EULER, L'INFINI, ET LES NOMBRES IMAGINAIRES

Claude MERKER

Les morceaux choisis qui suivent sont tirés de l'Introduction à l'Analyse des Infinis de Léonard Euler, ouvrage à caractère didactique publié en 1748. Ils ont en commun d'arriver très vite au résultat, grâce à une manipulation algébrique de l'infini, lequel est en toute innocence traité comme du fini ; à aucun endroit Euler ne se trompe, laissant le lecteur moderne pantois devant tant de chance devant tant de transgressions si dangereuses, guidé comme il l'est par un sens sûr de ce qu'il peut négliger sans erreur (Voir le § 156).

Quelques dates

Leibniz et Newton ont inventé le calcul infinitésimal à peu près au même moment, 1675.

Le traité du Marquis de l'Hospital (Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes) date de 1696.

Déjà à l'époque de Newton, on écrivait formellement une formule du binôme avec un exposant n non entier positif, ce qui donnait lieu à une somme infinie au lieu d'une somme finie.

DEBUT DE LA PREFACE DE L'INTRODUCTION A L'ANALYSE DES INFINIS.

J'ai vu souvent que les difficultés, qui arrêtent les Commençants, lorsqu'ils se livrent à l'étude du Calcul infinitésimal, viennent en très grande partie de ce qu'ils veulent s'élever à la connaissance de cette nouvelle branche de l'Analyse, n'ayant encore qu'une teinture assez légère de l'Algèbre commune. Il arrive de là que non seulement ils sont arrêtés dès les premiers pas qu'ils font, mais encore qu'ils se forment des idées fausses de l'infini, dont la vraie notion doit les guider dans leurs opérations & dans l'objet de leurs recherches. Or quoique l'Analyse infinitésimale n'exige pas à la rigueur une connaissance approfondie de l'Analyse ordinaire, & de tous les moyens ingénieux qu'on a trouvés jusqu'à présent pour la perfectionner, on ne peut cependant nier qu'il y ait beaucoup de questions dont le développement est propre à préparer les esprits à l'étude de cette science sublime, & qu'on chercherait en vain dans la plupart des Traités élémentaires d'Algèbre, ou qui, si elles s'y trouvent, y sont traitées d'une manière assez peu exacte. C'est pourquoi je ne doute pas que les matières que j'ai rassemblées dans les deux Livres qui composent cet Ouvrage ne suppléent abondamment à ce défaut. Car non-seulement j'ai fait en sorte de ne rien omettre de ce qu'exige absolument l'Analyse des infinis, & de l'exposer avec plus d'étendue et plus de clarté qu'on ne le fait ordinairement ; mais j'ai de plus résolu un assez bon nombre de questions, qui mettront les lecteurs à portée de se familiariser insensiblement, & en quelque sorte contre leur attente avec l'idée de l'infini. J'ai aussi traité par les méthodes de l'Algèbre commune plusieurs questions, qui font ordinairement l'objet de l'Analyse infinitésimale, afin de rendre plus sensible & plus frappant l'accord parfait qu'on remarquera dans la suite entre les deux méthodes, (...)

Euler donne son propos très clairement : l'infini est une question d'algèbre ; nous sommes déjà loin des grands moments de la découverte du calcul infinitésimal, où l'on se préoccupe de la nature de l'infiniment petit, être étrange, nul ou non nul selon sa place dans le calcul, que le Marquis de L'Hospital, porte-parole des idées de Leibniz, essaie de faire reconnaître par le monde mathématique ; trois quart de siècle après Newton et Leibniz, la question du contenu est évacuée au profit de celle du fonctionnement, l'esprit est algébrique.

EXEMPLES DE DEMONSTRATIONS

CHAPITRE VII

Du Développement des Quantités exponentielles & logarithmiques en Séries

114. Puisqu'on a $a^0 = 1$ *, & qu'à mesure que l'exposant de* a *augmente, la valeur de la puissance augmente aussi, pourvu que* a *soit un nombre plus grand que l'unité ; il s'ensuit que si l'exposant surpasse infiniment peu zéro, la puissance surpassera l'unité aussi infiniment peu.. Soit* ω *un nombre infiniment petit, ou une fraction si petite, qu'elle diffère infiniment peu de zéro, on aura* $a^\omega = 1 + \psi$ *,* ψ *étant un nombre infiniment petit ; car il est constant par le Chapitre précédent, que si* ψ *n'était pas infiniment petit,* ω *ne pourrait pas l'être non plus.* ψ *sera donc ou* $= \omega$ *, ou* $> \omega$ *, ou* $< \omega$ *, rapport qui dépendra toujours de la valeur de la lettre* a *. Comme ce rapport est encore inconnu, faisons* $\psi = k\omega$ *, de manière que* $a^\omega = 1 + k\omega$ [1] *(....)*

