par fx = 0 ; faisons fx égale à une nouvelle indéterminée y : l'équation y = fx appartiendra à une courbe parabolique, c'est-à-dire à une courbe composée d'une seule branche qui s'étend indéfiniment dans le sens des abscisses positives et dans celui des abscisses négatives.

Les intersections de cette courbe avec l'axe des abscisses répondront aux racines réelles de l'équation proposée; or, l'inspection seule de la courbe suffit pour montrer que le nombre de ces intersections surpassera au plus d'une unité le nombre des ordonnées maxima tant positives que négatives" [Œuvres de Cauchy].

De Gua montre que si toutes les racines de $P(x) = 0$ sont réelles, celles de $P'(x)$ le sont aussi, et en étudiant la convexité de P, aux abscisses des racines de $P(x)$, trouve que les valeurs de $P(x)$ et $P''(x)$ sont de signes différents pour les maxima, de même signe pour les minima. Il utilise la méthode des cascades de Rolle et des considérations géométriques, ce qui a fait qu'elle n'a eu qu'une influence réduite. Car, comme le remarque Montucla, "il y a une sorte de délicatesse à n'employer en Analyse (des équations) que des considérations purement analytiques" [Montucla, 1802]. Cependant, c'est de cette seconde preuve que Cauchy et Fourier s'inspireront.

De Gua en déduisit quelques conséquences intéressantes en relation avec les coefficients nuls et les racines imaginaires, du type suivant : l'absence de 2m termes successifs indique 2m racines imaginaires, alors que l'absence de 2m + 1 termes successifs indique 2m +2 ou 2m racines imaginaires selon que les deux termes entre lesquels les termes sont nuls, sont ou non de même signe. Il s'efforça d'établir, en outre, d'autres critères faisant intervenir des relations entre les coefficients de l'équation, comme l'avaient fait avant lui Newton, Stirling, MacLaurin et Campbell.

La preuve de Segner :

Fils d'un commerçant Miklos Segner, Janos -Andras Segner naît à Pressburg le 9 octobre 1704 (actuellement Bratislava en Tchécoslovaquie). Il fait ses études à Pressburg et Debrecen puis à l'Université de Jena (1725-1728). Il étudie la physique et les mathématiques, et, en 1728, à l'âge de 24 ans, il publie une lettre imprimée à G.H. Hamberger, contenant une preuve de la règle des signes de Descartes pour un polynôme dont toutes les racines sont réelles:

Dissertatio epistolicam ad G. E. Hambergerum, qua regulam Harrioti, de modo ex æquationum signis numerum radicum eas componentium cosgnoscendi demonstrare conatur.

Segner pratique aussi la médecine, un court temps, à Pressburg et de Debrecen. Il est nommé, en 1732, asistant à Jena et, en 1733, devient professeur de mathématiques. En 1735, il est nommé professeur de mathématiques et de physique à Göttingen et sera titulaire d'une chaire, de 1755 à sa mort, à Halle. Il deviendra correspondant étranger des académies des sciences de Berlin (1746) et St-Petersbourg.

Il développe des procédés de constructions graphiques des racines d'équations. Il rédige aussi des manuels d'enseignement diffusant les idées d'Euler:

Cursus mathematicus, 5 vols. Halle, 1758-1767.
Elementa analyseos infinitorum, 2 vols. Halle 1761-1763.

En 1756, il publie une *Démonstration de la règle de Descartes, pour connaître le nombre de racines affirmatives et négatives qui peuvent se trouver dans les équations* dans l'Histoire, de l'Académie Royale des Sciences de Berlin. Segner donne une démonstration purement algébrique de la règle de Descartes, qui restera classique et qui repose sur ce théorème : en multipliant par $x - a$ un polynôme quelconque, on augmente d'une unité le nombre de variations de signe, et en le multipliant par $x + a$ on augmente d'une unité le nombre de ses permanences, quelle que soit la valeur des coefficients de l'équation. Cette fois Montucla apprécie car "Il ne s'étaye sur rien de plus que des considérations purement analytiques" [Montucla 1802].

D'autres démonstrations sont proposées de 1745 à 1828 : en 1745 A. G. Kaestner publie une *Demonstratio theroematis Harrioti* dans un Commentaire de l'Arithmétique de Newton; en 1755, Leonhard Euler (1707-1783) donne une preuve de la règle des signes dans ses *Intitutiones calculi differentialis* ; enfin, en 1758, Æpinus présente à son tour une preuve géométrique de la règle de Descartes.

Edouard Waring (1734-1798) présente une preuve de la règle des signes dans la troisième édition de 1782 de ses *Meditationes Algebra*. Waring publie son premier ouvrage important, les *Miscellanea Analytica*, en 1762, deux ans après son élection comme professeur de mathématiques à Cambridge.

Mais dès 1757, il avait trouvé les conditions nécessaires et suffisantes qui doivent exister entre les coefficients d'une équation de degré cinq et quatre pour qu'il y ait deux ou quatre racines imaginaires. Il les publia en 1764 dans les *Philosophical Transactions*. Waring fut le premier à établir ces relations pour l'équation de degré cinq. Ces critères se déduisent d'une nouvelle transformation, à savoir celle qui permet d'obtenir une équation, dont les racines sont les carrés des différences des racines de l'équation donnée. Il donna d'autres modes de recherche d'équations et en déduisit de nouvelles formules pour exprimer la somme des puissances des racines. Pour effectuer la séparation des racines, Waring transforme une équation en une équation dont les racines sont les inverses des différences des racines de l'équation donnée. L'inverse de la plus grande des racines de l'équation transformée est plus petit que la plus petite différence entre deux des racines de l'équation donnée. Soit A cet inverse et D un majorant des racines de l'équation donnée, alors en soustrayant A, 2A, 3A, etc. de D, on obtient des valeurs qui séparent toutes les racines réelles.

4 Démonstrations de la règle des variations de signe de Descartes:

Les preuves de la règle de Descartes, que donnent de Gua et Segner, s'appuient sur l'observation suivante : si r est une racine positive d'un polynôme de degré d, alors il existe un polynôme $Q(x)$ de degré d-1 tel que $P(x) = (x- r).Q(x)$,
et la suite des d+1 coefficients du polynôme P a au moins une variation de signe de plus que la suite des d coefficients du polynôme Q.

Ces démonstrations peuvent être classées en preuves analytiques (au sens actuel) et preuves algébriques (analytiques pour Montucla), selon qu'elles utilisent ou non le Calcul différentiel. Certaines démonstrations en effet font appel au Calcul différentiel pour établir le fait suivant, qui pour des fonctions polynomiales peut être établi de façon purement algébrique:

Si r est une racine d'un polynôme $P(x)$, il existe une valeur $h>0$ pour laquelle on aura $P(r-h)$ et $P'(r-h)$ de signes contraires et $P(r+h).P'(r+h)$ de même signe.

Voici quelques démonstrations qui pourraient faciliter la lecture des textes originaux.

La première démonstration s'appuie sur le

Lemme de Gua :
Soit P un polynôme à coefficients réels admettant p racines strictement positives, alors , pour tout nombre réel μ non nul, l'équation polynomiale $xP'(x) - \mu P(x) = 0$ possède au moins (p-1)racines réelles strictement positives.

Preuve:
Soit P un polynôme de degré d à coefficients réels, de la forme:

$$P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_0$$

dont les coefficients a_i $(0 \le i \le d)$ sont réels et qui admet k racines strictement positives distinctes, notées $r_1 < r_2 < \dots < r_k$.
Désignons par $p_1, p_2, \dots, p_k$ leur ordre de multiplicité, de sorte que $p = p_1 + p_2 + \dots + p_k$.

Montrons tout d'abord que chacun des (k-1) intervalles $[r_i, r_{i+1}]$, (i= 1,..,k-1), contient une racine du polynôme de degré d : $Q(x) = xP'(x) - \mu P(x)$.
Il suffit pour cela d'établir que Q change de signe sur chacun des intervalles $[r_i, r_{i+1}]$.
Ecrivons les développements de Taylor des polynômes P et P' aux points r_i $(1 \le i \le k)$:

$$P(x) = c_d(x-r_i)^d + c_{d-1}(x-r_i)^{d-1} + \dots + c_{p_i}(x-r_i)^{p_i}$$

$$P'(x) = d\,c_d(x-r_i)^{d-1} + (d-1)\,c_{d-1}(x-r_i)^{d-2} + \dots + p_i c_{p_i}(x-r_i)^{p_i-1}$$

Par conséquent, pour tout $x \neq r_i$, et , par suite, pour tout $x \notin [r_i, r_{i+1}]$, la fraction rationnelle

$$\frac{P(x)}{P'(x)} \text{ vaut } \frac{(x-r_i)}{p_i}\,\frac{1+o(x-r_i)}{1+o(x-r_i)} .$$

Autrement dit, il existe une fration rationnelle R_i telle que, pour tout x qui n'annulle pas P' ,

$$\frac{P(x)}{P'(x)} = \frac{(x-r_i)}{p_i}\cdot R_i(x) \quad \text{avec} \quad R_i(r_i) = 1.$$

On connaît donc le signe de P'/P au voisinage de chaque r_i, puisque R_i reste bornée au voisinage de chaque point r_i et,

$$\lim_{\substack{x \to r_i \\ x<r_i}} \frac{P'(x)}{P(x)} = -\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x \to r_i \\ x>r_i}} \frac{P'(x)}{P(x)} = +\infty .$$

Pour tout réel μ on aura donc : $\lim\limits_{\substack{x \to r_i \\ x<r_i}} x\frac{P'(x)}{P(x)} - \mu = -\infty$, $\lim\limits_{\substack{x \to r_i \\ x>r_i}} x\frac{P'(x)}{P(x)} - \mu = +\infty$

Ces résultats étant établis pour chacune des racines r_i, observons que

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = x\frac{P'(x)}{P(x)} - \mu$$

changera de signe sur l'intervalle $[r_i, r_{i+1}]$, puisque quel que soit μ,

$$\lim_{\substack{x \to r_i \\ x<r_i}} \frac{Q(x)}{P(x)} = +\infty \quad , \quad \lim_{\substack{x \to r_i \\ x>r_i}} \frac{Q(x)}{P(x)} = -\infty .$$

Il est possible de déterminer un réel $h > 0$ tel que pour $x \in [r_i, r_i + h]$, $\frac{Q(x)}{P(x)} > 0$ et, pour $x \in [r_{i+1} - h, r_{i+1}]$, $\frac{Q(x)}{P(x)} < 0$.

Comme r_i et r_{i+1} sont des zéros consécutifs de P, $P(r_i + h)$ et $P(r_{i+1} - h)$ sont de même signe, ce qui implique que $Q(r_i + h)$ et $Q(r_{i+1} - h)$ soient de signes opposés, et, par suite, que le polynôme Q s'annule au moins une fois dans l'intervalle $[r_i, r_{i+1}]$.

Ainsi, l'existence de (k-1) zéros distincts du polynôme Q est établie.

Examinons maintenant les éventuelles racines multiples du polynôme P:

Si r_j est une racine d'ordre $p_j>1$, nous pouvons écrire :

$P(x) = (x-r_j)^{p_j} P_j(x)$ où $P_j(r_j) \neq 0$ et $P'(x) = (x-r_j)^{p_j-1} S_j(x)$ où $S_j(r_j) \neq 0$,

de sorte que le polynôme Q admet une factorisation de la forme :

$Q(x) = (x-r_j)^{p_j-1} Q_j(x)$ où $Q_j(x) = xQ_j(x) - \mu(x-r_j)P_j(x)$;

comme $Q_j(r_j) = r_j S_j(r_j) \neq 0$, r_j est un zéro d'ordre p_j-1 du polynôme Q.

Le polynôme Q admet au moins (k-1) racines distinctes des r_i et toutes les racines r_i qui ne sont pas racines simples de P ; comptées avec leur ordre de multiplicité cela en fait :

$p_1-1 + p_2-1 + \ldots + p_k-1 = p-k$, ce qui prouve que le polynôme Q admet au moins (p-1) racines strictement positives.

preuve de la règle des variations de signe de Descartes:

Il s'agit de prouver que tout polynôme de degré d à coefficients réels, dont la la suite des coefficients présente W(P) variations de signe, ne peut pas avoir plus de W(P) racines réelles strictement positives.

Notons Z(P) le nombre de racines réelles strictement positives de P.

On va établir l'inégalité $Z(P) \leq W(P)$ par récurrence sur le nombre W(P) de variations de signe de la suite des coefficients.

Si W(P)=0, tous les coefficients non nuls du polynôme P sont de même signe, donc P n'admet pas de racine réelle strictement positive; l'inégalité $Z(P) \leq W(P)$ est vérifiée.

Supposons que la propriété soit vraie pour tout polynôme dont la suite des coefficients présente w-1 variations de signe (avec w > 1), et considérons un polynôme P de degré d à coefficients réels, de la forme: $P(x)= a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + \ldots + a_0$, avec $a_d \neq 0$, dont la suite des coefficients présente w variations de signe.

Il existe deux entiers m et k vérifiant les relations suivantes :

$a_m \neq 0$ et, pour $m \leq i \leq d$, $a_i.a_d \geq 0$. $a_k \neq 0$, $a_k.a_d < 0$ et , pour $k \leq i \leq m$, $a_i=0$;

a_k est le coefficient de plus grand indice qui soit de signe opposé à celui de a_d.

Le nombre de variations de signe de la suite a_d, a_{d-1}, ...a_m est nul et celui de la suite a_k, a_{k-1}, ...a_0 est w-1 .

Si un réel μ vérifie $k < \mu < m$, on aura $m-\mu > 0$ et $k-\mu < 0$; donc la suite des coefficients du polynôme auxiliaire $Q(x) = xP'(x) - \mu\ P(x)$, c'est-à-dire la suite $(i-\mu)a_i$, présentera w-1 variations, puisque le choix de μ fait que $(m-\mu)a_m$ et $(k-\mu)a_k$ sont de même signe.

