DIFFERENTES FORMES DE DEMONSTRATIONS DANS LES MATHEMATIQUES GRECQUES

M. LELOUARD, C. MIRA, J.M. NICOLLE

Notre objectif est de montrer l'émergence et la diversification des différentes formes de la démonstration mathématique dans l'Antiquité grecque.

Nous proposons un petit lexique et un tableau permettant une première compréhension des concepts que nous allons employer. Mais, nous prévenons d'emblée que ce qu'il y a de plus mouvant dans l'histoire des mathématiques, c'est bien le sens des mots. Par exemple, le tableau qui suit serait inacceptable pour Aristote (qui refuse une valeur démonstrative à l'induction).

Nous verrons dans une première partie le passage opéré par les Grecs de "montrer" à "démontrer", et les implications de ce passage.

Nous verrons ensuite l'apport d'Aristote sur les règles de la démonstration, apport souvent oublié parce qu'Aristote est considéré comme moins mathématicien que Platon.

Enfin, dans une troisième partie, nous essaierons de dégager ce qu'il faut entendre par "analyse" et "synthèse", à travers des extraits de Pappus, Euclide, Apollonius et Diophante.

*
* *

M. Lelouard enseigne les Mathématiques, C. Mira le Français et J.M. Nicolle la Philosophie ; depuis plusieurs années, nous travaillons ensemble sur l'histoire des mathématiques à l'IREM de ROUEN.

DEFINITIONS

Démonstration : raisonnement montrant la vérité d'une proposition par une démarche nécessaire et universelle, à partir de prémisses déjà démontrées ou évidentes (axiomes) ;

Induction : opération par laquelle nous passons de la connaissance des faits à celle des lois qui les régissent. (d'après Lachelier) ;

Induction complète (ou aristotélicienne) : induction qui repose sur l'énumération de tous les faits, sans exception ;

Induction amplifiante (ou baconienne) : opération consistant à étendre à tout un genre ce qui a été constaté pour quelques cas particuliers ;

Récurrence (pour Poincaré) : raisonnement visant à montrer qu'une propriété est vraie d'une série de plusieurs termes, en montrant qu'elle est vraie pour le premier, et que si elle est vraie pour le (n-1)ème, alors elle est vraie pour le nème ;

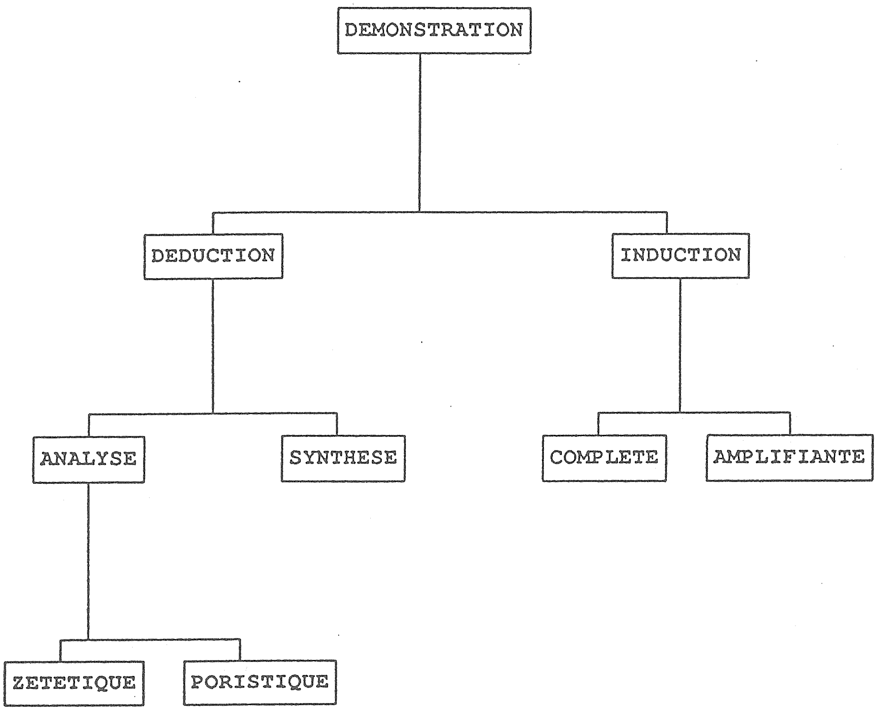
Déduction : raisonnement par lequel on conclut rigoureusement d'une ou plusieurs propositions prises pour prémisses à une proposition qui en est la conséquence nécessaire ;

Analyse : méthode de résolution de questions particulières, consistant à les décomposer en éléments simples, pour les examiner un à un, et inventer ainsi des solutions ;

Analyse zététique (d'après Viète) : analyse consistant à supposer le problème résolu, à établir les relations des conditions sans distinguer les quantités connues des inconnues, à aboutir par élimination à une relation finale ne contenant plus que le minimum d'inconnues ;

Analyse poristique (d'après Viète) : analyse des Grecs consistant à supposer vraie une solution ou une proposition, à tenir compte des conditions données, et à transformer la relation qu'elle exprime jusqu'à arriver à une proposition connue ;

Synthèse : méthode d'exposition des vérités déjà acquises, en même temps que leur généralisation, qui commence par les principes et qui en tire une à une les conséquences, en suivant l'ordre qui va des plus simples aux plus composées ;


DEMONSTRATION
DEDUCTION
INDUCTION
ANALYSE
SYNTHESE
COMPLETE
AMPLIFIANTE
ZETETIQUE
PORISTIQUE

Démontrer, c'est prouver, c'est-à-dire établir la vérité d'une proposition. Mais toute preuve n'est pas une démonstration. Les sciences expérimentales prouvent une vérité par l'expérience ; il n'y a pas de démonstration dans ce cas. Pour qu'il y ait démonstration, il faut que la preuve d'une vérité soit établie comme conséquence nécessaire d'une autre vérité. Autrement dit, la démonstration est un enchaînement continu qui suppose des vérités antérieurement établies. Toute démonstration est donc une déduction rigoureuse qui montre qu'une proposition est vraie parce qu'elle est la conséquence nécessaire d'une proposition déjà admise.

Ce sont les mathématiciens grecs qui ont inventé la démonstration mathématique, rompant ainsi avec les recettes de calcul des Babyloniens.

> *"L'originalité essentielle des Grecs consiste précisément en un effort conscient pour ranger les démonstrations mathématiques en une succession telle que le passage d'un chaînon au suivant ne laisse aucune place au doute et contraigne l'assentiment universel." (Nicolas Bourbaki :* Eléments d'histoire des mathématiques, *p. 10)*

Dès le milieu du Vème siècle av. J-C, les règles de la démonstration, telle que nous la connaissons aujourd'hui, sont établies. Cette invention est principalement le fait des pythagoriciens.

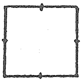
La démonstration mathématique n'a pas été inventée de toutes pièces par les Grecs : on peut percevoir, par l'étude des textes, que l'émergence de la démonstration a été progressive.

Le mot grec, qui, dans la langue mathématique, signifie démontrer (deicnumi) possède, dès l'origine, deux sens :

1) - Montrer concrètement, c'est-à-dire "présenter à la perception visible". (Platon)
2) - Montrer par la parole, c'est-à-dire expliquer (cf. Iliade IXème siècle av. J-C)

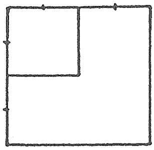
Il semble que les plus anciennes démonstrations mathématiques consistaient, chez les Grecs, à donner une certitude appuyée sur le visible : il fallait faire voir, concrètement. Le texte du Ménon (81e-86b) de Platon est un témoignage de l'ancienne façon de faire.

Ce passage est au coeur d'une composition en abîme : Socrate veut démontrer à Ménon que l'âme est immortelle ; pour cela, il a besoin d'une preuve, la réminiscence (la théorie de la réminiscence soutient que chacun possède en lui-même, mais à son insu, tout le savoir qui lui a été donné lors du séjour de son âme aux enfers ; grâce à des questions appropriées, il est possible de se ressouvenir de ce savoir). Mais pour démontrer la théorie de la réminiscence, Socrate a aussi besoin d'une preuve ; il va donc montrer à Ménon comment on peut faire retrouver un théorème de géométrie à un jeune esclave, uniquement en lui posant des questions. Ménon observe l'esclave ; l'esclave observe la figure ; observons ce qui se passe ....

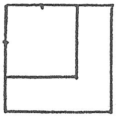

1

Partant d'un carré de deux pieds de côté, il s'agit de découvrir comment construire un carré de surface double.

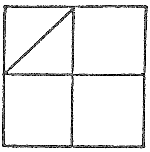
Socrate montre le carré de la base de la démonstration en traçant la figure (1).


2

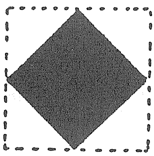
L'esclave propose de doubler la longueur du côté et Socrate montre que c'est une erreur en traçant une nouvelle figure (2). Si l'on double le côté, on obtient une surface quadruplée.


3

Puisqu'il faut une longueur supérieure à deux pieds, mais inférieure à quatre pieds, l'esclave commet l'erreur classique de proposer un côté de trois pieds. Socrate montre par une troisième figure (3) que la surface serait alors de neuf pieds.


4

Il efface les trois figures, en construit une nouvelle (4) et trace une diagonale ("cette ligne tirée d'un angle à l'autre ne coupe-t-elle pas en deux chacun de ces quatre espaces ?", dit le texte).


5

En faisant raisonner l'esclave sur les surfaces ainsi divisées, il lui permet de trouver la bonne réponse : le carré construit sur la diagonale du carré de base a une surface double (5).

