INTUITION ET DEMONSTRATION CHEZ ARCHIMEDE

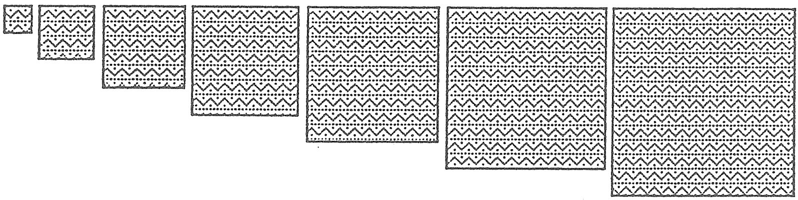
Bernard BETTINELLI

Lorsque j'ai été tenté par la lecture des œuvres d'Archimède, le travail qu'il avait pu faire avec sa spirale m'a d'abord inspiré. En même temps que le sujet choisi, je fus confronté à la découverte de sa manière de présenter des résultats. Cette forme obligée de la présentation, n'est en aucun cas conforme à la démarche par laquelle il découvrit ses grands résultats. Il y a d'une part la conviction personnelle qu'une relation est vraie : la découverte, et d'autre part la présentation aux autres et à la postérité : la démonstration. Je vais essayer d'en faire sentir la différence sur quelques exemples fondamentaux.

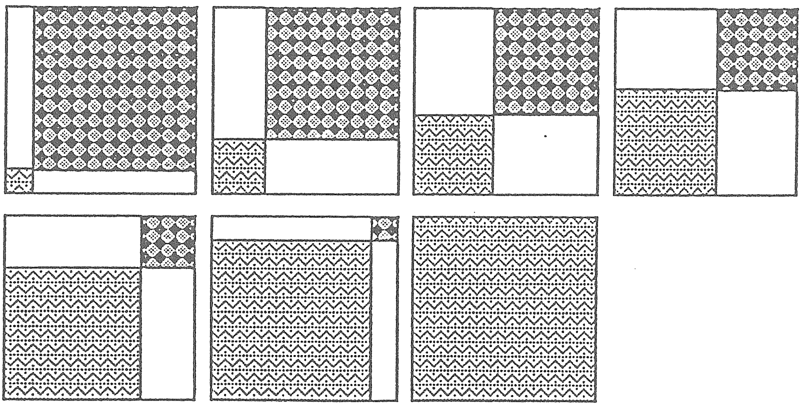
EXEMPLE 1 : L'aire de la première révolution de spirale ou l'exhaustion

En pénétrant dans cet ouvrage, je fus étonné de lire une ensemble disparate de propositions dont certaines avaient trait au déplacement d'un point dans un mouvement uniforme, d'autres à des rapports de segments liés à des sécantes ou tangentes à un cercle et enfin 2 propositions difficiles à comprendre et sans rapport avec ce qui précédait. Voici la traduction en images de la première :

Proposition 1 : la somme des carrés des n premiers multiples d'une longueur est supérieure au tiers de la somme de n carrés égaux au plus grand, elle-même supérieure à la somme des carrés des (n - 1) premiers multiples de cette longueur.

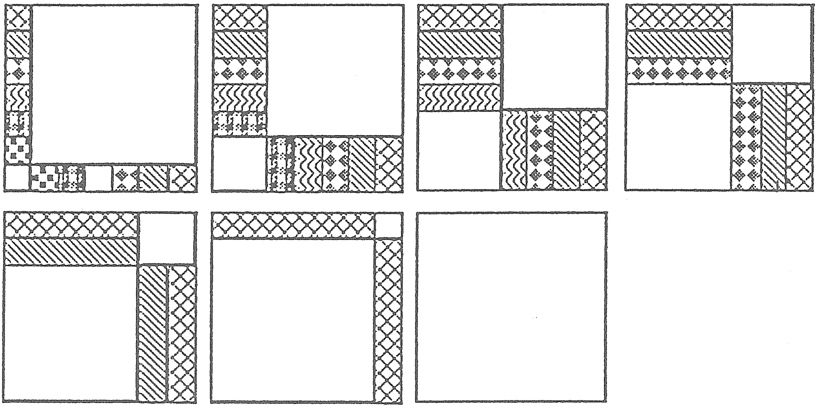


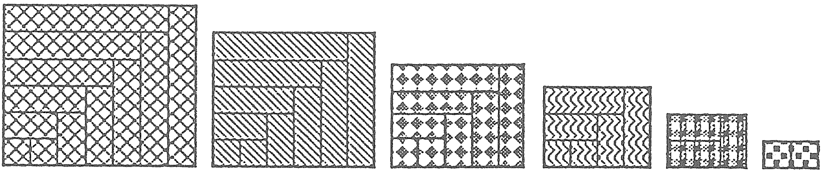
En voici la raison



Chaque carré est enfermé dans un carré de la plus grande taille, et fait apparaître en diagonale un second carré (sauf le dernier). Du coup, on voit la somme des carrés des n premiers multiples plus celle des (n - 1) premiers multiples (à contresens).