Or, d'après le lemme de Gua, si le polynôme P admet p racines strictement positives, alors, pour tout nombre réel μ non nul, le polynôme $Q(x) = x.P'(x) - \mu\ P(x)$ possède au moins p-1 racines réelles strictement positives. D'après l'hypothèse de récurrence, on a $p-1 \leq W-1$, d'où il résulte que $p \leq W$. L'inégalité $Z(P) \leq W(P)$ est donc vraie quelle que soit la valeur de W(P).

preuve du lemme de Segner :

Si le nombre de variations de signe de la suite des coefficients d'un polynôme P(x) est W(P) alors pour tout réel a>0, le nombre de variations de signe de la suite des coefficients du polynôme P(x)(x-a) est de la forme $W(P)+1 + 2p$, avec $p \geq 0$.

Démonstration : Par récurrence sur le nombre W(P).

Si W(P) = 0 alors tous les coefficents non nuls de $P(x)= a_dx^d+ a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_0$ sont de même signe que $a_d \neq 0$ et P(x)(x-a) aura au moins les deux coefficients extrêmes de signes contraires: a_d et $-aa_0$. Donc le nombre de variations sera un entier impair : $W(P(x)(x-a)) = 1 + 2p$, avec $p \geq 0$.

Supposons que la propriété soit vraie pour tout polynôme dont la suite des coefficients présente W-1 variations de signe avec W>1 et considérons un polynôme P de degré d à coefficients réels de la forme:

$P(x)= a_dx^d+ a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_0$, avec $a_d \neq 0$, et dont la suite des coefficients présente W variations de signe.

Il existe un entiers k tel que : $a_k \neq 0$, et pour $k+1 \leq i \leq d$, $a_i.a_d \geq 0$, a_k est le coefficient de plus grand indice qui soit de signe opposé à celui de a_d.

De sorte que la suite des coefficients du polynôme $P_1(x) = a_kx^k+ a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_0$, où $a_k \neq 0$, aura W-1 variations de signe. D'après l'hypothèse de récurrence, la suite des coefficients du polynôme $Q_1 = P_1(x)(x-a)$ est de la forme $W + 2p$, avec $p \geq 0$, et la suite des coefficients du polynôme $P_2(x)= a_dx^d+ a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_{k-1}x^{k-1}$ n'ayant pas de variations de signe, le polynôme $Q_2 = P_2(x)(x-a)$ aura un nombre impair de variations de signe.

Il en résulte que la suite des coefficients du polynôme $P(x)(x-a) = P_2(x)(x-a) + P_1(x)(x-a)$ est la suite des d+1 termes a_d, $a_{i-1} -a.a_i$, pour $1 \leq i \leq d-1$. Or $a_k -a.a_{k+1}$ et a_k sont de même signe, puisque a_{k+1} est nul ou bien de signe opposé à celui de a_k , et a>0 ; donc le nombre de variations de signe de cette suite est de la forme $W(P)+1 + 2m$, avec $m \geq 0$.

La proposition est donc établie pour tout entier W(P).

Le théorème de Descartes précise que la différence W(P)- Z(P) est un entier pair (éventuellement nul).

Si $P(x)= x^k[a_dx^{d-k}+ a_{d-1}x^{d-k-1} + ... + a_k]$, il existe un intervalle [0,h] sur lequel P(x) est du signe de a_k et il existe un intervalle $[M,+\infty[$ sur lequel P(x) est du signe de a_d . Donc Z(P) et W(P) ont même parité.

deuxième preuve de la règle des variations de signe de Descartes:

Il s'agit de prouver que tout polynôme de degré d à coefficients réels dont la suite des coefficients présente W(P) variations de signe ne peut pas avoir plus de W(P) racines réelles strictement positives.

Notons Z(P) le nombre de racines réelles strictement positives de P.

On va établir la propriété $W(P) - Z(P) = 2p$ avec $p \geq 0$, par récurrence sur le nombre Z(P) de racines réelles strictement positives.

Si Z(P)=0, la décomposition de P en facteurs irréductibles du premier et du second degré montre que le coefficient non nul d'indice le plus petit et le coefficient d'indice d = deg(P) sont de même signe.

Le nombre de variations de signe W(P) ne peut donc être qu'un entier pair éventuellement nul; la propriété $W(P) - Z(P) = 2p$, avec $p \geq 0$, est vérifiée.

Supposons que la propriété soit vraie pour tout polynôme ayant r racines stictement positives avec $r \geq 0$, et considérons un polynôme P de degré d+1 à coefficients réels ayant r+1 zéros.

Il existe au moins une racine $s > 0$; ce qui permet d'écrire: $P(x) = (x-s)P_1(x)$, où le polynôme de degré d : $P_1(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_0$ a r racines stictement positives.

D'après l'hypothèse de récurrence, la suite des coefficients du polynôme $P_1(x)$ vérifie : $W(P_1) - Z(P_1) = 2p$ avec $p \geq 0$. Or, d'après le lemme de Segner, $W(P) = W(P_1) + 1 + 2k$; il en résulte donc que la propriété $W(P) - Z(P) = 2q$ avec $q \geq 0$ est vérifiée.
La propriété étant établie pour tout polynôme ayant r+1 zéros, elle est donc vraie pour tout polynôme.

Troisième preuve de la règle des variations de signe de Descartes:

Il s'agit de prouver en utilisant le théorème de Rolle, que si un polynôme de degré d à coefficients réels dont la suite des coefficients présente W(P) variations de signe et a Z(P) racines réelles strictement positives, alors $W(P) - Z(P) = 2p$ avec $p \geq 0$.

On va établir cette propriété *W(P) - Z(P) = 2p , avec p ≥ 0* , par récurrence sur l'entier d, degré du polynôme P.

Si d = 0 ou 1, le résultat est clair.

Supposons-la vérifiée pour tout polynôme de degré d-1, avec $d > 0$.

Soit P(x) un polynôme de degré d dont on peut supposer que le terme constant n'est pas nul:

$P(x) = a_d x^d + a_{d-1}x^{d-1} + ... + a_0$ avec $a_d \neq 0$ et $a_0 \neq 0$.

Le polynôme dérivé définit un entier k tel que

$P'(x) = da_d x^d + (d-1)a_{d-1}x^{d-1} + ... + (k-1)a_k x^{k-1}$ avec $a_k \neq 0$, $k \geq 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence, si Z(P') est le nombre de racines réelles strictement positives de P'(x), le nombre W(P') de changements de signe de la suite des coefficients de P'(x) est de la forme Z(P') + 2p, avec $p \geq 0$. Si P' n'a pas de racine alors W(P') est pair. Comme $P(O) = a_0$ et comme P est du signe de a_d pour x assez grand, P n'aura pas de racine positive si $a_0 a_d > 0$, et n'aura qu'une racine positive si $a_0 a_d < 0$; dans les deux cas la propriété $W(P) - Z(P) = 2p$ avec $p \geq 0$ est vérifiée.

Si $Z(P') \neq 0$, notons r_1 la plus petite racine strictement positive de P' ; alors, sur l'intervalle $[0, r_1]$, P' a même signe que le coefficient a_k, et comme $P(0) = a_0 \neq 0$, il ne peut y avoir de zéro de P dans cet intervalle que si a_k et a_0 sont de signes contraires, ce qui est le cas lorsque $W(p) = W(P') + 1$.
Or d'après le théorème de Rolle, entre deux racines successives de $P'(x) = 0$, il ne peut pas y avoir plus d'une racine de $P(x) = 0$; donc la propriété $W(P) - Z(P) = 2p$ avec $p \geq 0$ est vérifiée.

5 Généralisations de l'inégalité de Descartes:

En 1798 Lagrange publie son *Traité de la Résolution des équations numériques*, il reprend les principaux apports de son mémoire de Berlin de 1767 (équations aux carrés des différences) et 1770.

Il inaugure un type de présentation historique et épistémologique qui sera repris dans d'autres traités (Budan 1807, Fourier 1831). Lagrange dresse un bilan des recherches en théorie des équations: "C'est du problème des limites que dépend maintenant tout l'art de résoudre les équations", mais il veut se démarquer de la "coutume" c'est-à-dire "l'utilisation de la théorie des lignes courbes" et établir des démonstrations "directement par la théorie des équations".

Lagrange propose de se ramener à l'étude de l'équation des carrés des différences, tout en observant que : " pour peu que le degré soit élevé, celui de l'équation des différences monte si haut, qu'on est effrayé de la longueur du calcul nécessaire pour trouver la valeur de tous les termes de cette équation".

En 1808, Lagrange réédite le traité. Dans la note VIII, consacrée à l'historique de la règle des variations de signe de Descartes, où il donne une démonstration qui se ramène à celle de Gua (tout en reconnaissant que la plus simple est celle de Segner), il ajoute au paragraphe 5 une mention d'un mémoire de 1803 et d'un ouvrage publié l'année précédente de Budan: "l'auteur y donne un moyen simple et élégant de former les coefficients des transformées en x-1, x-2, etc. ; et appliquant la règle de Descartes à ces transformées, ainsi qu'à d'autres déduites de celles-là, il trouve des limites et leurs valeurs aussi approchées qu'on veut".

Les travaux de Budan portent aussi sur un énoncé relatif à la règle des variations et des permanences qui généralise la règle de Descartes [Budan 1807, 26]:

1° Une équation en x, *dont toutes les racines sont réelles*, a autant de racines comprises entre zéro et p qu'il y a de permanences de signes dans la transformée en (x-p), de plus que dans l'équation en x.

2° Une équation de cette espèce ne peut avoir, soit une, soit deux, soit n racines comprises entre zéro et p, si la transformée en (x-p) n'a pas respectivement, une, ou deux, ou n permanences de signe, de plus que l'équation en x.

Budan ajoute

Nous avons même de fortes raisons de croire que la seconde proposition est applicable à une équation quelconque.

Le 26 août 1811, Budan soumet à l'Institut une démonstration complète de sa généralisation de la règle des variations de signe de Descartes, qu'il s'était contenté d'énoncer en 1807.

Le résultat de Budan peut s'énoncer ainsi sous la forme suivante: la transformée en x-p aura autant de variations de moins que la proposée contient de racines entre 0 et p . Ce qui de nos jours peut se transcrire ainsi:

si V(Q) désigne le nombre des variations de signe de la suite des coefficients. du polynôme Q , alors pour tout polynôme P(x) à coefficients réels de degré non nul m, le nombre de racines réelles de P comptées avec leur multiplicité appartenant à [0, p], est inférieur a la différence des nombres V[P(x)]- V [P(x+p)] , et la différence est un entier pair.

Dans ce mémoire, Budan calcule les coefficients du polynôme transformé Q(x)=P(x+p) en effectuant la transformation x = y + p en trois étapes $x = px_1$, $x_1 = x_2 + 1$, $x_2 = y/p$.

Cette démonstration s'articule ainsi :

proposition 1 : le nombre des variations d'une suite $a_0, a_1, \dots a_n$ est supérieur au nombre des variations de la suite sommatoire $a_0, a_1^{(1)}, \dots a_n^{(1)}$, définie par : $a_i^{(1)} = a_{i-1}^{(1)} + a_i$.

proposition 2 : le nombre des variations de la suite des coefficients non nuls d'un polynôme P est supérieur au nombre de variations de la suite des coefficients du polynôme Q(x) =P(x+1) ;

proposition 3 : pour tout réel p > 0, le nombre de variations de la suite des coefficients d'un polynôme P est supérieur au nombre de variations de la suite des coefficients du polynôme Q(x)=P(x+p) ;

proposition 4 : s'il existe une racine simple et une seule comprise entre 0 et un réel p > 0, le nombre des variations de la suite des coefficients d'un polynôme P est strictement supérieur au nombre des variations de la suite des coefficients du polynôme Q(x)=P(x+p) ;

proposition 5 : s'il existe q racines comptées avec leur ordre de multiplicité, comprises entre 0 et un réel p > 0, alors le nombre V(P) de variations de la suite des coefficients d'un polynôme P et le nombre V(Q) de variations de la suite des coefficients de sa transformée Q(x)=P(x+p) sont tels que:

$V(P) - V(P') \geq q$.

Pour établir ce dernier point, Budan utilise deux résultats de Segner : pour a>0, le nombre de variations de signes de la suite des coefficients d'un polynôme P(x)(x-a) est supérieur ou égal au nombre de variations de signes de la suite des coefficients de P(x) plus un , alors que le nombre de variations de signes de la suite des coefficients de P(x)(x+a) est inférieur ou égal à celui de P(x).

Cette preuve est donc purement algébrique.

Le rapport rédigé par Lagrange et Legendre, lu à la séance du 21 octobre 1811 indique:

> " Le théorème est vrai, mais sa démonstration manque de différents développements sans lesquels elle ne peut être regardée comme entièrement rigoureuse. Nous pensons au reste que ce théorème est *nouveau* et qu'il peut être utile dans la recherche des limites des racines [...] pour diriger les tâtonnements, en faisant exclure, dans les substitutions successives, les nombres entre lesquels on sera assuré qu'il ne peut tomber aucune racine réelle."

Cauchy connaît ces résultats lorsqu'il publie en 1813 une preuve géométrique de la règle de Descartes pour un polynôme sans racine multiple ainsi que tous les polynômes qui s'en déduisent de la façon suivante: Cauchy considère d'abord une équation auxiliaire de degré d-1 dont les racines sont les valeurs du produit -P(x).P" (x) correspondant aux d-1 racines de l'équation P'(x) = 0 .

Si cette équation auxiliaire est sans racine multiple, le nombre des racines réelles positives de l'équation P(x) = 0 moins un est alors égal à la différence du nombre de racines positives de l'équation auxiliaire et du nombre de ses racines négatives, puisque P et P" sont de même signe aux abscisses des minima locaux et sont de signes contraires aux abscisses des maxima locaux, situés entre deux racines positives.

