QUELQUES EXEMPLES DE DEMONSTRATION EN MATHEMATIQUES CHINOISES

Jean-Claude MARTZLOFF

Que peuvent être des mathématiques "sans mathématiques", c'est-à-dire des mathématiques dépourvues d'axiomes, de définitions, de théorèmes, de raisonnements hypothético-déductifs, en un mot des mathématiques privées de tout ce qui fait que les mathématiques sont ce qu'elles sont ?

De telles mathématiques ne seraient sans doute rien d'autre que de banales collections de recettes numériques , une logistique, sera-t-on tenté de répondre.

Cette impression s'avère cependant trompeuse car les mathématiques développées en Chine offrent l'exemple d'une mathématique ouverte à des résultats parfois complexes et cependant établis grâce à des moyens d'apparence peu orthodoxe.

Les mathématiques chinoises contiennent, en effet, de nombreux résultats non-triviaux appartenant à des domaines variés des mathématiques. Or, bien que non-fondés sur des raisonnements purement discursifs, ces résultats reposent cependant sur des procédés opératoires cohérents et convaincants. Nous sommes donc en présence d'une mathématique qui, contrairement à la plupart des autres mathématiques non-occidentales de l'antiquité et même du moyen âge aussi, accorde de l'importance à "la" démonstration, même s'il s'agit d'un type de démonstration bien particulier.

Les quelques exemples de démonstrations chinoises que nous allons présenter ci-après font presque toujours appel au concret de l'évidence visuelle. La validité des "raisonnements" chinois repose donc crucialement sur le témoignage direct de la vision.

Aussi, pourrait-on parler à leur propos de "monstrations" plutôt que de démonstrations. Cependant, le concret visuel ne devrait pas être systématiquement et irréductiblement opposé à l'"abstrait" discursif car le système démonstratif chinois ne se limite pas au seul témoignage des yeux : il repose aussi sur tout un arsenal de procédés ingénieux centré autour de manipulations complexes d' aires et de volumes.

Plus précisément, les mathématiques chinoises utilisent un principe d'invariance des aires et des volumes stipulant que toute figure plane ou spatiale conserve la même aire (ou le même volume) lorsqu'elle est fragmentée en un certain nombre de morceaux puis éventuellement réassemblée sous une autre forme.

Dans les cas les plus simples, les mathématiciens chinois se limitent à la fragmentation d'une unique figure statique, sans déplacement de pièces. Ils obtiennent ainsi des relations mathématiques inconnues d'eux auparavant en écrivant que l'aire (ou le volume) de la figure qu'ils considèrent est égal à la somme des aires de ses composantes.

Dans des exemples plus élaborés, ils effectuent des déplacements de pièces. Les égalités additives d'aires ou de volumes ainsi obtenues concernent alors deux figures distinctes (c'est-à-dire, d'une part, une première figure donnée au départ puis découpée de manière *ad hoc* et d'autre part, une seconde figure construite à partir de la première par réassemblage).

Parfois aussi, ils considèrent plusieurs exemplaires d'une même figure. Ils ont alors affaire à des aires ou à des volumes qu'ils "multiplient", pour ainsi dire. Mais, en dehors de l' d'addition ou de multiplication, ils se servent aussi de la division ou même de la soustration d' aires ou de volumes. De plus, le découpage d'une figure peut les conduire à des situations dans lesquelles les composantes obtenues se chevauchent. Nous sommes donc là en présence d'une véritable "algèbre géométrique", opérant sur les aires et les volumes, et évoquant la manière dont David Hilbert présentait la géométrie élémentaire dans ses

Grundlagen der Geometrie.[1]

Mais, par ailleurs, que sont donc ces figures chinoises ? Des "objets de pensée" ou bien des objets matériels ? Pour autant qu'on puisse en juger, le peu de renseignements que contiennent les textes originaux[2] laisse supposer que la seconde hypothèse serait la bonne. Les textes nous apprennent en effet que le mathématicien doit manipuler des "pièces".[3] Le terme employé pour désigner ces "pièces" - *qi* - laisse supposer qu'il s'agirait là d'objets concrets tels que les pièces d'un quelconque jeu . En effet, ces "pièces" possèdent des couleurs , jaune rouge et bleu, permettant de les distinguer les unes des autres. De plus, les textes démonstratifs chinois abondent en verbes exprimant des actions concrètes à effectuer sur des "pièces" tels que "découper, retourner, déplacer, boucher (un vide), remplir, couper". De la sorte, ce que nous continuerons d'appeler "figures" dans ce qui suit renverrait plutôt à des représentations matérielles planes ou spatiales de type pièce de puzzle.

Les exemples de démonstrations chinoises présentés ci-après sont issus des textes originaux suivants :

- *Jiuzhang suanshu* [Neuf chapitres sur l'art du calcul]. Ce texte,[4] qui est le plus ancien manuel chinois de mathématiques qui soit parvenu jusqu'à nous, remonte, pour l'essentiel, à la dynastie des Han (206 A.C. - 220 P.C.). Il se compose d'une suite de problèmes accompagnés de leurs recettes résolutoires. Il est important de noter que ces recettes possèdent leurs

---

[1] Voir le chapitre 4 de cet ouvrage, consacré à la théorie des aires planes, p. 60 dans la traduction anglaise, *Foundations of Geometry*, La Salle, Illinois : Open Court, 1971.

