

QUELQUES REMARQUES SUR LA DEMONSTRATION (Autour de la philosophie de GONSETH)

Rudolf Bkouche

La dernière garantie d'une preuve, dans les sciences, ce n'est pas une preuve dernière, une preuve au-delà de laquelle il n'y a plus rien à objecter.

Cette garantie, c'est la science elle-même qui la fournit, par son existence, par sa cohérence, par son efficacité et par sa faculté de progrès. C'est l'ensemble du savoir scientifique déjà constitué, savoir dont la preuve est une partie intégrante.
Gonseth La géométrie et le problème de l'espace.

Pour savoir, il n'est pas nécessaire de savoir comment on sait.

Ainsi commence La Géométrie et le Problème de l'Espace: assertion paradoxale pour quelqu'un dont l'oeuvre tourne en partie autour de la question: comment sait-on ce qu'on sait? et pourtant cette assertion exprime un aspect essentiel de la démarche de Gonseth.

C'est que la question du comment on sait est seconde, elle se construit autour d'un savoir déjà constitué, moins par rapport à ce savoir que par rapport aux limites de ce savoir. La question du comment on sait commence au moment où, non seulement l'on ne sait pas, mais où l'on ne sait pas comment savoir, c'est-à-dire au moment où le mode de construction du savoir perd son efficacité, où il devient donc nécessaire de le redéfinir. Ainsi la pensée de Gonseth se présente comme une pensée aux limites, pensée qui se construit essentiellement autour des zones d'instabilité; c'est que la science se construit aux limites du savoir et l'épistémologie gonsethienne est moins un discours sur la science qu'une tentative d'explicitation de la démarche scientifique dans les lieux où elle est encore balbutiante et où, en même temps qu'elle construit des savoirs nouveaux et qu'elle élabore des méthodes nouvelles, elle doit en déterminer les conditions de légitimation, c'est-à-dire les conditions de la certitude du savoir ainsi construit. Les conditions de la certitude ne résident pas dans une garantie a priori (la doctrine préalable, pour reprendre l'expression de Gonseth, nécessaire au fondement de toute connaissance), elles résident dans la globalité du savoir, c'est sur le savoir lui-même qu'elles se construisent, ce qu'on peut résumer en disant que la doctrine préalable ne devient préalable qu'après.

C'est cette conception gonsethienne que je me propose d'explicitier à travers le problème de la démonstration mathématique, dans un double objectif, épistémologique d'une part quant à l'apport de Gonseth au problème de la légitimation de la démonstration, didactique d'autre part (et ici le didactique est ancré dans la problématique du savoir en question) quant à la place de la démonstration dans l'enseignement des mathématiques (ce

qu'il ne faut pas confondre avec le problème de l'enseignement de la démonstration, enseignement qui ne peut être abordé que par qui a déjà une pratique de la démonstration).

Je me bornerai essentiellement à la démonstration géométrique, l'un des lieux de prédilection de l'oeuvre de Gonseth, justement parce que aux limites, entre les divers modes d'appréhension des notions spatiales, où les trois aspects de la connaissance mis en avant par Gonseth, savoir, l'intuitif, l'expérimental et le théorique s'entremêlent à chaque étape de la construction du savoir géométrique.

Au chapitre II de La Géométrie et le Problème de l'Espace, Gonseth explicite les divers modes d'appréhension de la connaissance géométrique; sa démarche est proche de celle de Federigo Enriques définissant, dans un article intitulé Les Principes de la Géométrie publié dans l'Encyclopédie des Sciences Mathématiques (1), trois notions d'espace

1) l'espace intuitif habituel, c'est-à-dire la représentation de l'espace tel que notre esprit le conçoit;

2) l'espace physique dont les propriétés nous sont données par l'expérience

3) les espaces abstraits, c'est-à-dire les conceptions plus générales que nous pouvons déduire de l'espace intuitif par abstraction et généralisation.

Enriques précise alors le rôle qu'ont joué les géométries non-euclidiennes, qui ont conduit à l'idée nouvelle et remarquable que l'espace physique pourrait être différent de l'image que nous en fournis l'intuition habituelle; ce qui implique la place du théorique dans la construction de la géométrie, y compris dans sa partie élémentaire (ce sont des raisons d'ordre théorique qui ont conduit au problème des parallèles). La géométrie élémentaire n'est pas simple accumulation de connaissances, elle est aussi organisation de ces connaissances, et la démonstration y joue un rôle, non seulement comme critère de validation, mais comme définissant ce que plus tard Bouligand appellera une causalité mathématique (2).

Ce problème des divers modes d'appréhension de la connaissance géométrique conduit Gonseth, d'une part à définir les trois aspects cités ci-dessus, savoir, l'aspect intuitif, l'aspect expérimental, l'aspect théorique, d'autre part à étudier la façon dont ils s'articulent.