Cauchy forme alors une seconde équation auxiliaire de degré d-2 pour déterminer cette différence, en observant que si cette équation n'a pas de racine multiple, la différence entre le nombre de racines positives et du nombre de ses racines négatives de la seconde équation auxiliaire sera la différence cherchée diminué ou augmenté de 1, selon le signe du produit des coefficients des deux derniers termes de la seconde équation auxiliaire. Cauchy construit une suite de d équations auxiliaires qui, en théorie, fournissent le nombre de racines positives de l'équation proposée au départ.

Dès le 24 avril 1807, Poisson a écrit à Fourier [Navier cite cet extrait dans la préface de 1831]:

"Un docteur en médecine vient de publier un Ouvrage sur la résolution numérique des équations [...]. Le docteur a entrevu votre théorème sur les changements de signes; il a de fortes raisons de penser qu'il a lieu dans le cas des racines imaginaires; j'en ai de bien plus fortes que les siennes, puisque vous m'avez dit autrefois que vous aviez une démonstration générale de cette proposition. Vous devriez bien publier au moins les différents théorèmes sur lesquels est fondée votre méthode pour résoudre les équations".

Cependant, comme le notera le 28 décembre 1835, Charles Dupin, président de l'Académie, dans le *Discours sur quelques progrès des sciences mathématiques en France, depuis 1830*,

"M. Fourier était du nombre des esprits profondément méditatifs, qui, plus jaloux de multiplier leurs découvertes que d'en recueillir la gloire, gardent longtemps le silence sur les travaux dont un seul suffirait pour donner la renommée à son auteur. Telle est la Résolution générale des équations numériques [sic] dont M. Fourier avait jeté les bases dès l'âge de 18 ans, qu'il a développée dans quelques leçons orales, avant de partir pour l'expédition d'Egypte, et qu'on a trouvée manuscrite dans ses papiers après sa mort".

La démonstration et les résultats dont Fourier disposait dès la fin du XVIIIème siècle ne sont pas imprimés avant 1820. Nous avons vu que le mémoire sur l'algèbre lu le 9 décembre 1789 devant l'Académie des Sciences devait comporter une nouvelle démonstration de la règle de Descartes et des exemples de l'utilisation de cette règle pour déterminer les racines. Navier décrit ainsi le manuscrit de Fourier:

" L'article XIV contient des remarques sur le théorème de Descartes. L'auteur avance que l'énoncé de ce théorème n'est point borné au seul cas où l'équation a toutes ses racines réelles, et il se propose d'établir deux vérités nouvelles. La première consiste en ce que le théorème dont il s'agit doit être entendu de la manière suivante :
1° Quelles que soient les racines d'une équation dont aucun coefficient n'est zéro, elle ne peut avoir plus de racines positives que de changements de signe, et plus de racines négatives que de permanences. S'il y a moins de racines positives que de variations, et moins de de racines négatives que de permanences, celles qui manquent sont imaginaires, en sorte que si l'équation a toutes ses racines réelles, il y a autant de racines positives que de variations de signe, et autant de négatives que de permanences.
2° Il ne peut manquer qu'un nombre pair de racines positives et un nombre pair de racines négatives, en sorte qu'une équation qui aurait un nombre impair de permanences ou un nombre impair de variations, aurait dans le premier cas au moins une racine négative et dans le second au moins une racines réelle positive."

A l'article XVII il développe la preuve algébrique de Segner.

Fourier, qui dispose ainsi de plusieurs démonstrations de la règle, attend toutefois 1820 pour publier une note *sur l'usage du théorème de Descartes dans la recherche des limites d'une racine* dans le Bulletin des Sciences de la Société philomatique; Fourier propose une "méthode fondée sur d'autres principes" en observant que l'équation aux différences de Lagrange ne peut être d'"aucun usage".

Fourier ne s'embarasse pas des exigences algébriques de Lagrange: pour lui la considération des lignes courbes est légitime et souvent indispensable: "la résolution complète des équations numériques doit être regardée comme une des plus importantes applications du calcul différentiel".

Fourier renouvelle la vision de la règle de Descartes et substitue à la notion générale de variations et de permanences de signe l'inspection des signes de la suite des fonctions dérivées.

Voici l'énoncé du théorème de Fourier:

Une équation du degré m, X=0, étant proposée, si nous formons la suite

$$X^{(m)}, X^{(m-1)}, X^{(m-2)} \ldots, X''', X'', X'.$$

Cette suite comprend toutes les fonctions différentielles dérivées de X, et si l'on substitue au lieu de x un nombre continuellement croissant a, qui reçoit toutes ses valeurs successives depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on observe la relation suivante entre les racines réelles ou imaginaires de la proposée et les changements de signe que présente la suite des résultats numériques des substitutions:
Le nombre de changements de signe, qui était m, diminue de plus en plus, jusqu'à ce qu'il devienne nul; il ne peut jamais augmenter; autant il arrive de fois que la suite perd un seul changement de signe, autant l'équation a de racines réelles; et autant il arrive de fois que la suite perd deux changements de signe en même temps, autant l'équation a de racines imaginaires.

Fourier qui utilise la suite des dérivées successives de la fonction polynomiale, considère explicitement sa méthode comme "une application [...] de l'analyse différentielle" [1831,18]. Sa preuve se déduit du fait que si r est une racine d'un polynôme P(x), il existe une valeur $h > 0$ pour laquelle on aura $P(r-h).P'(r-h) < 0$ et $P(r+h).P'(r+h) > 0$.

En mai 1829, Sturm en annonce un théorème qui «fournit un moyen sûr de connaître combien une équation a de racines réelles comprises entre deux nombres quelconques»; sa preuve donnant un procédé qui fournit le nombre de racines d'un polynôme contenues dans un intervalle donné [a , b] paraît en 1835.

Sturm introduit un procédé plus sophistiqué que celui de Fourier qui consiste à remplacer la suite des dérivées successives par une suite de fonctions auxiliaires (suites de Sturm), construites par division euclidienne qui présente l'avantage de faire correspondre à la perte de toute variation de signe de la suite, un et un seul zéro de l'équation algébrique. Dans l'extrait qu'il publie dès juin 1829 dans le *Bulletin des sciences mathématiques, physiques et chimiques* du baron de Férussac dont il est alors rédacteur principal pour la section mathématique, Sturm vante la méthode de Fourier: "méthode depuis longtemps découverte par ce Savant fondée sur une proposition dont la règle des signes de Descartes n'est qu'un cas particulier" .

C'est par ce texte que Budan apprend l'existence de la note de Fourier de 1820 où la priorité de sa découverte a, pour la première fois, été contestée par écrit.

Les années précédentes, en 1827, Louis Olivier établit des règles donnant le nombre de racines réelles généralisant la règle de Descartes et, en 1828 paraît dans le Journal de Crelle (tome III, p. 1) la preuve algébrique de la règle de Descartes de C. F.Gauss, qui reprend celle Segner, en précisant que la diffférence entre le nombre de variations et celui des racines positives est un entier pair.
Ce n'est qu'en 1832 que le théorème est énoncé de façon générale en brisant la symétrie variations/permanences qui n'est valable que pour les équations complètes (ayant n+1 coefficients non nuls si n est le degré de l'équation) : dans ce cas la somme du nombre de permanences et du nombre de variations est n. Dans son traité d'Algèbre, Lefébure de Fourcy observe que ce théorème s'énonce quelquefois ainsi:

Une équation ne saurait avoir plus de racines positives que de variations, ni plus de racines négatives que de permanences..

Mais la seconde partie de cet énoncé est inexacte, à moins qu'on ajoute que l'équation est complète, restriction inutile pour la première partie. L'équation $x^3 - 4x + 7 = 0$ suffit pour justifier cette remarque [1833, 442].

Signalons, pour terminer, divers travaux prolongeant ces considérations : en 1835, C. G. J. Jacobi donne un majorant du nombre de racines réelles d'un polynôme P(x) contenues dans un intervalle donné [a, b] en appliquant la règle de Descartes au polynôme $(x+1)^n P[(a+bx)/(x+1)]$. En 1840 paraît une note de synthèse de l'abbé Moigno reprise en 1843 par O. Terquem dans les *Nouvelles Annales de Mathematiques* ; C. Hermite établit un algorithme qui fournit le nombre de racines rélles supérieures à un nombre réel donné.

A. Hurwitz, enfin, donne en 1912 cette généralisation du théorème de Budan-Fourier:

si un polynôme P ainsi que l'une de ses dérivées $P^{(r)}(x)$ ne s'annulent pas aux extrémités d'un intervalle [a,b], et si $W_r(x)$ désigne le nombre de variations de la suite $P(x),P'(x),...,P^{(r)}(x)$; alors en passant de a à b, W_r diminue au moins de $Z(P) - Z(P^r)$ et la différence est un entier pair.

Conclusions

Les démonstrations imaginées pour établir la règle des signes de Descartes montrent le plus souvent la nécessité de dépasser le stricte domaine de l'algèbre pure et semblent renforcer ce point de vue exprimé par H. Freudenthal lors du Colloque sur les origines de l'Algèbre moderne en 1968 : "l'invention de l'analyse moderne signifiait un renforcement des liens entre l'algèbre et la topologie unies entre elles dans les notions de nombres réels et complexes" [Revue de synthèse III, Colloque sur les origines de l'Algèbre moderne, 1968, 49-52] .

Mais en y regardant de plus près, ce recours aux techniques infinitésimales, revendiqué par De Gua [1840], puis Fourier [1831], joue surtout un rôle heuristique. Les conséquences que développe Sturm pour établir un algorithme de calcul du nombre des racine comprises entre deux valeurs données, inspirées certes du projet de Fourier, s'en éloignent et renouent de fait avec l'idéal algébrique de Lagrange. Les travaux plus récents d'Artin et Schreier sur les corps ordonnables, ceux de logique de Tarski sur l'algèbre réelle peuvent nous aider à reconsidérer ce point de vue [Bochnak, Coste Roy].

A propos des éclairs et des caprices de l'invention, Alain écrivait: "Mais il faut savoir que ce travail de mise en place et, si je puis dire, d'exploitation et de revision, est un travail de critique qui vient après l'invention proprement dite. *Le beau moment dans toute science, est celui où l'on devine par tous moyens, et sans être en mesure de prouver*" [Alain, Propos, II, 262]. L'énigmatique énoncé de Descartes de 1637, n'offre-t-il pas un exemple de ces beaux moments ?

Sources

ÆPINIUS, F.U. 1765. *Démonstration du théorème de Harriot avec une méthode de rechercher si une équation algébrique a toutes les racines possibles ou non.* Hist. Ac. Sc. Berlin, (1758), pp. 354-366.

AKRITAS A. G. & DANIELOPOULOS S.D. 1978. On the forgotten theorem of Mr Vincent. *Historia Mathematica* 5, 427-453.

ANDRE, A.-D. 1884. Nombre exact de variations gagnées dans la multiplication par (x-a), *C.R.A.S.* 98, 292-293.

ANDRE, A.-D. 1884. Théorème permettant de constater que certaines équations algébriques n'ont aucune racine positive. *C.R.A.S.* 98, 561-562. 99, 182-184.

BENIS-SINACEUR, H. 1987. *Algèbre et Logique. Remarques sur la construction de l'algèbre réelle.* Thèse soutenue le 14 octobre 1987 à l'Université de Paris I.

BENIS-SINACEUR, H. 1988. Deux moments dans l'histoire du théorème d' Algèbre de Ch. F. Sturm. *Revue d'Histoire des Sciences,* 41, *99-132.*

BOCHNAK, J., COSTE, M. & ROY, M.-F. 1987. *Géométrie algébrique réelle.* Berlin, Springer.

BOREL, E. 1896. Sur le théorème de Descartes. *Bulletin des sciences mathématiques* 20, 327-328.

BOSSUT, C. 1772. Cours de mathématiques à l'usage des élèves du Génie. Paris: Firmin Didot. réédité en 1795, an IIIème de la république.

BOURDON, L.P.M. 1823. *Elemens d'Algèbre,* Paris, Bachelier 3ème éd.

CAJORI, F. 1910. A history of the arithmetical methods of approximation to the roots of numerical equations of one unknown quantity. *Colorado college Studies, Sciences* , serie xii 7, 171-215, 217-287.

CANTOR, M. 1898. *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* t. 3 Leipzig: Teubner.

CAUCHY, A. 1813. Exposé sommaire d'une méthode pour déterminer a priori le nombre des racines réelles positives et le nombre des racines réelles négatives d'une équation d'un degré quelconque. Paris, Courcier, 12 p.; *Mémoires de divers Savants* 3; Œuvres 2 XV, 11-16.

CHARBONNEAU, L. 1976. *L'Œuvre mathématique de Joseph Fourier.* 2 vol. Thèse de troisième cycle Ecole des hautes études en sciences sociales, Paris.

COSTABEL; P. 1982. *Démarches originales de Descartes savant,* Paris: Vrin.

COSTABEL; P. 1985. Descartes et la mathématique de l'infini, *Historia Scientiarum* 29, 37-49.

DELAMBRE, J.B.J. 1810. *Rapport de la première classe de l'Institut sur les progrès des sciences mathématiques depuis 1789* et sur leur état actuel. Paris, imprimerie impériale, in-8°.

DESCARTES, R. 1637. *Géométrie.* Leyde ; Œuvres de Descartes publiées par Charles Adam et Paul Tannery Discours de la méthode et essais; nouvelle présentation en co-édition avec le CNRS, Paris, Vrin , 1965. pp. 445-448.

ENESTRÖM , 1906-07. *Bibliotheca Mathematica,* 3.

EULER, L. 1755. *Intitutiones calculi differentialis,* Saint-Petersbourg. Œuvres , I, X.

FOURIER , J. 1820. Sur l'usage du théorème de Descartes dans la recherche des limites des racines. *Bulletin des sciences,* par la Société philomatique, 156-165 et 181-187 ; Œuvres , II, 289-314.

FOURIER , J. 1831. *Analyse des équations déterminées. Première partie.* Paris. (édité par C.L.M.H. Navier).

GAUSS C.F. 1828. Lehrsatz über den Zusammenhang der Anzahl der positiven und negativen Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit der Anzahl desr Abwechselungen und Folgen in der Zeichen der Coefficienten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 3, 1-4 ; 1878. Werke. Göttingen, 3, 67.