115. Puisque $a^\omega = 1 + k\omega$ *, on aura* $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$ *, quelque nombre qu'on prenne pour* i *. Donc* $a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1} k\omega + \frac{i(i-1)}{1.2} k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3} k^3\omega^3 + \&c.$ *Si l'on fait* $i = \frac{z}{\omega}$ *, & que* z *représente un nombre quelconque fini, à cause de* ω *infiniment petit,* z *deviendra un nombre infiniment grand & par conséquent* $\omega = \frac{z}{i}$ *, étant une fraction dont le dénominateur est infini, sera une quantité infiniment petite, telle qu'elle a été supposée.*

Ecrivons donc $\frac{z}{i}$ *à la place de* ω *, & nous aurons* $a^z = (1 + \frac{kz}{i})^i$ [2]

$= 1 + \frac{i}{1} kz + \frac{i(i-1)}{1.2} k^2z^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3} k^3z^3 + \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4} k^4z^4 + \&c$ *; équation qui sera vraie, si l'on prend pour* i *un nombre infiniment grand, & alors* k *sera un nombre déterminé dépendant de la valeur de* a *, comme nous venons de le voir.*

116. Comme i *est un nombre infiniment grand ; il s'ensuit que* $\frac{i-1}{i} = 1$ *; car il est évident que plus le nombre qu'on substituera à* i *sera grand, plus la valeur de la fraction* $\frac{i-1}{i}$ *approchera de l'unité ; donc si* i *est un nombre plus grand qu'aucune quantité assignable, la fraction* $\frac{i-1}{i}$ *égalera l'unité. Par une raison semblable ;* $\frac{i-2}{i} = 1$ *;* $\frac{i-3}{i} = 1$ *&c.*

Concluons de-là que $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$ $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$*;* $\frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$ *; ainsi des autres.*

Ces valeurs étant donc substituées, il en résultera : $a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \frac{k^4z^4}{1.2.3.4} + \&c$ *;*

En moins d'une page l'exponentielle est développée en série ! La démonstration est stupéfiante pour le lecteur moderne, qui prend conscience du prix payé à la rigueur weierstrassienne : une longue marche d'approche avec rayons de convergence pour avoir le droit d'intervertir somme et limite ce qu'Euler fait en toute innocence, et le masquage complet du lien avec la formule du binôme, évident ici.

Les ressorts sont apparents :
- un nombre fini z est obtenu en multipliant un infiniment petit ω par un infiniment grand i.
- ce qui est vrai du fini l'est de l'infini, en particulier :
- la formule du binôme est écrite avec n infini (Comme dans le cas où n est fractionnaire ou négatif, la somme est infinie).
- on dirait aujourd'hui qu'on passe à la limite dans chaque terme avant de faire la somme infinie (opération sévèrement réglementée depuis dans les sommes infinies par la convergence uniforme, alors qu'elle est toujours possible dans le cas des sommes finies), mais pour Euler, i est un être achevé puisque « $\frac{i-1}{i} = 1$ » est une formule plus proche de « $\frac{\lim n - 1}{\lim n} = 1$ » (irrecevable), que de l'actuel « $\lim \frac{n-1}{n}$ ». Euler pense l'infiniment grand en acte.

118 Comme $a^{\omega} = 1 + k\omega$, ω étant une fraction infiniment petite, & que la relation entre a & k est donnée par cette équation : $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} +$ &c ; en prenant pour a la base logarithmique, nous aurons $\omega = l(1 + k\omega)$ & $i\omega = l(1 + k\omega)^i$; or il est visible que plus le nombre sustitué à i sera grand, plus la puissance $(1 + k\omega)^i$ surpassera l'unité, et qu'en faisant $i =$ à un nombre infini, la valeur de la puissance $(1 + k\omega)^i$ s'élèvera au dessus de l'unité. Donc si l'on suppose $(1 + k\omega)^i = 1 + x$, on aura $l(1 + x) = i\omega$. Il suit de là que le nombre $i\omega$ étant fini, puisqu'il est le logarithme du nombre $1 + x$, i doit être un nombre infiniment grand ; car autrement $i\omega$ ne pourrait avoir une valeur finie.

Cela ne dit pas grand chose, mais cela montre le souci d'Euler de justifier les bases de son calcul ultérieur.

119 Ayant fait $(1 + k\omega)^i = 1 + x$; $1 + k\omega = (1 + x)^{1/i}$, et $k\omega = k\omega + (1 + x)^{1/i} - 1$; d'où $i\omega = \frac{i}{k}\left((1 + x)^{1/i} - 1\right)$. Or $i\omega = l(1 + x)$; donc $l(1 + x) = \frac{i}{k}(1 + x)^{1/i} - \frac{i}{k}$, i étant supposé infiniment grand ; mais $(1 + x)^{1/i} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1.(i-1)}{i.2i}x^2$

$+ \frac{1.(i-1)(2i-i)}{i.2i.3i}x^3 - \frac{1.(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i.2i.3i.4i}x^4 +$ &c. ; & à cause de i infiniment grand $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3}$; $\frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}$ &c

Donc $i(1 + x)^{1/i} = i + \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$ &c, par conséquent $l(1 + x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c\right)$, a étant toujours la base logarithmique, & k désignant le nombre relatif à cette base, de manière que l'on ait l'équation $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} +$ &c

Log (1 + x) est à son tour une puissance de somme, à laquelle Euler va pouvoir faire subir un traitement non pas « binôme infini », mais « binôme avec exposant infiniment petit $\frac{1}{i}$ » 3, en faisant i - un nombre fini = i comme précédemment, il obtient le développement en série du logarithme.