Certes, Socrate fait appel au raisonnement de son interlocuteur. Mais la mise en évidence visuelle joue un rôle-clé dans la démonstration. La preuve en est que si Socrate n'avait pas tracé la fameuse diagonale (soufflant ainsi la bonne réponse à son élève, comme le font la plupart des enseignants par des interrogations négatives) , le jeune esclave n'aurait probablement jamais trouvé la solution.

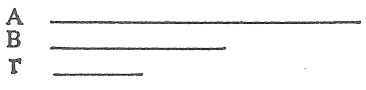
On retrouve encore l'importance de cette mise en évidence visuelle dans la démonstration du théorème de Pythagore chez Euclide. (Eléments, L. I, prop. 47). Mais le rôle moteur de la figure est caché par la mise en scène ritualisée de la démonstration euclidienne. Ce rituel se compose d'une suite d'étapes toujours identiques :

1 . L'énoncé ou la proposition (protasis) : il s'agit d'énoncer la proposition à démontrer ou la construction à effectuer.
2 . L'exposition (ekthesis) : il s'agit d'introduire une configuration avec des lettres désignant les différents points.
3 . La détermination : il s'agit de réitérer l'énoncé à propos de ce figure. ex. : "il faut construire sur la droite AB ...".
4 . La préparation ou construction : il s'agit, quand c'est nécessaire, de préparer la figure par des constructions auxiliaires.
5 . La démonstration proprement dite : il s'agit de déduire le résultat.
6 . La conclusion : il s'agit de reformuler la proposition comme étant le résultat de la démonstration, avec toute la généralité possible. On y ajoute les formules : "Ce qu'il fallait faire" (CQFF) pour un problème de construction, ou "Ce qu'il fallait démontrer" (CQFD) pour un théorème.

On retrouve ce rituel dans la démonstration du théorème de Pythagore mais si l'on prête bien attention à la démonstration proprement dite, on voit que l'essentiel de la conviction repose sur la contemplation de la figure : comparaison des longueurs, des angles, des surfaces ....
L'oeil du bon élève attentif aura observé 28 segments, 11 angles, 4 triangles et 15 quadrilatères !

Mais, en général, la mise en évidence visuelle n'est plus au premier plan dans la démonstration euclidienne. Elle est remplacée par l'enchaînement de raisonnements logiques, c'est-à-dire par la certitude purement rationnelle. On peut observer cette rationalité pure dans les livres arithmétiques.

La proposition 33 du Livre VII des Eléments se présente ainsi :
Enoncé :
"Tout nombre composé est mesuré par quelque nombre premier".
Pour le démontrer, Euclide prend encore un cas concret : le nombre A.
Détermination :
"Que A soit un nombre composé ; je dis que A est mesuré par quelque nombre premier".
Puis il trace des segments de plus en plus petits, mais sans repère ni proportion visible entre eux pour représenter trois nombres.



En fait, ces trois segments ne servent à rien puisque la démonstration ne reposera pas sur leur contemplation, mais sur l'enchaînement des définitions de la notion de nombre. On voit par là que la représentation figurée des nombres n'est plus qu'une trace conventionnelle d'une vieille tradition, qu'elle n'a plus aucun sens, ici. D'ailleurs, les nombres choisis par Euclide sont complètement arbitraires: il aurait très bien pu en donner d'autres.

La démonstration est un raisonnement par l'absurde : elle consiste à montrer que la régression à l'infini dans la décomposition d'un nombre est impossible, et qu'il y aura toujours un nombre premier au terme de la décomposition.

Démonstration :

"Puisque A est un nombre composé, quelque nombre le mesurera (déf. 13-7). Que quelque nombre le mesure, et que ce soit B. Si B est un nombre premier, on aura ce qui est proposé ; et si B est un nombre composé, quelque nombre le mesurera. Que quelque nombre le mesure, et que ce soit Γ. Puisque Γ mesure B, et que B mesure A, le nombre Γ mesurera A ; et si Γ est un nombre premier, on aura ce qui est proposé. Si Γ est composé, quelque nombre le mesurera ; d'après une telle considération, il restera quelque nombre premier qui mesurera le nombre qui est avant lui, et le nombre A. Car s'il ne restait pas de nombre premier, il y aurait une infinité de nombres qui mesureraient A, et qui seraient plus petits les uns que les autres, ce qui ne peut pas arriver dans les nombres (déf. 2.7). Il restera donc quelque nombre premier qui mesurera le précédent, et le nombre A. Donc, etc. "

Nous voyons qu'Euclide se situe tout à fait dans la ligne platonicienne ("l'objet de l'arithmétique est du domaine de la pensée pure"). C'est l'essence même du nombre, énoncée dans ses définitions (2.7 : "un nombre est un assemblage composé d'unités" ; 13.7 : "un nombre composé est celui qui est mesuré par quelque nombre") , qui commande les relations entre les nombres ; ce n'est pas du tout leur réalité concrète. Euclide ne raisonne pas sur les figures des nombres (les nombres sensibles), mais sur le nombre en soi.

La proposition 21 du Livre IX des Eléments est un autre exemple significatif:

Enoncé :

"Si l'on ajoute tant de nombres pairs que l'on voudra, leur somme sera un nombre pair."

Pour démontrer cette proposition, Euclide semble prendre un cas concret :

Détermination :

"Ajoutons tant de nombres pairs AB, BΓ,ΓΔ,ΔE qu'on voudra ; je dis que leur somme AE est un nombre pair."

Mais voyons comment il les représente ; ce ne sont plus que des points (et non des segments) qui, de plus, ne jouent aucun rôle dans la démonstration :

A . . . . B . . . . . . Γ . . Δ . . . . E, si ce n'est que, bien sûr, le nombre des points qui est pair.

(AB = 4 ; BΓ= 6 ;ΓΔ = 2 ;ΔE = 8). Il n'y a plus qu'un semblant de recours à la figuration sensible, et l'on peut fort bien suivre la démonstration sans regarder les nombres.

Démonstration :

"Puisque chacun des nombres AB, BΓ,ΓΔ,ΔE est un nombre pair, chacun de ces nombres peut être partagé en deux parties égales (déf. 6.7) ; donc leur somme AE peut être partagée en deux parties égales. Mais un nombre pair est celui qui peut être partagé en deux parties égales ; le nombre AE est donc un nombre pair. Ce qu'il fallait démontrer."

Cette démonstration est un pur raisonnement logique, un syllogisme en trois temps :

1 - puisque chacun des nombres AB, BΓ,ΓΔ etΔE est un nombre pair, chacun de ces nombres peut être partagé en deux parties égales (déf. 6-7) ;

2 - la notion commune 2 énonce : *"si à des grandeurs égales on ajoute des grandeurs égales, les touts sont égaux"* ; donc leur somme AE peut être partagée en deux parties égales ;
3 - un nombre pair est celui qui peut être partagé en deux parties égales (c'est l'essence même de la parité) ; le nombre AE est donc un nombre pair. *"Ce qu'il fallait démontrer."*

Il s'agit d'un enchaînement d'évidences de la raison, et non d'une mise en scène d'évidences visuelles.

Comment est-on passé, notamment en géométrie, de la considération visuelle des figures, à la démonstration proprement dite ? Il a fallu pour cela surmonter des idées préétablies. Quelles sont les implications de ce passage de" "montrer" à "démontrer" ? Si nous les évaluons bien, nous comprendrons mieux les difficultés de nos élèves à passer des figures aux raisonnements. Nous allons considérer cinq implications :

1) Passer de montrer à démontrer, c'est passer d'une connaissance a posteriori à une connaissance a priori. Une connaissance a posteriori est une connaissance qui dépend de l'expérience. Une connaissance a priori est une connaissance indépendante de l'expérience. Il a donc fallu quitter la certitude que donne l'observation des phénomènes (l'a posteriori) pour s'en remettre à la certitude que donne le raisonnement pur (l'a priori). Voici ce que dit Kant, à propos de Thalès :

> *"Il trouva qu'il ne fallait pas s'attacher à ce qu'il voyait dans la figure (...) pour en tirer des propriétés, mais qu'il lui fallait engendrer par construction cette figure au moyen de ce qu'il pensait à ce sujet et se représentait "a priori" par concept."*
>
> (préface à la 2nde édition de La Critique de la raison pure)

Ce saut témoigne d'une confiance nouvelle des Grecs dans les facultés de la raison humaine.

2) Passer de montrer à démontrer, c'est donc passer d'une simple soumission aux données sensibles, à une démarche d'une toute autre nature. Au lieu de s'en tenir au spectacle du monde sensible, on va entreprendre l'exploration d'un domaine inconnu, l'exploration de l'intelligible. C'est pourquoi, selon Platon, la démonstration mathématique est une initiation à la dialectique philosophique. Voici ce qu'il en dit dans la République :

> *"Tu sais, j'imagine, que ceux qui s'appliquent à la géométrie, à l'arithmétique ou aux sciences de ce genre, supposent le pair et l'impair, les figures, trois sortes d'angles et d'autres choses de la même famille, pour chaque recherche différente ; qu'ayant supposé ces choses comme s'ils les connaissaient, ils ne daignent en donner raison ni à eux-mêmes ni aux autres, estimant qu'elles sont claires pour tous ; qu'enfin, partant de là, ils déduisent ce qui s'ensuit et finissent par atteindre, de manière conséquente, l'objet que visait leur enquête."*
>
> (Platon : La République, Livre VI, 510c-e)

D'après ce passage, on peut voir que la démonstration mathématique comporte quatre impératifs :

1 - il faut un point de départ présentant quelque arbitraire (que l'on appelle un axiome) mais qui soit considéré comme clair pour tous, au-delà duquel on ne cherche pas à remonter (à un principe anhypothétique, comme le fera la philosophie).