GOLDSTINNE, H. H. 1977. *A History of Numerical Analysis from the 16th through the 19th Century*. Springer-Verlag.
GRATTAN-GUINNESS,I., & RAVETZ, J.R. 1972. *Joseph Fourier 1768-1830*, Cambridge, Mass. London, MIT Press.
GUA DE MALVES, abbé J.-P. 1741. Démonstration de la règle de Descartes, pour connaître le nombre de racines positives et négatives dans les équations qui n'ont point de racines imaginaires.*Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Paris*, 72-96.
HARRIOT, 1631. *Artis analyticæ praxis ad æquationes algebraicas resolvendas.*
HENRICI, P. 1974. *Applied and computational complex analysis vol 1*. New York: John Wiley & Sons.
HERMITE, C. 1854. Sur le nombre des racines d'une équation algébrique comprises entre des limites.Extrait d'une lettre à M. Borchard. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 52, ; Œuvres, t. I, 397-414.
HURVITZ, A. 1912. Über den Satz von Budan-Fourier. *Mathematische Annalen* 71, 584-591.
ITARD, J. 1956. La géométrie de Descartes. *Conférences du Palais de la Découverte*, série D, n° 39. réédité dans *Essais d'histoire des mathématiques*, pp. 269-279.
ITARD, J. 1968. Equations algébriques, In *Encyclopædia Universalis*, Paris.
JACOBI, C. G. J. 1835.Observatiunculæ ad theoriam æquationum algebraicum pertinentes, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 13; Œuvres, III.
JONQUIERES, E. 1884. Abaissement des limites fournies par la règle des signes de Descartes. *C.R.A.S.* 99, 1114.
KÄSTNER, A.G. 1745. *Demonstratio theorematis Harriotti*. Leipzig.
LAGRANGE, J.-L. 1767. Sur la Résolution des équations numériques. *Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles lettres de Berlin 23* 165-310. Vol II des Œuvres complètes publié en 1868, 377-535.
LAGRANGE, J.-L. 1770. *Addition au mémoire Sur la Résolution des équations numériques imprimé dans le Volume de 1767 . Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles lettres de Berlin 24* 111-180. Vol II des Œuvres complètes publié en 1868, 581-652.
LAGRANGE, J.-L. 1798. *Traité de la Résolution des équations numériques de tous les degrés*. Paris, réédition en 1808 *avec de notes sur plusieurs points de la théorie des équations algébriques*; la troisième édition qui paraît en 1826 est précédée d'une analyse de l'ouvrage par Poinsot ; Œuvres complètes, Vol VIII, 1879.
LEFEBURE DE FOURCY, L.1833*Leçons d'Algèbre*. Paris, Bachelier (4^e^éd. en 1841, 9^e^ éd. Gauthier-Villars en 1880).
LEIBNIZ, G. W. 1903. *Opuscules et fragments inédits*, éd. L. Couturat, Paris: Alcan.
LUCAS, E. 1880. Sur l'extension du théorème de Descartes, *Bulletin de la Société mathématique de France* 8, 187-191.
MIGNOTTE, M. 1989 *Mathématiques pour le calcul formel*. Paris: P.U.F.
MOIGNO , abbé F. N. W. 1840. Note sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique, comprises entre des limites données. Théorèmes de Rolle, de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy. *Journal de mathématiques pures et appliquées* 5, 75-94.
MONTUCLA, J.-E. 1758.*Histoire des mathématiques*. Paris: 2 vol. ; 2ème édition J.-J. Lalande, Paris 1799-1802, 4 vol.
NEWTON, I. 1707. *Arithmetica universalis*. Cambridge. traduit en français par N. Beaudeux, Paris, 1802.
PRESTET, J. 1689. *Nouveau élémens de mathématiques. Paris.*
ROLLE, M. 1690. *Traité d'algèbre ; ou principes généraux pour résoudre les questions de mathématiques*. Paris.
SEGNER, J.A. 1728. *Dissertatio epistolica ad G. E. Hambergerum, qua regulam Harriotit, de modo ex æquationum signis numerum radicum eas componentium cosgnoscendi demonstrare conatur*. Jena.
SEGNER, J.A. 1758. Démonstration de la règle de Descartes pour connaître le nombre de racines affirmatives et négatives qui peuvent se trouver dans les équations. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Berlin. Année 1756 12*, 292-299.
SERRET, J.-A. 1866. *Cours d'Algèbre supérieure*. 3ème éd., Paris, Gauthier-Villars.
STRUIK, D. J.. 1969. *A Source book in Mathematics,1200-1800*. Harvard University Press, Cambridge, Massachsetts.
STURM, C. 1835, Mémoire sur la résolution des équations numériques, *Mémoires présentés par divers savants à Académie Royale de France* , VI, 271-318.
SYLVESTER J.J. 1865 On an elementary proof and generalization of sir Isaac Newton's hiterto undemonstrated rule for the discovery of imaginary roots. Collected mathematical papers, vol 2. New York:Chelsea publishing company.
RUNGE, C. 1899. Separation und Approximation der Wurzeln. *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften* , Leipzig, vol 1.
TERQUEM, O. 1843. Théorème de Descartes. *Nouvelles annales de mathématiques* 2, 248-259.
USPENSKY, U. V. 1948. *Theory of equations*, New York, McGraw-Hill.
VANDERMONDE, A. T. 1774. Mémoire sur la résolution des équations, *Histoire de l'Académie Royale des Sciences, année 1771, Paris, 356-416.*
VERLEY, J.-L. 1988. Techniques de séparation de racines au XVIIIème siècle. In *L'A-peu-près*, pp. 67-77.
VINCENT, A.J.H. 1833-1838. Mémoire sur la résolution des Equations numériques. *Mémoires de la Société royale des sciences de Lille*, Lille, L. Danet 1-34; 5-24. Publié en 1836 et 1838 dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées* 1, 341-372; 3, 235-243.
VUILLEMIN, J. 1962, *La Philosophie de l'Algèbre*. tome1, Paris, P.U.F.
WALLIS, J. 1695. *Algebra*. Opera mathematica, Oxford, II, 1-492.
WARING, E. 1770. *Meditaniones algebricæ*. Cambridge.

Repères biographiques

Les sources principales pour la rédaction de ces notices sont:
- le Dictionary of Scientific Biography (D.S.B.)
- le Biographisch-Literarisches Handwörterbuch , par J.C. Poggendorff (Pog.)

D'autres articles cités dans la bibliographie ont fourni des renseignements complémentaires.

ÆPINUS Franz Ulrich Theodosius (1724-1802)

Né à Rostock, Æpinus étudie la médecine et les mathématiques à Iena, puis enseigne les mathématiques à Rostock jusqu'en 1755. Il devient alors successivement directeur de l' observatoire de Berlin (1755), professeur de physique à l'Académie impériale de Saint-Pétersbourg (1757), instructeur du Corps des Cadets impériaux (1760), enfin conseiller privé du tsar Paul. Æpinus découvrit la pyroélectricité et semble avoir eu le premier l'idée de l'électrophore et du condensateur électrique. Æpinus meurt à Dorpet (aujourd'hui Tartu), en Estonie. (D.S.B. ; Pog.).

BEZOUT Etienne (1739-1783)

Né à Nemours, Bézout s'est presque exclusivement occupé de la théorie des équations.Il publia en 1779 une Théorie générale des équations algébriques où il démontre que deux courbes algébriques de degrés m et n, ont m.n points communs. Ses Cours de mathématiques, qui connurent à partir de 1764 de nombreuses éditions eurent une grande influence.

BUDAN François-Désiré (1761- Paris 1840)

Né à Limonade dans l'île de Saint-Domingue, Budan enseigne au collège royal de Nantes de 1779 à 1787 avant d'entreprendre des études de médecine. Il est suppléant de Mauduit au collège de France, lorsqu'il est nommé Inspecteur général des études en 1808, fonction qu'il exerce jusqu'à son départ à la retraite en 1835. Il publie en 1807 un ouvrage sur les équations numériques dans lequel il propose un algorithme analogue à la méthode de Horner transmis à l'Institut dès l'an XI (1803) et une extension de la règle des signes de Descartes connue désormais sous le nom de théorème de Budan-Fourier.

CAUCHY Augustin-Louis (1789-1857)

Admis à l'Ecole Polytechnique, puis à l'Ecole des Ponts et Chaussées, Cauchy participe comme Ingénieur à divers travaux publics. En 1813, il revient enseigner à l'Ecole Polytechnique, puis à la Faculté des Sciences et au Collège de France. Après la révolution de 1830, Cauchy s'exile à Turin, puis à Prague , où il devient précepteur du petit-fils de Charles X. Il rentre en France en 1838. Son œuvre considérable se rapporte à de nombreux domaines des mathématiques et de la physique mathématique. Il est le créateur de la théorie des fonctions d'une variable complexe.

CLAIRAUT Alexis-Claude (1713-1765)

Né à Paris, fils d'un professeur de mathématiques, Clairaut s'est plongé très jeune dans l'étude de cette science . Il fut élu membre de l'Académie des Sciences à l'âge de dix-huit ans. Il prit part avec Maupertuis à une expédition en Laponie (1736-37), pour calculer un degré de méridien.

COLLINS John (1625-1683)

Né à Wood-Eaton , près d'Oxford , Collins devint ingénieur , après avoir été apprenti chez un libraire. Il est surtout connu comme secrétaire de la Royal Society . Mort à Malmsbury, dans le Wiltshire. (Pog.)

CRAMER Gabriel (1704-1752)

Né à Genève, Cramer partage , dès l'âge de dix-huit ans , la chaire de mathématiques de l'Académie de Calvin avec G.L. Calandrini. En 1734, Calandrini devient professeur de philosophie ; Cramer prend alors la chaire de mathématiques et, en 1750, il succède à Calandrini, mais pour un an seulement. Comme citoyen, Cramer fut membre du Conseil des Deux-Cents (1734) et du Conseil des Soixante (1749). Mort à Bagnols, près de Nîmes (D.S.B.; Pog.)

CRELLE August Leopold (1780-1855)

Né près de Wriezen, en Allemagne, Crelle reçoit d'abord une formation d'ingénieur civil et participe à la construction de nombreuses routes nouvelles en Prusse. A l'âge de trente-six ans, il obtient un doctorat de mathématiques à l'Université de Heidelberg, fonde son célèbre journal en 1826 et devient professeur de mathématiques dans diverses écoles d'ingénieurs à partir de 1828. Mort à Berlin. (D.S.B. ; Pog.)

DESCARTES René du Perron (1596-1650)

Né à la Haye, en Touraine, Descartes , diplômé en droit de l'Université de Poitiers, étudie les mathématiques à Paris sous la direction de Mydorge et de Mersenne. Il entre, en 1617, dans l'armée du prince d'Orange, et pendant neuf ans, servit dans diverses armées. Il s'établit en Hollande en 1628 et accepte, en 1649, une invitation de la reine Christine de Suède. Peu après son arrivée en Suède, il meurt à Stockholm des suites d'une pneumonie. Mathématicien et philosophe, il étudie aussi l'optique, la mécanique et la physiologie. Dans sa Géométrie, il introduit le symbolisme algébrique actuel qui permet la naissance de l'algèbre classique et de la géométrie analytique.

EULER Leonhard (1707-1783)

Né à Bâle, Leonhard Euler apprit d'abord quelques rudiments de mathématiques auprès de son père, ancien élève de Jacques Bernoulli. A l'Université de Bâle, Euler fit la connaissance de Jean Bernoulli, et, en 1723, obtint son doctorat en philosophie. En 1726, il accepta une invitation de l'Académie des sciences de Saint-Pétersbourg et partit, en 1727, pour y devenir professeur de physique, puis de mathématiques. En 1738, il perdit la vue de l'oeil droit. En 1741, Euler quitta Saint-Pétersbourg pour Berlin, où il dirigea pendant vingt-cinq ans la classe de mathématiques de l'Académie. Sur l'invitation de Catherine II, et parce qu'il était en conflit avec Frédéric II, Euler retourna en 1766 à Saint-Pétersbourg. Devenu aveugle peu après, il resta dans cette ville jusqu'à sa mort. (D.S.B.)

FERMAT Pierre de (1601-1665)

Fermat est né à Beaumont-de-Lomagne d'un père négociant en cuir, assez riche pour que son fils fasse des études de droit à l'Université de Toulouse. Reçu bachelier, en 1631, à Orléans Fermat acheta une charge de conseiller au parlement de Toulouse. A partir de 1648, il fit partie de la chambre de l'édit à Castres.

FOURIER Jean-Baptiste, Joseph (1768-1830)

Né à Auxerre, Fourier enseigne à l'école polytechnique avant de participer à l'expédition d'Egypte avec Bonaparte. A son retour en France, il est nommmé préfet de l'Isère en 1802. Ses activités scientifiques reprennent de plus belle avec le retour des Bourbons. Ses principaux travaux sont la **Théorie analytique de la chaleur** (1822) qui le conduit à étudier des séries en sinus et cosinus d'arcs multiples et l'**Analyse des équations déterminées** (1831) contenant un important résultat sur les racines d'une équation algébrique qui généralise la règle de Descartes. Fourier devint secrétaire de l'académie des sciences en 1822 et membre de l'académie française en 1826.

GAUSS Karl Friedrich (1777-1855)

Né à Brunswick (Allemagne) dans une famille pauvre, Gauss reçut, en 1792, une bourse du duc de Brunswick, qui lui permit de faire des études au Collegium Carolinum de Brunswick et à l'Université de Göttingen (1795-98). Il obtint, en 1799, un doctorat à l'Université de Helmstedt et accepta, en 1807, le poste de directeur de l'observatoire de Göttingen, ville où il résida jusqu'à la fin de ses jours. De 1818 à 1825, il dirigea les travaux de triangulation du Hanovre. Ses travaux concernent les mathématiques (théorie des nombres, géométrie différentielle, algèbre, fonctions), la physique (magnétisme, optique, électricité) et l'astronomie. Membre des Académies des sciences de Berlin depuis 1810 et de Paris depuis 1820. (Pog.)