[2] Nous faisons allusion ici au chapitre 3 du *Jiuzhang suanshu* (voir ci-après une brève présentation de cet ouvrage).

[3] Cf. J.C. Martzloff, *Histoire des mathématiques chinoises*, Paris, Masson, 1987, p. 258.

[4] Edition utilisée : Qian Baocong ed., *Suanjing shi shu* [Les Dix ouvrages canoniques de calcul numérique (il s'agit d'une célèbre collection de manuels de mathématiques qui furent en usage sous la dynastie des Tang (618-907)], Pékin (Zhonghua shuju), 1963. Le *Jiuzhang suanshu*, qui est le second de ces "Dix ouvrages canoniques" se trouve p. 91-158 de cet ouvrage.

Il est important de noter que ces recettes possèdent leurs démonstrations. Cependant, ces démonstrations ne sont pas aussi anciennes que le texte original : elles se rencontrent dans divers commentaires[5] publiés à partir de la fin du 3e siècle de notre ère.

Tels qu'ils sont parvenus jusqu'à nous, le texte et les commentaires du *Jiuzhang suanshu* ne contiennent pas de figures. Les figures que nous donnons ci-après sont donc des reconstitutions fondées sur les textes de certains commentaires. Ces reconstitutions ne sont donc pas arbitraires.

Les plus anciens commentaires mathématiques chinois contenant systématiquement des figures remontent, pour l'essentiel, à la fin du 18e siècle. A cette époque, de nombreux lettrés avaient entrepris, sous l'égide de l'empereur Qianlong (1736-1796), d'éditer et de rétablir, par la critique textuelle, certains textes majeurs de la tradition chinoise.

- *Zhoubi suanjing* [Canon des calculs gnomoniques des Zhou[6]]. Ce texte contient la description de la théorie cosmologique chinoise la plus ancienne, celle "du ciel couvrant" (*gaitian*). Selon cette théorie, la terre est plate et les dimensions de l'univers sont finies. Il ne s'agit pas simplement d'un mythe, mais d'une construction qui repose sur des calculs mathématiques, tels que ceux que préconise le théorème "de Pythagore". L'un des commentaire de ce texte, dont la plus ancienne édition encore existante remonte à environ 1230 A.C., contient une figure dite "de l'hypoténuse" (*xian tu*)

Nous avons aussi utilisé d'autres sources. Nous en indiquerons les références précises en note, en relation avec chaque démonstration présentée.

---

5 Ce que nous appelons ici "commentaire" est un genre littéraire hétérogène complexe centré à la fois autour de l'explication de texte, de la philologie, de la phonétique historique, de l'histoire, de la géographie et même de l'explication logique. C'est par ce dernier aspect que les commentaires chinois relèvent de la démonstration mathématique.

6 Les *Zhou* : nom global de la dynastie ayant régné sur la Chine de 1121 A.C. à 256 A.C. Ce texte remonte aussi à la dynastie des Han mais on ne sait pas le dater précisément à l'intérieur des 4 siècles du règne de cette dynastie.

I- LA FIGURE "DE L'HYPOTENUSE" (*XIAN TU*)

Original : voir la fig. 1 (reproduite d'après la figure figurant au début du texte du *Zhoubi suanjing* dans l'édition *Tian-lou lin-lang* du *Suanjing shishu*, Pékin, 1932. Cette édition reproduit un texte dérivant d'une copie de l'édition de 1084 du *Suanjing shishu* [Les dix ouvrages canoniques de calcul numérique].

Traduction de la figure 1 : voir la fig. 2.

Interprétation : Le commentaire du *Zhoubi suanjing* rédigé par un certain Zhao Shuang (fin du 3^e^ siècle de notre ère) contient la formule suivante :

$$c^2 = 4(ab/2) + (b - a)^2 \qquad \text{(fig.2)}$$

"*Le carré de l'hypoténuse contient 4 surfaces rouges et 1 surface jaune*".[7]

De nombreux auteurs chinois ont aussi utilisé une figure analogue pour découvrir d'autres relations, par exemple :[8]

$$(b + a)^2 = 4\ ab + (b - a)^2 \qquad \text{(fig.2)}$$

Cette relation permet de calculer deux nombres à partir de leur somme (ou leur différence) et leur produit , moyennant une extraction de racine carrée. Nous sommes donc là en présence d'une technique conduisant à la résolution d'équations du second degré à une époque où la notion même de telles équations faisait totalement défaut.

On note incidemment que la même figure fournit aussi directement et "sans paroles", l'inégalité entre les moyennes arithmétiques et géométriques :[9]

[7] Le lecteur trouvera d'autres précisions sur cette figure dans (par exemple) J. Hoe, *Les systèmes d'équations polynômes dans le* Siyuan yujian *(1303)*, Paris, Collège de France, Institut des Hautes Etudes Chinoises, 1979, vol. VI, p. 84 sq.

[8] Cf. J.C. Martzloff, *Recherches sur l'oeuvre mathématique de Mei Wending*, Paris, Institut des Hautes Etudes chinoises, 1981, p. 128 sq.