Nous montrerons sur un exemple cité par Gonseth au chapitre II de La Géométrie et le Problème de l'Espace, la façon dont se présentent et s'articulent les trois aspects cités ci-dessus; il s'agit de la démonstration de la formule d'Euler pour un polyèdre simplement connexe:

$$s + f - a = 2$$

où s, f et a, désignent respectivement le nombre de sommets, le nombre de faces et le nombre d'arêtes du polyèdre.

Nous ne précisons pas ce qu'il faut entendre par polyèdre, face, arête et sommet. Nous admettons même qu'on n'en possède que les notions sommaires et peu analysées que le maniement de modèles matériels suggère. Nous supposons que l'on sache se représenter comment une surface polyédrique peut être fendue le long d'une arête ou d'une ligne formée d'arêtes successives.

écrit Gonseth au début de sa démonstration. C'est dire que la notion de polyèdre est acquise, elle relève moins d'une définition explicite que de l'image mentale que l'on s'est formée, connaissance intuitive qui relève à la fois du sensible et des idées que l'on s'est fabriquées. Gonseth ne pose ici ni le problème de la vérité de cette connaissance ni celui du mode de construction de cette connaissance. La connaissance intuitive est à la fois un donné et une

construction, un donné dans la mesure où elle se fonde sur notre rapport avec le monde extérieur (ce que j'appellerai le heurt avec le réel, sans préjuger aucunement de ce qu'est le réel), mais aussi une construction par le sujet connaissant, ce que Gonthier appelle la construction de la réalité, ainsi il écrit dans Les Mathématiques et la Réalité (chapitre III).

La réalité telle que nous l'apercevons est une construction plus ou moins autonome de notre esprit, dont les fins essentielles sont de rendre l'action possible.

Mais cette connaissance intuitive, si elle donne un cadre pour la pensée et l'action, reste insuffisante, elle ne nous renseigne pas sur sa validité, validité qui est moins vérité qu'adéquation entre cette connaissance et notre rapport au réel (cela dit sans préjuger de ce réel), c'est cette adéquation que Gonthier appelle l'idoneité, exprimant ainsi la prise en compte à la fois des contraintes extérieures (le réel!) et de la construction de la réalité par l'esprit humain, construction qui est en quelque sorte la réponse du sujet connaissant à ces contraintes. C'est alors le rôle de la connaissance expérimentale et de la connaissance théorique que de construire l'idoneité.

La définition de la simple connexité que donne Gonthier, tout en s'appuyant sur l'idée intuitive de polyèdre, en montre bien le caractère expérimental,

Il nous faut cependant expliquer ce que veut dire le qualificatif simplement connexe. Fendons une surface polyédrique le long d'une suite d'arêtes formant un contour fermé. Deux événements peuvent se produire:

ou bien la surface polyédrique se sépare en deux parties distinctes,

ou bien la surface fendue reste encore d'une seule pièce.

Si la seconde éventualité ne se présente pour aucune des suites fermées d'arêtes contenues dans la surface envisagée, celle-ci est simplement connexe. Le tétraèdre, le cube, l'octaèdre, etc., en sont des exemples.

définition qui s'appuie sur le découpage, opération réelle ou opération mentale peu importe (l'opération mentale renvoyant ici à des opérations réelles analogues antérieures). L'expérimental, parce qu'il est action du sujet, précise ici l'intuitif mais c'est l'intuitif, en déterminant le contexte, qui donne consistance à l'expérimental; un expérimental nu ne serait porteur d'aucune connaissance.

Les données du problème ainsi mises en place, Gonthier peut aborder la démonstration.

Découpant la surface polyédrique F qu'on suppose simplement connexe, le long d'un circuit fermé C constitué par des arêtes, on obtient deux morceaux F_1 et F_2 , bordés l'un et l'autre par le circuit C .

Considérant l'un des morceaux, F_1 par exemple, on le découpe le long d'une suite d'arêtes partant du bord et y revenant; on partage ainsi F_1 en deux morceaux, on peut ainsi continuer jusqu'à ce qu'on ait que des polygones, on procède de même avec F_2 .

Pour chacun des polygones, on a évidemment la relation

$$s + f - a = 1$$

Pour déterminer l'expression $s + f - a$ pour le polyèdre, il suffit de recoller les morceaux.

Nous distinguerons deux éventualités:

l'assemblage de deux morceaux ne reconstitue pas le polyèdre,

le dernier assemblage reconstitue le polyèdre.

