ARGUMENTATION ET DEMONSTRATION : A QUOI SERT LA DEMONSTRATION DE LA "LOI DES GRANDS NOMBRES" de Jacques BERNOULLI (1654-1705)

Norbert MEUSNIER

"J'estime cette invention bien d'avantage que si j'avais livré la quadrature même du cercle, car si celle-ci était effectivement trouvée son utilité serait peu considérable"[1]. Ainsi Jacques Bernoulli termine-t-il dans son journal scientifique Meditationes et annotationes le passage dans lequel il vient d'élaborer sa première démonstration générale de cette proposition :

"Il est possible de faire tant d'observations qu'il soit plus probable de toute probabilité donnée que les nombres des jeux gagnants de chacun des deux [adversaires] tombent entre des limites données, aussi rapprochées soient-elles, plutôt qu'en dehors"

énoncé primitif d'une "loi des grands nombres"[2] , qui mettra deux siècle à devenir "faible"[3] ! Publiée en 1713, huit années après la mort de son auteur, en apothéose de son livre Ars Conjectandi, la démonstration d'une nouvelle version de la proposition, probablement rédigée entre 1703 et 1705, dont je vais essayer ici d'éclairer les grandes lignes, est un très bel exemple du style mathématique "classique", de sa "rigueur" et de ses "naïvetés", qui présente en outre le remarquable intérêt sémantique et pédagogique d'offrir "encore" (!) quelques traces d'une approche "naturelle" et physique de la construction démonstrative : traces qui ont totalement disparu dans la démonstration moderne fondée sur l'utilisation de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Mais au-delà de cette démonstration, très proche de celle des Meditationes[4] qu'il me paraît raisonnable de dater de 1689 ou 1690[5] , le journal scientifique a conservé,

---

(1) Meditationes : article 151 a, p. 191.

(2) L'expression "loi des grands nombres" n'apparaît qu'en 1837 chez Simon Denis Poisson, et n'a jamais été utillisée par Jacques Bernoulli contrairement à ce qu'affirme Emile Borel dans son livre Le Hasard (PUF, p. 27, 1948).

(3) Les livres récents de "Théorie des Probabilités" dénomme cette propriété, ou tout au moins celle qui lui correspond "à peu-près" dans la théorie moderne des probabilités, "Théorème de Bernoulli", et il s'agit alors d'un cas particulier de la "loi faible des grands nombres", ainsi désignée dans la mesure où Borel en 1909, introduisant la notion de convergence presque sûre, énoncera une propriété "plus forte" appelée "loi forte des grands nombres".
Théorème de Bernoulli : Etant donné un événement A d'une épreuve E, événement dont la probabilité de réalisation est p, f_n la fréquence de réalisation de l'événement au cours de n répétitions de cette épreuve, alors :

$$(\forall \varepsilon, \eta \in R)\ (\exists N \in N) \,/\, (n \geq N) \Rightarrow (|f_n - p| \leq \varepsilon) > 1 - \eta$$

Bref ! Quand le nombre d'épreuves augmente la probabilité que la fréquence s'écarte de la probabilité de l'événement est de plus en plus petite.

(4) Meditationes : article 151 a, p. 185-191.

(5) Je ne peux, dans les limites de cet article, donner les raisons qui permettent d'étayer cette hypothèse.

fossilisées, quelques étapes de sa genèse heuristique entre 1685 et 1689 : c'est en m'appuyant sur cet ensemble de textes que je tente -succinctement- de suggérer, derrière la procédure technique de la démonstration, le rôle synthétique et dynamique que celle-ci joue dans la formation d'un nouveau champ problématique, de l'aléatoire de ses concepts et de ses modèles.

A. La démonstration contenue dans l'Ars Conjectandi (1703- 1705)

Dans la quatrième et dernière partie de son Ars Conjectandi(6), Jacques Bernoulli(7) commence par définir les notions fondamentales : "la certitude, la probabilité, la nécessité et la contingence", puis il écrit :

"Conjecturer quelque chose, c'est mesurer sa probabilité : ainsi l'art de conjecturer ou la stochastique se définit pour nous comme l'art de mesurer aussi exactement que possible les probabilités des choses. Le but est que dans nos jugements et dans nos actions nous puissions toujours choisir ou suivre le parti que nous aurons découvert comme meilleur, préférable, plus sûr ou mieux réfléchi. C'est en cela seulement que réside toute la sagesse du Philosophe et toute la sagacité du Politique.

Les probabilités sont estimées d'après le nombre et aussi le poids des arguments qui de quelque manière prouvent ou révèlent que quelque chose est, sera ou a été. En outre, par le poids j'entends la force de ce qui prouve"(8).

Après avoir édifié les bases d'une logique générale du probable, il constate :

"On en est ainsi venu à ce point que pour former selon les règles des conjectures sur n'importe quelle chose il est seulement requis d'une part que les nombres de cas soient soigneusement déterminés, et d'autre part que soit défini combien les uns peuvent arriver plus facilement que les autres. Mais c'est ici enfin que surgit une difficulté, nous semble-t-il : cela peut se voir à peine dans quelques très rares cas et ne se produit presque pas en dehors des jeux de hasard que leurs premiers inventeurs ont pris soin d'organiser en vue de se ménager l'équité, de telle sorte que fussent assurés et connus les nombres de cas qui doivent entraîner le gain ou la perte, et de telle sorte que tous ces cas puissent arriver avec une égale facilité. En effet lorsqu'il s'agit de tous les autres résultats, dépendant pour la plupart soit de l'oeuvre de la nature soit de l'arbitre des hommes, cela n'a pas du tout lieu"(9).

