BOLZANO ET LA DEMONSTRATION DU THEOREME DES VALEURS INTERMEDIAIRES

Michel GUILLEMOT

La "*démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation*" (1) publiée par BOLZANO en 1817 constitue un document important pour l'histoire et l'épistémologie des mathématiques. De nombreux historiens s'y sont intéressés et leurs commentaires ont parfois donné lieu à des polémiques plus ou moins vives.

Dans le cadre d'un atelier de deux heures il nous était difficile d'étudier de manière approfondie tout le texte qui court sur une trentaine de pages. Aussi, notre compte-rendu pourra paraître un peu succinct. Mais nous espérons publier ultérieurement une étude plus complète : le "groupe Cantor" reste toujours ouvert à toutes les bonnes volontés !

1. La jeunesse de BOLZANO

Bernard BOLZANO naquit à Prague (2) le 5 octobre 1781. Après avoir été autrefois une cité de grandes traditions culturelles et scientifiques, Prague, comme la Bohème dont elle était la capitale se trouvait, à la fin du XVIIIème siècle, éloignée des centres de décisions politiques et scientifiques. Ceci explique, en partie, la genèse et le peu d'influence, du vivant de son auteur, de l'oeuvre de BOLZANO.

De 1791 à 1796, il fut élève au Piarist Gymnasium et en 1796 il entra à la Faculté philosophique de Prague où il suivit des cours de philosophie et de mathématiques. C'est là que commence son intérêt pour ces disciplines. Pour les mathématiques, il est attiré par l'étude des *Anfangsgrunde* de KASTNER (1719-1800); Si les grands mathématiciens, comme GAUSS, ont condamné ce collègue de moindre envergure il n'en demeure pas moins que

> "les manuels de KASTNER furent les premiers modèles du genre : ils permettaient, d'un côté, d'apprendre les mathématiques sans recourir à un maître célèbre, de l'autre, d'améliorer l'exposé des mathématiques, sans compter leur utilité en tant qu'ouvrages de référence, contenant une mine de renseignements précieux"(3)

Toutefois, pour BOLZANO, l'intérêt n'est pas dans l'exposition mathématique en tant que présentation de résultats. Il se trouve dans leur mise en forme :

> "Lorsque j'ai ouvert par hasard une page dans le traité de KASTNER, des astérisques ont incité ma curiosité à relire ce passage et j'ai décidé immédiatement d'étudier les mathématiques, espérant trouver dans cette science ce que j'avais depuis longtemps cherché en vain. Car KASTNER y démontre ce qu'on passe en général tout à fait sous silence, parce que tout le monde le sait déjà, ce qui signifie qu'il cherche à porter à la conscience distincte du lecteur la raison sur laquelle repose son jugement ; c'est ce que j'aimais le mieux.Mon plaisir particulier des mathématiques reposait donc à proprement parler, seulement sur sa partie purement spéculative, ce qui veut dire que je n'appréciais en elle que ce qui était en même temps philosophie (4).

Ainsi la genèse de l'oeuvre mathématique de BOLZANO est inséparable de ses recherches en philosophie ou en logique et même en théologie; En effet, en 1800, il entre à la Faculté de théologie et après avoir été reçu aux concours pour occuper une chaire de mathématiques et un poste de science de la religion, il opte, en 1804 , pour ce dernier et il est ordonné prêtre. Il se présente comme tel dans son opuscule.

> "Prêtre séculier, Docteur en philosophie,
> Professeur Royal et Impérial de la Science de la Religion
> et Membre titulaire de la Société Royale des Sciences à Prague"

Il a été nommé, en 1815, à cette Société. Mais si son enseignement et sa prédication trouvent un profond écho auprès de ses auditeurs, ses critiques envers l'organisation de la société conduiront à sa destitution en 1819.

A Prague, isolé du monde mathématique, BOLZANO n'a eu qu'un contact livresque avec les autres mathématiciens. Toutefois, vers 1834, il rencontre CAUCHY lors de son exil (il y exerçait les fonctions de percepteur du petit-fils de Charles X)

> CAUCHY, le mathématicien, était -comme vous le savez peut-être- dans les années 1834 et 1835, à Prague, à la suite de Charles X ou Henri V, et nous nous sommes visités plusieurs fois pendant les quelques jours que j'ai passés à Prague (5).