Supposons deux morceaux que l'on recolle, on note s_1, f_1, a_1 , et s_2, f_2, a_2 , les nombres respectifs de sommets, de faces et d'arêtes de chacun des morceaux et supposons que l'on ait les relations (vérifiées pour les morceaux polygonaux qu'on recolle)

$$s_1 + f_1 - a_1 = 1$$

$$s_2 + f_2 - a_2 = 1$$

alors

$$s_1 + s_2 + f_1 + f_2 - (a_1 + a_2) = 2$$

nous noterons

$$f_1 + f_2 = f$$

$$s_1 + s_2 = s + S$$

$$a_1 + a_2 = a + A$$

où s, f, a , désignent les nombres respectifs de sommets, de faces et d'arêtes du morceau recollé, S et A désignent respectivement le nombre de sommets et le nombre d'arêtes de la ligne de suture.

On obtient ainsi

$$s + f - a = 2 - (S - A)$$

et il est clair, dans la première éventualité, que $S - A = 1$, ce qui implique

$$s + f - a = 1$$

Dans la dernière opération, la ligne de suture est fermée, dans ce cas $S - A = 0$ et par conséquent

$$s + f - a = 2$$

ce qui achève la démonstration.

Une première analyse de la démonstration précédente en montre le caractère expérimental lié au découpage, mais ce découpage et la reconstitution du polyèdre se sont déroulés en suivant toute une chaîne d'opérations que nous saurions effectuer concrètement sur tel ou tel modèle matériel, mais que nous jugeons valables pour toute figure polyédrique du genre envisagée. Ainsi, pour Gonseth, dans cette démonstration, le théorique se construit sur l'expérimental via la possibilité des opérations mentales, mais ce qui caractérise le théorique, c'est moins la reconstitution imaginaire des opérations que la mise en place d'une chaîne d'opérations.

Et Gonseth précise

La validité de tout le procédé tient:

1) à la légitimité de chacune des opérations,

2) à celle de leur enchaînement.

La légitimité de chaque opération est assurée par le cadre intuitif (cf ci-dessus). Quand à la légitimité de l'enchaînement dont Gonseth remarque qu'il n'était pas donné d'avance, il se construit en même temps que la démonstration en recourant à la fois au discours, aux opérations mentales de découpage, et en s'appuyant sur le cadre intuitif cité plus haut, savoir, la notion plus ou moins claire du polyèdre. Ce que Gonseth résume en écrivant,

L'activité théorique se présente donc comme une expérimentation sur des éventualités nettement conçues et telles que l'intuition sache chaque fois décider si elles sont compatibles ou si elles sont contradictoires. Ces éventualités, pour une part, s'imposent; et, pour une autre part, l'esprit les imagine librement. Elles sont par ailleurs soumises aux règles du raisonnement, c'est-à-dire aux lois qui régissent leurs combinaisons.

Cette dernière remarque sur les règles du raisonnement montre que celui-ci se construit sur le matériau même sur lequel il opère; ainsi dans la démonstration précédente, c'est le cadre intuitif qui assure la validité du raisonnement et, remarque Gonseth, le rôle de la logique (y) paraît incroyablement réduit, tout juste celui d'un agent de la circulation (pour reprendre l'expression imagée de Gonseth).

L'activité de démonstration apparaît ainsi comme participant de cette construction de la réalité dont nous avons parlé ci-dessus, elle est alors moins application d'une rationalité qui serait déterminée a priori que le lieu où se construit cette rationalité; on pourrait dire alors, résumant la pensée de Gonseth, que la logique se construit sur le raisonnement, autrement dit, c'est l'activité de raisonnement qui définit les règles de la logique.

La question de la légitimité du raisonnement (c'est-à-dire de la garantie de sa validité) reste posée; ce devrait être le rôle de la logique d'assurer cette légitimité mais nous venons de voir, avec la démonstration précédente, que c'est le cadre intuitif (et ainsi la part non théorisée de la connaissance) qui assure la conformité logique du raisonnement. Ainsi le théorique (et avec lui le cadre logique), s'il est la condition du raisonnement, se construit sur le raisonnement.

L'activité de démonstration apparaît ainsi comme participant de cette construction de la réalité dont nous avons parlé ci-dessus, elle est alors moins l'application d'une rationalité antérieurement déterminée que le lieu où se construit cette rationalité; on peut dire alors que la logique se construit sur le raisonnement, autrement dit c'est l'activité de raisonnement qui définit les règles de la logique.

La question de la légitimité du raisonnement (c'est-à-dire de la garantie de sa validité) reste posée; ce devrait être le rôle de la logique d'assurer cette légitimité, mais nous venons de voir, avec la démonstration précédente, que c'est le cadre intuitif (et ainsi la part non théorisée de la connaissance) qui assure la conformité logique du raisonnement. Ainsi le théorique (et avec lui le cadre logique), s'il est la condition du raisonnement se construit sur le raisonnement. C'est donc la place du théorique qui est en jeu; est-il simple émanation du cadre intuitif? et peut-on penser une autonomie du théorique?