[9] Cette relation ne figure cependant dans aucun texte chinois.

$$\frac{a+b}{2} < (ab)^{1/2}$$

Remarque : La même figure "de l'hypoténuse" se rencontre aussi dans le texte sanscrit d'un commentaire d'Aryabhatiya. Cf. K.S. Shukla ed., *Aryabhatiya of Aryabhata with the commentary of Bhâskara I and Somesvara*, New Delhi, Indian National Science Academy, 1976, p. 48 (fig. 3).

II- LE THEOREME "DE PYTHAGORE"

On pourrait penser que le théorème "de Pythagore" chinois découle de la première relation indiquée ci-dessus. Cette interprétation n'est pas exclue mais, à une époque à laquelle les calculs algébriques n'existaient pas, le passage de cette première relation à ce théorème n'allait pas nécessairement de soi. En fait, à propos du premier problème du chapitre 9 du *Jiuzhang suanshu*, le commentateur-mathématicien Liu Hui (vers 270 A.C.) présente le théorème de Pythagore sans se référer à la "figure de l'hypoténuse" précédente mais à partir d'une figure (hélas perdue) dont il préconise de déplacer certaines parties . Le détail exact de sa technique n'est donc pas connu mais la nature de celle-ci ne fait pas de doute : il s'agit d'une dissection. A titre d'exemple nous indiquons ci-après une reconstitution de la figure de Liu Hui (fig. 4).[10]

Selon cette reconstitution, on doit partir d'un triangle rectangle, sur les côtés duquel on a tracé les carrés correspondants, de façon que le carré (physique) de l'hypoténuse recouvre partiellement chacun des deux carrés (physiques) des deux côtés de l'angle droit. L'idée sous-jacente à cette construction est qu'il est possible de reconstituer physiquement le carré de l'hypoténuse en recouvrant les deux autres carrés des côtés de l'angle droit. Or, il est certain qu'on s'épargne déjà un certain travail en recouvrant déjà partiellement ces carrés avec le carré (physique) de l'hypoténuse ! Le texte de la figure chinoise

ancien.

[10] D'après Gu Guanguang, *Jiushu cungu* [Les "Neuf chapitres" dépositaires de la tradition], texte édité en 1892 par la maison d'édition Jiangsu shuju, ch. 9, verso de la page 4.

indique laconiquement, sur la figure elle-même, les instructions suivantes :"rouge sort" (*zhu chu*) et "bleu entre" (*qing ru*) (voir la traduction, fig. 5). Ces indications lapidaires signifient qu'il faut "faire sortir" certains fragments rouges ou bleus afin de les "faire entrer" à la place des fragments correspondants de la même couleur qu'eux (fig. 5).

III- UNE IDENTITE REMARQUABLE

La figure 6 montre une dissection d'un cube destinée à faire apparaître l'identité remarquable $(a + b)^3$. Nous ne donnerons pas de traduction de cette figure car ce qu'elle exprime est évident. On note que les caractères d'écriture chinois qui l'accompagnent n'équivalent aucunement à des lettres de l'alphabet[11] ; il s'agit au contraire de mots indiquant concrètement la nature de certaines parties de la figure : le "coin" (*yu*) -c'est-à-dire le cube physique de a- et les "bords" (*lian*) relatifs aux parallélépipèdes rectangles qui interviennent dans le développement de $(a + b)^3$.

IV- UN SYSTEME NON LINEAIRE DE TROIS EQUATIONS A TROIS INCONNUES

Original : voir la figure 7.[12]

Traduction : voir la figure 8.

Interprétation : Cette figure sert à expliquer l'algorithme résolutoire du problème n° 11 du chapitre 9 du *Jiuzhang suanshu* dont voici le texte :

"*Soit une porte dont la hauteur dépasse la largeur de 6* pieds *8* pouces *et dont les coins opposés sont distants d' une toise*[13]. *Combien font la hauteur et la largeur de la porte ?*"

---

[11] Cette remarque s'applique aussi à toutes les figures géométriques chinoises présentées ici.

[12] Source : Gu Guanguang, op. cit., recto de la page 5 du chapitre 9.

[13] 1 toise = 10 pieds, 1 pied = 10 pouces (les termes originaux désignant ces unités sont, resp. : le *zhang*, le *chi*, le *cun*).

Autrement dit, avec des notations évidentes :

$$x^2 + y^2 = d^2$$

$$y - x = a$$

$$z = d$$

Afin de ne pas trahir l'esprit de la démarche originale, nous allons maintenant nous efforcer d'expliquer la démarche chinoise sans utiliser les facilités que procureraient les notations mathématiques usuelles.

D'après les explications de Yang Hui[14] (vers 1261), ce problème doit se résoudre en "posant une figure" plutôt qu'en posant des équations."Posons" donc une figure (texte original : fig. 7, traduction : fig. 8) :

La figure 8 montre les deux carrés *physiques* des deux dimensions de la porte (c'est-à-dire, ceux des deux côtés de l'angle droit) posés (physiquement) l'un sur l'autre. Cette configuration traduit l'équation (1). On observe ensuite que le carré de côté y est découpé en :

- 4 rectangles ;
- 2 petits carrés jaunes (ayant chacun pour côté $a/2$)[15] ;
- et enfin, un carré de côté x.