Mais CAUCHY n'y a jamais fait allusion et c'est seulement vers les années 1870 que "l'école de WEIERSTRASS" le redécouvrit, plus de vingt ans après sa mort survenue le 18 Décembre 1848 à Prague. De même, il faudra attendre le début de notre siècle pour que HUSSERL attire l'attention sur son système logique pourtant exposé en 1837 dans sa "*Théorie de la science*".

BOLZANO se plaint lui-même du manque d'intérêt suscité par ses travaux. Le premier fascicule de l'ensemble de ses idées touchant le domaine des mathématiques, "*Contributions à un exposé mieux fondé des mathématiques*", paru en 1810,

> "malgré toute l'importance de son contenu, a eu la malchance de ne pas être annoncé du tout dans certaines revues savantes et d'être annoncé et critiqué seulement de manière très superficielle dans d'autres"(6)

En fait les mathématiciens qui auraient pu connaître ces travaux, étaient davantage tournés vers la poursuite de leurs propres résultats et de leurs applications que vers les questions de fondement. D'autre part, les considérations philosophiques jointes à un style parfois très court n'encourageaient pas les lecteurs potentiels.

2. Le projet de BOLZANO

Les idées mathématiques de BOLZANO ne doivent pas être isolées de ses réflexions logiques, philosophiques ou théologiques; Ainsi, par exemple, nous pouvons rapprocher une de ses affirmations concernant la religion

> "une doctrine peut se justifier dès qu'on peut montrer que croire en elle procure des bénéfices moraux" (7)

de ce qui est pour lui l'essence même d'une démonstration dans le domaine scientifique :

> "dans la science, les démonstrations ne doivent nullement être de simples procédés de "fabrications d'évidences " (Gewissmachungen) mais doivent être bien plutôt des fondements (Begrundungen); il faut exposer le fondement objectif que possède la vérité à démontrer" (8)

Dans les deux cas, BOLZANO veut mettre en évidence les sources et les ressorts essentiels de ce qu'il croit être la vérité; Comme un moine, il approfondit toujours sa foi. Les recherches le conduisent à se méfier des systèmes qui apparaissent trop fermés :

> "je me suis décidé, déjà en 1804, à ne commencer, dans aucune science, par la publication d'un traité complet, mais à ne faire connaître d'abord, dans chacune, mes concepts différents des concepts habituels, que dans des mémoires particuliers" (9)

En effet, depuis 1803 il déploie une grande activité mathématique. Certes, il publie peu mais ses réflexions couvrent de nombreux cahiers; En 1810 il donne ses "*Contributions à un exposé mieux fondé des mathématiques*" et en 1817 il peut affirmer :

> "J'ai déjà examiné la partie la plus grande et la plus importante de ces idées durant une période si longue et avec tant d'impartialité qu'il n'est peut-être plus trop tôt pour oser en parler maintenant un peu plus fort" (10)

Au cours de ces années, il renoue avec la tradition leibnitzienne de la "Mathématique Universelle". C'est l'ouvrage de KÄSTNER qui lui sert de point de départ car l'auteur y poursuit un effort d'explicitation dans une voie tout à fait leibnitzienne : il essaie de démontrer autant qu'on peut pour bien distinguer ce qu'on peut démontrer de ce qu'on peut supposer. Dans ce cadre la géométrie doit être remise à sa juste place :

> "la géométrie ne peut être le paradigme de l'enseignement parfait, si elle doit se permettre d'accepter sans preuves des propositions incertaines" (11)

Le projet de BOLZANO est plus profond : il se consacre à l'élucidation de la nature des mathématiques et des procédés logiques utilisés dans cette science. Ainsi il s'oppose à la construction kantienne basée sur l'intuition. Cet examen logique du corpus mathématique le conduit à mettre en évidence le rôle fondamental joué par certains objets qui nous sont aujourd'hui familiers. Certes, lorsque plus d'un demi-siècle après, HEINE et CANTOR auront donné leurs constructions des nombres réels à l'aide des suites de CAUCHY on pourra dire que BOLZANO n'a pas totalement démontré le critère de CAUCHY; Mais il n'en demeure pas moins que, pour l'époque, l'avancée bolzanienne est considérable : dommage qu'elle ait été si longtemps ignorée.