Dans ces grands carrés, les rectangles restants peuvent être découpés en bandes et réorganisés en une suite de rectangles intermédiaire entre les 2 suites de carrés :



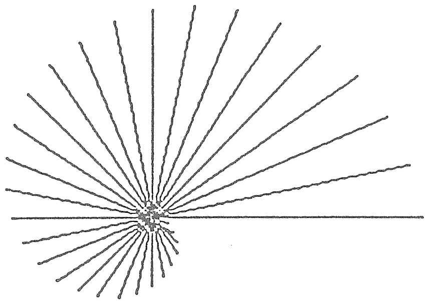


Ainsi le résultat annoncé est vrai : la matière des n grands carrés s'est partagée en 3 suites rangées de la plus grande à la plus petite :

les n carrés ; les n rectangles ; les (n - 1) carrés.

Le plus difficile à comprendre est le rapport entre une telle proposition et la spirale - non encore définie.

La spirale est décrite comme composée de 2 mouvements : l'un d'une demi-droite autour de son origine dans un mouvement uniforme, l'autre d'un point sur la demi-droite à partir de l'origine dans un mouvement uniforme.

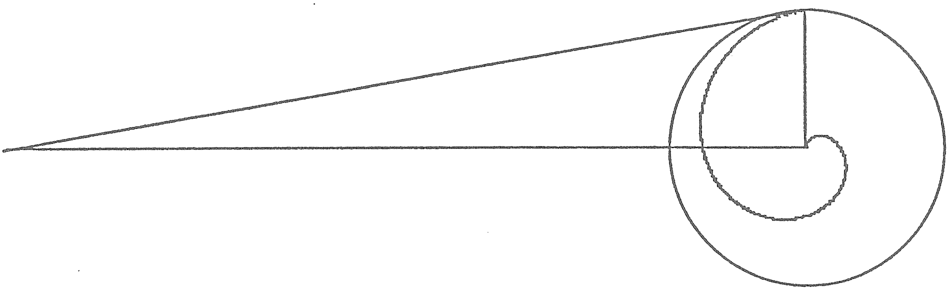


C'est une première chose étonnante que cette définition cinématique d'une courbe dans l'Antiquité!

La proposition la plus importante ensuite est la suivante :

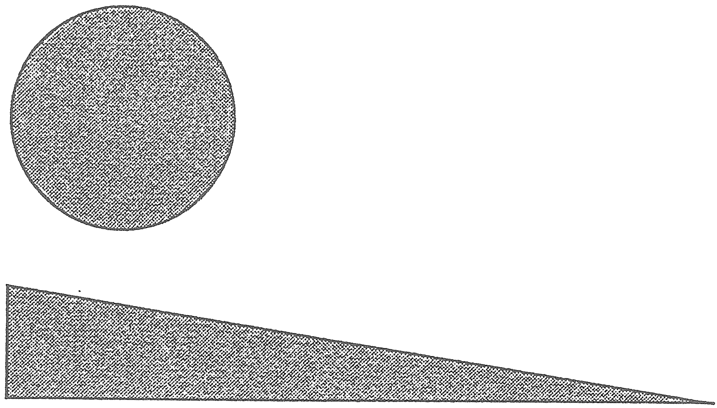
Proposition 2 : Si une ligne est tangente à l'extrémité d'une spirale décrite en première révolution, et, si du point d'origine de la spirale, on élève une perpendiculaire sur la droite initiale de révolution, cette perpendiculaire rencontrera la tangente, tandis que la droite située entre la tangente et l'origine de la spirale, sera égale à la circonférence du premier cercle.

C'est certainement cette proposition qui a incité Archimède à inventer sa spirale : trouver une construction d'un segment de la longueur d'un cercle ; et justement la sous-tangente de la spirale en fin de première révolution a exactement la longueur du cercle de fin de première révolution!



C'est manifestement le problème millénaire de la quadrature du cercle qui est sous-jacent : problème d'aire à priori puisqu'il s'agit de construire à la règle et au compas un carré de même aire qu'un disque donné. Mais on trouve dans un autre livre (De la mesure du cercle) cette proposition :

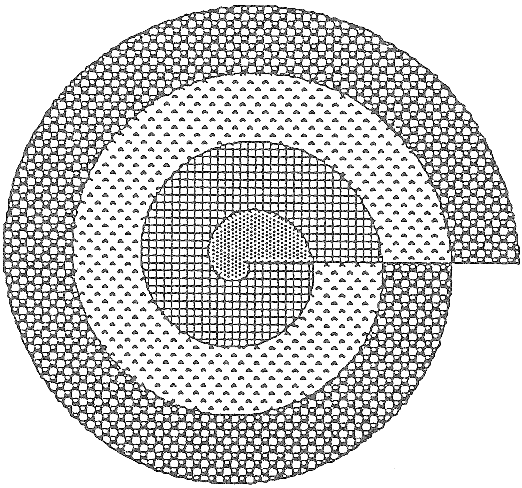
Proposition 3 : Tout cercle équivaut au triangle rectangle pour lequel on a le rayon égal à l'un des côtés adjacents à l'angle droit et le périmètre égal à la base.



Très joli transfert du problème puisque maintenant le problème d'aire est équivalent au problème de longueur : construire un segment de la longueur de la circonférence d'un cercle donné.