GERGONNE Joseph Diaz (1771-1859)

Né à Nancy, Gergonne devint, en 1791, capitaine de la Garde nationale et participa activement aux guerres napoléoniennes. En 1795, il accepta une chaire de mathématiques à l'Ecole centrale de Nîmes et, en 1810, fonda les **Annales de mathématiques pures et appliquées**, qui parurent chaque mois jusqu'en 1832 et sont connues sous le nom d' **Annales de Gergonne**. Il obtint en 1816 la chaire d'astronomie de l'Université de Montpellier. Gergonne devint recteur de Montpellier en 1830 et prit sa retraite dans cette ville en 1844. (D.S.B.)

HARRIOT Thomas (1560-1621)

Né à Oxford, Harriot participa, de 1580 à 1585, à une expédition coloniale en Virginie, comme expert en cartographie. Il fut emprisonné après le "complot des poudres" de 1605. Peu après, il fit la connaissance de Kepler et travailla à de nombreuses observations astronomiques. Il enrichit l'algèbre d'un système de notations très pratiques, et calcula l'aire d'un triangle sphérique. Mort à Londres. (D.S.B.)

HUDDE Jan (1628-1704)

Les travaux de Hudde prolongent l'œuvre mathématique de Descartes qu'il étudia à Amsterdam avec Shooten. Il étudie les conditions pour qu'une équation algébrique ait des racines multiples. Ses contributions *De reductione æquationum* et *De maximis et de minimis* sont contenues dans l'édition latine de la Geometria de Descartes publiée à Amsterdam en 1759.

HUTTON Charles (1737-1823)

Né à Newcastle-upon-Tyne, Hutton enseigna les mathématiques, de 1773 à 1807, à l'académie militaire de Woolwich. Il fut élu à la Royal Society en 1774, et occupa le poste de secrétaire de cette assemblée de 1779 à 1783. Renvoyé de cette charge par Sir Joseph Banks, il fut défendu en particulier par Horsley et Maseres. (D.S.B. ; Pog.)

JACOBI Karl Gustav (1804-1851)

Né à Postdam, Jacobi qui avait soutenu une thèse à l'Université de Berlin, fut nommé à l'Université de Königsberg puis à Berlin. Membre de l'académie des sciences de Berlin, il est l'auteur de travaux d'analyse (fonctions elliptiques et hyperelliptiques, équations différentielles, équations aux dérivées partielles, calcul des variations), d'algèbre et de théorie des nombres, de mécanique céleste et de mécanique analytique.

KÄSTNER Abraham, Gotthelf (1719-1801)
Fils d'un professeur de jurisprudence de Leipzig, Kästner devint en1739 maître de conférences à Leipzig où il enseigna les mathématiques et le droit. Sa thèse prolongeait des travaux de Mac Laurin et Campbell sur les limites des racines d'une équation et sur le nombre de racines complexes. Professeur de mathématiques et de physique de l'Université de Göttingen en 1753, il fut apprécié pour son enseignement et les ouvrages qu'il publia. (D.S.B.)

LACROIX Sylvestre François (1765-1843)
Né à Paris, Lacroix fut initié très tôt aux mathématiques par Gaspard Monge, qui devint son ami. Lacroix fut successivement : professeur à l'Ecole des Gardes de la Marine de Rochefort (1782), à l'Ecole Militaire de Paris (1787), à l'Ecole royale d'artillerie de Besançon (1788), examinateur des candidats au Corps d'artillerie (1793), chef de bureau de la commission éxécutive de l'Instruction Publique (1794), professeur adjoint de géométrie descriptive à l'Ecole Normale de l' An III, professeur d'analyse à l'Ecole polytechnique (1799), professeur et doyen de la Faculté des sciences de Paris (1815), et professeur au Collège de France (1812). Membre de l'Institut depuis 1799. (D.S.B. ; Pog.)

LAGRANGE Joseph Louis (1736-1813)
Né à Turin, Lagrange y fut nommé, en 1755, professeur à l'Ecole d'artillerie. Il fonda avec des amis une société scientifique. En 1766, il accepta la direction de la section mathématique de l'Académie de Berlin. En 1787, Lagrange quitta Berlin pour Paris, où il devint pensionnaire de l'Académie des sciences. En 1788, il publia la **Méchanique analytique**. Il était membre de la Commission des poids et mesures et du Bureau des longitudes dès sa formation en 1795. Il enseigna les mathématiques à l'Ecole Normale de l'An III et à l'Ecole polytechnique (1794-99)

LAPLACE Pierre Simon , marquis de (1749-1827)
Né à Beaumont-en-Auge, fils de cultivateurs, Laplace s'initia aux mathématiques à l'Ecole militaire de cette petite ville. Il y commença son enseignement. En 1783, il devint examinateur du Corps de l'artillerie et fut élu en 1785 à l'Académie des sciences. A la Révolution, il participa à l'organisation de l'Ecole polytechnique et de l'Ecole normale. Il fut membre de l'Institut dès sa création. Bonaparte lui confia le ministère de l'Intérieur, mais seulement pour six semaines

MONTUCLA Jean-Etienne (1725-1799)
Né à Lyon, Montucla consacra à l'histoire des mathématiques l'une des premières études d'ensemble sur ce sujet. En 1754, il publia une Histoire des recherches sur la quadrature du cercle. Ruiné par suite de la Révolution, il meurt à Versailles en 1799. Lalande compléta la seconde édition de son **Histoire des mathématiques** de 1802.

NEWTON Isaac (1642-1727)
Newton est né à Woolsthorpe, après la mort de son père. Après des années de formation au Trinity College de Cambridge, il y fut nommé professeur, en 1669, succédant à Barrow. En 1696, il quitta Cambridge pour devenir directeur de la Monnaie à Londres. Il devint, en 1699, membre du Conseil de la Royal Society et son Président, en 1703. Il garda ce poste jusqu'à la fin de sa vie. Newton inaugura le calcul différentiel et la théorie de la gravitation universelle.

OLDENBURG Henry (1618-1677)
Né à Brême, Oldenburg fit des études classiques et scientifiques à l'Université d'Utrecht, puis, de 1641 à 1653, voyagea en Europe. Il vista l'Angleterre en 1653, en mission diplomatique pour la ville de Brême auprès de Cromwell. Installé définitivement en Angleterre, il entra en 1661 à la Royal Society, en devint le Secrétaire et lança l'édition des **Philosophical Transactions**. Il signait souvent ses lettres par le pseudonyme de Grubendol. Mort à Londres. (D.S.B.; Pog.)

OUGHTRED William (1575-1660)
Né à Eton, où son père enseignait, Oughtred fut ordonné prêtre en1603 et résida jusqu'à sa mort à Albury, près de Guildford, dans le Surrey. Il y rédigea en particulier son traité d'arithmétique et d'algèbre, qui eut une grande influence sur Wallis et Newton. Très royaliste, Oughtred ne survécut pas à l'émotion violente qu'il éprouva lors de la restauration de Charles II. (D.S.B.)

PRESTET Jean (1648-1691)
Né à Châlon-sur-Saône, Prestet est d'origine modeste.Il devint secrétaire de Malebranche, il composa vers 1670 des **Eléments des mathématiques** qui furent imprimés en 1675, puis entre à l'Oratoire en 1675 et devient prêtre en 1680. Envoyé à Nantes pour y enseigner les mathématiques, il fut rapidement dirigé sur Saumur où il resta un an, avant d'enseigner de 1681 à 1684 à l'Université d'Angers. Il se rapprocha ensuite de Paris, et réédita ses Eléments en 1689. Il mourut à Marines le 8 juin 1691.

ROLLE Michel (1652-1719)
Né à Ambert, en Auvergne, Rolle reçut une instruction très succinte et apprit seul l'algèbre. Venu à Paris, il eut beaucoup de mal à subvenir à ses besoins jusqu'en 1699, année où il devint " pensionnaire géomètre" de l'Académie des sciences, en compagnie de l'abbé Jean Gallois et de Varignon. (D.S.B.)

SEGNER Johann Andreas von (1704-1777)

Né à Pressburg, en Hongrie (aujourd'hui Bratislava , en Tchécoslovaquie), Segner pratiqua d'abord la médecine à Pressburg et Debrecen. En 1732, il vint à Iéna comme professeur-assistant, puis devint en 1733, professeur de mathématiques à l'Université d'Iéna. En 1735, il fut nommé professeur de mathématiques et de physique à l'Université de Göttingen ; de 1755 à sa mort, il détint la même chaire à l'Université de Halle. Il était membre des Académies des sciences de Berlin (1746) et de Saint-Pétersbourg (1754). Segner donne en 1756 la démonstration du théorème de Descartes restée classique et la description d'une machine à décrire les courbes paraboliques, permettant de résoudre les équations.(D.S.B.; Pog.)

STÜBNER Friedrich, Wilhem (1710-1736)

Stübner de Bayreuth devint maître de conférences à Leipzig à l'âge de 20 ans. Très productif en dépit de sa santé, Stübner participe aux débats sur la mesure de la force. En 1730, Stübner publie une démonstration géométrique du théorème de Descartes, qu'il attribue à Harriot.

STURM Jacques, Charles, François (1803-1855)

Né à Genève, Sturm devint élève de Fourier. En 1828, avec Colladon, il mesura la vitesse du son dans l'eau. En 1829, il énonça un théorème qui le rendit très célèbre, donnant le nombre des racines réelles d'une équation algébrique comprises entre deux nombres donnés par l'inspection d'une suite de fonctions construites par divisions euclidiennes à partir du polynôme et de sa dérivée.

VANDERMONDE Alexandre Théophile (1735-1796)

Né à Paris, Vandermonde fut, dès 1771, membre de l' Académie des sciences Révolutionnaire ardent, ami de Monge, il fit partie de la Commune de Paris et du Club des Jacobins. En 1782, il était directeur du Conservatoire des arts et métiers et, en 1792, chef du bureau de l'habillement des armées.

WALLIS John (1616-1703)

Né à Ashford, dans le Kent , Wallis entra , en 1632, au Collège Emmanuel de Cambridge, où il étudia la théologie. Ordonné prêtre, en 1640, il gagna sa vie comme aumônier privé à Londres, puis, en 1644 , devint membre du Queen's College à Cambridge. De 1649 à sa mort, il fut professeur de géométrie à l'Université d'Oxford. Il fut membre de la Royal Society dès sa fondation. (Pog.)

WARING Edward (1736-1798)

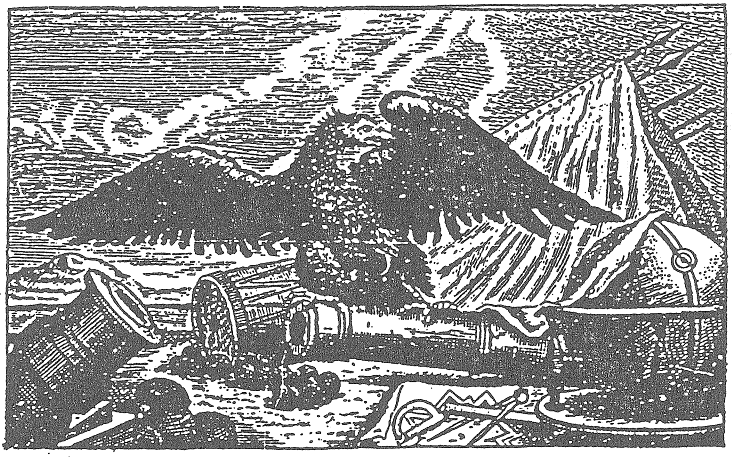
Né à Shrewsburg, Waring étudia au Magdelen College à Cambridge. A partir de 1760, il fut professeur de mathématiques à Cambridge, et devint membre de la Royal Society en 1763. Waring s'intéresse à la théorie et au calcul des fonctions symétriques. En 1771, il énonce des propositions de théorie des nombres notamment sur la représentations d'un entier n comme somme de puissances kièmes d'entiers.

WRONSKI (ou HOENE-WRONSKI) Jozef Maria (1776-1853)

Né à Poznan, en Pologne, Wronski participa, de 1791 à 1794, comme officier d'artillerie, à la lutte pour l'indépendance de la Pologne, et fut fait prisonnier dans la bataille de Maciejowice. Libéré en 1798, il alla d'abord en Allemagne, y étudia le droit, la philosophie et les mathématiques, puis s' établit définitivement en France à Marseille puis dans la région parisienne pour se consacrer à la recherche scientifique. (Pog. ; D.S.B.)

HISTOIRE
DE
L'ACADEMIE ROYALE
DES
SCIENCES
ET
BELLES LETTRES.

ANNÉE MDCCLVI.



A BERLIN.
CHEZ HAUDE ET SPENER,
Libraires de la Cour & de l'Académie Royale.
MDCCLVIII.

DÉMONSTRATION

DE LA RÉGLE DE DESCARTES, POUR CONNOITRE LE NOMBRE DES RACINES AFFIRMATIVES ET NÉGATIVES QUI PEUVENT SE TROUVER DANS LES ÉQUATIONS.

PAR MR. DE SEGNER.

Traduit du Latin.

La Régle dont il s'agit, est exprimée par *Descartes*, au troisiéme Livre de sa Géométrie, en ces termes : „ Il peut y avoir autant
„ de racines vrayes dans une équation, qu'il s'y trouve de variations des signes $+$ & $-$; & autant de fausses, qu'on y trouve de fois les deux signes $+$, ou les deux signes $-$, qui se suivent l'un l'autre.„

Je ne ferai point l'histoire de cette Régle ; & je n'entrerai pas dans la recherche des moyens, par lesquels les Analystes se sont efforcés de prouver sa vérité, ou l'ont effectivement prouvée. J'ai simplement dessein d'en donner la démonstration, à laquelle j'ai été conduit, il n'y a pas longtems, en méditant sur les Elémens de l'Algébre. Au reste il est connu, qu'on appelle racines vrayes celles que nous nommons affirmatives, & fausses celles que nous désignons d'une maniere plus convenables par le nom de négatives. Mais venons au fait.