Si maintenant l'on ôte du grand carré de côté y l'équerre qui le borde sur le dessus et à droite, il reste un carré dont les dimensions valent à la fois $x + a/2$ ou $y - a/2$ et dont l'aire vaut *la moitié* de l'aire totale des deux carrés x^2 et y^2 *diminuée* de l'aire des deux carrés jaunes, soit $2(a/2)^2$. Par conséquent :

$$x = \sqrt{\frac{1}{2}\left[d^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2 \right]} - \frac{a}{2}$$

---

14 Yang Hui, *Xiang jie Jiuzhang suanfa* [Explication détaillée des méthodes de calcul numérique des Neuf Chapitres (C'est-à-dire : du *Jiuzhang suanshu*), 1261. L'édition utilisée ici est celle qui fut publiée en 1936 par la Commercial Press (*Shangwu yinshuguan*) de Shanghai.

15 Le côté de chacun de ces carrés "jaunes" vaut la moitié de la différence entre les longueurs des côtés des "grands carrés".

$$y = \sqrt{\frac{1}{2}\left[d^{2} - 2\left(\frac{a}{2}\right)^{2} \right]} + \frac{a}{2}$$

On obtient donc ainsi directement la solution du texte original sans effectuer le moindre calcul.

V- FIGURES INSCRITES

Les problèmes n° 15 et 16 du chapitre 9 du *Jiuzhang suanshu* s'intéressent à la détermination de la longueur du côté d'un carré (resp. du diamètre d'un cercle) inscrit dans un triangle rectangle. Le commentateur Liu Hui (vers 270 A.C.) explique les formules donnant les solutions de ces deux problèmes de deux manières différentes dans chaque cas : d'une part, à l'aide de la similitude de triangles, d'autre part à l'aide d'une dissection. Un lettré de la fin du 18^{e} siècle, Li Huang (? - 1812) a reconstitué les figures manquantes des démonstrations de Liu Hui. Nous présentons ci-après les figures de Li Huang (fig. 9 et 10).[16]

On voit (au sens propre) que les solutions consistent à considérer plusieurs exemplaires d'un même triangle de base disséqué en composantes colorées. Par exemple, dans le cas du problème du carré inscrit, Liu Hui conseille de prendre deux exemplaires du triangle de base puis de recomposer les fragments qui résultent d'une dissection de celui-ci l' indique la figure. Il remarque alors que le double de l'aire du triangle initial (soit ab) est égal à l'aire d'un rectangle de dimensions c (= côté encore inconnu du carré inscrit) et $a + b$. D'où la relation cherchée. Le raisonnement suit la même voie dans le cas du cercle inscrit, mais en considérant 4 exemplaires du triangle initial.

VI LA SOMME DES CARRES DES N PREMIERS ENTIERS

L'ingénieuse solution de ce problème consiste à considérer 3 exemplaires d'une même pyramide se composant de $1 + 2 + ... + n^{2}$ petits cubes (voir la figure 11).[17] En assemblant ces trois

---

16 Source : Li Huang, *Jiuzhang suanshu xicao tushuo* [Solutions détaillées des problèmes du *Jiuzhang suanshu* avec figures et explications], Chengdu, 1896.

17 Source : Du Zhigeng, *Shuxue yao* [La clef des mathématiques]

pyramides comme indiqué on trouve un volume irrégulier qui peut néanmoins être transformée en un parallélépipède rectangle. D'où le résultat cherché.

VII QUELQUES CONCLUSIONS :

Les techniques précédentes présentent d'évidentes limites car ce qui vaut pour un problème particulier ne s'applique pas de manière évidente à un autre problème. Un effort d'invention doit donc être refait à chaque fois. Plus grave, on voit mal comment on pourrait généraliser ce type de méthode à des problèmes impliquant des équations de degré supérieur à 3. Enfin, les techniques de dissection manquent pour le moins de rigueur. C'est pourquoi, pour illustrer ce dernier point, le facétieux Lewis Caroll, pour ne citer que lui, se fait-il fort de "démontrer" (dans ses *Diversions and Disgressions*[18]) que 64 = 65 , en produisant une habile mais fallacieuse application du principe d'invariance de l'aire, après dissection et réassemblage de certains fragments d'un carré.[19] (Cf. fig. 12).

Ces critiques peseraient lourd s'il s'agissait de comparer entre elles certaines techniques mathématiques anciennes ou modernes en tant que "mathématiques en soi". Tel n'est pas notre but cependant : nous cherchons seulement à retracer des fragments d'histoire des mathématiques.

Dans une telle perspective l'argument de Lewis Caroll ne mène pas loin puisqu'on ne connait aucune exemple *historique* d'erreur mathématique causée par une dissection malencontrueuse.

En définitive, on peut espérer que la mise à jour de ces anciennes démonstrations pourra nous aider à mieux apprécier l'immense effort d'ingéniosité qu'a exigé le développement des mathématiques surtout si l'on s'efforce d'éviter, dans la

---

(fin 17e siècle). D'après la réédition du texte parue à Taipei en 1975 dans la collection *Siku quanshu zhenben*.

18 réédité à New York par les éditions Dover en 1961.

19 voir J.C. Martzloff, *Recherches sur l'oeuvre mathématique de Mei Wending*, op. cit., p. 296.

présentation de leur longue histoire, les raccourcis suggestifs mais souvent trompeurs, issus de trop faciles utilisations de notions maintenant familières et courantes mais dont l'apparition fut cependant tardive et auxquelles nos lointains prédécesseurs n'avaient pas nécessairement accès.