120. Puisque nous avons trouvé une série égale au logarithme du nombre $1 + x$, nous pourrons à son aide, la base a étant donnée, représenter la valeur du nombre k. En effet, supposons $1 + x = a$, à cause de $l(a) = 1$, nous au rons

$$1 = \frac{1}{k}\left(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \&c\right) \quad \text{\& par conséquent}$$

$$k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \&c.$$

Série infinie, dont la valeur, en faisant $a = 10$, devra être à peu près $= 2{,}30258$, quoiqu'il soit difficile de concevoir que $2{,}30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + \&c.$; parce que les termes de cette série vont toujours en augmentant, & qu'il ne suffit par conséquent pas d'en calculer quelques uns pour en obtenir une valeur approchée. Nous remédierons tout à l'heure à cet inconvénient.

Issue d'un calcul dont on ne peut pas à l'époque d'Euler se demander s'il est valable, l'égalité est vraie « formellement », bien que la somme écrite au deuxième membre ne permette en aucune manière d'approcher 2,30258. Il y a deux sortes de séries, celles qui permettent *en plus* le calcul numérique et les autres. Les premières ne peuvent avoir un terme général qui augmente ; dans l'expression de cette « condition nécessaire », on sent comme une annonce de « le terme général doit tendre vers zéro ». On voit sur cet exemple que le point de vue des séries formelles a précédé celui desséries convergentes.

121 Si $l(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \&c\right)$; en faisant x négative,

$$l(1+x) = -\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \&c\right)$$

& en ôtant la seconde suite de la première ;

$$l(1+x) - l(1-x) = l\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \&c.\right).$$

Soit maintenant $\frac{1+x}{1-x} = a$, de manière que $x = \frac{a-1}{a+1}$, à cause de $l(a) = 1$,

$k = 2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{(a+1)^5} + \&c.\right)$; équation qui donne la valeur du nombre k, lorsqu'on connait celle de la base a. Ainsi en faisant $a = 10$, on aura $k = 2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3.11^3} + \frac{9^5}{5.11^5} + \frac{9^7}{5.11^7}\ \&c.\right)$, série assez convergente pour qu'on puisse en tirer promptement la valeur approchée de k.

On remarque l'usage du mot « convergente », semblable à l'usage actuel. Au § suivant, Euler utilise sa série pour obtenir e avec 23 décimales exactes. Le moyen employé que l'on ne peut qualifier d'accélération de convergence, puisqu'il n'y avait pas convergence est efficace.

CHAPITRE VIII

Des quantités transcendantes qui naissent du Cercle

132. Puisque $(sinz)^2 + (cosz)^2 = 1$, *en décomposant en facteurs, on aura* $(cosz + \sqrt{-1}\, sinz)(cosz - \sqrt{-1}\, sinz)$. *Ces facteurs, quoique imaginaires, sont d'un grand usage dans la combinaison & dans la multiplication des arcs. En effet, cherchons le produit de ces facteurs* $(cosz + \sqrt{-1}\, sinz)(cosy - \sqrt{-1}\, siny)$, *nous trouverons* $cosy.cosz - siny.sinz + (cosy.sinz + siny.cosz)\sqrt{-1}$ *; mais comme* $cosy.cosz - siny.sinz = cos(y+z)$, *&* $cosy.sinz + siny.cosz = sin(y+z)$ *; nous obtiendrons ce produit* $(cosz + \sqrt{-1}\, sinz)(cosz + \sqrt{-1}\, sinz) = cos(y+z) + \sqrt{-1}\, sin(y+z)$. *Semblablement*

$$(cosz - \sqrt{-1}\, sinz)(cosz - \sqrt{-1}\, sinz) = cos(y+z) - \sqrt{-1}\, sin(y+z)..$$

De même

$$(cosx \pm \sqrt{-1} sinx)(cosy \pm \sqrt{-1}\, siny)(cosz \pm \sqrt{-1}\, sinz) = cos(x+y+z) \pm \sqrt{-1}\, sin(x+y+z).$$