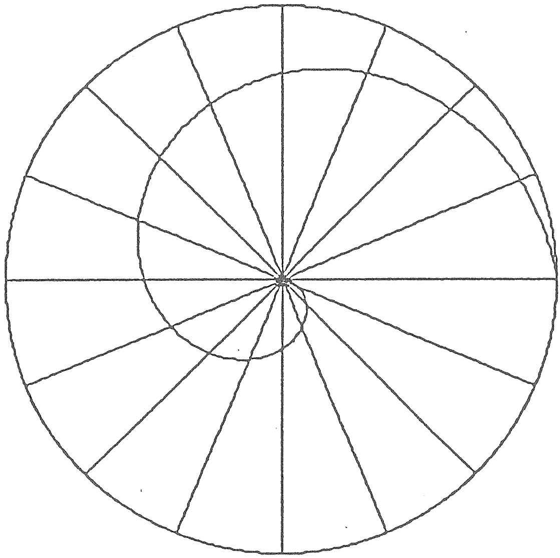
Et la proposition 2 donne un second transfert : pour construire ce segment, il suffirait de pouvoir construire la tangente en fin de première révolution à la spirale inscrite.

Dans tout celà, à quoi sert la proposition 1? La fin du livre définit les aires des révolutions de spirale

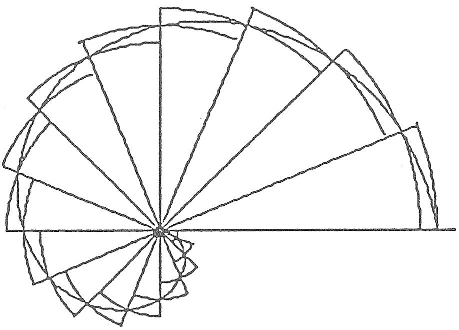


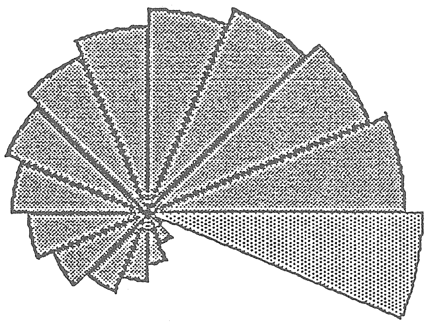
et nous offre de très belle démonstrations les concernant.

Voici comment il trouve l'aire de la première révolution :



Elle est inscrite dans le cercle de fin de première révolution, et tous deux sont découpés en n secteurs. La spirale est encadrée par des secteurs circulaires :

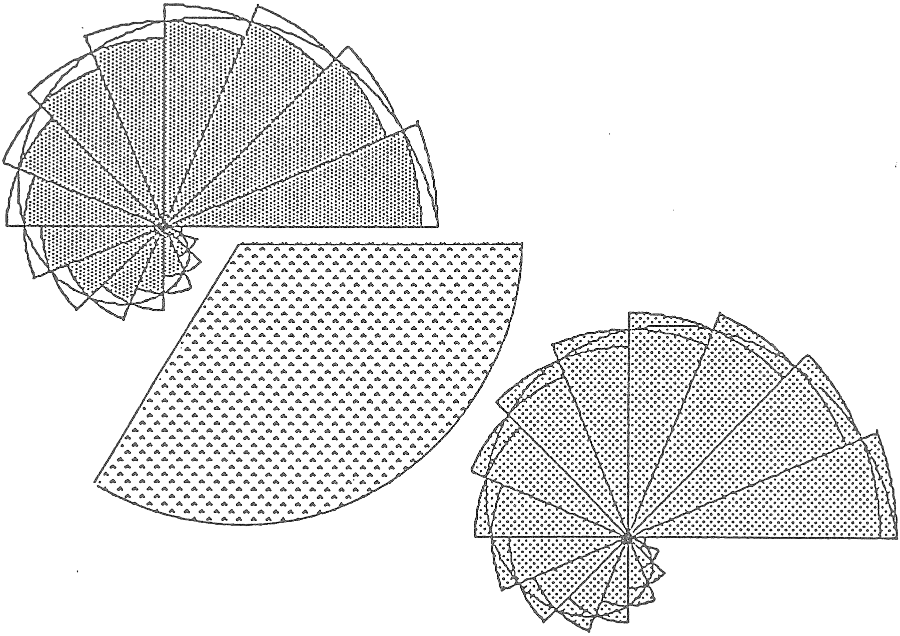




Ces secteurs forment 2 figures dont la différence est exactement un secteur du grand disque, comme on le voit en tournant la figure circonscrite de $\frac{1}{n}$ tour .

En choisissant bien n, il pourra rendre ces 2 figures plus proches l'une de l'autre que toute aire (non nulle!) donnée à l'avance.

Mais il reste un problème : peut-on connaître les aires de ces figures plus facilement que celle de la spirale?



Arrive alors la démonstration finale sur le refrain de l'exhaustion, air commun à toutes les démonstrations d'Archimède, qui nous montre que le concept de limite n'étant pas présent dans sa tête, une grandeur-limite ne peut qu'être égale à une autre parce qu'elle ne peut en être différente :

Proposition 5 : L'aire de la première révolution de spirale est égale au tiers de celle du disque de fin de première révolution.

Démonstration : Sinon elle serait différente et <u>la différence existerait (cad ne serait pas nulle)</u>.

Et alors il pourrait construire 2 figures plus proches l'une de l'autre que cette différence ; et c'est la contradiction car les aires de ces figures doivent encadrer simultanément la spirale et le tiers du disque en étant plus proches l'une de l'autre que ces 2 aires!