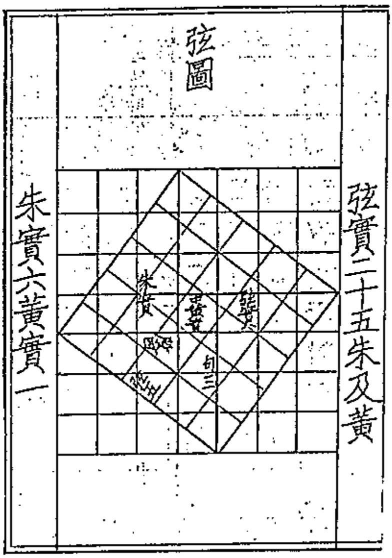
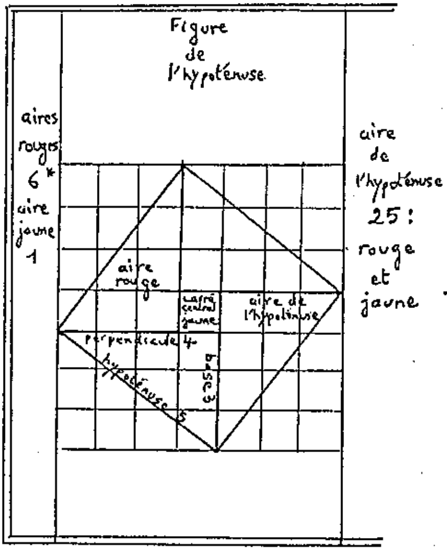
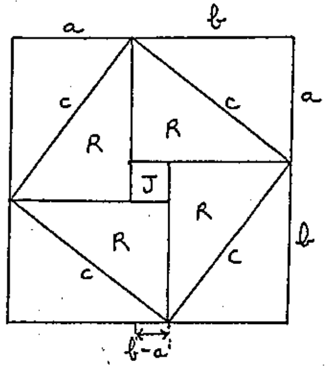


Fig. 1

La "figure de l'hypoténuse" (xian tu)
du Zhoubi suanjing



*le "6" est une coquille. Il faut lire 4 et non pas 6.



R = rouge
J = jaune

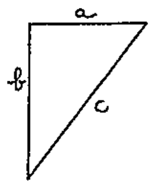
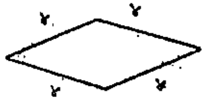


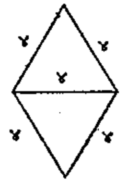
Fig. 2

La "figure de l'hypoténuse" (traduction)

परिलेखः १



परिलेखः २



समचतुरश्रक्षेत्रविशेषस्यास्य (परिलेखः १)। द्विसमत्र्यश्रक्षेत्रस्य[1] समुन्नतवदवस्थितस्यास्य (परिलेख; २)।

वर्गसंज्ञाप्रसङ्गे को दोषः ? उच्यते—'फलं च सदृशद्वयस्य संवर्गः' इति सदृशद्वयस्य संवर्गः फलं प्राप्नोति, न चेष्यते एवम्। क्व तर्हि ? कर्णग्रहणं कर्तव्यम्; वर्गः समकर्णसमचतुरश्रक्षेत्रविशेष इति। अथवा तुल्यसङ्ख्याभ्यां [2]कर्णाभ्यामुपलक्षितस्यैव समचतुरश्रक्षेत्रविशेषस्य वर्गसंज्ञा जिज्ञास्यते। कुतः ? नानिष्टार्थत्वाच्छास्त्रप्रवृत्तेः। अथवा नैव लोके एवमाकारविशिष्टस्य समचतुरश्रक्षेत्रस्य समचतुरश्रसंज्ञा सुसिद्धा। आयतचतुरश्रक्षेत्रादिषु वर्गकर्मणोऽस्तित्वा[3]त्तेषामसमचतुरश्राणामपि वर्गसंज्ञाप्रसङ्गः। नैष दोषः। तेष्वपि यो वर्गः स समचतुरश्रक्षेत्रफलम्। तद्यथा—समचतुरश्रक्षेत्रमालिख्य अष्टधा विभज्य त्रिकचतुष्कविस्तारायामानि चत्वारि आयतचतुरश्रक्षेत्राणि पञ्चकर्णानि परिकल्पयेत्। तत्रैवं परिकल्पितचतुरश्रायतचतुरश्रक्षेत्रकर्णबाहुकं समचतुरश्रं क्षेत्रं मध्येऽवतिष्ठते[4]। यस्तत्रायतचतुरश्रक्षेत्रकर्णायतवर्गः, स चान्तःसमचतुरश्रक्षेत्रे फलम्। त्रिभुजेऽप्येतदेव दर्शनम्, अर्धायतचतुरश्रत्वात् त्रिभुजस्य। दुर्विदग्धप्रत्यायनाय[5] च क्षेत्रमालिख्यते—