133. Il suit de là que $(cosz \pm \sqrt{-1}\, sinz)^2 = cos2z \pm \sqrt{-1}\, sin2z$,

& $(cosz \pm sinz)^3 = cos3z \pm \sqrt{-1}\, sin3z$ *; et qu'en général* $(cosz \pm \sqrt{-1}\, sinz)^n = cosnz \pm \sqrt{-1}\, sinnz$ *: d'où nous tirerons à cause du double signe,*

$$cosnz = \frac{(cosz + \sqrt{-1}\, sinz)^n + (cosz - \sqrt{-1}\, sinz)^n}{2} \quad \&$$

$$sinnz = \frac{(cosz + \sqrt{-1}\, sinz)^n - (cosz - \sqrt{-1}\, sinz)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Donc en développant ces binômes en série, nous aurons $cosnz = (cosz)^n - \frac{n(n-1)}{1.2}(cosz)^{n-2}(sinz)^2$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}(cosz)^{n-4}.(sinz)^4 - \ldots \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.2.3.4.5.6.}(cosz)^{n-6}(sinz)^6 + \&c.$$

$$sinnz = \frac{n}{1}(cosz)^{n-1}sinz - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(cosz)^{n-3}(sinz)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{(1.2.3.4.5)}cosz^{n-5}.(sinz)^5$$

$$- \ldots \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5.} - \&c.$$

Rien de vraiment nouveau, la formule de Moivre $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$ est redémontrée par factorisation complexe de la somme de deux carrés en supposant connues les formules d'addition des arcs. Les expressions de $\sin nz$ et $\cos nz$ vont par un raisonnement très eulérien, que l'on retrouvera plus tard chez Argand [4], fournir au § suivant le développement en série de sin et cos.

134. Soit z *un arc infiniment petit, alors* $sinz = z$, *&* $cosz = 1$ *; soit en même temps* n *un nombre infiniment grand, pour que l'arc* nz *soit d'une grandeur finie, pour que* nz, *par exemple,* $= v$ *; à cause de* $sinz = z = \frac{v}{n}$, *on aura*

$$cosv = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \&c. \quad \&$$

$$sinv = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \&c.$$

Ainsi, l'arc v étant donné, on pourra, à l'aide de ces séries, trouver son sinus & son cosinus.

Deux des techniques sont les mêmes qu'au § 116 : n, z, v sont respectivement les prédédents i, ω, z; et toujours n - un nombre fini = n. Mais il y a quelque chose de peut-être plus hardi encore puisque, avant d'écrire $i\omega = n$, cos z et sin z sont remplacés par leur infiniment petit équivalent du premier ordre, alors que z était un nombre fini gardé tel quel plus haut.

138. Supposons encore dans les formules précédentes (art. 133) l'arc z infiniment petit, & n un nombre infiniment grand i, afin d'obtenir pour iz une valeur finie v ; nous aurons donc nz = v, & $z = \frac{v}{i}$, & $\cos z = 1$; ces substitutions faites donneront

$$\cos v = \frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2} \quad \& \quad \sin v = \frac{\left(1+\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1-\frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}$$

Or dans le chapitre précédent, nous avons vu que $\left(1+\frac{z}{i}\right)^i = e^z$ *, e désignant la base des logarithmes hyperboliques ; ayant donc écrit pour z d'une part* $v\sqrt{-1}$ *, d'autre part* $v\sqrt{-1}$*, on aura*

$$\cos v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \quad \& \quad \sin v = \frac{e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires se ramènent à des sinus & à des cosinus d'arcs réels. On aura aussi :

$$e^{v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1}\sin v \text{ , \& } e^{-v\sqrt{-1}} = \cos v - \sqrt{-1}\sin v .$$

Pour arriver à la fameuse «formule d'Euler» , $e^{iz} = \cos z + i \sin z$, Euler revient en arrière, puisque le développement en série de sin et cos effectué en 134 n'a pas été utilisé, il a tout simplement réécrit la formule de Moivre :

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}$$

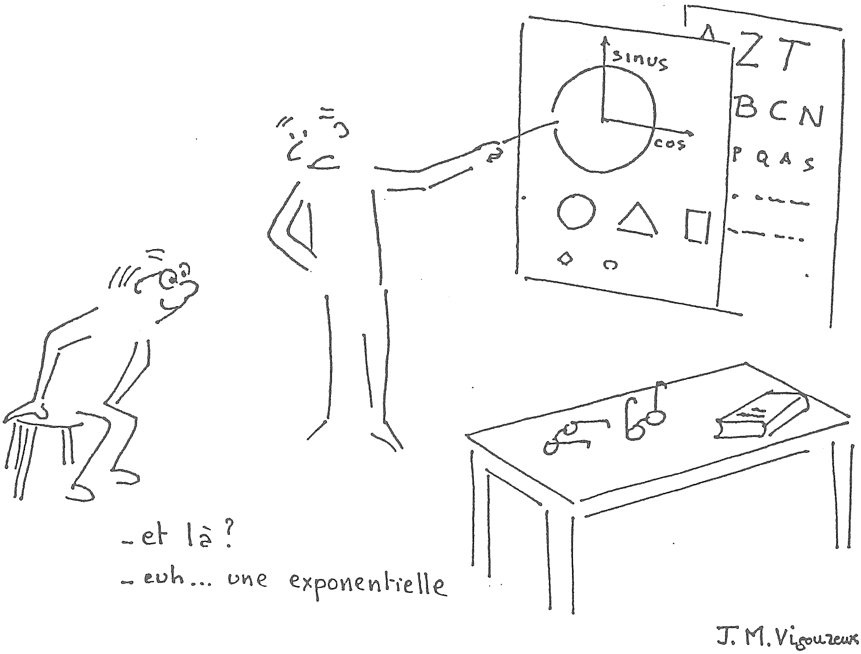
et par un tour de passe-passe maintenant habituel avec l' infini, il a rendu z infiniment petit, n infiniment grand (soit i), de manière à ce que nz = v soit un nombre fini, puis remplacé cos z et sin z par leurs équivalents du premier ordre, 1 et $z = \frac{v}{i}$ respectivement , pour s'apercevoir qu' il retombe exactement sur la formule du début du § 115 $a^z = (1 + \frac{kz}{i})^i$ avec a = e , c'est à dire k = 1) formule obtenue sans aucun mal d'ailleurs, puisqu'il n'a fait que remplacer a par sa valeur ; en somme il y a très peu de moyens mis en oeuvre pour ce résultat qui fait date dans l'histoire des mathématiques [5], il s'agit d'une simple relecture de la formule de Moivre, et aucun des trois développements en série n'a été utilisé [6].