2 - il faut une démarche déductive qui parcourt par ordre une suite d'étapes intermédiaires.
3 - il faut, à chaque pas, le consentement de l'interlocuteur garantissant la correction du raisonnement (homologia).
4 - il faut, une fois les axiomes posés, ne plus avoir recours à l'intuition sensible. On s'en remet à la seule logique.

Ces impératifs soulignent à nouveau le choix fait par les Grecs en faveur du rationalisme contre l'empirisme.

3) Passer de montrer à démontrer, c'est aussi renverser la hiérarchie entre la réalité et l'idée. Montrer, c'est suivre l'ordre que la réalité physique, la nature, offre à notre regard. Démontrer, c'est détourner son regard de cet ordre, pour y substituer l'ordre des idées. Dans ce sens, Platon va très loin : il affirme que les idées ne sont pas qu'un reflet, une copie de la réalité sensible, mais qu'au contraire, c'est la réalité sensible qui n'est qu'une pâle copie des idées. Le réel n'est admis et compris que pour autant qu'il est considéré comme l'expression d'un autre réel, celui des Idées. D'ailleurs, les Idées, en tant que principe et source du réel sensible, sont d'une réalité plus réelle que celle du sensible.

4) Passer de montrer à démontrer, c'est intérioriser la nécessité (Anankè). Les Grecs ont d'abord décrit la nécessité dans le monde extérieur sous la forme du destin (ex. : Oedipe). Avec la démonstration mathématique, ils l'ont transformée en une contrainte intérieure, sous la forme de l'idéal de rigueur. Ce n'est plus la construction et la contemplation d'une figure qui s'impose comme une loi d'origine externe à laquelle il faut se plier, mais c'est au contraire la rigueur du raisonnement qui va commander la construction de la figure. Un triangle, un cercle ou un carré n'existent d'abord que dans la pensée. Ce sont des idées. Pour Platon, les figures sensibles qui représentent les idées sont des traductions approximatives des lois qui les commandent.

Autrement dit, les figures ne sont et ne pourront jamais être exactes. Démontrer, c'est préférer la rigueur intérieure à l'exactitude d'une représentation.

5) Enfin, passer de montrer à démontrer, c'est passer du particulier à l'universel. En effet, le triangle, c'est tout triangle. La démonstration mathématique déborde largement le cas particulier de telle ou telle figure. C'est pourquoi elle n'est pas seulement une déduction, mais aussi une induction ; elle permet d'établir des connaissances nouvelles et de procéder à des inductions amplifiantes, comme celle-ci, énoncée par Paul Mouy :

> *"La somme des angles intérieurs d'un polygone convexe est égale à autant de fois deux droits que ce polygone a de côtés, moins deux".*
>
> (in Les Mathématiques et l'idéalisme philosophique, p. 373)

Grâce à l'universalité de ses conclusions, la démonstration mathématique établit réellement une science.

Récapitulons : le passage de montrer à démontrer implique cinq modifications :

1 - passer de l'a posteriori à l'a priori ;
2 - passer de l'empirisme au rationalisme ;
3 - renverser la hiérarchie entre la réalité et l'idée au profit de cette dernière;
4 - intérioriser la nécessité sous forme de l'idéal de rigueur ;
5 - passer du particulier à l'universel, et faire des mathématiques une Science.

Les revers de ce passage :

Dans le même mouvement qui permettait aux mathématiques grecques de faire le saut de l'empirisme au rationalisme, elles ont rencontré des difficultés qui vont ouvrir la crise des irrationnels.

D'abord, l'idéal de rigueur se paie du prix de quelques impasses. Du point de vue psychologique, la rigueur n'est pas toujours la qualité qui entraîne le plus la conviction. Certes, une démonstration bien faite ne me laissera aucun choix et je ne pourrai pas ne pas me plier à ses conclusions. Mais, en géométrie notamment, l'intuition joue un rôle considérable et une formalisation extrême de la démonstration peut lui retirer de sa force de conviction.

Mais surtout, l'attrait esthétique que les Grecs éprouvaient pour les idées les a fait pêcher par excès d'idéalisme. Pour eux, la beauté se trouve dans les Idées et non dans ce que l'homme ajoute aux Idées. C'est pourquoi ils ont unifié et simplifié au mieux l'exposition de leurs connaissances. Mais, ce faisant, ils ont négligé la recherche d'application pratique de leur science ; ils ont aussi écarté tous les problèmes qui introduiraient quelque disharmonie dans la représentation du monde (comme l'infini, le devenir, les irrationnels). Enfin, ils n'ont pas cherché à approfondir les procédés de la découverte dans la résolution des problèmes.

Dans son commentaire à Euclide, Proclus émet le jugement suivant :

> *"Pythagore transforme l'étude de la géométrie en un enseignement libéral en examinant les principes de la science depuis le commencement et prouvant les théories d'une manière immatérielle".*
>
> (commentaire sur le Livre des Eléments d'Euclide)

Cette manière immatérielle a permis d'effectuer de grands progrès, mais à oublier la matière, elle finit toujours par vous rèjoindre !

*
* *

Dans cet effort de rationalité qui caractérise la Grèce, Aristote a tenu une place capitale. C'est pourquoi nous avons consacré la deuxième partie de notre atelier à ce "législateur du raisonnement", sans pouvoir d'ailleurs envisager tous les aspects de sa réflexion sur la science, mais également sans pouvoir nous limiter au domaine mathématique.

Rappelons brièvement quelques données chronologiques. Aristote est né en 384 avant Jésus-Christ ; il a été une vingtaine d'années élève de Platon, jusqu'à la mort de ce dernier en 347 av. J-C ; vers 335 il fonde le lycée, où il enseigne 12 ans. Il quitte Athènes en 323, craignant d'y subir le même sort que Socrate et meurt en 322 av. J-C. Son oeuvre, qui est donc antérieure à l'école d'Alexandrie ne soulève pas de problèmes d'authenticité ; c'est l'ordre de composition qui est plus discuté, la tradition ayant imposé un ordre d'édition qui ne correspond pas à celui de l'élaboration. Les Analytiques, premiers et seconds, sur lesquels l'atelier s'appuie presque exclusivement, sont, selon toute vraisemblance, les derniers composés de l'ensemble logique dit Organon. Aristote y analyse, au sens courant du terme, les différents raisonnements pour découvrir les principes qui les régissent. Mais, ces principes étant établis, la forme de raisonnement qu'il privilégie est la démonstration, ou déduction, qui va des principes aux conséquences, et que plus tard, les Alexandrins nommeront *synthèse*.

Nous allons donc essayer de voir pourquoi le raisonnement scientifique idéal est, selon Aristote, le syllogisme démonstratif, avant d'examiner deux formes de raisonnement moins parfaites mais cependant nécessaires à la démarche scientifique, le raisonnement par l'absurde et l'induction. (1)

Les Premiers Analytiques commencent ainsi :

> *Il faut d'abord établir quel est le sujet de notre enquête, et de quelle discipline elle relève : son sujet, c'est la démonstration, et c'est la science démonstrative dont elle dépend.*

Qu'est-ce donc que la science pour Aristote ? Il s'en explique dans les Seconds Analytiques, I, ch. 2 et insiste d'abord sur la notion de nécessité :

> *Nous estimons posséder la science d'une chose de manière absolue (...) quand nous croyons que nous connaissons la cause par laquelle la chose est, et qu'en outre il n'est pas possible que la chose soit autre qu'elle n'est.*

Considérer le *pourquoi*, établir un lien de nécessité entre cause et effet, voilà le leitmotiv de la science selon Aristote. C'est pourquoi *savoir, c'est connaître par le moyen de la démonstration*, qui répond à cette double exigence.

Et Aristote établit une série de synonymes : *Par* démonstration, *j'entends le syllogisme scientifique, et j'appelle* scientifique *un syllogisme dont la possession même constitue pour nous la science.* Aristote a, en effet, étudié d'autres syllogismes -le dialectique, le rhétorique- qu'il exclut de sa réflexion sur la science : *la démonstration est une sorte de syllogisme, mais tout syllogisme n'est pas une démonstration* .(2)

Qu'est-ce donc qu'un syllogisme, en particulier un syllogisme démonstratif ?

Le syllogisme *est un discours dans lequel, certaines choses posées, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement par le seul fait de ces données* (3) : des *choses (qui sont) posées* -les prémisses-, *résulte nécessairement* la conclusion, sans recours à *aucun terme étranger*, ce qui confère sa plénitude au raisonnement.

Aristote établit donc, dans les Premiers Analytiques sa théorie du syllogisme, en envisageant les différents moyens de combiner deux propositions pour en tirer une conclusion *nécessaire*. Il retient ainsi les modes concluants et rejette les modes non-concluants. Les premiers sont regroupés en trois figures.

Examinons le premier mode de la première figure, dit BARBARA.

Si A est affirmé de tout B, et B de tout C, nécessairement A est affirmé de tout C (4)

A, B et C sont les *termes*, majeur, moyen et mineur

AB et BC sont les *prémisses*, majeure et mineure

AC est la *conclusion*

On peut remarquer que la présentation aristotélicienne utilise des variables littérales, sans qu'il soit très clair qu'il s'agisse vraiment d'un début de formalisation. Peut-être ne s'agit-il que d'une simplification d'écriture ... C'est un vaste débat entre spécialistes d'Aristote ...