En 1936, posant le problème de la légitimité de la démarche déductive dans Les Mathématiques et la Réalité (chapitre XVII), Gonseth commence par étudier le rôle de l'évidence dans cette légitimation.

Il rappelle ainsi la classique démonstration hindoue du théorème de Pythagore, représentée par la double figure suivante

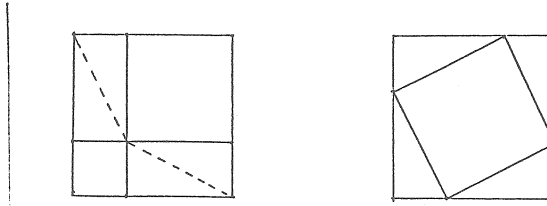


fig. 1

démonstration où la logique intervient à peine, et qui, comme l'explique Gonseth, se déroule dans le monde des significations extérieures (c'est-à-dire extérieures à ce que serait un théorique pur), mais démonstration qui s'appuie sur un raisonnement, lequel consiste à transposer ce qui nous paraît assuré dans le réel, le possible aussi bien que le contraint, (ici le découpage des aires). La démonstration se définit ainsi dans un cadre intuitif comme une reconstruction analogique et schématique, et c'est d'une certaine façon le premier mode de construction du théorique.

Une telle forme de démonstration fondée sur l'évidence intuitive, n'est pas seulement géométrique; Gonseth rappelle, dans le même chapitre, la démonstration de la commutativité de l'addition des entiers, démonstration fondée sur la connaissance préalable (intuitive) de cette propriété que le nombre d'objets d'une collection est indépendant de l'ordre du comptage.

La première synthèse théorique que constitue la construction euclidienne n'échappe pas à ce cadre intuitif; ainsi la démonstration de la proposition 4 du Livre I des Eléments (le second cas d'égalité des triangles) qui consiste à montrer l'égalité des deux triangles en transportant l'un d'eux sur l'autre, et Gonseth précise

cette démonstration se déroule complètement dans les significations extérieures. Elle fait appel à notre connaissance préalable des déplacements; à l'invariance des angles et des distances, etc.

Et si les triangles devaient devenir trop grands pour que la réalisation d'un déplacement devint pratiquement impossible, elle n'en regarderait pas moins le schéma de toute l'opération comme un garant suffisant de la légitimité du procédé.

ce qui montre le rôle des significations extérieures dans l'activité démonstrative du mathématicien.

S'il y a une remise en cause de l'évidence comme fondatrice de légitimité, c'est encore aux limites que le problème se pose. C'est cette question des limites qui conduit à penser la nécessité de l'autonomie du théorique, c'est-à-dire la nécessité d'un théorique qui se fonde sur lui-même, hors des références extérieures dont nous avons parlé ci-dessus; cela conduira à l'élaboration de la méthode axiomatique, d'abord sous la forme euclidienne, puis sous la forme hilbertienne.

Cette remise en cause de l'évidence renvoie au caractère historique d'icelle, caractère historique déjà souligné par Federigo Enriques dans un ouvrage Problema della Scienza, publié au début du siècle.

L'évidence est sans rapport avec un développement psychologique s'effectuant des lois déterminées mais repose seulement sur un fondement historique.

écrit Enriques à propos des principes de la mécanique dans la seconde partie de l'ouvrage cité (publié en français sous le titre Les concepts fondamentaux de la Science (3)).

Et Gonseth reprend, dans Les Mathématiques et la Réalité (chapitre XVII)

Le sentiment de l'évidence varie avec les époques.

C'est que, d'une part des vérités évidentes sont remises en cause avec le développement de la connaissance, et nous retrouvons les géométries non-euclidiennes qui reviennent comme un leit-motiv tout au long des écrits de Gonseth; d'autre part la certitude du mathématicien se fonde sur les évidences, évidences premières et évidences secondes dirons-nous, en rappelant avec Legendre que l'une des fonctions de la démonstration est de fabriquer de l'évidence.

C'est Legendre qui écrit au début de ses Elémens de Géométrie (4):

Axiome est une propriété évidente par elle-même.

Théorème est une vérité qui devient évidente au moyen d'un raisonnement appelé démonstration.

L'histoire des mathématiques (et plus généralement l'histoire des sciences) est faite de ces déplacements de l'évidence, et par cela-même, du renouvellement de l'aspect intuitif de la connaissance.

Enriques le remarque, dans l'ouvrage déjà cité, à propos de la naturalité du mouvement circulaire des Grecs, comparée à celle du mouvement rectiligne issue du principe d'inertie, et il précise:

Aussi, sans prétendre forcer toute connaissance scientifique à revêtir un caractère intuitif, il est grandement désirable que les acquisitions expérimentales provoquent un développement corrélatif de la représentation intuitive, qui permette de rattacher les faits nouvellement acquis à la masse considérable des connaissances instinctives plus anciennes, au moyens de concepts plus étendus.