Ces formules relient cosinus, sinus, et exponentielle imaginaire. Il fallait pour cela avoir dégagé sinus et cosinus de leur gangue géométrique, et les voir comme des fonctions de variable réelle ou complexe, vision liée à l'emploi des séries (La série réelle était connue de Newton).

On est loin du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, où l'imaginaire, simple intermédiaire de calcul était interdit dans le résultat final. Ici non seulement il ne gêne pas, mais encore c'est lui qui fait tout l'intérêt de la formule. Charles Naux, p. 165 de son Histoire des logarithmes, écrit ainsi les formules d'Euler (avec $i = \sqrt{-1}$) :

$$\cos v = \frac{\left(1 + \frac{vi}{\infty}\right)^{\infty} + \left(1 - \frac{vi}{\infty}\right)^{\infty}}{2} \quad \& \quad \sin v = \frac{\left(1 + \frac{vi}{\infty}\right)^{\infty} - \left(1 - \frac{vi}{\infty}\right)^{\infty}}{2i}$$

et commente ainsi : « les deux transcendances, circulaire et exponentielle ne se contentent plus d'étendre le nombre des chapitres de l'algèbre, en multipliant et en variant les propositions. Elles interviennent en compagnie de deux facteurs opératoires, l'imaginaire et l'infini, qui, un siècle auparavant, auraient plutôt joué le rôle d'épouvantail que celui de soutien d'un progrès de qualité supérieure ».



CHAPITRE IX

De la recherche des facteurs trinômes

Ce chapitre commence par une partie technique, où Euler factorise les polynômes $a^n + z^n$, $a^n - z^n$, chaque terme du premier degré est regroupé avec son conjugué (si n est impair, il subsiste un terme isolé réel du premier degré), ainsi $a^n - z^n$ se voit factorisé en produits de trinômes $\left(a^2 - 2\,az\cos.\frac{2k\pi}{n} + z^2\right)$, pour 2k inférieur à n, ce qui fait, en gros, $\frac{n}{2}$ facteurs ; et bien sûr, il ne va pas rester avec n fini.

155. (...)

$$e^x - 1 = x\left(1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \&c\right)$$

outre le facteur x aura cette suite infinie de facteurs

$$\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{36\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{64\pi\pi}\right)\&c.$$

Le nombre 1 joue le rôle de z^n, e^x celui de a^n, puisque $e^x = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i$, n est donc i et a est $1 + \frac{x}{i}$! Les facteurs trinômes s'écrivent $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^2 - 2\left(1 + \frac{x}{i}\right)\cos\frac{2k}{i}\pi + 1$, et là Euler ne peut pas, comme plus haut, remplacer cos par 1, à cause du 1 qui figure dans la parenthèse, aussi le remplace-t-il par son équivalent du deuxième ordre ; et les facteurs trinômes sont du genre $\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{x^2}{4k^2\pi^2}\right)$, qui contiennent encore chacun l'infiniment grand i, en général exclu des formules finales...[7] Le problème est de savoir s'il peut égaler $\frac{x}{i}$ à zéro.