La forme qu'il a choisie est celle de la loi logique, *Si ... et (si) ... nécessairement ...* , qui garantit la validité des inférences qu'on construira. Dans la tradition, le syllogisme aristotélicien est souvent présenté sous forme de schéma d'inférence ; pour "Barbara" :

"Tout A est B, tout B est C, (donc) tout A est C"

Concrétisé en inférence, ce syllogisme en "Barbara" a beaucoup fait pour la célébrité de Socrate, et l'a tué plus sûrement que la ciguë selon la boutade de Valéry ; c'est là une sorte d'hérésie héritée du médiéval Guillaume d'Occan, car Aristote rejetait de sa syllogistique les propositions singulières du type "Socrate est un homme".

En ce qui concerne les copules, *être affirmé de* alterne avec *appartenir à* : *A est affirmé de tout B* ou *A appartient à tout B*, A étant le prédicat et B le sujet [en "langage moderne" B => A]

Ces copules révèlent l'ambiguïté du syllogisme aristotélicien qui hésite entre une interprétation en extension -dominante- et une interprétation en compréhension -dont Aristote a parfois la nostalgie-. (5)

Considérons rapidement les 4 modes de la premières figure (sous forme du schéma d'inférence traditionnel) :

BARBARA	CELARENT
Tout B est A	Nul B n'est A
Tout C est B	Tout C est B
Tout C est A	Nul C n'est A

DARII	FERIO
Tout B est A	Nul B n'est A
Quelque C est A	Quelque C est B
Quelque C est A	Quelque C n'est pas A

Ces modes sont obtenus en combinant la quantité (universalité / particularité) et la qualité (affirmation / négation) , les deux constantes de la figure étant l'universalité de la majeure et le caractère affirmatif de la mineure. On voit donc que la majeure, qui varie en qualité, détermine la qualité de la conclusion, tandis que la mineure, qui varie en quantité, détermine la quantité de la conclusion.

D'autre part, on voit bien le rôle que joue le moyen dans cette figure : il est moyen au double sens du terme, moyen en extension mais aussi médiateur : il assure la transitivité entre les termes extrêmes puisqu'il est tour à tour prédicat et sujet ; tous les modes de cette première figure se ramènent à la chaîne logique :

C => B => A (avec variations en quantité et qualité)

C'est ce qui permet que *quelque chose d'autre résulte nécessairement de ces données par le fait même de ces données.*

Il n'en est pas de même dans les 2e et 3e figures dont nous ne considérons que le 1er mode :

2e figure : *Soit le terme M qui n'est affirmé de nul N, mais est affirmé de tout X (...). En conséquence, N n'appartiendra à nul X* (6)

3e figure : *"Quand, par exemple, R et P appartiennent à tout S, il suit que R appartiendra nécessairement à quelque P.* (7)

Les "moyens termes" M et S sont successivement prédicat et prédicat pour M, sujet et sujet pour S. M est en réalité majeur en extension, et S mineur. Ils ne peuvent jouer le rôle de médiateur sans calcul. Or Aristote ignore la contraposition, qui ne sera établie qu'au Moyen-Age. Il doit recourir à la *conversion* d'une prémisse, ce qui n'est possible que si ses deux termes ont même extension, c'est-à-dire, pour nous, si la proposition est une équivalence.

Dans le cas contraire, il opère par réduction à l'absurde, ou réduit une mineure universelle (*P appartient à tout S*) en particulière (*S appartient à quelque P*).

C'est pourquoi la première figure a la préférence d'Aristote, parce que ses quatre modes sont parfaits :

> *"J'appelle syllogisme parfait celui qui n'a besoin de rien autre chose que ce qui est posé dans les prémisses, pour que la nécessité de la conclusion soit évidente ; et syllogisme imparfait, celui qui a besoin d'une ou plusieurs choses, lesquelles il est vrai, résultent nécessairement des termes posés, mais ne sont pas explicitement énoncés dans les prémisses. (8)*

Il la préfère aussi parce qu'elle est *la plus scientifique, sert de véhicule aux démonstrations des sciences mathématiques* et (..) de *toutes les sciences qui se livrent à la recherche du pourquoi.* (9) Enfin, ajoute-t-il, elle est plus scientifique parce que la conclusion scientifique a besoin d'être affirmative et universelle, ce qui est exclu, c'est vrai, des 2e et 3e figures, mais n'est vrai que de BARBARA dans la 1ère. C'est lui le syllogisme scientifique par excellence dans la pensée d'Aristote, peut-être au fond parce que c'est avec lui qu'il a élaborée sa théorie de la démonstration, en opposition à la dichotomie platonicienne, accusée, faute de moyen terme assurant la nécessité, de recourir à chaque nouvelle étape de division à l'assentiment de l'interlocuteur.

Le chapitre 2 de la 1ère partie des Seconds Analytiques par lequel nous avons commencé cette étude a donc assimilé démonstration et syllogisme scientifique, et Aristote y précise à quelles conditions un syllogisme peut être considéré comme scientifique, c'est-à-dire *productif de science.*

Il est nécessaire que la science démonstrative parte de prémisses qui soient vraies, premières, plus connues que la conclusion, antérieures à elle et dont elles sont les causes.

Les prémisses doivent être vraies. Une telle condition montre bien que la forme *Si ... nécessairement* donnée au syllogisme n'installe pas la syllogistique aristotélicienne sur ce que nous appellerions le mode hypothétique, ou axiomatique. Il est vrai que le syllogisme en général est valide *si* ..., mais le syllogisme scientifique, lui, ne doit pas reposer sur des hypothèses. Le système aristotélicien est "catégorico-déductif" (Blanché), et non hypothético-déductif. On y opère un "transfert de certitude", et, c'est à cette condition que la conclusion est *démontrée.*

Ce n'est d'ailleurs pas là le propre d'Aristote ; à leurs débuts, les sciences déductives ont ce caractère dogmatique qu'on trouve aussi chez Euclide. Et cette "nécessité" aura la vie longue ... il suffit pour s'en convaincre de lire les multiples textes consacrés aux XVII et XVIIIèmes siècles à la "vérité des mathématiques" ou simplement de voir ce qu'en pensent encore bien des élèves de lycée, y compris dans les classes scientifiques ...

Les prémisses doivent ensuite être *premières et indémontrables*, ce qu'Aristote justifie en un raisonnement qui peut paraître un peu curieux, selon lequel, si les prémisses étaient démontrables, elles ne seraient connues que par démonstration ; or elles sont connues sans démonstration, c'est donc qu'elles sont indémonstrables. En fait, Aristote se heurte là, comme tant d'autres, à ces indémontrables qu'il faut bien admettre, faute de quoi, hors axiomatisation, il n'y a pas de science possible mais une régression à l'infini. Il fait bien le point sur cette question dans les Seconds Analytiques, I, ch. 3.

Enfin les prémisses doivent être *les causes de la conclusion.* N'oublions pas que la science est essentiellement la recherche du *pourquoi*, c'est-à-dire finalement du moyen terme du syllogisme ; c'est même la condition fondamentale de la nécessité de la démarche. (10)

Nous reparlerons plus loin des prémisses *plus connues* que la conclusion, et *antérieures à elles*, mais, dans l'immédiat, continuons à survoler cet essentiel ch. 2

de la première partie des Seconds Analytiques. Aristote y fait "défiler" une série de définitions qui lui permettent de préciser encore les exigences relatives au syllogisme scientifique. Nous retiendrons *les axiomes, indispensables à qui veut apprendre n'importe quoi*, qui sont les *principes communs* à tout raisonnement et qu'il ne faut confondre avec les *principes propres* à chaque science (on sait qu'Aristote refusait le "mélange des genres") (11). Il donne comme exemple ce que nous appellerions "la loi du tiers exclu" : *Une contradiction est une opposition qui n'admet par soi aucun intermédiaire*, dont il fait le principe fondamental de toute pensée car *il est, par nature à l'origine des autres axiomes.* (12)

Il distingue ensuite *l'hypothèse* et la *définition*, la première posant -ou niant- l'existence alors que les définitions ne se prononcent pas là-dessus ; *elles requièrent seulement d'être comprises.* (13)

Nous n'insisterons pas sur ce problème épineux de la possibilité ou non de démontrer les définitions : (*démonstration de l'essence*). Aristote a évolué sur ce plan ; il semble que sa théorie du syllogisme ait même été élaborée pour résoudre ce problème mieux que ne le faisait la dichotomie platonicienne et qu'il en soit arrivé, non sans "remords de conscience" à la position ainsi nettement formulée : *les principes des démonstrations sont des définitions pour lesquelles il n'y aura pas de démonstrations possibles, ainsi qu'on l'a prouvé antérieurement.* (14)

La science, pour Aristote, est donc la démonstration des causes, par voie de syllogisme, c'est-à-dire de déduction. La validité du raisonnement est assurée par des prémisses vraies, premières ou indémontrables. -ou préalablement démontrées-, car la science ne se réduit pas à un syllogisme mais les enchaîne. Ces prémisses doivent être causes de la conclusion, elles sont donc nécessaires, et antérieures à la conclusion dans l'ordre des faits (*de la nature*).

C'est là le mode de démonstration le plus contraignant puisque la vérité formelle, ou nécessité de la démarche s'allie à la vérité matérielle des prémisses et donc de la conclusion ; et cette conception catégorico-déductive de la science s'inscrit bien dans l'optique générale de la pensée grecque, et de la science à ses débuts.

Pourtant ce dogmatisme fondamental ne pousse pas Aristote à exclure des formes de raisonnement qui pourraient paraître en contradiction partielle ou totale avec ses exigences, comme c'est le cas du raisonnement par l'absurde,qui part d'une prémisse fausse. D'autre part, avec les axiomes et les définitions, nous avons vu que tout n'était pas démontrable, ce qui fait de l'intuition une auxiliaire indispensable de la rigueur démonstrative tant pour percevoir ce qu'Euclide appellera les "notions communes" que pour accéder à la connaissance des principes, ce que nous verrons avec l'induction.