Si une équation bien ordonnée ne manque d'aucun terme, ou au cas qu'il en manque, si l'on conçoit écrit à sa place $\mp o$, il est manifeste de soi-même, qu'il y aura autant de racines dans l'équation, qu'on pourra y faire de combinaisons de signes, en composant chacun d'eux d'eux avec celui qui le suit immédiatement. Ainsi, dans l'équation $+x^5 + 3x^4 - 5x^3 - 4x^2 + 12x - 13 = 0$, il y a cinq racines, & ces successions d'autant de signes : $+\ +$, $+\ -$, $-\ -$, $-\ +$, $+\ -$. Car cette équation a six termes.

Mais, en quelque ordre que se trouvent les signes d'une équation, si on la multiplie par une simple, qui contient une racine négative, de cette maniere,

$$
\begin{array}{llllr}
+x^5 + 3x^4 & -5x^3 & -4x^2 + 12x & -13 & = 0 \\
+x + 2 & & & & = 0 \\
\hline
+x^6 + 3x^5 & \vert\ -5x^4 - 4x^3 & \vert\ +12x^2 & \vert\ -13x \ \ldots\ldots & A \\
\quad +2x^5 & \vert\ +6x^4 - 10x^3 & \vert\ -8x^2 & \vert\ +24x - 26 \ \ldots & B \\
\hline
+x^6 + 5x^5 & +x^4 - 14x^3 & +4x^2 & +11x - 26 & = 0
\end{array}
$$

il se produit en multiplicant deux series de signes, l'une en A, l'autre en B, tout à fait semblables, mais dont la seconde est plus avancée d'un lieu vers la droite ; par où il arrive que chaque signe de la serie B est le même que celui de la serie A, qui le précéde d'un lieu.

Mais, si l'on multiplie une équation quelconque par une équation simple, qui contient une racine affirmative,

$$
\begin{array}{llllr}
+x^5 + 3x^4 & +5x^3 - 4x^2 & -12x + 13 & & = 0 \\
+x - 2 & & & & = 0 \\
\hline
+x^6 + 3x^5 & \vert\ +5x^4 - 4x^3 & \vert\ -12x^2 + 13x & \vert\ \ldots\ldots\ldots & A \\
\quad -2x^5 & \vert\ -6x^4 - 10x^3 & \vert\ +8x^2 + 24x & \vert\ -26 \ \ldots & B \\
\hline
+x^6 + x^5 & -x^4 - 14x^3 & -4x^2 + 37x & -26 & = 0
\end{array}
$$

les signes de la seconde serie B, qui est produite par la multiplication, sont opposés aux signes de la premiere serie A, de façon que, si l'on prend un ſigne quelconque de la ſerie B, il ſe trouvera contraire au ſigne de la ſerie A, qui le précéde d'un lieu.

A' préſent on tire les ſignes de l'équation produite des ſignes de ces ſéries, & des grandeurs des termes qui ſont affectés par ces ſignes. Mais il paroit qu'en plaçant ces ſignes, il faut toujours commencer par le ſigne du premier terme de la ſerie A, & continuer à placer les ſignes de cette ſerie, juſqu'à qu'on y parvienne à un terme, au deſſous duquel s'en trouve un, qui ayant le ſigne contraire ſoit plus grand dans la ſerie B : après quoi, abandonnant la ſerie A, on doit tirer enſuite les ſignes de la ſerie B par ordre, juſqu'à ce qu'on revienne de nouveau à un terme, au deſſus duquel s'en trouve un plus grand avec le ſigne contraire dans le ſerie A. Enſuite, en prenant le ſigne de ce terme ſupérieur au lieu de celui de l'inférieur, il faudra de nouveau tirer les ſignes ſuivans de la ſerie ſupérieure, juſqu'à ce qu'on ſoit encore obligé de paſſer à l'inférieure, & ainſi de ſuite alternativement, mais de maniere qu'on s'arrête finalement dans la ſerie B ; dont le dernier terme n'en ayant aucun au deſſus de lui dans la ſerie A, ſon ſigne ne peut pas être changé dans le produit. D'où il s'enſuit qu'en plaçant les ſignes d'un ſemblable produit, on doit paſſer au moins une fois de A dans la ſerie B ; & que, quel que ſoit le nombre de ces paſſages qu'exige l'équation à multiplier, les retours de B en A l'emportent toujours d'une unité ſur les paſſages de A en B. Dans les équations rapportées ci-deſſus, les lieux où ces paſſages doivent ſe faire, ont été marqués par de petites lignes transverſales.

Au reſte, comme le paſſage d'une ſerie à l'autre ne doit jamais ſe faire, à moins que les termes des ſeries A & B, dont l'un eſt écrit ſous l'autre, n'ayent des ſignes contraires, quand une équation eſt multipliée par une équation ſimple d'une racine négative, il y aura ces deux ordres de ſignes, dans lesquels ſeuls les paſſages doivent ſe faire :

$$\begin{array}{cccc} a & + & - & c \\ d & + & + & b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} a & + & - & c \\ d & - & + & b \end{array}$$

On suppose qu'il s'agit de passer, ou du signe a au signe b, ou de d à c. Le signe a sera donc le même avec le signe b, parce que les signes du multiplicateur sont supposés être $+\ +$; mais comme le signe c est contraire au signe b, il sera aussi contraire au signe a. Mais d peut, ou s'accorder avec le signe b, ou lui être contraire. Si dans ces ordres pour chaque $+$ on écrit $-$, & $+$ pour chaque $-$, en changeant les signes, l'ordre ne sera pas pourtant changé.

Au contraire, si l'équation est multipliée par une équation simple d'une racine affirmative, dont les signes sont par conséquent $+\ -$, l'ordre des signes dans les lieux des series A & B, où il faut nécessairement que le passage se fasse, sera l'un ou l'autre de ceux-ci

$$\begin{array}{cccc} a & + & + & c \\ d & - & - & b \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cccc} a & + & + & c \\ d & + & - & b \end{array}$$

ou bien des mêmes ordres des signes contraires, lesquels se font de ceux-ci en écrivant $-$ au lieu de $+$, ou $+$ au lieu de $-$. Le signe b par la nature de multiplication étant contraire au signe a, & c étant aussi contraire au signe b, parce qu'on suppose qu'il faut faire un passage, c sera le même que le signe a. Mais d, ou sera le même que le signe b, ou lui sera contraire.

Il s'ensuit de là, que par le moyen de ces multiplications, il doit arriver des changemens dans les successions des signes, de façon que, si dans une équation à multiplier on compte les successions des signes semblables $+\ +$ ou $-\ -$, on trouve un autre nombre de ces successions dans l'équation produite; ou certainement, le nombre des successions des signes contraires $+\ -$, ou $-\ +$, dans l'équation produite, deviendra différent du nombre des successions semblables dans l'équation multipliée.

Rien n'est plus propre qu'un exemple pour mettre au fait de la maniere dont cela doit s'exécuter; mais il faut que cet exemple soit

ſoit univerſel. Soit premièrement une équation quelconque à multiplier par une équation ſimple, dont les ſignes ſoyent + +, & qu'on produiſe par cette multiplication des ſeries de ſignes, telles que celles que nous avons nommées au commencement A, B.

```
          a  α      b    c     β        γ              δ      d   ε
A . . . + +  |  —   —    —     |  +  —  |  +  —  +     |  —   +   |  +
B . . . . +  |  +   — b —      |  —  +  |  —  +  —     |  +   —   |  —  +
             a                 c                                  d
```

Toutes les ſucceſſions des ſignes ſemblables + + ou — — étant donc marquées par les lettres a, b, c, d, les mêmes dans l'une & dans l'autre ſerie, il eſt clair qu'on obtient indifféremment leur nombre, en comptant ces lettres, ſoit qu'elles ſe rencontrent dans la ſerie A, ou dans la ſerie B, pourvu ſeulement qu'on n'en prenne aucune deux fois. A' preſent, ſi en poſant les ſignes de l'équation produite, il faut paſſer en α de A en B, il faudra en β retourner de B en A; puis de nouveau en γ deſcendre de A en B, & ainſi de ſuite, en plaçant alternativement les ſignes des ſucceſſions ſemblables dans l'équation produite, laquelle tire ſes ſignes depuis le commencement jusqu'en α de la ſerie A, de α en β de la ſerie B, de β en γ, de nouveau de A, & toujours de même, tant qu'à la fin en ε on les prenne de B. En les recueillant de cette maniere, la premiere ſucceſſion eſt a; la ſeconde arrive néceſſairement auprès de α en deſcendant de A en B; la troiſième eſt b de la ſerie B; la quatrième ſeroit c de la même ſerie; mais celle-ci ſe détruit quelquefois en montant à la ſerie A, d'où viént que jusqu'ici il n'y a que trois ſucceſſions; mais la quatrième arrive auprès de γ en deſcendant, la cinquième auprès de δ en montant, la ſixième eſt en d, & la ſeptième a lieu auprès de ε en deſcendant. Cet exemple fournit donc le nombre des ſucceſſions ſemblables, augmenté de trois de ces ſucceſſions.

En général il paroit qu'à chaque deſcente de A en B le nombre de ces ſucceſſions augmente néceſſairement d'une; & qu'à chaque montée

montée, ou bien qu'une telle ſucceſſion eſt ajoutée aux autres, comme il arrive ici en δ, ou qu'il y en a une de ſouſtraire, comme en β, où la ſucceſſion c eſt détruite. D'où, comme les paſſages de A en B ſont néceſſairement ſupérieurs en nombre d'une unité, que les retours de B en A ; il s'enſuit auſſi en général, que toutes les fois qu'en poſant les ſignes du produit il faut paſſer d'une ſerie à l'autre, le nombre des ſucceſſions $+ +$ ou $- -$, qui ſe rapportent à des ſucceſſions ſemblables de l'équation multipliée, ſoit de la ſerie A ou de la ſerie B, ne ſçauroit être moindre que d'une unité, ni plus grand que le nombre entier de tous les paſſages. C'eſt ainſi que dans notre exemple, les ſucceſſions, telles que nous les poſons ici, ont été augmentées au nombre de trois, lorsqu'il y a eu cinq paſſages.

En ſecond lieu, qu'il s'agiſſe de multiplier une équation par une équation ſimple, dont les ſignes ſont $+ -$, & que dans la multiplication les ordres des ſignes du produit, qui doivent être expliqués ſuivant ce que nous avons dit, ſoyent les ſuivans

$$\begin{array}{ll} A \ldots & + \overset{a}{-} \overset{\alpha}{|} - \overset{b}{+} \overset{c}{-} \overset{\beta}{|} - - \overset{\gamma}{|} - - \overset{\delta}{|} - \overset{d}{+} \overset{\varepsilon}{|} + \\ B \ldots\ldots & - \underset{\alpha}{|} + + - \underset{c}{|} + + \,|\, + + \,|\, + +^{d} \,|\, - - \end{array}$$

S'il faut donc raſſembler le nombre des ſucceſſions des ſignes oppoſés, $+ -$, ou $- +$, qui ſe trouveront dans l'équation produite par la multiplication, que l'on ſuppoſe compoſée d'une partie de la ſerie A depuis le commencement jusqu'à α, d'une partie de la ſerie B depuis α jusqu'à β, & ainſi de ſuite en alternant, cela ſe fera conformément à ce que nous avons dit de la maniere ſuivante. La premiere ſucceſſion eſt a de la ſerie ſupérieure ; l'autre arrive auprès de α en paſſant de A en B ; la troiſième eſt b ; la quatrième ſeroit c de la ſerie B, mais elle eſt détruite par le paſſage de B en A, d'où s'enſuit que la quatrième qui a lieu auprès de γ en deſcendant, devient la cinquième en montant auprès de δ ; la ſixième eſt d de la ſerie A, & la ſeptième ſe fait en deſcendant auprès de ε.

 Les

Les choſes ſe paſſent donc ici parfaitement de même que nous l'avons vû dans la multiplication précédente. Comme, toutes les fois qu'il y a une deſcente, le nombre des ſucceſſions + —, ou — +, qui ſe trouvent dans l'équation multipliée, tant dans la ſerie A que dans la ſerie B, eſt néceſſairement augmenté d'une; & que par la montée une ſemblable ſucceſſion, ou ſe rapproche des autres, ou eſt moindre d'une unité; de ſorte que le nombre des montées eſt inférieur d'une unité à celui des deſcentes; il s'enſuit auſſi que le nombre univerſel de ces ſucceſſions, qui ſe rapportent à une équation quelconque, ſi elle eſt multipliée par une équation ſimple d'une racine affirmative, ne peut être moindre que d'une unité, ni plus grand que le nombre entier des paſſages.

Puis donc que par la multiplication quelconque d'une équation, au moyen de laquelle une nouvelle racine réelle négative y eſt introduite, une ſucceſſion tout au moins des ſignes ſemblables + +, ou — —, eſt ajoutée au nombre de celles qui ſe trouvoient dans l'équation multipliée, le nombre de ces ſucceſſions dans une équation quelconque, ne ſera pas moindre que le nombre de ſes racines réelles négatives. De la même maniere on conclurra, que le nombre des ſucceſſions des ſignes contraires + —, ou — +, ne ſera pas non plus moindre que le nombre des racines réelles affirmatives d'une équation quelconque.

C'eſt pourquoi, ſi dans une équation tous les ſignes ſont les mêmes, + ou —, aucune racine réelle de l'équation ne ſera affirmative; s'il y en avoit ſeulement une ſeule, on y trouveroit pour le moins une ſucceſſion de ſignes oppoſés. Si donc une ſemblable équation, outre les racines réelles négatives, contient d'autres racines, ſoit toutes, ou quelques unes, celles-ci ſeront impoſſibles.

De même auſſi, ſi dans une équation chaque ſigne eſt oppoſé à l'un & à l'autre des ſignes voiſins, il n'y aura point dans cette équation de racine réelle négative. Car, s'il y en avoit ſeulement une, on y verroit au moins une ſucceſſion de ſignes ſemblables. Par conſéquent,

ſéquent, ſi une ſemblable équation, outre les racines réelles affirmatives, en a d'autres, ſoit toutes, ou quelques unes, celles-ci ſeront impoſſibles.