परिलेखः ३

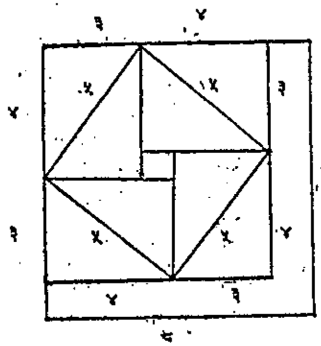
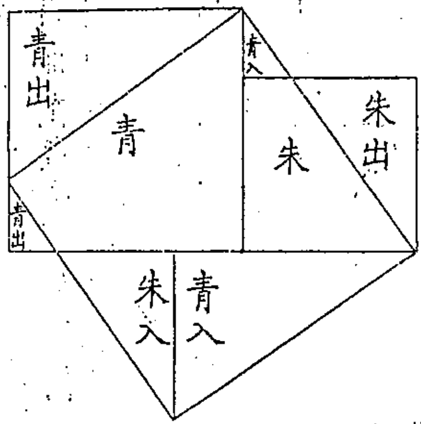


Fig. 3

Un commentaire de l'Aryabhatiya d'Aryabhata



句股術曰令句股各自乘并而開方除之即弦劉徽云句自乘爲朱方股自乘爲青方令出入相補各從其類因就其餘不移動也合成弦方之冪開方除之即弦也又股自乘以減弦自乘其餘開方除之即句又句自乘以減弦自乘其餘開方除之即股劉徽云句股冪合成弦冪去其一則餘可知之

今有池方一丈葭生其中出水一尺引葭赴岸適與岸齊問水深葭長各幾何答曰水深一丈二尺葭長一丈三尺

術曰半池方自乘劉徽云此以池方半之得五尺爲句水深爲股葭長爲弦以句及股弦差求股弦故令句自乘先見矩冪也以出水一尺自乘減之劉徽云出水者股弦差減此差冪於矩冪餘爲倍股弦差

九數存古 卷九

Fig. 4

Le théorème "de Pythagore" démontré par dissection

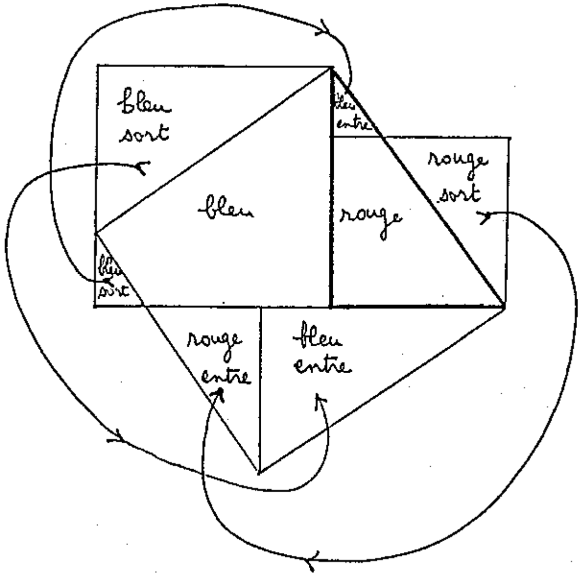
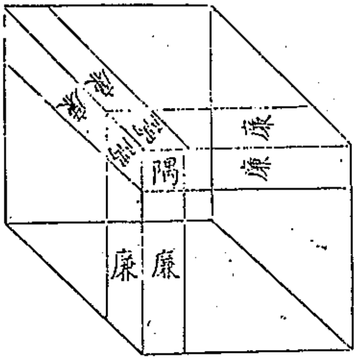


Fig. 5
Le théorème "de Pythagore" démontré par dissection
(tradüction de la figure chinoise)

三廉以初商爲長有面無冪今以次商乘之是爲三廉備冪也再乘下劉徽云隅自乘爲方冪皆副以加定法以定法除劉徽云三面三廉一隅皆已有冪以上議命之而除去三冪之厚也李雲門云皆副以加定法者以次商乘隅加廉又以次商乘廉加方爲定法也以定法除者以次商乘方滅實也除已倍下并中從定法李雲門云又以次商乘隅加廉以次商乘廉加方復除折下如前李雲門云三因次商加廉爲廉法方一退廉再退隅三退步之如前開之不盡者亦爲不可開若積有分者通分內子爲定實乃開之訖開其母以報除若母不可開者又以母再乘定實乃開之訖令如母而一○此帶分開立方法與平方同理