Le raisonnement par l'absurde, qu'Aristote nomme *réduction à l'absurde* repose sur quelques principes préalables qu'il explicite plus ou moins, et toujours en métalangue.

On peut dire que, sans la formuler comme nous le ferions, il pose la loi du tiers exclu. *Le principe suivant lequel il est impossible d'affirmer et de nier en même temps un prédicat d'un sujet, n'est posé par aucune démonstration.* (15)

Si cette loi de contradiction - $\neg$(p et $\neg$p) - n'est pas posée, explicitée, c'est qu'elle est censée aller de soi. *Le principe suivant lequel, pour tout prédicat, c'est l'affirmation ou la négation qui est vraie, est posée par la démonstration qui procède* *par réduction à l'absurde* (16). Et cette loi du tiers exclu - (p ou 7p) - sert de justification à un autre préalable, qu'Aristote établit en montrant la différence entre contrariété et contradiction :

J'appelle opposition de contradiction *celle de* tout *à* quelque ...ne, *où de* quelque *à* aucun ... ne , *et* opposition de contrariété *celle de* tout *à* aucun, *et de* quelque *à* quelque ... ne. (17)

"Traduisons"en termes plus familiers

- La contradiction :

$\forall x \in H, p(x) \quad / \quad \exists x \in H, \neg p(x)$

$\exists x \in H, p(x) \quad / \quad \forall x \in H, \neg p(x)$

- La contrariété :

$\forall x \in H, p(x) \quad / \quad \forall x \in H, \neg p(x)$

$\exists x \in H, p(x) \quad / \quad \exists x \in H, \neg p(x)$

On voit donc que ce n'est pas le contraire, mais bien la contradictoire qu'il faut prendre comme hypothèse dans tous les syllogismes (qui procèdent par réduction à l'absurde) (18).

L'exemple que choisit Aristote pour illustrer son propos est célèbre : *On prouve, par exemple, l'incommensurabilité de la diagonale, par cette raison que les nombres impairs deviendraient égaux aux nombres pairs, si on posait la diagonale commensurable.* (19)

Il est à noter qu'Aristote ne se présente nullement comme l'inventeur de la démonstration : *on prouve*, dit-il, et sans doute la démonstration remonte-t-elle aux Pythagoriciens eux-mêmes. Le fait qu'il ne refasse pas la démonstration, mais y fasse simplement allusion semble aussi rédiger qu'on est là en terrain connu dès son époque.

On peut reconstituer ainsi cette démonstration :

Soit un carré dont le côté est 1, qu'on duplique en construisant le carré double sur la diagonale.

Quel est le rapport de la mesure de cette diagonale $\underline{d}$ à celle du côté $\underline{c}$?

Si la diagonale est commensurable au côté, le rapport est une fraction irréductible d/c, quotient de deux nombres entiers.

Or, d'après Pythagore $d^2 = 2c^2$

$2c^2$ est un nombre pair, donc d^2 est pair aussi.

Or, un impair élevé au carré ne peut donner qu'un nombre impair.

si d^2 est pair, alors $\sqrt{d^2}$, soit d est pair

Mais comme d/c est irréductible, si d est pair, c est impair.

D'autre part, puisque d est pair,

$d^2 = 2c^2$ peut s'écrire

$4\left(\frac{d}{2}\right)^2 = 2c^2$

ou encore, en simplifiant $2\left(\frac{d}{2}\right)^2 = c^2$

ce qui implique que c^2 est pair, et donc que c est pair.

Ainsi, en posant la commensurabilité de la diagonale, aboutit-on à une contradiction interne (c à la fois pair et impair) , par le biais du syllogisme suivant (qu'Aristote n'explicite pas)

prémisse majeure : Si la diagonale est commensurable

prémisse mineure : et si $d^2 = 2c^2$ (Pythagore)

conclusion : nécessairement $\underline{c}$ est pair et impair,

ce qui est absurde. Comme le théorème de Pythagore ne saurait être mis en question, c'est que la majeure était fausse. *On prouve hypothétiquement l'incommensurabilité de la diagonale par ce qu'une conclusion fausse découle de la proposition contradictoire* (la diagonale commensurable).

Aristote distingue deux formes de preuve par hypothèse : la réduction à l'absurde est typiquement ce que nous venons de voir, et qu'on peut formuler ainsi: [p => (q et 7p)] => 7p

La preuve par le faux, dite aussi réduction à l'impossible, aboutit, elle, à une conclusion qui n'est pas contradictoire avec elle-même -absurde à proprement parler- mais est contradictoire avec une autre proposition dont la vérité a été démontrée : l'impossibilité de la conclusion rend l'une des prémisses impossible.
En formulation moderne [(p => q) et 7q] => 7p

Plusieurs textes insistent sur la similitude des règles du syllogisme à démonstration directe et du syllogisme qui procède par réduction à l'absurde ou à l'impossible. Pourtant, l'une des prémisses y est manifestement fausse, et c'est même ce qu'il faut démontrer. En dernière analyse, cela ne contredit pas ce qui a été dit plus haut à propos de la nécessaire vérité des prémisses. Le but reste toujours d'établir une *vérité*, même si l'on prend un chemin détourné pour y parvenir. Il n'en demeure pas moins que la lourde insistance d'Aristote sur la validité de la démarche traduit quand même une sorte de gêne, qu'explicite la hiérarchisation des raisonnements à laquelle il se livre dans les Seconds Analytiques (I, 24, 25 et 26) : le raisonnement universel est supérieur au particulier, l'affirmatif au négatif et ... le négatif à l'absurde.
En effet, son point de départ est certes négatif mais il est catégorique et vrai alors que dans le raisonnement par l'absurde, il est hypothétique et faux.
Peut-être sent-il aussi, confusément, la différence subtile que Pascal établira dans *de l'esprit géométrique* entre *convaincre* et *agréer* -reprise par bien d'autres auteurs avec d'autres couples de mots-. Parce que la démonstration par l'absurde est hypothétique, elle convainc l'esprit de ce que les choses ne peuvent être autrement, sans les persuader intimement de ce qu'elles sont ainsi, ni dire vraiment pourquoi, au demeurant. Dans le cas de la diagonale, on est convaincu que $\sqrt{2}$ n'est pas un entier naturel, mais qu'est-il, au juste ?

La réduction à l'absurde est donc valide ; elle est indispensable, mais elle n'a pas, pour emporter l'adhésion de l'esprit et le satisfaire pleinement, la netteté de la démonstration idéale définie dans la première partie. Et les réserves sont encore plus évidentes avec cette autre forme de raisonnement qu'est l'induction.

L'induction a été définie dans les Topiques comme *le passage des cas particuliers à l'universel* (20), et, dans ce contexte Aristote opposait induction et raisonnement, sous-entendu déductif, qui va du principe aux conséquences.
L'induction suit la démarche inverse, remontante, régressive ; c'est la phase de recherche des principes premiers et donc du *pourquoi* lorsque l'ordre de nos connaissances n'est pas conforme à l'ordre de la nature ; dans le texte que nous avons commenté en 1ère partie (21) , Aristote parlait de causes *antérieures et plus connues* et insistait sur le double sens de cette expression, selon qu'elle s'entend *par nature* ou *pour nous* ; or les principes, universels, causes antérieures par nature ne nous sont pas toujours perceptibles, et ce qui est *antérieur et plus connu pour nous* sont souvent les causes particulières, plus proches de nos sensations. Ainsi, lorsque l'ordre *pour nous* est inverse de l'ordre *de la nature*, notre pensée doit-elle suivre une démarche inverse d'analyse régressive, et partir de la conclusion pour tenter de découvrir la majeure, seule solution pour rendre le réel intelligible en découvrant la cause des phénomènes. Fautes de pouvoir déduire -et avant de revenir à cet ordre naturel- il faut bien parfois induire.

La démarche et les conditions de validité de ce qu'Aristote nomme *induction ou syllogisme inductif* sont exposés dans le célèbre exemple dit des "sans fiel" (22). Cela *consiste à conclure, en s'appuyant sur l'un des extrêmes, que l'autre est attribué* *au moyen. Par exemple, B étant moyen terme entre A et C, ou prouvera par C que A appartient à B.*

Puis vient la concrétisation - la double exposition assez fréquente chez Aristote-, avec :

A : vivre longtemps
B : être sans fiel
C : être homme, cheval ou mulet

A appartient à tout C : l'homme, le cheval, le mulet vivent longtemps
B appartient à tout C : l'homme, le cheval, le mulet sont sans fiel

Mais il faut établir la transitivité ...

Si donc C se convertit avec B, et que le moyen terme n'a pas plus d'extension que C, nécessairement A appartient à tout B.

En effet si l'homme, le cheval et le mulet sont les seuls sans-fiel on peut écrire que

C appartient à tout B (la mineure est une équivalence)
ce qui permet d'établir la chaîne logique (moderne)
B <=> C => A : tous les sans fiel vivent longtemps

On a *prouvé par le troisième terme, que le grand extrême appartient au moyen* ; en fait, le terme mineur joue le rôle de moyen médiateur. La validité n'est évidemment assurée que si l'énumération des individus -ou des espèces- qui constituent le terme pivot C est complète : *Il est indispensable de concevoir C comme composé de tous les êtres particuliers, car l'induction procède par l'énumération d'eux tous*. Cette condition suffit à montrer le caractère périlleux de la démarche, d'autant plus que, si l'on peut encore s'assurer qu'on a bien énuméré toutes les espèces, on ne fait que reculer le problème d'un cran. Comment savoir que le cheval, en tant que tel, est sans fiel et vit longtemps sans l'avoir vérifié sur tous les individus-chevaux ?