Cette remarque d'Enriques à propos de la connaissance expérimentale vaut tout autant pour la connaissance rationnelle, c'est-à-dire la connaissance issue du raisonnement; la connaissance n'est réellement acquise que lorsqu'elle a modifié en profondeur les conceptions de celui qui la possède, c'est-à-dire les bases de la connaissance intuitive. Poussant à l'extrême la philosophie de Gonseth, on peut dire que l'on sait lorsqu'on a oublié comment on sait.

Et Gonseth précise, à propos de l'activité démonstrative du mathématicien:

A la réflexion, ce qui frappe le plus dans la méthode mathématique, ce n'est pas tant la conformité à une doctrine expressément formulée, que la permanence d'une technique de la démonstration et de la déduction, dont les règles sont acceptées bien plus à la suite d'une pratique exigeante que d'une analyse raisonnée. S'étant profondément assimilé certains procédés et l'esprit dans lequel ils sont à mettre en oeuvre, et se sentant sûr de ses moyens, le mathématicien ne sent pas la nécessité d'une théorie de la démonstration; il démontre, comme on marche sans avoir fait la théorie du pas juste et du faux pas.

Le problème est alors moins d'explicitier les fondements de la connaissance que de comprendre comment ces fondements se transforment, les raisons de leur remise en cause (les crises!) et les conditions de la définition de nouveaux fondements.

La construction euclidienne marque l'un des premiers moments (sinon le premier) d'une reconstruction des fondements en vue d'une autonomie du théorique, c'est-à-dire d'une construction du discours théorique qui se suffise à lui-même. Ainsi cette forme du discours qui commence par les définitions, les postulats, les axiomes, propositions premières sur lesquelles s'appuie le discours démonstratif. Mais, nous l'avons remarqué, ce discours recourt aux significations extérieures, savoir, le mouvement qui permet la reconnaissance de l'égalité des figures via la coïncidence.

L'autonomie, toute relative, du théorique vient de ce que le principe fondateur de la construction euclidienne, le principe de l'égalité par superposition, permet la mise en place d'un raisonnement qui oublie le mouvement en tant que tel. Cette occultation du mouvement via l'énoncé d'un principe qui à la fois se fonde sur le mouvement et permet de s'en débarrasser, est un point crucial de la construction de la rationalité grecque; mais cela montre aussi que la géométrie grecque, première construction rationnelle d'une science dans la mesure où, une fois les propositions premières énoncées, le raisonnement ne dépend que du raisonnement, conserve une base intuitive irréductible.

Nous ne discuterons pas ici des raisons de cette élimination du mouvement dans la construction de la rationalité grecque, renvoyant à un article ultérieur (5). Contentons-nous de dire qu'elle est apparue, et qu'elle apparaît encore, comme l'une des conditions de l'autonomie du théorique.

Ce problème de l'autonomie du théorique est au centre de la problématique gonsethienne, et Gonseth l'aborde dans son premier ouvrage Les Fondements des Mathématiques, publié en 1926.

Il s'agit moins de refuser les aspects intuitifs et expérimentaux de la connaissance géométrique que de les dépasser, et Gonseth écrit:

Nous dirons que la géométrie s'est constituée en science abstraite quand, partant de notions fondamentales, - dont l'origine est de nature expérimentale ou intuitive - elle s'est érigée par la suite à l'aide de la seule déduction logique, et sans plus faire d'emprunt à l'intuition directe.

Il semble que dans ce premier ouvrage, Gonseth confonde, ou du moins mette sur le même plan, par rapport au théorique, l'intuitif et l'expérimental, qu'il analysera plus finement ultérieurement.

Au début de l'ouvrage, Gonseth, s'interrogeant sur la nature des objets de la géométrie, critique la démonstration de la proposition suivante

Par un point pris sur une droite, on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on n'en peut élever qu'une seule.

démonstration qu'il attribue à Legendre (en fait, cette démonstration est due à Blanchet dans une ré-édition posthume des Éléments de Géométrie (6)).

Blanchet considère qu'une droite AM d'abord couchée sur AC, tourne autour du point A; elle formera deux angles adjacents MAC, MAB dont l'un MAC ira en croissant et dont l'autre MAB, d'abord plus grand que l'angle MAC, ira constamment en décroissant jusqu'à zéro.