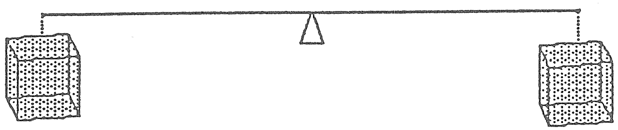
Cet exposé détaillé montre comment s'expose une découverte chez Archimède et comment il faudrait presque lire les livres à contresens pour comprendre comment s'est construite la démarche.

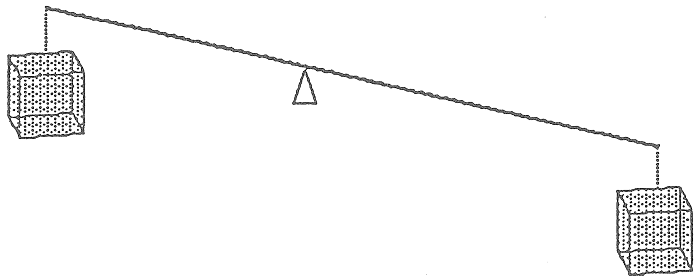
EXEMPLE 2 : Le théorème du levier ou Des postulats aux théorèmes

Un autre aspect de la présentation faite par Archimède est l'adaptation et la proximité des postulats et des propositions. Hilbert nous a habitués à des ensembles d'axiomes généraux définissant les types de géométrie dans lesquels on se place volontairement. Les Anciens formulaient des postulats qui tombaient sous l'évidence de la perception, ils étaient tels que la vérité qu'ils affirmaient ne pouvait être mise en doûte par personne. Chez Archimède, presque chaque livre a ses postulats adaptés. Voici un exemple très intéressant : l'équilibre d'une balance. Observez la simplicité des postulats et l'utilisation qu'il en fait pour démontrer le fameux théorème des leviers.

Postulat 1 : Des masses égales s'équilibrent à des distances égales du point d'appui.

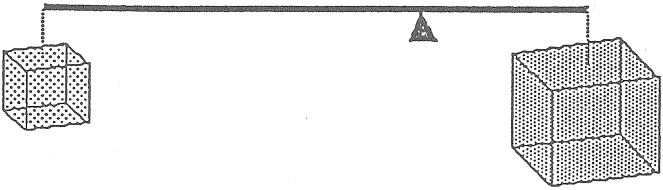
Et si des masses égales sont disposées à des distances inégales du point d'appui, il y a inclinaison du côté du plus grand bras.





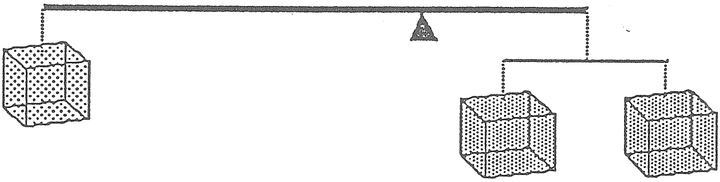
Postulat 2 : Si 2 masses sont en équilibre autour d'un point, et qu'on enlève de la matière à l'une d'elles, il y a inclinaison du côté de l'autre masse.

Si on ajoute de la matière à l'une d'elle, il y a inclinaison de son côté.



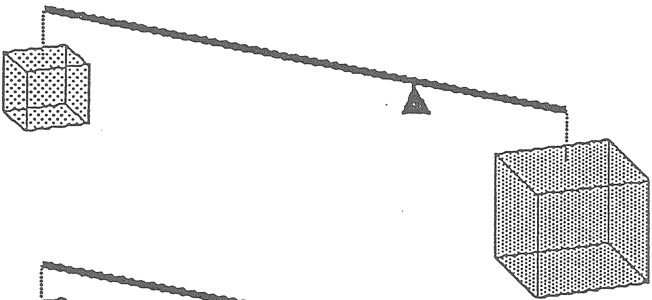
Postulat 3 : On peut remplacer une masse par 2 masses moitiés disposées symétriquement sans changer l'équilibre.

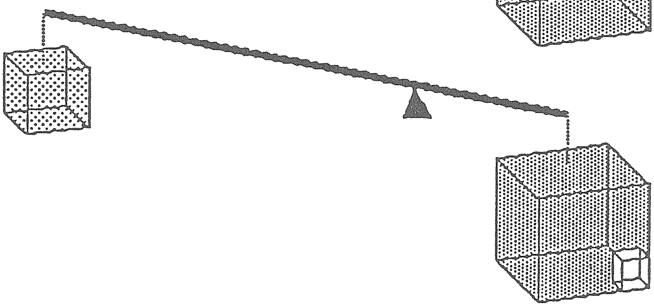
Et réciproquement, on peut remplacer 2 masses égales par une double placée au milieu.



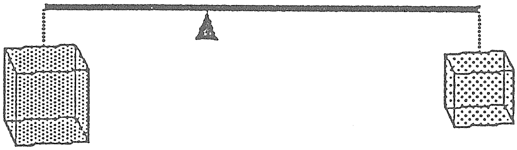
Postulat 4 : Si 2 masses sont en déséquilibre, on peut ôter de la matière à celle qui est en position basse sans modifier le déséquilibre.