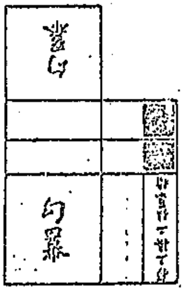
李雲門補圖說云如圖三廉各以兩面面之冪連於兩方之面一隅連於三廉之端

Fig. 6
$(a + b)^3$

勾股較與弦求股法曰。弦自乘。爲勾羃二。半較爲四。半較乘勾四。半較自乘倍之。減積。餘見之。較圖。

詳解九章算法　五七

詳解九章算法　五八



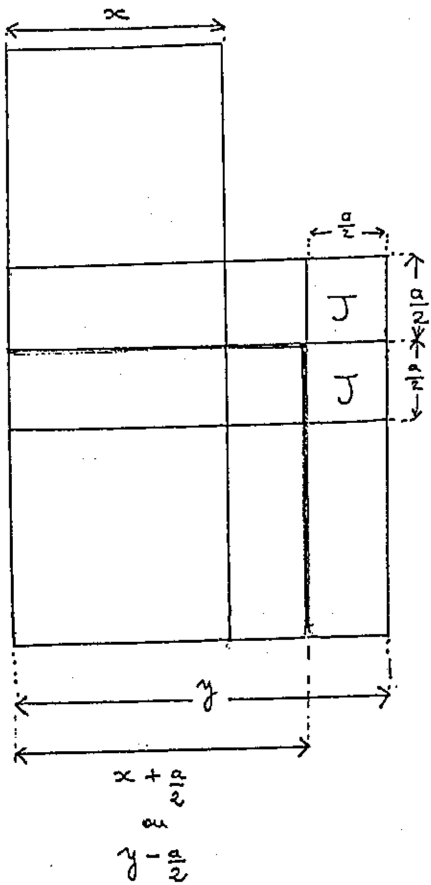
半之。開方。得弦。一段。減半較。爲勾。即戶廣也。加較。爲高。

草曰。弦自乘。兩隅相去百寸。自之。得一萬寸。半較三十四自乘。倍之。減積。餘半之。三千八百四十四。開方。得弦。六十二寸。減半較。爲勾。二十八寸。即戶廣也。加較。六十八寸。爲高。

Fig. 7

Le problème de la porte et sa solution

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$y - x = a$$
$$z = d$$



$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[d^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

$$\left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[d^2 - 2\left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$$

J = jaune

Fig. 8
Le problème de la porte (traduction)

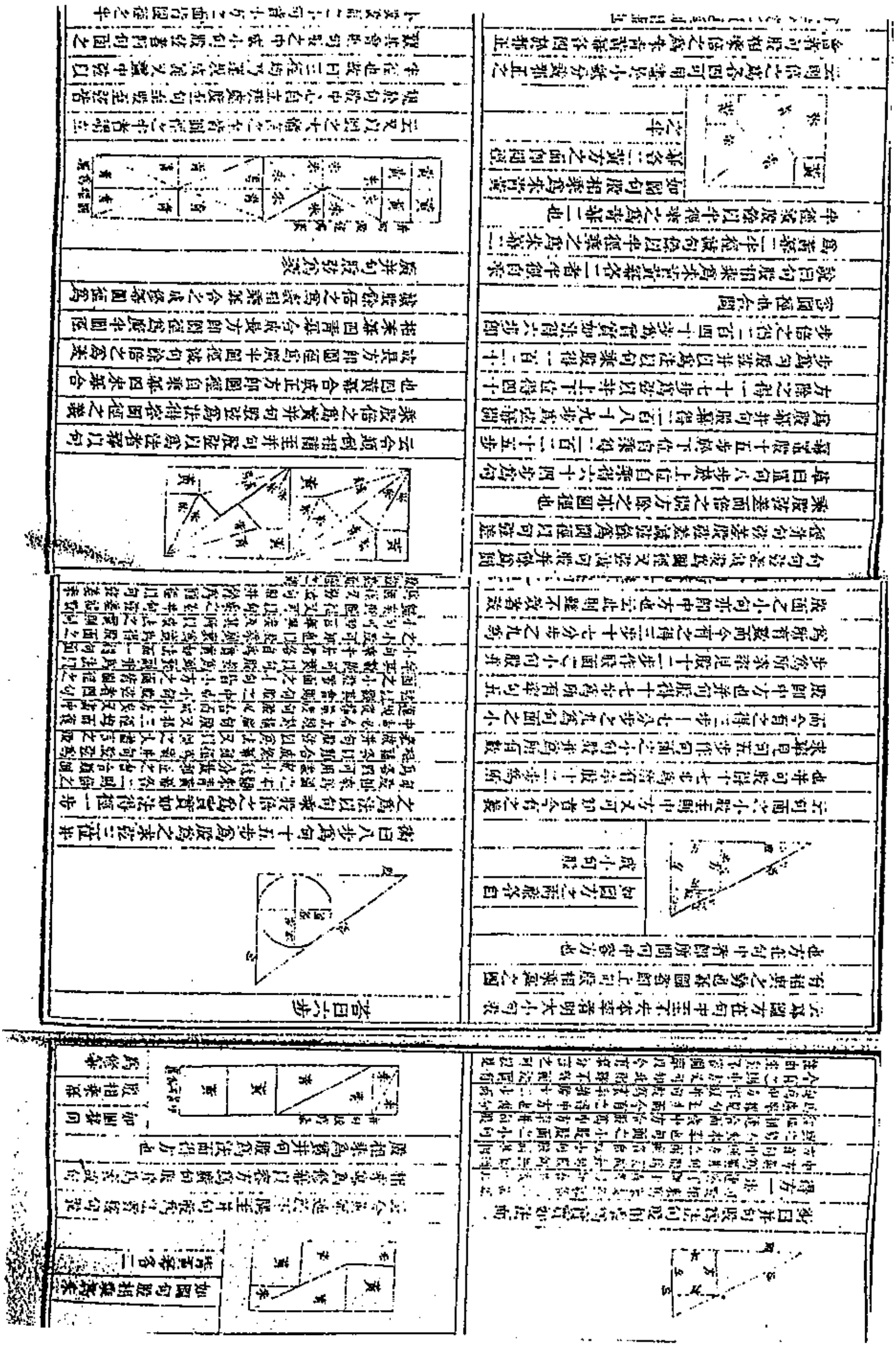
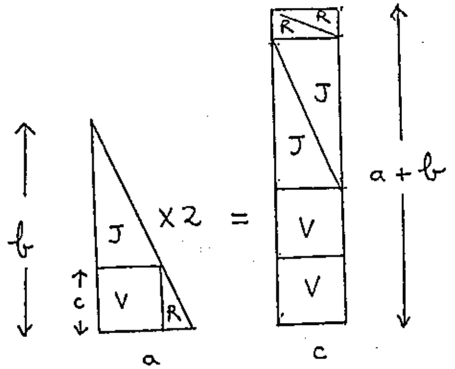
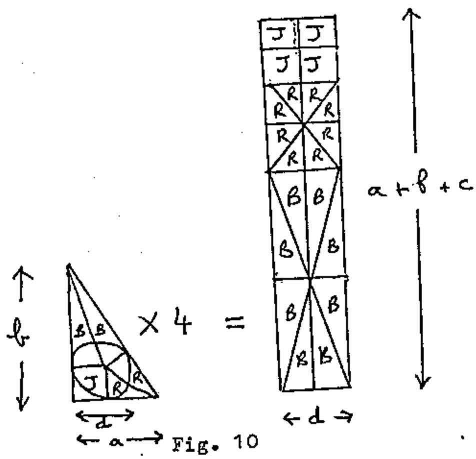