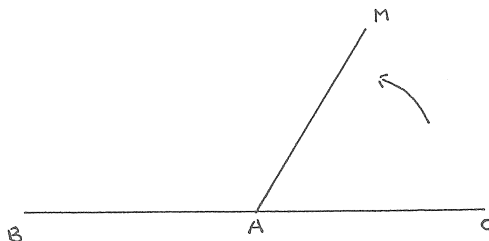


fig 2

L'angle MAC, d'abord plus petit que l'angle MAB, deviendra donc plus grand que cet angle, par conséquent il y aura une position AM de la droite mobile où les deux angles seront égaux et il est évident (précise Blanchet) qu'il n'y en aura qu'une seule.

Gonseth remarque d'abord que la figure est un élément essentiel du raisonnement, que la figure soit effectivement dessinée ou qu'elle soit imaginée; sans cette figure le discours de la démonstration perd tout sens.

C'est que l'on raisonne dans le sensible et non dans l'abstrait, précise Gonseth; c'est ici l'aspect expérimental qui prédomine via le mouvement. Cependant, et en cela je critiquerai Gonseth sur son propre terrain, on ne peut douter qu'il y ait raisonnement (c'est-à-dire intervention du théorique), raisonnement marqué à la fois par l'intention: montrer qu'il existe une position de la droite AM telle que les angles MAB et MAC soient égaux, et par la méthode: l'utilisation du mouvement (mais c'est bien là qu'est le problème!). En cela cette démonstration n'est pas euclidienne, moins pour le renvoi à la figure (ce renvoi à une figure intervient tout autant chez les géomètres grecs) que pour l'utilisation effective du mouvement; elle n'aurait sûrement pas été acceptée par Legendre, fidèle à la méthode des Grecs.

C'est cette intervention du mouvement qui conduit Gonseth à ne pas voir la part du théorique qui sous-tend cette démonstration; la démonstration de Blanchet, simple description, à peine idéalisée, d'une expérience physiquement réalisable, relève alors, pour Gonseth, d'une géométrie expérimentale, sœur aînée de la physique expérimentale.

Une telle démonstration pourrait être rapprochée des Eléments de Géométrie de Clairaut (7), ouvrage que Gonseth analyse dans le dernier chapitre de La Géométrie et le Problème de l'Espace, soulignant la façon dont les trois aspects s'entremêlent. C'est que, pour Clairaut, le problème de la connaissance géométrique se situe moins dans son aspect logique que dans son aspect problématique (ce n'est pas ici le lieu d'analyser l'ouvrage de Clairaut, je renvoie à la préface de Clairaut ainsi qu'à un texte en préparation(!), à paraître dans les Fragments d'Histoire des Mathématiques publiés par l'A.P.M.).

Mais le recours à la connaissance intuitive et à la connaissance expérimentale, dans l'établissement du discours théorique, ne peut fonder la certitude, dans la mesure où la connaissance, en progressant, remet en cause les certitudes acquises, voire les données immédiates; c'est cette remise en cause qui pose le problème du comment on sait. L'idéal

d'un théorique autonome, d'une rationalité pure qui puisse fonder à la fois la connaissance et les conditions de la connaissance peut alors apparaître comme une solution.

Nous avons vu la solution euclidienne; loin d'être la pure construction rationnelle qu'espérait son auteur (c'est du moins ce que, à l'époque moderne, on pense qu'il pensait), la construction euclidienne s'appuie sur la connaissance intuitive. Nous avons vu le rôle qu'y jouait le mouvement, mais son élimination via le principe de l'égalité par superposition va dans le sens de cette géométrie abstraite telle que la présente Gonseth au début des Fondements des Mathématiques (cf ci-dessus).

Par contre, nous signalerons deux points qui contredisent l'idéal d'autonomie du théorique de la rationalité grecque; d'une part le flou des premières définitions (lesquelles renvoient à des notions supposés connues par le lecteur sous peine d'incompréhension), ce qui se traduit dans le développement du raisonnement par ce que Gonseth appelle les significations extérieures (autrement dit les significations pré-théoriques des objets que l'on étudie), d'autre part l'intervention de cette brumeuse intuition géométrique qui fonde le raisonnement à la grecque moins sur un discours rationnel autonome que par un renvoi à la figure (fût-elle déclarée idéale!), intuition géométrique dont le principal avantage est son efficacité (ce qui est loin d'être négligeable), intuition géométrique qui rappelle, tout au long d'une histoire de la géométrie qui s'étend depuis l'époque de la Grèce classique jusqu'au XIX^{ème} siècle, le rôle que joue l'évidence dans l'activité du mathématicien.

Mais c'est dans la mesure où l'intuition géométrique précisait le lien entre le discours du raisonnement et les significations extérieures (empiriques!) auxquelles le raisonnement renvoyait, qu'elle fondait la rationalité géométrique grecque.