En général, dans toute équation, dont toutes les racines ſont réelles, le nombre des ſucceſſions des ſignes contraires $+$ $-$ ou $-$ $+$, ſera égal au nombre de ſes racines affirmatives, & le nombre des ſucceſſions des ſignes ſemblables $+$ $+$, ou $-$ $-$, ſera pareillement égal au nombre des racines négatives de la même équation. Soit en effet n le nombre des racines négatives, & N le nombre des ſucceſſions $+$ $+$, ou $-$ $-$, de la même équation; que m ſoit le nombre de ſes racines affirmatives, & M le nombre des ſucceſſions $+$ $-$, ou $-$ $+$; on aura $n + m = N + M$. Or N n'eſt pas moindre que n. Si donc on poſe $N > n$, on aura au contraire $M < m$; ce qui ne peut pas davantage avoir lieu. Donc $N = n$, & $M = m$.

S'il eſt donc conſtant que le nombre des racines réelles négatives de l'équation n'eſt pas égal au nombre N, & que pareillement le nombre des racines réelles affirmatives de la même équation n'eſt pas égal au nombre M; il faudra auſſi en conclurre, qu'elle contient des racines impoſſibles.

En réuniſſant tout ce qui vient d'être propoſé, il en réſulte que la Régle de *Deſcartes*, dans le ſens où il l'a propoſée, eſt parfaitement vraye. Car on peut avoir dans une équation autant de racines affirmatives, qu'on y trouve de variations des ſignes $+$ & $-$; & autant de négatives, qu'on y rencontre de fois les deux ſignes $+$, ou les deux ſignes $-$, qui ſe ſuivent réciproquement. Mais, ſi le nombre des ces racines peut être tel, il ne s'enſuit pas qu'il le ſoit néceſſairement; & on ne ſçauroit, ſans tomber dans une grande erreur, affirmer, que dans chaque équation il y a autant de racines véritables, qu'il y a de changemens de ſignes, & autant de fauſſes, qu'il y a de ſucceſſions des mêmes ſignes.

Démonstration du théorème de Harriot, avec une méthode de chercher, si une équation algébrique a toutes les racines possibles, ou non ?

Par M. Aepinus (1758)

Traduit du Latin

L'époque principale des accroissements que l'Algèbre a reçu dans le siècle passé, peut être à bon droit assignée au tems où, soit Descartes, soit Harriot, ou qui que ç'ait été, (car les écrivains varient sur cet Inventeur), ont trouvé que chaque équation algébrique peut être résolue en des facteurs simples qui contiennent les racines de l'équation, laquelle doit être considérée comme le produit de tous ces facteurs. En effet, cette proposition a ouvert un vaste champ pour découvrir sans effort plusieurs propriétés insignes des équations ; aussi ceux qui s'appliquaient alors à cultiver l'analyse, n'ont-ils pas négligé l'occasion qui leur était offerte. Cependant la plupart des choses qu'ils ont tirées de ce principe par rapport à la nature des équations, en ont plutôt été déduites par une simple induction, que par voye de démonstration. Dans la suite, on n'a pas eu de peine à appuyer un grand nombre de ces propositions sur des démonstrations assez rigoureuses ; mais il en reste encore quelques unes qui ont donné bien de la peine aux plus grands Mathématiciens, lorsqu'ils ont voulu en trouver les démonstrations ; et ils y ont souvent travaillé sans succès. Il faut ranger dans cette classe le Théorème, où, par la série des signes dont les termes d'une équation sont affectés, on détermine le nombre des racines positives et négatives de cette équation. C'est celui qu'on appelle communément le Théorème d'Harriot. Je vais fournir ici après d'autres, sa démonstration, dont je n'ai autre chose à dire, sinon que je crois qu'elle n'est pas indigne d'attention. Les cinq premières propositions de mon Mémoire comprennent cette démonstration, mais, comme les principes sur lesquels elle est fondée, m'ont conduit comme par la main à une méthode de chercher, si toutes les racines d'une équation proposée sont possibles, ou non, différente, autant que je puis le sçavoir, de toutes les méthodes connues jusqu'à présent, j'ai cru qu'il n'était pas hors de propos d'ajouter encore quelques autres propositions qui servent à expliquer cette méthode.

PROPOSITION I.

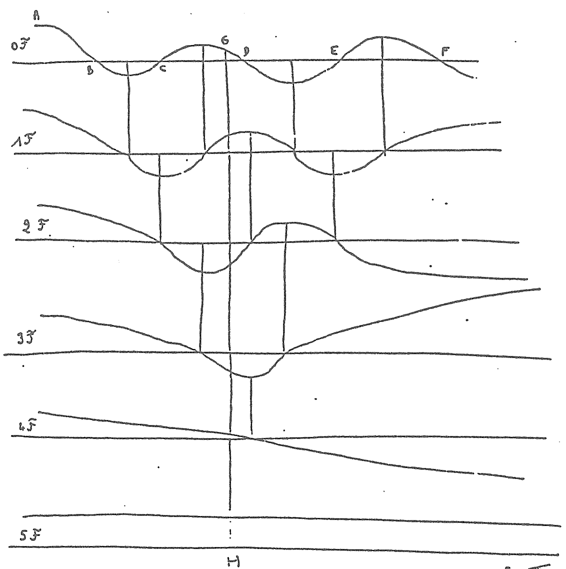


Figure III

Si la courbe ABCDEF est définie par l'équation algébrique

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \dots\dots\dots\dots\dots + F = y$$

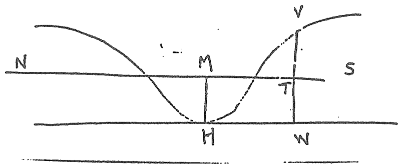
en prenant x pour l'abscisse, y pour l'appliquée, et que toutes les racines de l'équation soient réelles, sans qu'aucune se trouvent égales,

1. cette courbe concourt avec le diamètre m fois,
2. le diamètre en est coupé autant de fois, de façon qu'à chaque intersection les y passent du côté opposé, c'est-à-dire de positifs deviennent négatifs, ou de négatifs, positifs,
3. les x étant positifs, les y deviennent enfin aussi positifs, soit que m soit pair ou impair ; mais les x étant négatifs, les y deviennent enfin positifs, lorsque m est pair, mais négatifs lorsqu'il est impair,
4. si les y commencent à décroître, il ne se fait jamais de croissans des décroissans, à moins que la courbe n'ait auparavant coupé le diamètre,
5. entre deux intersections quelconques de la courbe avec le diamètre, tombe un plus grand y , mais seulement unique, et les plus grand y sont alternativement positifs et négatifs.

DEMONSTRATION

1. En effet, toutes les fois que x devient racine de l'équation, tout autant de fois y devient = 0 ; mais si x passe par toutes les valeurs possibles, il devient m diverses fois racine (par l'hypothèse). Donc la courbe m concourt avec le diamètre m fois, d'où :

2.



Elle touche, ou coupe le diamètre. Or ce n'est pas le premier. Car, qu'elle touche le diamètre en H, et qu'on mène NS parallèle au diamètre dans la distance MH = G, et la courbe coupera la ligne NS m + 1 fois : car le contact venant à cesser, il naît à sa place deux intersections. Mais, en posant MH = G = WT , et VT = Z, on aura WV = y = Z + G, d'où la courbe rapportée à la droite NS serait définie par l'équation

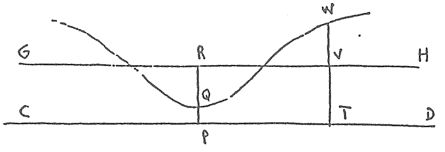
$$x^n + Ax^{m+1} \dots\dots\dots\dots\dots + \begin{matrix} F \\ -G \end{matrix} = Z$$

c'est pourquoi cette équation de m dimensions aurait m + 1 racines, ce qui serait absurde.

La courbe coupe donc le diamètre à chaque concours, et les y passent à chaque intersection au côté opposé.

3. En posant $x = \infty$, tous les termes, outre le premier, évanouissent, d'où $x^m = y$, laquelle valeur est positive, si x est positif ; mais, si x est négatif, et m pair, cette valeur est pareillement positive, au lieu qu'elle devient négative, lorsque m est un nombre impair.

4.



En effet, que les y décroissent en QP, et que de là ils deviennent de nouveau croissants ; qu'on mène GH parallèle au diamètre CD, dans la distance PR > PQ ; et cette droite sera coupée par la courbe m+2 fois. Soit PR = VT = G, VW = Z, G + Z sera y ; d'où la courbe rapportée au diamètre GH est définie par l'équation.

$$x^m + Ax^{m-1} \ldots\ldots\ldots\ldots + F = Z - G$$

Or alors l'équation de m dimensions aurait m + 2 racines ; ce qui est absurde.

5. Car dans l'une et l'autre intersection les y deviennent = 0, d'où s'ensuit qu'ils doivent croître depuis 0, et ensuite décroître de nouveau jusqu'à 0 ; ce qui fait qu'entre deux intersections prochaines quelconques tombe nécessairement le plus grand y, mais seulement unique ; car, s'il y en avait plusieurs, les y décroissants deviendraient croissants, sans intersection préalable : ce qui est contraire au n° 4.
Mais comme les y à chaque intersection passent au côté opposé la même chose doit arriver aussi dans les plus grands y, qui tombent entre deux intersections prochaines quelconques.

COROLLAIRE I

On peut former les fluxionales d'une semblable équation jusqu'à l'ordre $m^{\text{ème}}$, en prenant dx pour constante.

En effet soit,

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots\ldots\ldots = y,$$ on aura la fluxionale

1 - $mx^{m-1}\,dx + (m-1)\,A\,x^{m-2}\,dx \ldots\ldots$

2 - $m(m-1)x^{m-2}\,dx^2 + (m-1)(m-2)\,Ax^{m-3}\,dx^2 \ldots\ldots$

et en général

$r^{\text{ème}}$ $m(m-1) \ldots (m-r+1)\; x^{m-r}\,dx^r + (m-1) \ldots\ldots (m-r)\,Ax^{m-r-1}\,dx^r \ldots\ldots$

Que si dans cette formule on substitue pour r un nombre quelconque entier, plus grand que m, tous les termes évanouissent ; ce qui n'arrive pas, tant que r n'est pas plus grand que m, d'où toutes les fluxionales au-delà de l'ordre m deviennent = 0.

COROLLAIRE II

Si l'on conçoit que la fluxionale de l'ordre r soit divisée par la constante dx^r, sa valeur sera proportionnelle au différentiel de y du même degré r ; d'où, si l'on suppose que des courbes soyent construites, dont les appliquées sont définies par ces équations, leurs y appliquées seront comme les fluxions de y de tous les degrés. Or tout ce qui a été démontré dans la propostion convient à ces courbes, que j'appellerai fluxionales. J'indiquerai à l'avenir leurs appliquées par 1 F, 2 F...... n F.

J'ai tracé un système de semblables courbes, qui appartiennent à l'équation du cinquième degré dans la Figure III , où je suppose que l'on compte les abscisses depuis le point auquel la droite GH rencontre chaque diamètre, en prenant les abscisses positives vers la gauche, et les négatives vers la droite. Cette figure pourra fournir des exemples particuliers des choses que je démontrerai dans la suite d'une manière universelle.

COROLLAIRE III

Le dernier terme de la fluxionale $r^{\text{ème}}$ est = $r(r-1)\ldots\ldots 1 \times \varphi$, en entendant par φ le coefficient du terme de l'équation primitive de l'ordre $m + r - 1$.

En effet, le terme $f^{\text{ème}}$ de la fluxionale de l'ordre r est =

$$(m - f - 1)(m - f)\ldots\ldots(m - r - f + 2) \times \varphi\, x^{m-r-f+1},$$

φ indiquant le coefficient du terme $f^{\text{ème}}$ de l'équation primitive, ce qui résulte de l'induction, et peut être facilement démontré. Mais le dernier terme de la fluxionale de l'ordre r est celui dans lequel l'exposant de x est = 0, d'où, si le $f^{\text{ème}}$ doit être le dernier, $m - r - f - 1$ sera = 0, ou bien $f = m-r+1$, laquelle valeur de f, étant substituée dans la formule générale, on parvient à la valeur du dernier terme.

COROLLAIRE IV

Au même x, où tombe dans la première fluxionale une intersection, tombe le plus grand y, et de la même manière au même x où dans la fluxionale de l'ordre (n+1) tombe une intersection, là tombe dans celle de l'ordre n le plus grand nF. Car là où la fluxionale 1^{e} ou $(n+1)^{\text{ème}}$ coupe le diamètre, 1F ou (n+1) F prenant la valeur contraire, d'où les y , ou nF, commencent de nouveau à décroître, et par conséquent sont les plus grands.

PROPOSITIONS II

Si de l'équation

$$x^m + Ax^{m-1} + \ldots\ldots + F = y$$

on prend tous les F tombants en x = 0, dans la série de ces F mêmes, il y aura autant d'échanges de signes, et autant de successions, qu'il s'en trouve dans l'équation même.

DEMONSTRATION

En effet, en concevant x = 0, dans la fluxionale de l'ordre r (Cor II, Prop I), tous les termes évanouissent outre le dernier, dans lequel x ne se trouve pas. Or ce dernier est (Cor III, Prop I), = $r(r-1)\ldots\ldots 1 \times \varphi$. Comme donc $r(r-1)\ldots\ldots 1$ est un nombre positif, cet rF obtiendra le même signe de φ, c'est-à-dire, celui du coefficient du terme (m-r+1) ; d'où il est nécessaire que la suite des signes des F tombants en x = 0, soit la même que celle des signes de l'équation.

PROPOSITION III

La fluxionale $n^{\text{ème}}$ coupe le diamètre pour le moins autant de fois, aux abscisses tant positives que négatives, que celle de l'ordre suivant n + 1.