Et de même, on peut en ajouter à celle qui est en position haute sans modifier le déséquilibre.



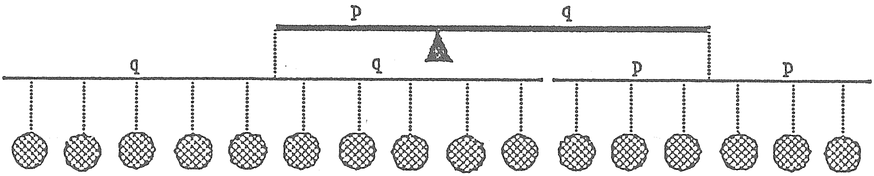


Proposition : Le point d'équilibre de 2 masses suspendues est le point qui partage la barre dans le rapport inverse des masses.



Premier cas : Le rapport des masses est rationnel

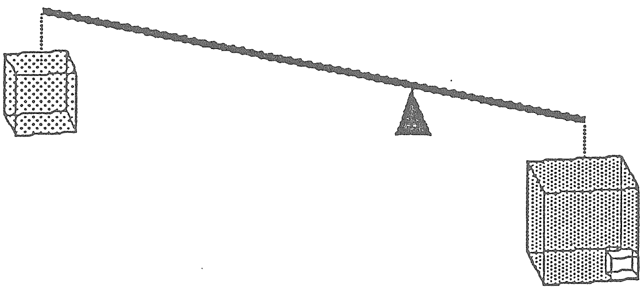
Il existe une masse m qui mesure les 2 masses. La barre est divisée en (p+q) segments égaux de longueur U. Un mobile est constitué en suspendant une barre de longueur 2.q à une extrémité, 2.p à l'autre extrémité, et en suspendant une masse m/2 au milieu de chacune des 2.q parties et des 2.p parties de longueur U de ces 2 barres, grâce au postulat 3.



L'ensemble est formé de (2.q + 2.p) masses, et si on suspend la barre supérieure au point qui la partage en $\frac{p}{q}$, il y a symétrie des masses, donc équilibre.

Deuxième cas : le rapport est irrationnel

Il suspend néanmoins la balance au point qui partage la barre dans le rapport inverse de celui des masses.

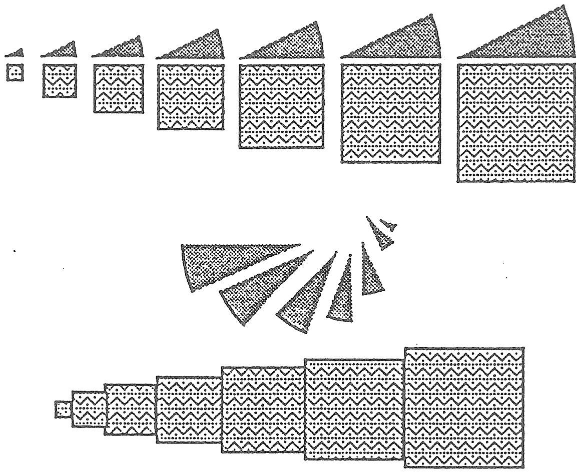


Supposons qu'il n'y ait pas équilibre, et que la balance penche du côté de Q :

Puisqu'on pourrait ôter une masse M à Q, suffisamment faible pour ne pas changer le déséquilibre (quatrième postulat), on peut aussi partager la masse P en n parties U plus petites que M. Q est compris entre 2 multiples successifs de U.

$$p . U < Q < (p+1) . U$$

Et voilà que va rentrer en service la proposition 1, car Archimède va associer chaque secteur des figures avec le carré de son rayon.



et par la connaissance du calcul des proportions, il sait que la somme des secteurs (soit chaque figure) est associée à la somme des carrés correspondante dans le même rapport.

Du coup, la proposition 1 se transforme par proportionnalité (qui conserve l'ordre) :

Proposition 4 : La figure inscrite est inférieure au tiers du grand disque, lui-même inférieur à la figure circonscrite

Archimède remplace Q par (p . U) et le déséquilibre est toujours dans le même sens, mais le rapport des masses suspendues est rationnel.

Mais alors, le point d'équilibre devrait être plus proche de la masse P d'après la relation de la page précédente et cependant la barre penche du côté de (p . U), ce qui veut dire que le point d'équilibre est plus proche de (p . U).

C'est contradictoire !

Dans tous les cas, la proposition est démontrée.

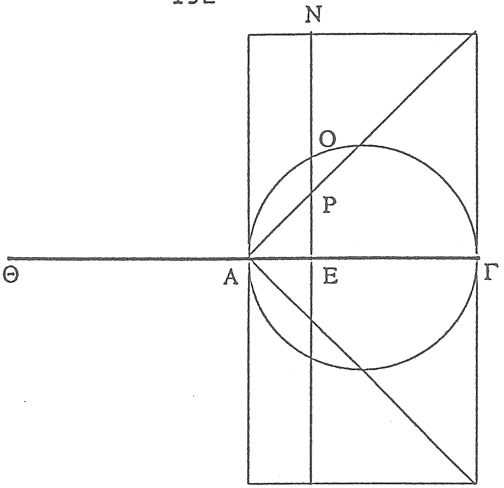
EXEMPLE 3 : La méthode mécanique ou l'intuition retrouvée