Dans sa quête logique, BOLZANO est amené à formuler d'autres exigences. La géométrie n'est pas seulement rejetée car elle est trop intimement liée à certaines idées intuitives plus ou moins approfondies. Elle est étrangère à certains domaines d'étude :

> "Il est tout aussi manifeste qu'il y a une faute intolérable contre la *bonne méthode* qui consiste à vouloir déduire les vérités des mathématiques pures (ou générales) (c'est à dire de l'arithmétique, de l'algèbre ou de l'analyse) de considérations qui appartiennent à une partie *appliquée* (ou spéciale) seule, à savoir à la géométrie" (12)

De là, ce que l'on a nommé l'arithmétisation de l'analyse. Mais non content de préciser le domaine BOLZANO en vient à scruter plus profondément la nature des objets mathématiques et, aussi, la véritable nature de l'objet des mathématiques qui est l'étude des relations entre les objets mathématiques. En ce sens il est très près de notre vision moderne des mathématiques :

> "Le fondement objectif d'une vérité valable pour toutes les grandeurs, qu'elles soient ou non dans l'espace, ne peut pas se trouver dans une vérité valable seulement pour les grandeurs qui appartiennent à l'espace" (13)

Dans cet ordre d'idées, BOLZANO en vient à rejeter non seulement la géométrie mais aussi l'introduction du temps et du mouvement. Certes il ne précise pas ce qu'il entend par "toutes les grandeurs" mais il essaie de se placer dans la structure la plus générale possible. Dans ce contexte, les considérations géométriques ou cinématiques ne peuvent tenir lieu que d'éclaircissements : sont bannies aussi les démonstrations limitées à des exemples ainsi que les abus de langage ou de notation

> "Nous n'exigeons fermement que ceci : on ne proposera jamais des exemples en place des démonstrations : on ne fondera jamais l'essentiel de la déduction sur des expressions du langage employées improprement et sur les représentations secondaires qu'elles portent en elles, la déduction ne serait pas valide dès qu'on change l'expression"(14).

Autant dire que le projet de BOLZANO était trop novateur pour être totalement compris de ses collègues, mais aussi de ses contemporains.

3. Les étapes de la démonstration

Même si les mathématiques sont pour BOLZANO un champ d'expérience pour l'étude de la Science en général, il n'en introduit pas moins de nouvelles notions. Ici nous pouvons noter le concept "arithmétique" de fonction continue, le critère dit de CAUCHY pour la convergence des suites et le théorème de la borne supérieure. Ceci montre bien la richesse d'un tel écrit.

Certes dans sa préface BOLZANO nous donne "un bref aperçu de la démarche de sa démonstration".Mais il nous semble nécessaire d'aller plus loin pour essayer de mettre à jour ce qui serait peut-être la véritable démarche.

Une première remarque s'impose : le titre peut paraître ambigu. En effet BOLZANO nous propose une "*démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation*". Mais BOLZANO nous propose le théorème suivant :

> "Si deux fonctions de x, f(x) et $\varphi(x)$ varient suivant la loi de continuité ou bien pour toutes les valeurs de x, ou bien au moins pour toutes celles qui sont situées entre α et β ; si de plus
> $|f(\alpha)| < |\varphi(\alpha)|$ et $|f(\beta)| > |\varphi(\beta)|$ alors il existe toujours une certaine valeur intermédiaire de x entre a et b pour laquelle
> $|f(x)| = |\varphi(x)|$ (15)

Les deux formulations sont bien différentes et cette dernière a surpris bien des historiens. En fait, ils ont négligé la remarque suivante

> "Nous devons rappeler qu'il faut comparer les valeurs des fonctions f(x) et φ(x) dans ce théorème seulement d'après leur grandeur absolue, c'est à dire sans égard au signe, ou bien comme si elles n'étaient point des grandeurs capables d'avoir des signes opposés"(16)

Autrement dit nous devons dans l'énoncé précité introduise les valeurs absolues - dont la notation a été introduite par WEIERSTRASS - qu'omettent abusivement souvent ceux qui citent cet énoncé. Mais déjà nous sommes au coeur du projet bolzanien.