156. Mais comme chacun de ces facteurs renferme la partie infiniment petite $\frac{x}{i}$, qui par la multiplication de tous les facteurs dont le nombre est $\frac{1}{2}i$, produit le terme $\frac{x}{2}$, cette partie ne peut pas être négligée. Ainsi pour obvier à cet inconvénient, considérons cette expression

$$e^x - e^{-x} = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i = 2\left(\frac{x}{i} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \&c.\right) \text{ car } e^x = \left(1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2.} + \frac{x^3}{1.2.3.} + \&c.\right)$$

La comparaison de cette formule avec celle de l'art. 151, donne $n = i$, $a = 1 + \frac{x}{i}$, & $z = 1 - \frac{x}{i}$; le facteur de cette expression sera donc

$$= aa - 2az\ \cos\frac{2k}{n}\pi + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2\left(1 - \frac{xx}{ii}\right)\cos\frac{2k}{i}\pi = 4\frac{xx}{ii} + 4\frac{kk\pi\pi}{ii} - 4\frac{kk\pi\pi xx}{i^4},$$ *à cause de*

$\cos\frac{2k}{i}\pi = 1 - 2\frac{kk\pi\pi}{ii}$. La fonction $e^x - e^{-x}$ sera donc donc divisible par $1 + \frac{xx}{kk\pi\pi} - \frac{xx}{ii}$. On pourra à présent négliger en toute sûreté le terme $\frac{xx}{ii}$, car quoique multiplié par i, il resterait encore infiniment petit. Mais si comme auparavant on fait $k = 0$, on trouvera le premier facteur $= x$. Ainsi en rangeant par ordre tous les facteurs, on aura

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1+\frac{xx}{\pi\pi}\right)\left(1+\frac{xx}{9\pi\pi}\right)\left(1+\frac{xx}{16\pi\pi}\right)\left(1+\frac{xx}{25\pi\pi}\right)$$
$$= x\left(1+\frac{xx}{1.2.3}+\frac{x^4}{1.2.3.4.5.}+\frac{x^6}{1.2....7}+ \&c.\right)$$[8]

Changement de mode de pensée : pour quelques instants l'infiniment grand i est pensé comme « grand », mais fini, ce qui permet de voir que la contribution du terme infinitésimal du premier ordre $\frac{x}{i}$ n'est pas négligeable, puisqu'en fin de calcul elle est $\frac{x}{2}$. C'est un raisonnement dont la pensée sous jacente est celle de limite qui est employé ici.

Voyant qu'il ne pourra se débarrasser des termes infinitésimaux Euler fait machine arrière et cherche un autre produit infini, celui de $e^x - e^{-x}$, où il peut négliger les termes contenant i parce que, une fois les calculs achevés, il ne reste qu'un infiniment petit. Il s'agit bien du même principe mis en oeuvre par Leibniz : on fait $dx = 0$, mais seulement à la fin du calcul.

Le jonglage avec les ordres infinitésimaux a conduit à un résultat exact, on s'attendait pourtant à ce qu'il se trompe, là, partout ailleurs i avait disparu plus tôt que cela ! Mais Euler a sa rigueur, il est un calculateur virtuose, et il sait très bien que si l'on ne peut négliger $\frac{i}{2}$ fois $\frac{1}{i}$, on peut parfaitement, en revanche, négliger $\frac{i}{2}$ fois $\frac{1}{i^2}$.

CONCLUSION

Essayons d'esquisser une comparaison entre l'infini (infiniment grand, infiniment petit), et les imaginaires au cours de leur histoire.

Tous deux ont été soumis à la forte impulsion d'un principe de permanence créateur (indispensable ?) :

- les imaginaires ont les mêmes propriétés de calcul que les réels, cette assertion est énoncée comme un principe par Albert Girard en 1629.
- l'infini a les mêmes propriétés que le fini, ce principe n'est peut-être pas énoncé aussi nettement, mais il est mis mis en oeuvre, par exemple, constamment chez Euler[9].

Lequel rencontre des obstacles ; prenons comme exemples :

- Log (- 1) vaut zéro, car $\log(1) = \log(-1)^2 = 2\log(-1)$ (principe de permanence), mais $\log(-1) \neq 0$, car log est injective, et zéro est déjà pris! (principe de permanence...). Voir note 12.
- La borne inférieure d'une collection finie de nombre strictement positifs est strictement positive, mais si la collection est infinie, ce n'est plus vrai, elle peut être nulle. En rapport étroit avec cette difficulté, le concept de convergence uniforme (découvert par Seidel, grâce à une analyse très serrée d'une preuve incomplète de Cauchy)[10], donnera des conditions dans lesquelles l'infini se comporte comme le fini.

Pourtant l'infini et les imaginaires ont subi des remaniements de nature très différente au cours de leur histoire : les imaginaires se voient localisés, dans un corps, mais cela ne fait que dire mieux ce que l'on savait déjà, satisfaction d'ordre géographique.... Ils pourront figurer dans les formules finales. Quant à l'infini, il est évacué au $19^{\text{ème}}$ siècle au profit du calcul α–ε ique qui le rend domestique en transformant son visage jusqu'à le rendre méconnaissable, il est interdit de séjour dans les résultats finaux, remplacé par « limite ». Pourtant tous les physiciens raisonnent encore avec des infiniment petits, en une sorte de pensée parallèle, et aucun cours de théorie de la mesure ne fait que l'on se passe de cette vision des choses pour calculer le volume de la sphère. Paradoxe jamais levé , cet être contradictoire, dx, est tel que l'on ne peut pas se passer de le penser.