Curieux destin que celui de cet ouvrage extraordinaire! Alors que les savants de la Renaissance avaient reproché au Maître de n'avoir pas laissé la démarche par laquelle il avait découvert tant de résultats, et avaient pensé que cette démarche intuitive devait forcément être de l'ordre des indivisibles avec lesquels ils se forgeaient un puissant outil, voici qu'au début du XX$^{\text{ième}}$ siècle (1906) on retrouve dans un monastère de Jérusalem un manuscrit authentique d'Archimède, précisément celui qui présente sa méthode de découverte, qu'il appelle la méthode relative aux théorèmes mécaniques. Pour Archimède, c'est réellement un moyen de découvrir et non d'exposer, puisqu'il dit à la suite de la première proposition:

« Ce que nous venons de dire ne démontre sans doute pas ce qui précède, mais donne jusqu'à un certain point l'idée que la conclusion est juste. C'est pourquoi, reconnaissant nous-même que la conclusion n'est pas démontrée, mais ayant dans l'idée qu'elle est exacte, nous donnerons en son lieu la démonstration géométrique que nous avons trouvée et déjà publiée »

Il fallait que la même personne fût en même temps un grand géomètre et un grand physicien pour qu'une telle méthode prît naissance dans sa tête. Voici un exemple typique de l'utilisation de cette méthode : le volume de la boule.

Au départ, un cercle superposé à 2 carrés adjacents dont une diagonale est marquée, et le segment AΓ prolongé d'une même longueur en Θ. La ligne verticale EN est variable.



Il est facile d'obtenir par le fait que $A O \Gamma$ est rectangle ($AO^2 = AE.A\Gamma$) et que AEO aussi est rectangle ($AO^2 = AE^2 + EO^2 = EP^2 + EO^2$), la relation fondamentale suivante :

$$R1 : EP^2 + EO^2 = AE.A\Gamma$$

Si on divise cette relation par le carré du diamètre ($EN^2 = A\Gamma^2$) on en déduit la relation :

$$R2 : \frac{EP^2 + EO^2}{EN^2} = \frac{AE}{A\Gamma}$$

Pour Archimède, ce rapport est intimement lié au théorème des leviers et s'interprète comme suit :

R2 : si je pends le carré de EO et celui de EP en Θ à une barre imaginaire ΘΓ suspendue en A, et le carré de EN en E, tous trois supposés homogènes et de même épaisseur minime, j'obtiens un équilibre.

Les disques étant proportionnels aux carrés des rayons, la même proportion existe en remplaçant chaque carré par le disque correspondant et l'équilibre R2est réalisé avec les disques comme avec les carrés.

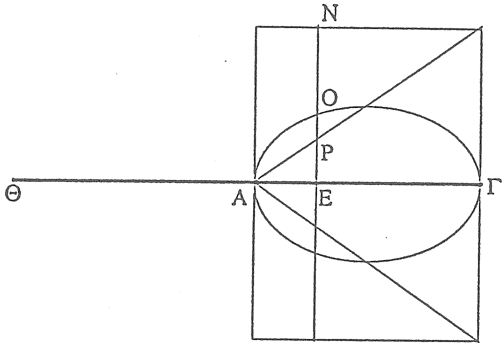
Puisque cet équilibre existe pour toute position de E sur AΓ, Archimède fait tourner sa figure autour de ΘΓ, et engendre ainsi : une boule avec le disque ; un cylindre avec les 2 carrés ; un cône avec les diagonales.

R2 devient : le disque-coupe de la boule et le disque-coupe du cône pendus en Θ équilibrent le disque-coupe du cylindre laissé en E. Ceci pour toutes les coupes, donc la boule et le cône pendus en Θ équilibrent le cylindre laissé en place. Et c'est précisément là que les indivisibles sont nés la première fois!

Cette relation est puissante et le principe d'équilibre d'Archimède lui permet de ne tomber dans aucun des pièges que Torricelli a tendus à Cavalieri. On sent très vite cette puissance car Archimède la fait évoluer : en effet le cône qui était inscrit dans le cylindre en est le tiers en volume comme Euclide l'a montré et le cylindre ayant un centre de symétrie, c'est son centre de gravité, donc il sait ce que la boule est au cylindre ou au cône par l'équilibre R2.

Mais si au lieu de balayer de A jusqu'à Γ, il s'arrête dans sa course, il engendre un autre cylindre, un autre cône et un segment sphérique, dont il peut mesurer le volume de la même manière.

Et si on écrase la figure de base dans un certain rapport r, le cylindre devient un autre cylindre, le cône un autre cône et la boule un ellipsoïde de révolution. Mais la relation R2 ne change pas car son premier membre est un rapport de carrés de segments verticaux, donc tous modifiés dans le rapport r^2 et le second membre est un rapport de segments horizontaux qui sont invariants. Donc R2 tient toujours, et lui permet de mesurer le volume des ellipsoïdes de révolution.



La suite des variations de cette relation n'est pas finie et lui permet encore de trouver le centre de gravité d'un cône et celui de n'importe quel segment de boule.