L'absence de notation n'est pas fortuite ; elle n'est pas nécessaire à notre propos. BOLZANO n'aura pas non plus de signe pour noter la limite ou la borne supérieure. Il lui suffit de préciser le langage employé. En d'autres termes BOLZANO raisonne en logicien mais non en formaliste. Mais il n'est pas aussi totalement mathématicien en ce sens qu'il n'exploite pas toutes les ressources des objets qu'il met en place. En fait, il ne propose pas une partie d'un traité mathématique. Les seuls développements auxquels il consent doivent assurer le fondement de son dernier théorème

> "Si une fonction de la forme
>
> $$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + ... + px + q$$
>
> où n désigne un nombre entier positif, prend une valeur positive pour x = a et une valeur négative pour x = b, alors l'équation
>
> $$x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + ... + px + q = O$$
>
> a au moins une racine réelle située entre α et β"(17)

Les instruments utilisés par BOLZANO vont lui servir à fonder la démonstration et à la situer dans une perspective plus générale. C'est parce que BOLZANO y compare la valeur des termes positifs et la valeur des termes négatifs qu'il est amené à fournir un énoncé un peu étrange mais étroitement lié à son propos . Il est resté prisonnier de son intuition analytique : la nullité est obtenue lorsque les deux valeurs précitées sont égales. Ce faisant BOLZANO n'a pas explicité la formulation plus simple mettant en jeu une seule fonction continue et évitant l'introduction des valeurs absolues. Autrement dit, BOLZANO est trop près de la démarche logique et un peu éloigné de la pratique mathématique pour réussir totalement : n'est-ce pas trop demander ?

Néanmoins il est parvenu pratiquement à fonder sa démonstration analytique en éliminant les images géométriques ou cinématiques. La notion de fonction continue est alors fondamentale. Pour la première fois BOLZANO est amené à en donner une "explication correcte" et il démontre de manière très rigoureuse que toute fonction polynomiale est continue.

L'auteur explique très bien l'introduction de la borne supérieure (encore une fois nous avons rajouté les signes de valeur absolue) et il nous suffit de l'écouter :

> "Si $|f(\alpha)| < |\varphi(\alpha)|$ en vertu de la loi de continuité on a également
> $|f(\alpha+i)| < |\varphi(\alpha+i)|$
> lorsque l'on prend i suffisamment petit; La propriété d'être plus petite appartient à la fonction de i représentée par l'expression $|f(\alpha+i)|$ pour toutes les valeurs de i qui sont plus petites qu'une certaine valeur. Toutefois, cette propriété ne lui appartient pas pour toutes les valeurs de i sans restriction ; en particulier, elle ne lui appartient pas pour un i qui serait égal à $\beta-\alpha$, parce que $|f(\beta)|$ est déjà $>$ $|\varphi(\beta)|$. Or, on a le théorème suivant "aussi souvent qu'une certaine propriété M appartient à toutes les valeurs d'une grandeur variable i qui sont plus petites qu'une valeur donnée, sans appartenir pour autant à toutes les valeurs en général, il existe toujours une certaine valeur maximale u pour laquelle on peut affirmer que tous les i qui sont < u, ont la propriété M (18).

BOLZANO démontre immédiatement que cette valeur convient, c'est à dire que l'on a :

$$|f(\alpha+u)| = |\varphi(\alpha+u)|$$

Il ne reste plus qu'à prouver le théorème de la borne supérieure.

> Nous le prouverons en montrant que les valeurs de i dont on peut affirmer que toutes les valeurs inférieures possèdent la propriété M, et celles dont on ne peut plus l'affirmer, peuvent se rapprocher les unes des autres d'aussi près que l'on veut : d'où il s'ensuit pour quiconque a une idée correcte de la grandeur que la notion d'un i qui est le plus grand de ceux dont on peut dire que toutes les valeurs inférieures possèdent la propriété M, est la notion d'une grandeur réelle, c'est à dire existante (19)

Nous savons aujourd'hui que ce théorème d'existence est fondamental. BOLZANO est le premier à formuler le critère de CAUCHY pour essayer de résoudre le problème qu'il se pose :

"Si dans une série (20) de grandeurs

$F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)$, $F_n(x)$, ... , $F_{n+r}(x)$,

la différence entre son $n^è$ terme $F_n(x)$ et tout terme ultérieur $F_{n+r}(x)$ aussi éloigné soit-il du $n^è$,reste plus petite que toute grandeur donnée, si l'on a pris n suffisamment grand : alors il existe toujours une certaine grandeur constante et une seule dont s'approchent toujours davantage les termes de cette série et dont ils peuvent s'approcher d'aussi près que l'on voudra lorsqu'on prolonge la série suffisamment loin. (21)

La démonstration d'unicité est aussi une première en analyse ! Comme précédemment, BOLZANO n'adopte pas une notation particulière et il reste dans le domaine de son étude en considérant une suite de fonctions de x qu'il étudie en fait pour un x fixé.