Une domestication de l'infini qui ne le défigure pas complètement, c'est celle que propose l'analyse non standard ; à mon avis on peut dire qu' Euler par son utilisation confiante des infiniment grands et petits est le père de cette théorie.

Une dernière remarque à propos du raisonnement par analogie (ou utilisation d'un « Principe de permanence ») chez Euler :
- Il s'en est abondamment servi pour traiter l'infini, sans jamais se tromper quant au fond puisque tous ses résultats ont été justifiés rigoureusement par la suite.
- En revanche, là où tous ses contemporains pensaient que la validité du dit principe ne faisait aucun doute, à savoir pour l'exploration de propriétés du logarithme complexe, l'assertion d'Euler « Un nombre a plusieurs logarithmes » a constitué une vraie rupture avec le principe.

CONCLUSION PEDAGOGIQUE

Pourquoi ne pas donner à lire aux étudiants qui apprennent les développements en série entières des fonctions usuelles, en plus des textes modernes, les textes d'Euler tels quels ?

Je verrais plusieurs intérêts à cela :
- Un intérêt documentaire : voir comment on faisait en toute bonne conscience à cette époque (ainsi qu'on le voit dans sa préface, Euler n'a pas le moindre doute quant à sa manipulation des infinis).
- Les kilomètres de marche d'approche avec convergence à l'intérieur d'un disque, interversions permises etc... masquent l'affinité du développement de l'exponentielle avec la formule du binôme infinie, et c'est dommage de l'oublier.
- La longueur d'une démonstration opère une sélection parmi les étudiants, celles de l'Introductio sont d'une rapidité étonnante : on arrive tout de suite au résultat. Peut-être laisserait-on moins de monde en chemin ?
- Cela permettrait de bien séparer idée et législation, les idées d'Euler sont simples, on calcule avec les sommes infinies comme si elles étaient finies (principe de permanence, comment faire autrement quand on ne connait pas que d'essayer déjà si ce que l'on connait marche...). Telle qu'elle est enseignée, coupée de son histoire, la rigueur se confond avec le droit (a-t-on le droit d'intervertir ?). Séparer l'idée du lourd tribut que l'on doit payer aux rares cas où l'on n'a réellement pas le droit de ... ne serait pas toujours inutile. Démontrer ce n'est pas seulement vérifier que l'on écrit rien de faux ou d'infondé ; c'est aussi imaginer, essayer, induire, n'en déplaise à Popper qui passe sous silence toute genèse d'une théorie pour ne la voir que sous l'angle de ses falsifications possibles [11].
- Et d'un simple point de vue de plaisir esthétique, les splendeurs de la perspective à la Renaissance n'empêchent pas d'être émerveillé par les icônes ou l'art gothique dont les inexactitudes ne sont pas que des manques. Les démonstrations d'Euler sont belles, concises, elles ont leur cohérence, et elles ont résolu, par des méthodes inductives consistant à généraliser sans se demander si c'est permis, une foule de problèmes résistants à l'investigation de ses prédécesseurs [12].

Notes

[1] Nous dirions, aujourd' hui, qu' Euler confond « continue » et « dérivable » , mais ce qui est étonnant, ce n'est bien sûr pas cela puisque ces notions n'étaient pas ainsi pensées à son époque, c'est plutôt ceci : $\sqrt{x}$ bien connue de lui, s'écrit pour $x = \omega$, $0 + \psi$, ψ étant un nombre infiniment petit qui ne peut pas s'écrire $k\omega$ ... S'il s'est trompé *à l'intérieur de son propre système de pensée*, c'est sans doute que son véritable propos est ailleurs.

[2] Maintenant, nous écririons $e^z = \lim (1 + \frac{z}{n})^n$ tandis qu' Euler, dans un style très « non-standard » admet l'infini comme un nombre, dans la formule même. Cette égalité lui servira plus loin à démontrer la « formule d'Euler » qui relie les fonctions trigonométriques et l'exponentielle complexe.

[3] Je n'ose dire que ce mode de raisonnement est inédit : c'est un problème de quantificateurs, pour affirmer que quelque chose apparait pour la première fois chez un auteur donné, il faudrait en toute rigueur avoir lù tous les textes de tous ses prédécesseurs. Longtemps après Euler, en 1797 , Lazare Carnot utilise encore une formule du binôme avec exposant infiniment petit dans sa « Métaphysique du calcul infinitésimal » (il développe $(1 + b)^{dx}$ en série dans le but de dériver l'exponentielle , page 44).

[4] Dans son « Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques » (1806) , page 26.

[5] Cotes , en 1722 , avait annoncé $\log (\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = \sqrt{-1}\, x$, avec une démonstration géométrique; il n'a pas donné ses calculs a livré le résultat tel quel « aux autres, à ceux auxquels elle semble d'un grand prix, pour qu'ils l'examinent d'une manière plus approfondie » , de plus il a continué de penser, sans doute pour les mêmes raisons que Bernouilli, $\log\sqrt{-1} = 0$, ce qui est en complète contradiction avec son résultat (cf. Ch. Naux page 161). Que cette formule soit traditionnellement attribuée à Euler, cela peut venir d'un besoin courant d'admirer les grands hommes, à moins que l'important soit moins la découverte d'une formule que la découverte de l'importance de la formule.