La réussite de la construction euclidienne comme le lieu d'un développement purement déductif, allait conduire à ne voir dans cette construction que l'aspect rationnel et à faire de celle-ci le modèle de toute construction rationnelle; c'est la prise en compte de la part d'empirisme qui sous-tend l'édifice euclidien devant l'échec des tentatives de démonstration du postulat des parallèles qui conduira à la découverte des géométries non-euclidiennes (8); ainsi cette lettre de Gauss à Bessel (1830), citée par Gonseth dans le dernier chapitre de La Géométrie et le Problème de l'Espace,

Selon ma conviction la plus intime, la science de l'espace occupe a priori dans le système de nos connaissances une autre position que la théorie des grandeurs pures; il manque à notre connaissance de celle-là cette conviction totale de sa nécessité qui est propre à celle-ci, nous devons reconnaître avec humilité que, si le nombre n'est que produit de notre esprit, l'espace a également une réalité hors de notre esprit, réalité à laquelle nous ne pouvons prescrire ses lois complètement a priori.

Avec la naissance des géométries non-euclidiennes, et donc la possibilité pour le monde de ne pas être euclidien, c'est la rationalité géométrique grecque qui est mise en question. L'intuition géométrique euclidienne qui assurait le lien entre le donné empirique (les significations extérieures pré-théoriques) et le raisonnement, perdait sa fonction de légitimation du raisonnement, ce qui remettait en cause le raisonnement lui-même. Le problème se posait donc de redéfinir les conditions de légitimité du raisonnement, autrement dit, de reconstruire un théorique autonome; et pour Gonseth, cette reconstruction sera assurée par la méthode axiomatique telle qu'elle a été élaborée par Hilbert (9).

La méthode axiomatique, en redéfinissant les conditions du raisonnement, devait permettre la mise en place d'un théorique qui puisse enfin se développer d'une façon purement déductive, laissant de côté les obscurités de l'intuition euclidienne, mais cela exigeait

1) de définir les termes primitifs sans aucune référence à la signification de ces termes,

2) d'énoncer les relations primitives (les axiomes) sans aucune référence à la connaissance intuitive ou expérimentale,

3) d'expliciter les règles du raisonnement.

Cette construction cependant n'était pas quelconque, si son objet était la géométrie, elle devait se développer en référence avec la géométrie (le nom des termes primitifs et les relations primitives n'étaient pas choisis par hasard), et l'intention géométrique était à la fois de retrouver les résultats connus et d'en découvrir de nouveaux qui entreraient dans le champ de la connaissance géométrique, c'est-à-dire en liaison avec la connaissance intuitive (y compris en la transformant) et la connaissance expérimentale (y compris en transformant les conditions de l'expérimentation).

Autant dire que ce théorique purifié, redéfini par la méthode axiomatique, s'il permettait le développement autonome espéré, renvoyait aux objets de la connaissance intuitive et son autonomie restait partielle.

Mais c'est aussi cette limitation de l'autonomie qui en faisait la valeur en tant que méthode de connaissance; qu'aurait pu signifier un théorique pur qui énoncerait des propriétés inconcevables pour l'intuition et sans aucune possibilité d'expérimentation, c'est-à-dire un théorique indépendant de toute intention de connaissance?

L'axiomatique à elle seule, n'est pas l'alpha et l'oméga des mathématiques; elle n'est au fond qu'une méthode, et sans en méconnaître toute l'importance, on ne doit lui accorder qu'un rôle comparable à celui du législateur.

écrit Gonthier dans Les Fondements des Mathématiques. Le problème est donc moins celui d'une réduction des mathématiques à l'axiomatique que la mise en place d'une méthode garantissant la certitude de ses résultats d'une part et permettant l'insertion de ces résultats dans un savoir intégrant les divers aspects de la connaissance, d'autre part.

Quelques années plus tard, en 1932, Hilbert écrivait dans la préface de Anschauliche Geometrie écrit en collaboration avec Cohn-Vossen (ouvrage traduit en anglais sous le titre Geometry and Imagination et malheureusement jamais traduit en français)

In mathematics, as in any scientific research, we find two tendencies present. On the one hand, the tendency toward abstraction seeks to crystallize the logical relations inherent in the maze of material that is being studied, and to correlate the material in a systematic and orderly manner. On the other hand, the tendency toward intuitive understanding fosters a more immediate grasp of the objects one studies, a live rapport with them, so to speak, which stresses the concrete meaning of their relations.

C'est dans ce jeu de l'intuitif, de l'expérimental et du théorique que se construit la connaissance géométrique.

Gonthier, amateurs d'apologues (ceux-ci fleurissent au long de ses écrits) renvoie à l'image de la carte géographique.