4. La continuité selon BOLZANO

Nous terminons ici notre présentation en étudiant le concept de continuité. Nous avons vu précédemment le rôle fondamental que cette notion jouait dans la démonstration proposée. Fidèle à son projet, BOLZANO n'en fait pas ici un domaine d'étude : ce sera toutefois le cas dans sa *théorie des fonctions* (22). La définition est dès lors seulement donnée dans la préface (encore une fois nous rajoutons les signes de valeur absolue qui sont sous-entendus)

dans une explication correcte, on entend par l'expression " une fonction f(x) varie suivant la loi de continuité pour toutes les valeurs de x situées à l'intérieur ou à l'extérieur de certaines bornes" rien d'autre que ceci : "si x est une telle valeur quelconque, la différence $|f(x+\omega)- f(x)|$ peut être rendue plus petite que toute grandeur donnée, si l'on peut toujours prendre ω aussi petit que l'on voudra, c'est à dire lorsque l'on a (selon les notations que nous avons introduites dans le §14 du théorème des binômes etc. Prague (1816)

$f(x+\omega) = f(x) + \Omega$(23)

Ce n'est pas le tout de donner une définition : il faut la mettre en oeuvre. C'est le cas pour la démonstration de la continuité de toute fonction polynomiale : au langage près celle que nous propose BOLZANO n'est pas différente de celle que nous conduisons aujourd'hui. Posons

$$P(x) = a + bx + cx^2 + ... + hx^n$$

Alors :

$$P(x+\omega) - P(x) = \omega[\ b+2cx+c\omega+ ... +\ hnx^{n-1}\omega + ... + h\omega^{n-1}\ ] .$$

Posons : $S = |b| + 2\,|cx| + |c\omega_1| + \ ... \ + |hn\omega_1{}^{n-1}| + ... + |h\omega_1{}^{n-1}|$

"Mais si l'on diminue ω, avec le même x, les termes où intervient ω diminuent, tandis que les autres restent inchangés [...] . Si l'on demande donc que la variation de la fonction soit $< D$, on n'a qu'à prendre un ω qui est en même temps $< \omega_1$ et est aussi $< \frac{D}{S}$; c'est ainsi que ωS, et a fortiori le produit de ω et d'une grandeur qui est $< S$ doit être $< D$". (24)

Autrement dit, traduite formellement, la définition de la continuité donnée par BOLZANO correspond à celle que nous pratiquons aujourd'hui :

$$\forall\, x \in I \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \eta > 0 \quad \forall\, \omega \in \mathbb{R} \quad (|\omega| < \eta \Rightarrow |f(x+\omega) - f(x) \leqslant \varepsilon|)$$

Ici BOLZANO a employé D à la place de ε et a pris pour η un nombre tel que :

$$\eta < |\omega_1| \text{ et } \eta < \frac{D}{S} .$$

On a bien , alors :

$$|\ P(x+\omega) - P(x)| \leqslant |\omega|\ S < \frac{D}{S}\ S = D.$$

Il n'est pas inutile de comparer les textes de BOLZANO et de CAUCHY relatifs à la continuité car de nombreux historiens affirment imprudemment que la définition proposée par CAUCHY en 1821 dans son *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* est semblable à celle précitée. Ce dernier écrit :

la fonction f(x) sera, entre deux limites assignées à la variable x, fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x+\alpha) - f(x)$$

décroît indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, la fonction f(x) restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même" (25).

Pour nous convaincre de la différence d'attitude entre les deux auteurs, il suffit de comparer leur mise en oeuvre de la définition qu'ils proposent. CAUCHY propose l'exemple de la fonction sinus :

"la fonction sin x [...] sera continue entre deux limites quelconques de cette variable, attendu que la valeur numérique de $\sin(1/2\ \alpha)$, et par suite celle de la différence
$\sin(x+a) - \sin x = 2 \sin (1/2\ \alpha) \cos (x + 1/2\ \alpha)$
décroissent indéfiniment avec celle de α, quelle que soit d'ailleurs la valeur finie que l'on attribue à x. (26).