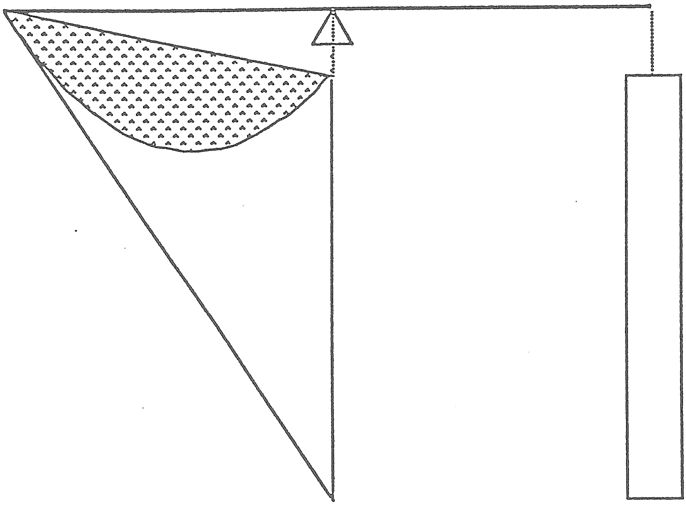
Mais dans son esprit, bien qu'il n'aît jamais doûté de ses résultats, la méthode ne le dispense pas de la démonstration, c'est-à-dire de l'exhaustion.

EXEMPLE 4 : LA QUADRATURE DE LA PARABOLE ou la synthèse réussie

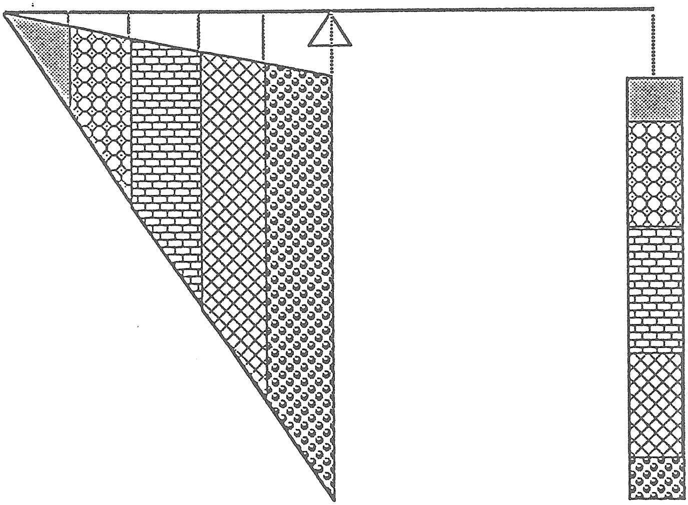
Je ne peux finir ce panorama sans mentionner le seul cas où Archimède a réussi à faire le pont entre ses 2 démarches : l'intuitive de la méthode, qui lui a procuré ses résultats, et la rigoureuse de l'exhaustion qui lui a permis de les présenter à la postérité. La quadrature de la parabole présente 2 démonstrations différentes du même résultat. L'une est géométrique et, bien que comme toutes les autres, elle soit ingénieuse, elle ne nous étonne pas dans son déroulement ; l'autre est mécanique, et c'est elle qui réalise cette synthèse étonnante que seul Archimède pouvait réussir.

En voici les grandes lignes :

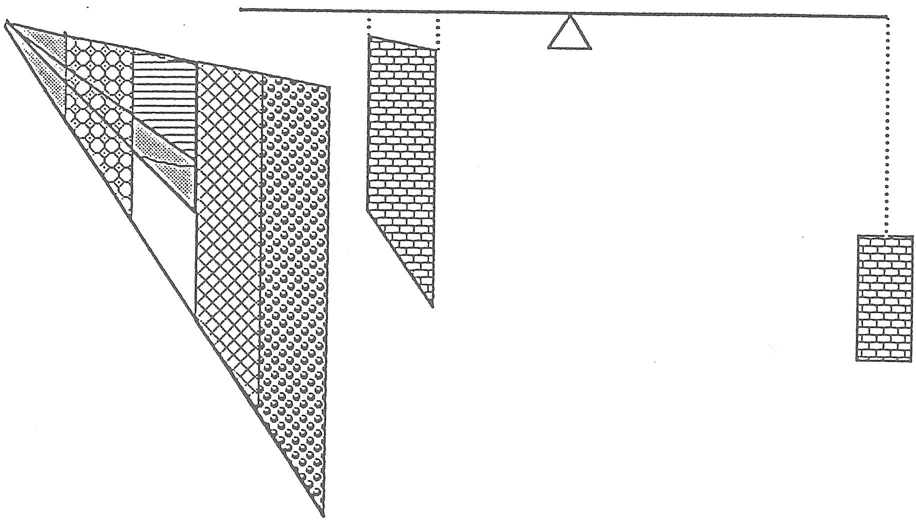
Le segment de parabole à mesurer est inscrit dans un triangle qui a même base que lui, et dont un côté est une tangente à la parabole et l'autre une parallèle à l'axe. Ce triangle est supposé pendu à une barre imaginaire de façon que son côté parallèle à l'axe soit vertical et à l'aplomb du milieu de la barre, et le sommet opposé à l'extrémité de la barre. Un contrepoids permet l'équilibre.