En amont du raisonnement, il y a déjà une sorte d'induction spontanée, implicite, qui relève de l'intuition.

On peut alors se demander s'il est bien légitime de recouvrir à une démarche si problématique. *Ce genre de syllogisme sert à procurer la prémisse première et immédiate*, dit Aristote. C'est qu'on n'a pas toujours le choix des moyens, et qu'il nous manque parfois cette prémisse qui doit être cause de la conclusion et contenir un moyen terme jouant le rôle de lien nécessaire. Dans la grande affaire des "sans fiel", on n'a pas cette premisse mais une simple constatation empirique. On trouve donc par induction le moyen terme, et la prémisse première, après quoi on peut élaborer un syllogisme scientifique :

Tous les sans fiel vivent longtemps
Homme, cheval, mulet sont (les seuls) sans fiel
Homme, cheval, mulet vivent longtemps

où il apparaît que la cause de la longévité est l'absence de fiel, ce qui est *antérieur* dans l'ordre de la nature, mais n'était pas *le plus connu pour nous*, et ne le serait pas sans l'induction.

Le syllogisme scientifique est bien l'instrument idéal de la démonstration scientifique, mais il ne suffit pas à nous donner la science ; une recherche préalable s'impose, où l'induction est indispensable.

Telle qu'elle est définie par Aristote, l'induction est ce qu'on qualifie de *totalisante*, puisque l'énumération est exhaustive ; dans le cas présent, d'ailleurs, Aristote sait bien qu'elle ne l'est pas avec l'homme, le cheval et le mulet mais il se contente *d'admettre* qu'elle l'est. Cependant nous avons vu qu'elle supposait une induction spontanée, de "tous les chevaux observés" à "tout cheval", et qu'il pouvait difficilement en être autrement. On peut donc se demander si toute induction n'est pas *amplifiante*, même quand elle a l'allure d'une induction totalisante, ce qui entraîne la nécessité de procédures de contrôle variées sans qu'on puisse jamais en garantir définitivement la validité.

D'autre part, Aristote n'en reste pas au niveau de la quantité, il cherche une loi explicative, nécessaire et se sentirait frustré de devoir s'en tenir à la constatation d'une simple constante empiriquement constatée ; il l'exprime fort bien à propos de la somme des angles d'un triangle, qui aurait d'abord été établie sur les équilatéraux, puis sur les isocèles, puis sur les scalènes. Mais alors *on ne sait pas, en effet, que le triangle en tant que tel a cette propriété, ni même que tout triangle la possède, à moins d'entendre par là une simple totalité numérique* (23).

Son induction, qui cherche donc une loi explicative générale, décolle de l'expérience, et relèverait de ce que Blanché nomme induction *transcendante*, c'est-à-dire passage du fait à la loi, ce qui accroît encore les problèmes épistémologiques posés par ce mode de raisonnement.

Quoi qu'il en soit, Aristote "découvre", et surtout reconnaît là, les limites de ses exigences de rigueur, et se voit contraint de faire une place, dans son système, à l'intuition. Il explique dans les Seconds Analytiques (24) que si la démonstration suppose des principes universels, l'acquisition de ces principes suppose l'induction, qu'*induire est impossible à qui n'a pas la sensation*, et tout le chapitre final (au moins dans l'ordre fixé par la tradition) de ces Seconds Analytiques tente de répondre à deux questions : comment connaissons-nous les principes ? Cette connaissance est-elle de même nature que la science ?

Posant que les principes sont soit innés, soit acquis, il se livre à une réfutation de l'innéisme platonicien dont le prétendu savoir de l'esclave du Ménon était une belle illustration. Mais s'ils sont acquis, ils ne peuvent l'être que par connaissance antérieure ou par aptitude, et la première hypothèse est exclue puisqu'il s'agit de *principes*, antérieurs à toute autre connaissance. C'est donc que l'homme possède *une puissance innée de discrimination que l'on appelle perception sensible*, mais, à la différence des animaux inférieurs, il peut mémoriser ses sensations, et la *multiplicité numérique de souvenirs constitue une seule expérience* qui lui permet l'abstraction d'une notion.

A la source de toute connaissance des principes, il y a donc l'induction (spontanée) produite par l'accumulation de sensations répétées et mémorisées ; de tous les chevaux que j'ai cotoyés, et qui ont vécu vieux, j'ai induit spontanément, et de manière non-scientifique, que le cheval vivait vieux ...

Ensuite vient l'induction raisonnée qui cherche l'explication de cette longévité et la découvre, comme nous l'avons vu plus haut.

Enfin vient la démonstration, par voie de syllogisme, qui revient à la démarche conforme à l'*ordre de la nature*, et qui est à proprement parler la science.

Aristote ne répond pas explicitement à la question qu'il posait quant à la deuxième étape et à sa parenté de nature avec la science. Il semble qu'on puisse dire que, si elle n'est pas la science elle-même, elle est sa condition nécessaire ; il s'agit de raisonnement, mais pas de démonstration et cela recoupe approximativement la dichotomie de son époque, entre analyse et démonstration, la première correspondant à la phase de recherche, la seconde jouissant du privilège de scientificité parce qu'elle est plus conforme au mouvement de la nature, et plus rigoureuse, plus sûre.

On retrouve là un côté dogmatique de la conception de la science chez les Grecs, puisque les résultats -exposés- prévalent sur la recherche, ce qui ne correspond plus tout à fait à notre vision des choses ...

On a longtemps tenu Aristote pour le créateur d'une "logique achevée" (Kant) ; il n'en est évidemment rien, et la syllogistique aristotélicienne contient bien des ambiguïtés, de forme ou de fond, repose sur une part d'implicite, et n'est pas formaliste, à supposer même qu'elle soit vraiment formelle. Il n'en demeure pas moins qu'il a élaboré une théorie du raisonnement cohérente et éclairante, qui fait grandement avancer la connaissance des mécanismes de la pensée en général et de la pensée scientifique en particulier, et que son idéal de déduction préfigure les travaux de systématisation de mathématiques d'Euclide.

Certes il n'a pas, comme Platon, promu les mathématiques au rang de science suprême, tremplin vers le monde supra-sensible, mais il a peut-être plus fait que son ex-maître pour aider ses successeurs à élaborer des raisonnements *rigoureux*.(*)

Il a eu, en outre, la chance historique que ses oeuvres soient conservées, ce qui n'a pas été le cas pour les mégariques et les stoïciens, qui allaient plus loin que lui dans la formalisation ou l'explicitation de lois logiques.

C'est sans doute pourquoi il est resté "le Maître" dont l'ombre a tant plané sur la logique à travers les siècles, et a peut-être même en partie bloqué le progrès. Il était pourtant plus modeste qu'on ne l'imagine d'après l'image que le Moyen Age a donnée de lui et l'on pourrait appliquer à <u>l'Organon</u> sa conclusion des <u>Réfutations sophistiques</u> :

> *Sur le raisonnement, nous n'avions absolument rien d'antérieur à citer, mais nous avons passé beaucoup de temps à de pénibles recherches. Si donc il vous semble, après examen, que, tel étant l'état de choses existant au début, notre investigation tient un rang honorable par rapport aux autres disciplines dont la tradition a assuré le développement, il ne vous restera plus, à vous tous, à tous ceux qui ont suivi ces leçons, qu'à montrer de l'indulgence pour les lacunes de notre enquête, et beaucoup de reconnaissance pour les découvertes qui y ont été faites.*

*

* *

Nous venons de voir comment Aristote, s'appuyant sur des démonstrations mathématiques déjà bien élaborées aux siècles précédents fonde dans une discipline autonome, la logique, les bases théoriques de tout savoir. Sa devise est " savoir c'est connaître par la démonstration ". Son idéal scientifique est le syllogisme démonstratif. Or la fécondité du syllogisme a souvent été mise en cause. Et les héritiers de la tradition grecque (mathématiciens arabes, mathématiciens du XVIIème siècle ont critiqué la forme synthétique d'oeuvres, comme <u>Les Eléments</u> d'Euclide, qui ne dévoile pas les méthodes de découvertes. Ils ont dû retrouver les processus d'invention et leurs recherches ont mis en évidence le rôle du couple analyse-synthèse.

(*) Je ne veux pas dévaloriser Platon, dont la lecture a incontestablement plus de charme que celle d'Aristote, mais il me semble qu'à cause du célèbre et supposé "Nul n'entre ici s'il n'est géomètre", on lui fait la part un peu belle, et qu'on est parfois d'une grande indulgence devant des raisonnements qui se veulent démontratifs et ne sont pas sans faille ... quand il pare la métaphysique des plumes de la géométrie.

LE COUPLE ANALYSE-SYNTHESE OU, SELON L'EXPRESSION DE PAPPUS, "LA PUISSANCE DE TROUVER LES PROBLEMES" (25)

Etymologiquement
Synthèse (συνθεσις) a le sens de composition
analyse (αναλυσις) comprend deux idées
- défaire des liens (λυσις)
- procéder en sens inverse, en remontant (ανα.)

Dans les mathématiques grecques, analyse-synthèse a une première signification en termes d'opérations arithmétiques
- synthèse signifie : addition
- analyse signifie : passer d'une unité à une unité inférieure.

Ainsi on analyse des degrés en les décomposant en minutes ou en secondes.

Dans la réduction au même dénominateur, par exemple de $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ on analyse $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ en douzièmes pour les additionner.