En d'autres termes, CAUCHY opère avec des infiniments petits, objets que BOLZANO a tenu à rejeter. Rappelons que pour CAUCHY

"on dit qu'une quantité variable devient infiniment petite, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro"

Ainsi nous sommes loin de la formulation moderne et si l'on voulait à tout prix formaliser la définition proposée par CAUCHY nous pourrions utiliser la composition des fonctions et écrire :

$$\lim g(x) = a \Rightarrow \lim f\,[g(x)] = f(a)$$

ou les suites de sorte que

$$f(\lim(x_n)) = \lim(f(x_n)).$$

Certes on peut toujours rétorquer que ceci est à rapprocher de la notation bolzanienne

$$f(x+\omega) = f(x) + \Omega,$$

mais ces écritures sont bien différentes dans leur mise en oeuvre. Pour BOLZANO, celle-ci n'est nullement fondatrice et il doit revenir à la définition elle-même : l'égalité est seulement prise en compte lorsqu'il s'agit d'utiliser la propriété de la continuité des fonctions mais pas pour l'établir. Dès lors, il est illusoire de vouloir parler de définitions semblables. Nous savons même aujourd'hui que les deux définitions de la continuité, l'une en (ε,η) et l'autre en termes de suites, ne sont équivalentes que si l'on admet l'axiome du choix. Il y a bien une frontière logique certaine entre ces deux définitions.

En fait, cette frontière découle de la différence des projets des deux auteurs. Limitons-nous ici à en souligner quelques caractères. Tout d'abord, CAUCHY est avant tout un mathématicien qui "cherche à perfectionner l'analyse mathématique en mettant plus de précision dans les théories et en apportant des restrictions utiles à des assertions trop étendues" (27). C'est en ce sens qu'il faut entendre ses méthodes :

> "Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner toute la rigueur qu'on enseigne en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre" (28)

Ainsi il a surtout évité les extensions du réel aux imaginaires et il est resté, ce qui n'est pas un moindre mérite, dans le champ de la rigueur qu'on développe habituellement en géométrie. Autant dire qu'il ne renie nullement cette dernière et qu'il l'utilise pour la démonstration du théorème de BOLZANO.

> "La droite passera nécessairement entre ces deux points, ce qu'elle ne peut faire sans rencontrer dans l'intervalle la courbe ci-dessus mentionnée" (29)

Toutefois, dans une note, il fournit "une méthode directe et purement analytique, qui a même l'avantage de fournir la résolution numérique de l'équation $f(x) = b$". Mais nous sommes très éloignés de l'acte fondateur proné par BOLZANO. Ici il s'agit simplement de fournir un résultat numérique.

En fait, CAUCHY propose un cours où les fondements n'ont pas de place. Seule compte pour lui la mathématique en marche encore isolée d'une "foule de questions".

> "Cultivons avec ardeur les sciences mathématiques, sans vouloir les étendre au delà de leur domaine, et n'allons pas nous imaginer qu'on puisse attaquer l'histoire avec des formules, ni donner pour sanction à la morale des théorèmes d'algèbre ou de calcul intégral" (30)

Sans vouloir mathématiser toutes les situations, BOLZANO a suffisamment montré l'utilité de la réflexion mathématique. L'exigence de la rigueur ne se limite pas aux seules démonstrations mathématiques : en ce sens les mathématiques restent un outil privilégié pour la formation de tout individu.

NOTES

(1) Sauf indication contraire, nous suivons la traduction française par Jan SEBESTIK in Bernard Bolzano et son Mémoire sur le théorème fondamental de l'Analyse ; *Revue d'Histoire des Sciences* 17 (1964) 129-163. Dans les notes nous l'abrégeons en DEM.
(2) Certes BOLZANO est le nom d'une ville d'Italie, mais notre auteur est de langue et de culture allemandes !
(3) SEBESTIK, J *Mathématiques et théorie de la science chez Bernard BOLZANO (1781-1848)*. Thèse d'état Paris I 1984 p.5.
(4) SINACEUR, M, A. Philosophie et mathématiques : A.G. Kästner et G.W. Leibniz *Akten des II - Internationalen Leibniz-Kongresses Hannover 17-22 juli 1972* vol. II 93-103. pp. 94-95.
(5) RYCHLIK, K, Sur les contacts personnels de Cauchy et Bolzano. Revue d'Histoire des Sciences 15 (1962) 163-164, p. 164.
(6) DEM, 146.
(7) note (3) p. 9.
(8) DEM, 137.
(9) DEM, 146.
(10) DEM, 145.
(11) note (4), 98.
(12) DEM, 137.
(13) idem
(14) DEM, 139.
(15) DEM, 159. Nous avons ajouté les signes de valeur absolue : voir plus loin.
(16) idem
(17) DEM, 164.
(18) DEM, 144.
(19) DEM, 144-145.
(20) Comme ses contemporains de langue allemande, BOLZANO ne distingue pas suite et série : il les nomme toutes deux "Reihe".
(21) DEM, 150.