DEMONSTRATION

Que la fluxionale (n+1)$^{\text{ème}}$ coupe le diamètre r fois.

1. aux x positifs ; et comme, à chaque intersection de celle-ci, il tombe un maximum dans celle de l'ordre n, le nombre de ces maximum sera = r, aux abscisses positives. Or, entre deux plus grands quelconques, tombe une intersection ; ainsi les intersections qui tombent entre les plus grands nF, sont au nombre de r-1. Mais comme les nF aux abscisses positives deviennent enfin positifs croissant à l'infini (Prop. I) le dernier maximum de ces côtés-là est négatif ; d'où résulte que ce maximum est encore suivi d'une intersection, qui ne tombant point entre deux maxima, n'est pas contenue parmi celles dont on a fait ci-devant l'énumération : et ainsi il y a au moins r intersections dans la fluxionale n aux positifs.

2. La démonstration est la même, si l'on prend les intersections, qui se font aux x négatifs.

PROPOSITION IV

Si les signes des nF et (n+ 1) F, qui tombent aux x = 0 changent, il y aura dans la fluxionale n des intersections r + 1, aux abscisses positives. Mais, si les signes se succèdent, il n'y a pas plus d'intersections que r. Le contraire a lieu aux abscisses négatives.

DEMONSTRATION

En effet, quand les signes sont changés, les (n+1) F, ont une valeur opposée à nF, d'où les nF sont décroissants, de là vient qu'aux x positifs la fluxionale n coupe enfin le diamètre. Mais cette intersection tombe avant le premier maximum nF. Car soit le contraire, et l'intersection de n$^{\text{ème}}$ ne tombera pas avant l'intersection la plus proche de (n+1)$^{\text{ème}}$. Or, dans l'intersection de n+1 , les (n+1)F deviennent homogènes aux nF ; d'où les nF deviendraient de nouveau croissants de décroissants sans l'intersection préalable (ce qui est contre la Prop. I). Cette intersection tombe donc avant le premier maximum nF. Et comme elle n'est pas contenue parmi celles qui ont été rapportées dans la proposition précédente, il y aura en tout (r + 1) intersections dans la fluxionale de l'ordre n.

Au contraire, si les signes se succèdent, les nF croissent jusqu'à la première intersection de (n+1), c'est-à-dire jusqu'au premier maximum nF, mais qu'elles sont toutes contenues sous celles qui ont été précédemment indiquées :

La démonstration vers les abscisses négatives se fait de la même manière, moyennant les changements convenables.

PROPOSITION V

S'il est vrai qu'il y ait dans la fluxionale (n+1) autant d'intersections aux x positifs, qu'il y a d'échanges de signes dans la série des F mêmes, pris aux x = 0, qui suivent (n+1) F, cela est pareillement vrai dans la fluxionale n. Et s'il est encore vrai dans la fluxionale (n+1) qu'il y ait autant d'intersections aux x négatifs qu'il y a de successions de signes dans la série des F mêmes aux x = o qui suivent (n+1)F, cela sera vrai dans celle de l'ordre n.

DEMONSTRATION

En effet que cela soit vrai dans la (n+1)$^{\text{ème}}$, et

1. nF et (n+1)F, pris aux x = o, soyent hétérogènes à la série des signes des F mêmes, qui suivent (n+1) F, est joint un changement de signes, qui deviennent r + 1. Mais, dans ce cas aussi, le nombre des intersections dans la fluxionale n devient r+1 (par la Prop. précéd.).Au contraire si,

2. nF et (n+1) sont homogènes, n alors il n'y a point de changement de signes dans la série des F, ni de nouvelle intersection jointe au nombre des intersections qui se trouvent dans la fluxionale n, d'où s'ensuit que de part et d'autre demeurent r interventions.
La démonstration du second membre s'exécute de la même manière.

COROLLAIRE I

Si dans la suite de la fluxionale (m-1)^{ème}, qui coupe le diamètre une seule fois, on prend un point duquel les abscisses soient comptées, de façon que (m-1)F pris aux $x = o$ soit positif, il ne tombe point d'intersection aux x positifs ; le contraire arrivant, si (m-1)F aux $x = o$ est négatif. De là vient qu'il est vrai dans la fluxionale (m-1), qu'il y a autant d'intersections aux x positifs, qu'il existe d'échanges dans la série des F, qui suivent nF, les mF étant toujours positifs. La même chose a donc lieu dans la fluxionale (m-2), (m-3), etc...

COROLLAIRE II

En comparant ces positions, la vérité du Théorème de Harriot se manifeste d'elle-même.

PROPOSITION VI

Oter un terme quelconque d'une équation.

SOLUTION

Cela se fait, comme on le sçait par les élémens, en augmentant ou diminuant les racines de l'équation. Soit donc l'équation donnée.

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2}.................$$

En substituant au lieu de x, y + z , on aura

$$x^m = y^m + \frac{m}{1} A\, y^{m-1} z + \frac{m.m-1}{1.2} y^{m-2} z^2 ......$$

$$+Ax^{m-1} = + Ay^{m-1} + \frac{m-1}{1} Ay^{m-2} z ......$$

$$+Bx^{m-2} = \qquad\qquad + By^{m-2}......$$

Ainsi le coefficient de chaque puissance de y sera de :

$$m) \quad = 1$$

$$m-1) \quad = \frac{m}{1} z + A$$

$$m-2) \quad = \frac{m.m-1}{1.2} z^2 + \frac{m-1}{1} Az + B$$

Et en général le coefficient de la puissance y^{m-n}, c'est-à-dire, du (n+1)^{ème} terme sera :

$$\frac{m.m-1......,m-n+1}{1.2.....n} z^n + \frac{m-1.......,m-n+1}{1......(n-1)} Az^{n-1} + \text{etc.}$$

Donc, si l'on veut ôter de l'équation le terme $(n+1)^{ème}$, on n'a qu'à substituer pour z une des racines de cette expression, égale à zéro, d'où le coefficient de ce terme devient = 0.

PROPOSITION VII

Si d'une équation quelconque le terme (n+1) manque, je dis que (m-n)F, pris aux x = o, sera pareillement = o, c'est-à-dire que x = o est la racine de la fluxionale $(m-n)^{ème}$.

DEMONSTRATION

En effet (m-n)F aux x = o, est
(n+1, n, n-1...... 1) × φ

mais le terme (n+1) manquant, son coefficient φ devient = o, d'où aussi (m-n)F = o.

PROPOSITION VIII

Si l'on prend (n-1)F et (n+1)F, tombants au même x avec la dernière intersection de la fluxionale n, vers les x positifs, (n-1)F et (n+1)F seront hétérogènes, si toutes les racines de l'équation sont réelles.

DEMONSTRATION

Au même x, qui convient à la dernière intersection de $l'n^{ième}$, tombant le dernier maximum de $l'(n-1)^{ème}$, qui est négatif, si toutes les racines sont réelles (par la Prop.I) mais (n+1)F tombant à cet x, est positif. Car la dernière intersection de n tombe après le plus grand maximum nF : donc, après la dernière intersection de (n+1), par laquelle les (n+1)F deviennent positifs, (Prop. I) d'où (n+1) F est nécessairement positif.

PROPOSITION IX

Si la proposition précédente est véritable dans le cas démontré, je dis qu'elle est vraye aussi de tous les (n-1)F et (n+1)F, qui tombent au même x, avec une intersection quelconque de $l'n^{ième}$.

DEMONSTRATION

En effet, si cette proposition est vraye pour un x quelconque, auquel tombe l'intersection de $l'n^{ième}$, je dis qu'elle le sera de même pour tout x immédiatement suivant, auquel la fluxionale $n^{ième}$ coupe le diamètre. Car au même x, avec l'intersection la plus prochaine de $l'n^{ième}$, tombe le maximum de $l'(n-1)^{ième}$ qui suit immédiatement. Or entre deux maxima quelconques tombe l'intersection, d'où s'ensuit que les (n-1)F passent à l'opposite. Mais les (n+1)F y passent pareillement. Car, entre deux intersections de n tombe le plus grand nF, et au même x, avec le plus grand nF, la fluxionale (n+1) coupe le diamètre. Donc les (n+1)F passent du côté opposé. Ainsi (n-1)F et (n+1)F passant ainsi à l'opposite, il est manifeste que, s'ils ont été auparavant hétérogènes, ils demeurent encore. Or cette proposition a lieu par rapport aux derniers (n+1)F ; donc elle est applicable à tous (Prop. VIII).

COROLLAIRE

Si donc de tels (n-1)F et (n+1)F deviennent homogènes, toutes les racines de l'équation ne seront pas réelles.

PROPOSITION X

Si d'une équation quelconque on ôte un terme, et que les termes qui touchaient de part et d'autre celui qu'on a ôté, deviennent homogènes, ce sera un indice de racines impossibles.

DEMONSTRATION

En effet, la série des signes de l'équation est la même que la série des signes des F, mêmes pris aux $x = o$ (Prop II). Si donc, en ôtant un terme, les termes placés de côté et d'autre sont homogènes, dans la série des F mêmes, les F placés de côté et d'autre du terme (m-n)F qui manque (Prop. VII) seront aussi homogènes ; d'où il s'ensuit nécessairement que quelques unes des racines sont impossibles.

Théorème de Descartes.

116. On dit que deux termes consécutifs d'une fonction entière $f(x)$ à coefficients réels offrent une *variation*, quand ils ont des signes contraires; deux termes consécutifs qui ont le même signe offrent une *permanence*. Cela posé, l'importante proposition connue sous le nom de *théorème de Descartes* repose sur le lemme suivant.

Lemme. — *Si $f(x)$ désigne une fonction entière et que a soit une quantité positive, le nombre des variations contenues dans le produit $(x-a)f(x)$ surpassera d'une unité au moins, et toujours d'un nombre impair, le nombre des variations de $f(x)$*

En effet, ordonnons la fonction $f(x)$ par rapport aux puissances décroissantes de x et posons

$$f(x) = (P_0 x^m + \ldots) - (P_1 x^{m_1} + \ldots) + (P_2 x^{m_2} + \ldots) - \ldots \\ + (-1)^n (P_n x^{m_n} + \ldots),$$

en écrivant entre parenthèses tous les termes consécutifs qui ont le même signe; le nombre des variations de $f(x)$ est évidemment égal à n. Multiplions $f(x)$ par $x - a$, et écrivons d'abord le produit par x, il viendra

$$xf(x) = (P_0 x^{m+1} + \ldots) - (P_1 x^{m_1+1} + \ldots) + (P_2 x^{m_2+1} + \ldots) - \ldots \\ + (-1)^n (P_n x^{m_n+1} + \ldots).$$

Pour déduire de ce résultat la valeur du produit $(x-a)f(x)$, il faut lui ajouter $-af(x)$. Or, je dis qu'après cette addition les signes des termes dont les degrés sont respectivement $m+1$, m_1+1, $m_2+1, \ldots$, m_n+1 seront restés les mêmes. Cela est évident pour le premier de ces termes, puisque le produit $-af(x)$ n'est que du degré m. Quant au terme du degré m_1+1, il pourra être modifié, parce que $-af(x)$ peut renfermer un terme du même degré; mais ce terme, s'il existe, est le produit par $-a$ du dernier des termes contenus dans la première parenthèse de $f(x)$, et, par conséquent, il est négatif; donc le signe du terme de degré m_1+1 dans $xf(x)$ ne sera pas changé. Pareillement, si $-af(x)$ peut donner un terme du degré m_2+1, ce terme est nécessairement le produit par $-a$ du dernier des termes contenus dans la deuxième parenthèse de $f(x)$, et il a le signe $+$, comme le terme semblable du produit $xf(x)$. Il est évident que le même raisonnement s'applique à ceux des termes suivants que nous considérons. Mais le dernier terme de $-af(x)$ est de signe contraire au terme de degré m_n+1 qui figure dans $xf(x)$, et il ne peut se réduire avec aucun de ceux contenus dans ce produit. Donc, dans le produit $(x-a)f(x)$, les termes dont les degrés sont $m+1$, m_1+1, m_2+1,..., m_n+1 et le dernier terme auront alternativement les signes $+$ et $-$; il y a par conséquent au moins $n+1$ variations dans ce produit. Il peut y en avoir davantage; mais comme, en passant d'un signe $+$ à un signe $-$ ou inversement, on rencontre nécessairement un nombre impair de variations, il est évident que si le produit $(x-a)f(x)$ a plus de $n+1$ variations, il en aura $2k+n+1$, $2k$ désignant un nombre pair.

117. Le lemme que nous venons d'établir nous donne immédiatement le théorème de Descartes, qui consiste dans la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Dans une équation quelconque, le nombre des racines positives ne peut pas surpasser le nombre des variations du premier membre; et quand il est moindre, la différence est toujours un nombre pair.*

En effet, soit $f(x)=0$ l'équation proposée. Décomposons le polynôme $f(x)$ en ses facteurs linéaires; désignons par $F(x)$ le produit des facteurs qui répondent aux racines imaginaires ou négatives, et soient $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$ les racines positives. On aura

$$f(x)=F(x)(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_\nu).$$

L'équation $F(x)=0$ n'ayant pas de racines positives, le premier et le dernier terme de $F(x)$ sont de même signe, et en conséquence le nombre des variations de ce polynôme est un nombre pair $2k$ qui peut se réduire à zéro.

Le polynôme $F(x)$ ayant $2k$ variations, le produit $F(x)(x-a_1)$ en aura $2k_1+1$, d'après la proposition précédente, k_1 étant égal ou supérieur à k. Pareillement, le produit $F(x)(x-a_1)(x-a_2)$ aura $2k_2+2$ variations, et ainsi de suite, de manière que le dernier produit, qui est égal à $f(x)$, aura $2k_\nu+\nu$ variations, k_ν étant un entier positif ou nul.

COROLLAIRE. — *Dans une équation quelconque, le nombre des racines négatives ne peut pas surpasser le nombre des variations de l'équation transformée en $-x$, et quand il est moindre la différence est toujours un nombre pair.*