Cette conception a complètement disparu, on en trouve seulement des survivances dans la conception composition-décomposition des chimistes, des grammairiens.

Son origine est purement matérielle et sans doute trés ancienne mais les textes du Vème siècle font défaut.

Au IVème siècle Aristote n'emploie le mot "analytique" que dans le sens restreint précisé dans la 2e partie.

Lorsqu'il considère le tout comme composition de ses parties il souligne que toute composition a un contraire qui est la dissolution. Il n'utilise pas les mots "analyse, synthèse".

Cependant dans la Métaphysique Aristote écrit *Les premières démonstrations qui se trouvent dans plusieurs autres suivantes sont appelées les éléments de ces démonstrations*. Et on peut penser que les géomètres grecs ont ainsi été amenés à appeler "analyse" l'opération qui consiste à retrouver les éléments d'une démonstration et "synthèse" la construction de cette démonstration par combinaison de ses éléments dans l'ordre fourni par l'analyse. On peut alors concevoir que des opérations concrètes ont donné leur nom à des opérations arithmétiques et que celles-ci l'ont transféré à des opérations plus générales : modes de raisonnement, modes de démonstration.

- Des textes qui nous sont parvenus, le texte qui présente avec le plus de détails, l'analyse et la synthèse comme modes de démonstration est contenu dans les prolégomènes du livre VII de la collection mathématique de Pappus (fin IIIème début du IVème siècle de notre ére). Le livre VII est consacré au "lieu résolu" c'est-à-dire au champ de l'analyse géométrique des Anciens.

- Après une brève introduction (lignes 1 à 7) où il définit la fonction de l'analyse comme "la puissance de trouver les problèmes", Pappus donne des définitions conjointes d'analyse et synthèse (lignes 8 à 10). Puis il les précise en deux définitions séparées (lignes 11 à 21). Ensuite il distingue deux genres d'analyse : (lignes 22 à 24). Puis reprenant chaque genre il détaille à nouveau les démarches de l'analyse et de la synthèse (lignes 25 à 40).

- Nous avons donc quatre définitions successives de l'analyse. Si les deux dernières suivent le même schéma, adapté à chaque genre, et reprennent la première en la précisant : *voie qui part de la chose cherchée comme étant concédée, pour aboutir au moyen des conséquences qui en découlent à la synthèse de ce qui a été concédé*, la deuxième est bien différente : *supposant, dans l'analyse, que la chose* *cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée, jusqu'à ce que, revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue...*

Dans quel sens fonctionne donc l'analyse ?

Une traduction, comme celle que propose R. Blanché dans Le Raisonnement, éclaircissant cette deuxième définition, la met (comme il le souligne) presque en contradiction avec les deux dernières.

Il semble bien qu'il y ait un certain flottement dans l'idée que Pappus se fait de l'analyse. Ce qui est certain c'est que *l'analyse ainsi conçue est, non pas une preuve, mais un procédé pour découvrir la preuve, et qu'elle apparaît bien, par rapport à la preuve démonstrative, comme un mouvement inverse.* (26)

Autre problème posé par ce texte de Pappus (ou par sa traduction française): le choix des mots théorétique pour désigner l'analyse "propre à la recherche", problématique pour "celle qui s'applique à trouver ce qui est proposé".

Proclus dans ses commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide considère naturellement une proposition théorétique comme celle qui formule un théorème et une proposition problématique comme celle qui formule un problème.

Dans ce texte Paul Ver Eecke reprend l'interprétation de Paul Tannery.

Théorétique au sens de "spéculative" (qui vise à la connaissance) (Aristote).

Problématique au sens de "qui débat" (de l'exactitude ou de la fausseté d'une proposition).

F. Viète dans son Introduction à l'art analytique (1591) reprend les deux distinctions des anciens et appelle "zététique" (au propre : chercheur, investigateur) la forme d'analyse propre à la recherche, à l'invention des solutions et "poristique" (au propre : frayer un passage, au figuré : trouver, procurer) celle qui a pour but l'invention de la démonstration d'une solution ou d'une proposition énoncée.

Nous utiliserons par la suite ces termes dont l'étymologie est plus éloquente.

- Toute l'Antiquité attribue à Platon l'origine de cette conception de l'analyse et de la synthèse opposée.

Dans le célèbre passage sur la dialectique (fin du livre VI de la République) on trouve l'idée de la double marche ascendante et descendante des idées à leur principe. Elle a pu être suggérée à Platon par les mathématiques..

Selon Proclus, Hippocrate (Vème siècle avant J.C) aurait utilisé l'analyse pour ramener le problème de la duplication du cube au problème de la détermination de deux moyennes proportionnelles entre deux droites données. Platon en ayant dégagé le procédé , souligné la solidarité avec l'autre sens de parcours, les géomètres de son école ont pu s'en inspirer, les applications ont été poursuivies par Eudoxe au IVème siècle (cf Proclus).

Mais le mot analyse ne semble pas antérieur au IVème siècle et le mot synthèse en ce sens, semble n'avoir été employé que par les géomètres, habitués à l'opposition analyse-synthèse en arithmétique.

L'analyse problématique, ou poristique, a pour but l'invention, non d'une solution, mais d'une démonstration d'une solution ou d'une proposition énoncée.

Il est probable qu'elle a joué un rôle important dans la constitution des Eléments :

- pour proposer des démonstrations rigoureuses de formules ou d'énoncés obtenus intuitivement, empiriquement.
- pour incorporer une proposition dans la construction "axiomatique" des Eléments.
- pour déterminer les axiomes (nécessité de remonter au-delà des propositions intuitivement vraies)

- pour étudier l'interdépendance des axiomes.

Son principe est de supposer vraie la solution (ou la proposition) et, en tenant compte des conditions données, de transformer la relation qu'elle exprime jusqu'à ce qu'on arrive soit à une identité soit à une proposition déjà connue.

On ne sait pas exactement quand elle a été introduite (dès le Vème siècle ?).

Les exemples les plus remarquables qui nous sont parvenus sont rattachés au Livre XIII des Eléments d'Euclide (propositions de I à V) dans la traduction. française de F. Peyrard (édition Blanchard). Cependant Heiberg, dont la traduction fait autorité actuellement considére que ces propositions sont des additions postérieures provenant des commentaires de Héron d'Alexandrie (fin Ième début IIème siècle).Selon Paul Tannery ces scholies seraient *les premières applications régulières de la méthode analytique* dues à Léodamas de Thasos (ami de Platon) et poursuivies par Eudoxe.

Quoi qu'il en soit il nous a paru intéressant de confronter la démonstration de la proposition I construite selon le processus euclidien rituel et la scholie construite sous la forme analyse-synthèse. Ces scholies sont précédées par deux brèves définitions de l'analyse et de la synthèse :

Analyse et synthèse.

Ce que c'est que l'analyse, et ce que c'est que la synthèse.

Dans l'analyse, on prend comme accordé ce qui est demandé ; parce qu'on arrive de là à quelque vérité qui est accordée.

Dans la synthèse, on prend ce qui est accordé, parce qu'on arrive de là à la conclusion, ou à l'intelligence de ce qui est demandé.

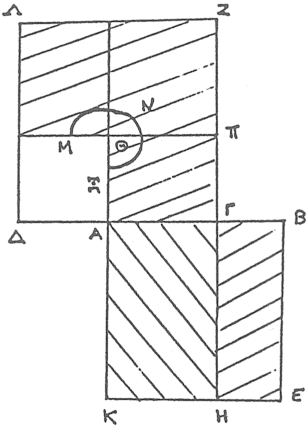
L'analyse n'est ici que la marche de l'inconnu au connu, la synthèse étant la marche inverse.

Pour faciliter la lecture nous avons repris les démonstrations (partiellement pour la première, complètement pour la deuxième) en utilisant l'écriture moderne.

1ère démonstration : $(\mathrm{A\Gamma} + \mathrm{A\Delta})^2 = \Gamma\Delta^2 = 5\Delta\mathrm{A}^2$
Il s'agit de montrer que

La définition 3-6 donne $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{B\Gamma}}$ (nombre d'or)

La proposition 17-6 donne $\mathrm{AB} \times \mathrm{B\Gamma} = \mathrm{A\Gamma}^2$



Puis on a $\mathrm{AB} \times \mathrm{B\Gamma} = \Gamma\mathrm{E}$ c'est-à-dire $\mathrm{BE} \times \mathrm{B\Gamma}$

de même $\mathrm{Z}\Theta$ désigne $\Theta\Pi \times \Pi\mathrm{Z} = \mathrm{A\Gamma}^2$

on obtient $\Gamma\mathrm{E} = \mathrm{Z}\Theta$

puis on obtient $\mathrm{K\Gamma} = \Lambda\Theta + \Theta\Gamma$

et finalement $\mathrm{AB}^2 =$ gnomon $\mathrm{MN\Xi}$
$= 4\,\Delta\mathrm{A}^2$

et donc $\Delta\Gamma^2 = 5\Delta\mathrm{A}^2$

cqfd

Démonstration dans la tradition de l'algèbre géométrique du livre II alors que la suivante , sans figure, s'apparenterait plutôt à une démarche algébrique utilisant une représentation géométrique des nombres et des opérations tout aussi efficace que le symbolisme qui sera définitivement mis au point au début du XVIIème siècle.