(22) Voir note (3) pages 7, 120 et 263.
(23) DEM, 139.
(24) DEM, 163. Voir aussi Annexe 1.
(25) CAUCHY, A, *Cours d'Analyse de l'Ecole Royale Polytechnique* Debure. Paris 1821. réimp. Gabay Paris 1989. pp. 34-35.
= oeuvres 2ème série tome III Gauthier-Villars Paris 1897 p. 143.

Attention ! la pagination est différente dans les deux reproductions. On peut consulter avec profit l'article de Hourya SINACEUR Cauchy et Bolzano *Revue d'Histoire des sciences* 26 (1973) 97-112.
(26) note (25) p. 35 = p. 44. Voir aussi Annexe 2.
(27) note (25) p. V.
(28) note (25) p. ij.
(29) note (25) p. 44 = p. 51
(30) note (25) p. vij
(31) DEM, 163.
(32) note 25 pp. 43-44 = p. 52.

Annexe 1. Démonstration par BOLZANO de la continuité de toute fonction polynôme (31)

Copie du document original pages suivantes

§ 17

Théorème. — Toute fonction de la forme :

$$a + bx^m + cx^n + \ldots + px^r$$

dans laquelle m, n, ..., r désignent les exposants positifs entiers est une grandeur qui varie *suivant la loi de continuité* pour toutes les valeurs de x.

Démonstration. — Car si on transforme x en $x + \omega$, la variation que subit la fonction est évidemment :

$$= b\,[(x+\omega)^m - x^m] + c[(x+\omega)^n - x^n] + \ldots + p[(x+\omega)^r - x^r],$$

une grandeur dont on peut facilement démontrer qu'elle peut devenir aussi petite que l'on voudra lorsqu'on prend ω suffisamment petit. Car en vertu du *théorème du binôme* dont nous avons démontré la validité pour *les exposants positifs entiers* (§ 8 du « Théorème du binôme »), indépendamment des recherches dont traite le présent mémoire, cette valeur est :

$$= \omega \left\{ mbx^{m-1} + m\frac{m-1}{2}bx^{m-2}\omega + \ldots + b\omega^{m-1} \right.$$
$$+ ncx^{n-1} + n\frac{n-1}{2}cx^{n-2}\omega + \ldots + c\omega^{n-1}$$
$$\left. + \ldots + rpx^{r-1} + r\frac{r-1}{2}px^{r-2}\omega + \ldots + p\omega^{r-1} \right\}.$$

L'ensemble des termes dont se compose le facteur contenu entre les parenthèses est toujours, comme on sait, *fini* et est *indépendant* de la valeur des grandeurs x et ω ; et comme ces derniers n'apparaissent partout qu'avec une *puissance positive*, la valeur de chaque terme particulier, et par conséquent aussi celle de toute l'expression pour toute valeur de x et de ω (aussi pour $x = 0$), est toujours *finie*. Mais si l'on diminue ω, avec le même x, les termes où intervient ω diminuent, tandis que les autres restent inchangés. Si nous désignons donc par S la grandeur qui résulte de l'addition des valeurs que prennent un à un tous les termes pour un certain ω, par exemple pour ω_1, addition faite comme si tous avaient le même signe : alors la valeur réelle qu'a cette expression pour ce même ω_1 n'est certainement pas $>$ S ; par contre, celle qu'elle prend pour chaque ω *inférieur*, est certainement $<$ S. Si l'on demande donc que la variation que subit la fonction :

$$a + bx^m + cx^n + \ldots + px^r$$

soit $<$ D, on n'a qu'à prendre un ω qui est en même temps $< \omega_1$ et est aussi $< \frac{D}{S}$; c'est ainsi que $\omega.S$, et *a fortiori* le produit de ω et d'une grandeur qui est $<$ S, doit être $<$ D.

Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes,

daß

zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege;

von

Bernard Bolzano,

Weltpriester, Doctor der Philosophie, k. k. Professor der Religionswissenschaft, und ordentlichem Mitgliede der k. Gesellschaft der Wissenschaften zu Prag.

Für die Abhandlungen der k. Gesellschaft der Wissenschaften.