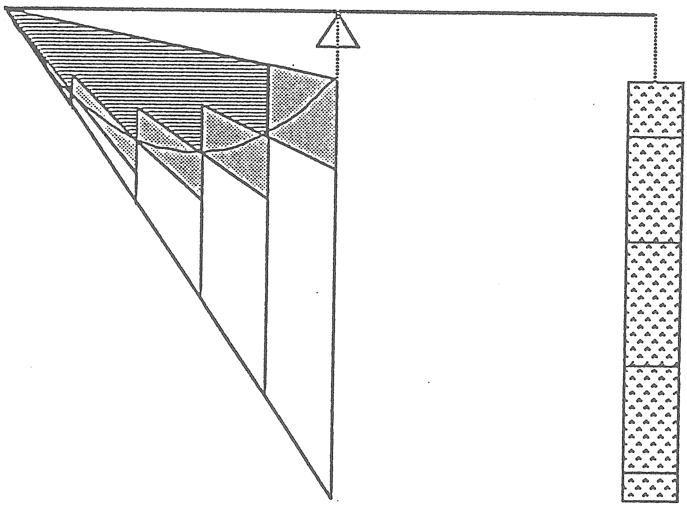


Ce triangle est découpé en n bandes verticales d'égale largeur, et le contrepoids découpé en parties équilibrant chacune une bande



Archimède montre que le contrepoids correspondant à une bande a toujours une aire comprise entre celle des 2 trapèzes entourant la portion de parabole qui est sous la bande :



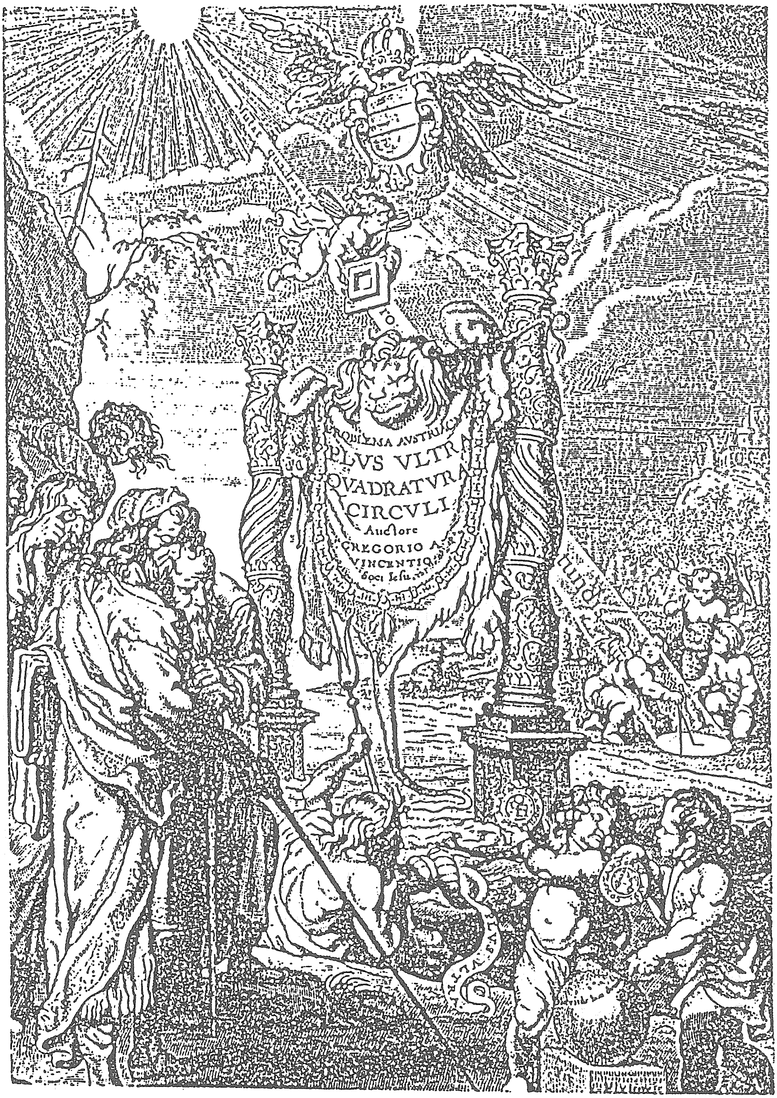


Et donc le contrepoids total a une aire comprise entre celles des 2 figures dentées inscrite et circonscrite au segment de parabole.

A partir de ce point, il est clair que le refrain de l'exhaustion est prêt à être entonné, et qu'en choisissant un nombre assez grand de bandes, le contrepoids est égal au segment de parabole, parce qu'il n'est ni plus grand ni plus petit.

En revoyant la première image et en sachant que le centre de gravité de tout triangle est au tiers de ses médianes (autre résultat d'Archimède) il est sûr que l'aire du segment de parabole est le tiers de celle du triangle pendu.

Le même point de départ se retrouve dans la Méthode, mais au lieu de bandes, il pend des coupes du triangle (segments) et le contrepoids est la coupe correspondante de la parabole. Ainsi c'est encore la Méthode qui a produit ce résultat, mais ici l'essai est transformé, puisque Archimède parvient à mettre en place rigoureusement la démarche d'exhaustion sur le canevas de la Méthode.



Frontispice du *QUADRATURAE CIRCULI ET SECTIONUM CONI*, de GREGOIRE DE SAINT-VINCENT (1584-1667), Anvers, 1647.

Problema Austriacum, plus ultra Quadratura circuli, Auctore Gregorio a Vincentio, soci. Iesu.