La carte géographique n'est pas le terrain; schématisant celui-ci, elle en permet une approche a priori, mais cette approche n'est pas invention pure, elle doit prendre en charge, au fur et à mesure qu'elle les découvre les accidents de terrain, mais cette prise en charge est elle-même une approche, elle ouvre la voie à la connaissance du terrain même si elle n'est jamais la configuration exacte du terrain; c'est la connaissance du terrain qui nous permet de construire la carte, de dire dans quelle mesure celle-ci convient (dans quelle mesure elle est idoine, dirait Gonthier). Mais sans la carte, même approximative, l'approche serait impossible ou se réduirait à un tâtonnement inefficace.

Ce résumé de l'apologie de la carte, que l'on retrouve plusieurs fois dans les ouvrages de Gonseth, situe l'articulation entre les trois aspects de la connaissance, le théorique est la carte elle-même dont la lecture doit nous guider sur le terrain et nous donner la possibilité de choisir notre itinéraire, et l'activité théorique est à la fois construction de la carte et lecture de la carte. Mais le théorique ne peut se construire que sur une connaissance préalable, la connaissance du terrain, la connaissance intuitive avec tout le flou (et peut-être le faux) qu'elle porte, la connaissance expérimentale avec les erreurs d'appréciation d'une expérimentation mal faite ou mal interprétée. C'est la carte construite qui permettra ensuite de redéfinir la connaissance intuitive, de repenser l'expérimentation. Ainsi la carte est nécessaire pour connaître le terrain, mais c'est le terrain qui permet de construire la carte.

C'est cette articulation qui est au centre de la problématique gonsethienne, le théorique se construit sur une connaissance première qui reste flou (et parfois fausse) et par cela même transforme cette connaissance première, ce qui permet une reconstruction plus adéquate (plus idoine) du théorique.

Mais la conception gonsethienne est plus complexe que cette première présentation, en effet, ce théorique qui se construit sur la connaissance intuitive est déjà présent dans cette connaissance, c'est-à-dire que la connaissance intuitive la plus élémentaire porte une composante théorique dans la mesure où elle est déjà reconstruction d'un donné, reconstruction de ce réel extérieur que nous ne percevons jamais à l'état brut. L'apologue de la carte géographique est ainsi à double entrée, le problème n'est pas de savoir quel est l'élément premier, question qui n'a aucun sens, mais d'explicitier comment se construit de la connaissance à partir d'un état donné de connaissance; c'est en ce sens que Gonseth ne pose pas le problème préalable de l'origine de la connaissance intuitive, celle-ci aussi se transforme et ce qui importe, si l'on veut comprendre comment on sait, c'est de partir d'un état de connaissance avant que de poser le problème de son origine, et de regarder comment se transforme la connaissance, c'est-à-dire comment elle s'accroît.

Autant dire que c'est la connaissance qui, en même temps qu'elle se construit, détermine les conditions de sa validité. C'est ce qu'exprime la phrase de Gonseth placée en exergue de cet article peut-être trop bref, sûrement incomplet, dont le but est, sinon de faire connaître la richesse de la pensée gonsethienne, du moins de donner envie de lire un philosophe des sciences un peu trop oublié, voire méconnu.

Lille, 12 mars 1990

BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages de Gonseth

Les Fondements des Mathématiques, Blanchard, Paris, 1926

Les Mathématiques et la Réalité, Blanchard, Paris, 1936

Qu'est-ce que la Logique, Hermann, Paris 1937

La Méthode Axiomatique, Gauthier-Villars, Paris, 1938

Philosophie Mathématique, Hermann, Paris, 1939

La Géométrie et le Problème de l'Espace, Editions du Griffon, Neuchatel, 1945/1955

Ouvrages cités :

1) Federigo Enriques Les Principes de la Géométrie, Encyclopédie des Sciences Mathématiques, Tome III, volume I, fascicule I, Gauthier Villars, Paris, 1911.

2) Georges Bouligand La causalité des théories mathématiques, Hermann, Paris, 1934.

3) Federigo Enriques Les concepts fondamentaux de la Science (traduction française Louis Rougier), Flammarion, Paris, 1913.

4) Adrien-Marie Legendre Elémens de Géométrie (douzième édition), Firmin-Didot, Paris, 1823.

5) Rudolf Bkouche La construction du rationnel, Les Cahiers de Philosophie (à paraître).

6) A.M. Blanchet Les Eléments de Géométrie de Legendre (deuxième édition), Firmin Didot, Paris, 1848.

7) Alexis Claude Clairaut Elémens de Géométrie (1741), réédition Gauthier-Villars, Paris, 1922, et Editions Siloé, Laval, 1987.

8) Rudolf Bkouche Un peu d'histoire Appendice in Daniel Lehmann, Rudolf Bkouche, Initiation à la Géométrie, P.U.F., Paris, 1988.

9) David Hilbert Les Fondements de la Géométrie (1899) (traduction française et notes Paul Rossier), Dunod, Paris, 1971.