Prag. 1817,
gedruckt bei Gottlieb Haase.

§. 17.

Lehrsatz. Jede Function von der Form $a + bx^m + cx^n + \ldots + px^r$, in welcher m, n, ... r ganze positive Exponenten bezeichnen, ist für alle Werthe von x eine nach dem Gesetze der Stetigkeit veränderliche Größe.

Beweis. Denn wenn sich x in $x+\omega$ verändert; so ist die Aenderung, welche die Function erfährt, offenbar

$$= b\left[(x+\omega)^m - x^m\right] + c\left[(x+\omega)^n - x^n\right] + \ldots + p\left[(x+\omega)^r - x^r\right];$$

eine Größe, von der sich leicht darthun läßt, daß sie so klein werden könne, als man nur immer will, wenn man ω klein genug nimmt. Denn zu Folge des binomischen Lehrsatzes, dessen Gültigkeit für ganze positive Exponenten wir (§ 8 des binom. Lehrs.) unabhängig von den Untersuchungen, mit denen sich die gegenwärtige Abhandlung beschäftigt, dargethan haben, ist diese Größe:

$$=\omega\left\{\begin{array}{l} mbx^{m-1} + m\frac{m-1}{2}bx^{m-2}\omega + \ldots + \omega^{m-1} \\ + ncx^{n-1} + n\frac{n-1}{2}cx^{n-2}\omega + \ldots + \omega^{n-1} \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + rpx^{r-1} + r\frac{r-1}{2}px^{r-2}\omega + \ldots + \omega^{r-1} \end{array}\right\}$$

Die Menge der Glieder, aus welchen der in den Klammern enthaltene Factor bestehet, ist, wie man weiß, immer nur endlich, und von dem Werthe der Größen x und ω unabhängig; und da diese überall nur in positiver Potenz erscheinen; so ist der Werth jedes einzelnen Gliedes, folglich auch des ganzen Ausdruckes für jeden Werth von x und ω, (auch für $x = 0$), immer nur endlich. Wird aber bey einerley x, ω verkleinert; so nehmen die Glieder, in denen ω vorkömmt, ab, während die übrigen ungeändert bleiben. Bezeichnen wir also durch S die Größe, die herauskömmt, wenn man die Werthe, die alle einzelnen Glieder des Ausdruckes für ein bestimmtes ω, z. B. für $\overset{1}{\omega}$ annehmen, so zu einander addirt, als ob sie alle einerley Vorzeichen hätten: so ist der wirkliche Werth, den dieser Ausdruck für eben dasselbe $\overset{1}{\omega}$ hat, gewiß nicht $> S$, derjenige aber, den er für jedes kleinere ω annimmt, sicher $< S$. Verlangt man daher, daß die Veränderung, welche die Function $a + bx^m + cx^n + \ldots + px^r$ erfährt, $< D$ ausfalle; so nehme man nur ein ω, das zugleich $< \overset{1}{\omega}$, und auch $< \frac{D}{S}$ ist: so wird $\omega.\, S$, und um so mehr das Product aus ω in eine Größe, die $< S$ ist, $< D$ seyn müssen.

Annexe 2. Démonstration par CAUCHY du théorème des valeurs intermédiaires (32)

4.ᵉ Théorème. *Si la fonction $f(x)$ est continue par rapport à la variable x entre les limites $x=x_0$, $x=X$, et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(X)$, on pourra toujours satisfaire à l'équation*

$$f(x)=b$$

par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X.

Démonstration. Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation

$$y=f(x)$$

rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation

$$y=b$$

dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X : or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise. En effet, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x=x_0$, $x=X$, la courbe qui a pour équation $y=f(x)$, et qui passe 1.° par le point correspondant aux coordonnées x_0, $f(x_0)$, 2.° par le point correspondant aux coordonnées X et $f(X)$, sera continue entre ces deux points : et, comme l'ordonnée constante b de la droite qui a pour équation $y=b$ se trouve comprise entre les ordonnées $f(x_0)$, $f(X)$ des deux points que l'on considère, la droite passera nécessairement entre ces deux points, ce qu'elle ne peut faire sans rencontrer dans l'intervalle la courbe ci-dessus mentionnée.

On peut, au reste, comme on le fera dans la note III, démontrer le 4.ᵉ théorème par une méthode directe et purement analytique, qui a même l'avantage de fournir la résolution numérique de l'équation

$$f(x)=b.$$