2ème démonstration :

Analyse

P	puisque $\Gamma\Delta^2 = 5\Delta A^2$		donc
Q1	et que $\Gamma\Delta^2 = \Gamma A^2 + A\Delta^2 + 2\Gamma\Delta \times A\Delta$	(4.2)	mais
P1	(alors) $\Gamma A^2 + A\Delta^2 + 2\Gamma\Delta \times A\Delta = 5\Delta A^2$		donc
P2	donc $\Gamma A^2 + 2\Gamma\Delta \times A\Delta = 4\Delta A^2$.		donc
Q2	mais $BA \times A\Gamma = 2\Gamma A \times A\Delta$ (car $BA = 2A\Delta$)		
	et		et
	$AB \times B\Gamma = A\Gamma^2$ (17.6)	(hypothèse)	mais
P3	(donc) $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = 4A\Delta^2$		(donc)
Q4	mais $BA \times A\Gamma + AB \times B\Gamma = AB^2$ (2.2)		et que
P4	donc $AB^2 = 4A\Delta^2$		puisque

Mais cela est (cor 20.6) puisque $BA = 2A\Delta$

Synthèse

(les mots entre parenthèses ne figurent pas dans le texte)

Euclide procède par déduction dans l'analyse comme dans la synthèse, en renversant exactement l'analyse pour réaliser la synthèse (la démonstration). En fait il y a reciprocité à chaque étape.

Les géomètres grecs ne semblent pas s'être préoccupés de ce problème. Plutôt que de chercher des règles sur la réversibilité des conséquences ou de vérifier à chaque étape s'il y a réciprocité entre les propositions (ce qui arrêterait le mouvement de la pensée, la détournerait de sont but..), ils ont préféré, selon les recommandations de Platon, faire suivre l'analyse par une synthèse conçue alors comme vérification de l'analyse. C'est peut-être ce qui explique les ambiguïtés du texte de Pappus

L'analyse théorétique, ou zététique, a pour but l'invention de solutions ou de propositions.

Son principe est à nouveau de supposer le problème résolu, d'établir les relations découlant des conditions, utilisant aussi bien les quantités connues que les quantités inconnues, pour aboutir par élimination à une relation ne contenant plus que le nombre minimum d'inconnues.

Les exemples remarquables de l'analyse zététique des anciens se trouvent :
- dans les Coniques d'Apollonius (dans le livre II, propositions 44 à 51, donnant des méthodes pour construire des diamètres et des tangentes aux coniques)
- dans la Collection mathématique de Pappus
- dans les Métriques de Héron
- dans les Arithmétiques de Diophante

Parmi les nombreux exemples possibles, nous avons retenu pour l'atelier la proposition XLIV du Livre II des Coniques d'Apollonius et la proposition XXVII du livre I des Arithmétiques de Diophante.

La démarche analyse-synthèse pour résoudre un problème de construction étant classique et connue de tous, nous n'avons pas retenu un exemple brillant mais le premier exemple qui figure dans les Coniques d'Apollonius. Nous en retiendrons surtout qu'Apollonius utilise spontanément cette méthode sans définitions préalables. Ceci semble indiquer que la méthode, sous sa forme consciente et délibérée, était familière aux mathématiciens du IIIème siècle.

D'autre part, Paul Tannery fait allusion à un texte d'Apollonius qui parlerait de la priorité entre analyse poristique et analyse zététique à propos du lieu à quatre droites. Remarques qui plaident pour l'acceptation des propositions I -> V dans les Eléments d'Euclide.

Par contre, il nous a paru plus important d'examiner un texte de Diophante - même simple, du point de vue de la méthode analytique.

Proposition XXVII Livre I :

Le problème consiste à trouver deux nombres (rationnels positifs), x et y , tels que :

$$s)\quad \begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases}$$

En désignant l'inconnue (arithme), notée ici z, Diophante considère le problème résolu.

Compte tenu de son introduction ($x = 10 + z$ et $y = 10 - z$)
et des données du problème $\begin{cases} x + y = 20 \\ xy = 96 \end{cases}$
il substitue au système s) l'équation à une seule inconnue

$$100 - z^2 = 96$$

qui va permettre le calcul de z puis celui de x et de y.

Diophante n'impose pas le résultat a priori, il fait participer à sa recherche, sa démarche est analytique.

Il conclut *et ces nombres satisfont à la proposition* ou, dans d'autres propositions *et la preuve est évidente.* En effet, compte tenu de la réciprocité à chaque étape, la synthèse peut être escamotée. Elle n'est pas nécessaire si l'analyse a été bien menée.

L'analyse zététique est en fait le seul moyen méthodique d'obtenir une solution. C'est le procédé fondamental de l'analyse moderne. On le voit déjà en oeuvre dans le texte de Diophante. Ce sera repris par Viète en 1591 dans l'Introduction à l'art analytique. En introduisant sa "logistique spécieuse" (utilisation de lettres de l'alphabet pour désigner les quantités inconnues, d'une part, les quantités indéterminées d'autre part) en suggérant l'arithmétisation des problèmes de géométrie il annoncera la géométrie analytique de Descartes (1637).

Compte tenu de cette démarche Viète a proposé de remplacer le mot algèbre par analyse. Pendant le XVIIème siècle les deux termes sont en concurrence mais vers la fin du siècle deux ouvrages du Marquis de l'Hospital Analyse des infiniments petits (1696) et Traité analytique des sections coniques (1707) indiquent les deux domaines dans lesquels le terme "analyse" va s'imposer, le terme "algèbre" continuant à désigner tout ce qui se rattache à la théorie des équations.

La synthèse, en tant que partie intégrante d'un mode de démonstration, suppose une analyse préalable (dans la conception opératoire, au contraire, l'analyse-décomposition suppose une synthèse-composition préalable)

L'analyse peut introduire des solutions étrangères au problème posé, la synthèse les fera reconnaître .

La synthèse peut aussi prouver que l'énoncé doit être modifié.

Cependant pour démontrer un théorème ou donner la solution d'un problème on peut supprimer l'analyse et n'exposer que la synthèse. (C'est ce qu'ont fait les anciens mais ils n'ont jamais qualifié leur méthode d'exposition de "synthétique"). Mais la démonstration n'est pas entièrement satifaisante : on sait que les conditions de l'énoncé sont suffisantes on n'est pas assuré qu'elles sont toutes nécessaires. La solution est insuffisante car on ne sait pas s'il n'en existe pas d'autres.

On peut aussi éviter la synthèse quand il y a réciprocité entre les relations établies (cf Diophante, l'analyse moderne). Mais tant qu'il n'y a pas d'algorithme il est difficile de déterminer des règles précises sur la réversibilité des conséquences.

*
* *

Les Grecs ont inventé les principales formes de démonstration et même les principales formes de raisonnement telles qu'elles sont répertoriées dans un ouvrage de base. Mais il ont privilégié la preuve par la déduction. Kline propose une explication sociologique de ce choix et de ses conséquences.

Au Vème siècle avec la constitution de la cité s'est forgée une conception del'éducation de l'homme libre : amateur de spéculations intellectuelles à la recherche de vérités, dédaignant les travaux manuels, les applications techniques, le commerce .

Dans cet état d'esprit les résultats de la déduction sont satisfaisants car si les prémisses sont justes les résultats sont certains. Tandis que les résultats de l'induction, généralisation à partir d'expérimentations, ne sont que probables .

En conséquence, les sciences expérimentales ont été peu développées, le calcul numérique (ou logistique) est quelque peu méprisé, le système de numération est en retrait par rapport au système babylonien.

BIBLIOGRAPHIE

R. BLANCHE — La logique et son histoire, d'Aristote à Russell
éd. Colin. Coll. U. 1970.

R. BLANCHE — Le raisonnement
éd. PUF 1973

N. BOURBAKI — Eléments d'histoire des mathématiques
éd. Hermann 1960

L. BRUNSCHVICG — Les étapes de la philosophie mathématique
éd. Blanchard 1972

P. MOUY — Les mathématiques et l'idéalisme philosophique
in : les Grands courants de la pensée mathématique
par F. Le Lionnais
éd. Cahiers du Sud 1948

P. TANNERY — Les mémoires scientifiques. Tomes 3 et 6.
éd. Privat 1926

NOTES

1) Il n'est pas possible de reproduire ici les longs textes qui ont servi de support au colloque, extraits des T. III (Premiers Analytiques), et T. IV (Seconds Analytiques) de l'Organon, édité chez Vrin, et traduit par J. Tricot. C'est à cette édition que les références renvoient.
2) Premiers Analytiques, I, 4, p. 13
3) Premiers Analytiques, I, 1, pp. 4-5
4) Premiers Analytiques, I, 4, p. 13
5) sur ce débat, voir Blanché, La Logique et son histoire, Ch. 2
6) Premiers Analytiques, I, 5, pp. 21-22
7) Premiers Analytiques, I, 6, p. 31
8) Premiers Analytiques, I, 1, p. 5
9) Seconds Analytiques, I, 14, pp. 79-80
10) voir à ce propos les Seconds Analytiques, I, 6
11) voir les Seconds Analytiques, I, 10, et I, 11
12) Métaphysique, Livre C
13) Seconds Analytiques, I, 10, p. 58
14) voir les Seconds Analytiques, I, 3
15) Seconds Analytiques, I, 11, p. 60
16) Seconds Analytiques, I, 11, p. 61-62
17) Premiers Analytiques, II, 8, p. 246
18) Premiers Analytiques, II, 12, p. 264
19) Premiers Analytiques, I, 23, pp. 121-122
20) Topiques, I, 12
21) Seconds Analytiques, I, 2
22) Premiers Analytiques, II, 23
23) Seconds Analytiques, I, 5, p. 33
24) Seconds Analytiques, I, 18, p. 95 à 97
25) l'étude qui suit s'appuie largement sur les articles des Tomes III et VI des Mémoires scientifiques de Paul Tannery (Ed Privat 1926)
26) R. Blanché Le Raisonnement