Fig. 9
Figures inscrites



$$c = \frac{ab}{a+b}$$

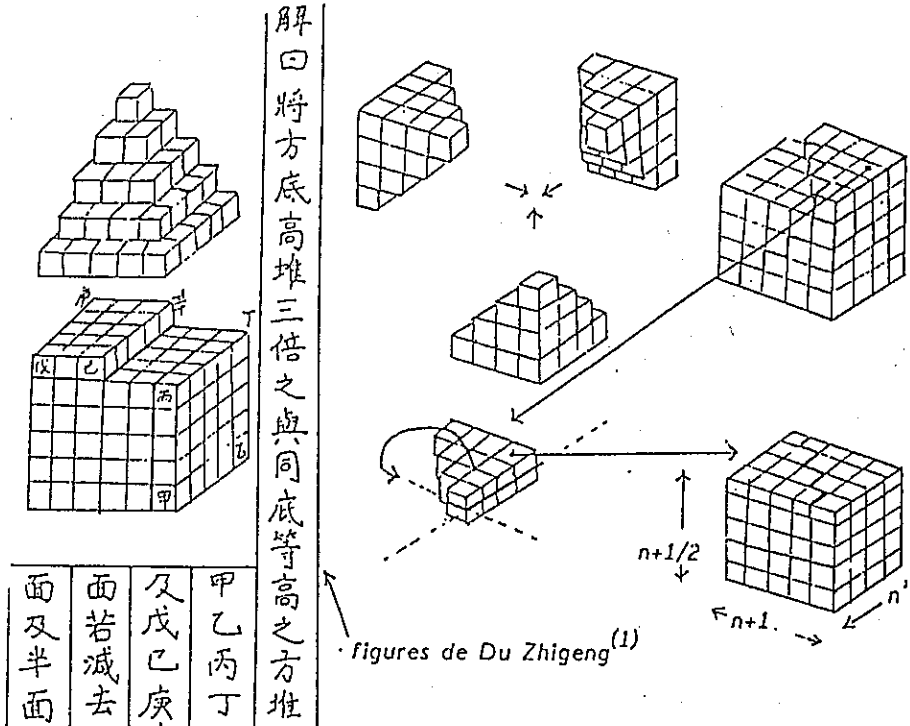
B = bleu
J = jaune
R = rouge



$$d = \frac{2ab}{a+b+c}$$

Fig. 10

Figures inscrites

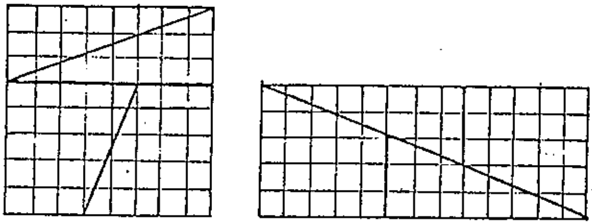


La somme des carrés des n premiers nombres
(reconstitution)

Fig. 11

Fig. 12 (Lewis Caroll)

des manipulations par dissection :



La première figure, décomposée selon les traits pleins, donne naissance à la seconde qui a l'apparence trompeuse d'un véritable rectangle, mais dont l'aire diffère de celle du carré initial. On "prouve" ainsi que 8 x 8 = 5 x 13 ! On voit là le danger de telles *monstrations* : la méthode manque assurément de rigueur. Mais il est important de souligner que, pour sa part, Méi Wéndǐng n'aboutit jamais à des résultats inexacts en l'utilisant.

D'autre part, le principe de décomposition appliqué au calcul du volume des solides ne se suffit plus toujours à lui-même ; en général, il faut faire appel à la notion de limite. C'est d'ailleurs ce qu'a reconnu Méi Wéndǐng. Malgré tout, cette géométrie des aires et des volumes possède une bonne valeur heuristique. Plus précisément, c'est surtout le cas en géométrie plane. En effet, on sait maintenant que les processus de calcul des limites sont superflus tant qu'il s'agit de calculer l'aire des polygones plans, tandis qu'il est impossible de s'en passer.