[6] Formellement, en additionnant les séries, Euler aurait obtenu immédiatement $e^{v\sqrt{-1}} = \cos v + \sqrt{-1} \sin v$. Dans les pages qui suivent, il ne mentionne pas ce fait.

[7] Encore que l'expression $a^z = (1 + \frac{kz}{i})^i$ semble bien être une « formule » dans l'Introductio.

[8] Euler fait remarquer plus bas § 158 que le développement de sin en produit est très facile à obtenir puisque les racines sont connues : il suffit de factoriser sin comme un polynome ; alors pourquoi ne l'a-t-il pas fait, pour en déduire sans mal celui de $e^x - e^{-x}$? Une explication possible est que ses démonstrations étant très imprégnées d'induction, toute « vérification » est un argument supplémentaire en faveur de la justesse du résultat.

[9] Encore un exemple , il donne une démonstration de $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$ (cf note 10) en considérant sin comme un polynôme infini auquel il applique les relations classiques pour les polynômes entre les coefficients et les racines. Voici comment (le résumé de démonstration ci-dessous figure dans le n° spécial π, Petit Archimède, p. 103) :

« Euler savait, par la théorie des équations algébriques, que la somme des inverses des racines de

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + 1 = 0$$

est égale à $-a_1$.

Il part alors du développement de sin x

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \ldots$$

dont les deux membres s'annulent pour $x = \pm\pi$, $\pm 2\pi$, $\pm 3\pi$ ... ; le développement

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} \ldots$$

s'annule pour les mêmes valeurs et en posant $x^2 = y$ on obtient

$$1 - \frac{y}{3!} + \frac{y^2}{5!} - \frac{y^3}{7!} + \frac{y^4}{9!} + \ldots$$

qui s'annule pour $y = \pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2$, etc ...

Il applique au *développement infini* ci-dessus ce qu'il sait vrai pour les polynômes et conclut « donc » que la somme des inverses des racines vaut :

$$\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{1}{9\pi^2} + \frac{1}{16\pi^2} + \ldots = -a_1 = \frac{1}{3!}$$

d'où $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6}$ ».

10 Voir Lakatos ; « Preuves et Réfutations ».

11 Voir Popper : « Conjectures et Réfutations ». Dans cet ouvrage Popper critique l'induction, en ce sens que des exemples particuliers en nombre arbitraire ne suffiront jamais à assurer la validité d'une assertion générale, tandis qu'un seul contre-exemple suffit à falsifier cette même assertion. La falsification devient un critère de scientificité, remplaçant la vérification chère aux empiristes. Du point de vue logique c'est irréfutable ..., mais l'heuristique est elle une simple question de logique ? D'où viennent les idées ? Popper est il sûr que l'imagination est complètement étrangère à l'induction ?

12 Par exemple :

- trois nouvelles séries donnant la valeur de π, obtenues au § 139 comme conséquences (élaborées) de la formule d'Euler.

- la valeur de la somme des inverses des carrés des nombres entiers (cf note 8) qui avait résisté à la sagacité de Bernouilli, alors qu'Euler l'obtient comme corollaire de son produit infini du § 156 (la démonstration est plus simple que celle donnée dans la note 9), avec en prime la valeur de la somme des inverses des puissances paires des nombres entiers, toutes fractions de puissances de π ; les valeurs numériques sont calculées jusqu'à $n = 26$. Le cas des puissances impaires différentes de 3 résiste toujours aux mathématiciens contemporains.

- La « véritable nature » du logarithme complexe qui est d'être « multiforme » est mise en évidence par un calcul qui repose sur un argument du genre : les solutions d'une équation approchée de l'équation E sont solutions approchées de E. La démonstration d'Euler, en rupture avec les idées de son temps, met fin à une longue querelle entre Leibniz et Bernouilli à propos de la valeur à attribuer à log -1. Cf l'article de J.L.Verley in A.P.M.E.P n° 41 1981.

- Au chapitre XV, § 283, $\zeta(n) = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} \ldots$ est, en une démonstration étonnante de simplicité, égalée à l'inverse du produit de tous les $1 - \frac{1}{p^n}$, p premier. Euler avait déjà trouvé, à partir du même résultat démontré plus haut, que la série des inverses des nombres premiers diverge (au § 279).

- D'innombrables résultats numériques, avec un souci constant d'accélérer la convergence.

BIBLIOGRAPHIE

Introduction à l'analyse infinitésimale par L. EULER Edition de 1835 chez Bachelier.
Philosophie et calcul de l'infini. C. Houzel, J.L. Ovaert, P. Raymond, J.J. Sansuc. Maspero éd. 1976.
Histoire des logarithmes de Neper à Euler. Ch. Naux. Blanchard éd. 1966.
Article "EULER" de l'Encyclopedia Universalis.