Ainsi les cas "d'égale facilité" sont-ils connus pour les dés, pour une urne contenant des bulletins noirs et blancs, mais que dire du nombre des maladies qui peuvent engendrer la mort, des changements qui peuvent affecter le climat, de la nature du corps ou de l'esprit des hommes qui déterminent la victoire dans les jeux qui ne sont pas de pur hasard ? "... il serait donc absolument d'un insensé de vouloir connaître quelque chose de cette matière. Mais à la vérité ici s'offre à nous un autre chemin pour obtenir ce que nous cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est-à-

(6) "Quatrième partie de l'Art de Conjecturer, traitant de l'usage et de l'application de la doctrine précédente aux affaire civiles, morales et économiques" ; la "doctrine précédente" c'est-à-dire le contenu des trois premières parties : le Traité de Huygens de 1657 De ratiociniis in ludo aleae avec des commentaires, un traité de combinatoire, et enfin un traité des jeux de hasard.

(7) J'écrirai désormais : JB pour Jacques Bernoulli et AC pour Ars Conjectandi...

(8) AC, p. 213-214.

(9) AC, p. 223.

cherchons. Ce qu'il n'est pas donné d'obtenir a priori l'est du moins a posteriori, c'est-à-dire qu'il sera possible de l'extraire en observant l'issue de nombreux exemples semblables ; car on doit présumer que, par la suite, chaque fait peut arriver et ne pas arriver dans le même nombre de cas qu'il avait été constaté auparavant, dans un état de choses semblables, qu'il arrivait ou n'arrivait pas"(10) .

Il est alors "évident" pour tout le monde, même "des plus stupides", "que, plus on aura recueilli de nombreuses observations de ce genre, moins grand sera le danger de s'écarter du but. Or, bien que cela soit naturellement connu de tous, la démonstration qui permet de le tirer des principes de l'art n'est pas du tout répandue, et par suite il nous incombe d'en traiter en cet endroit, endroit où cependant j'estimerais que je ferais trop peu si je m'en tenais à démontrer seulement ce que personne n'ignore. Il reste alors à examiner par la suite quelque chose que peut-être personne n'a jusqu'à maintenant rencontré même en y pensant. Il reste assurément à chercher si, en augmentant ainsi le nombre des observations, nous augmentons continuellement la probabilité d'atteindre le rapport réel entre les nombres de cas qui font qu'un événement peut arriver et le nombre de ceux qui font qu'il ne peut arriver, de sorte que cette probabilité dépasse enfin un degré quelconque donné de certitude ; ou si le Problème, pour ainsi dire, a son Asymptote, c'est-à-dire s'il existe un degré de certitude qu'il n'est jamais possible de dépasser, de quelque manière qu'on multiplie les observations, d'avoir découvert le vrai rapport des cas ; que, par exemple, nous ne pouvons jamais obtenir de certitude au-delà de la moitié, ou de 2/3 ou de 3/4 "(11).

JB prend alors un exemple, celui d'une urne, à laquelle il va faire jouer le rôle de modèle, sinon expérimental, du moins théorique :

"Je suppose que, dans une urne, à ton insu soient placées trois mille pierres blanches et deux mille pierres noires ; je suppose que pour connaître leurs nombres par expérience tu tires une pierre après l'autre (en replaçant cependant chaque fois la pierre que tu as tirée avant de choisir la suivante, pour que le nombre des pierres ne diminue pas dans l'urne) ; tu observes combien de fois sort une pierre blanche et combien de fois une noire. On demande si tu peux le faire tant de fois qu'il devienne dix fois, cent fois, mille fois etc. plus probable (c'est-à-dire qu'il devienne moralement certain) que le nombre de fois où tu choisis une pierre blanche et le nombre de fois où tu choisis une pierre noire soient dans ce même rapport sesquialtère* où se complaisent à être entre eux les nombres de pierres ou de cas, plutôt que dans tout autre rapport différent de celui-ci. Car si cela ne se produisait pas, j'avoue que c'en serait fait de notre effort pour rechercher expérimentalement le nombre de cas. Mais si nous l'obtenons et si nous acquérons enfin par ce moyen la certitude morale (et je montrerai dans le chapitre suivant que cela aussi se produit réellement), nous aurons trouvé a posteriori les nombres de cas presque comme s'ils nous étaient connus a priori ; assurément dans la pratique de la vie civile, où le moralement certain est tenu pour absolument certain, en vertu de l'Ex.9 Ch. II. cela suffit largement pour régler nos conjectures dans n'importe quel domaine non moins scientifiquement que dans les jeux de hasard : en effet, si à la place de l'urne nous mettions l'air, par exemple, ou le corps humain, qui contiennent en eux l'aliment des variations atmosphériques et des maladies, comme l'urne contient les pierres, nous pourrions en tout cas par le même procédé déterminer grâce à l'observation combien plus facilement peut arriver dans ces sujets tel ou tel événement"(12) .

---

(10) AC, p. 224.
(11) AC, p. 225.
(12) AC, p. 226.

Puis il précise le rôle essentiel que doit jouer dans cette détermination des probabilités a posteriori la notion d'"Intervalle de Vraisemblance"(13) dans lequel serait contenu le rapport des nombres de cas à déterminer expérimentalement :

"Mais pour que cela ne soit pas compris autrement qu'il ne convient, il faut bien noter ce qui suit ; je voudrais que le rapport entre les nombres de cas, que nous entreprenons de déterminer expérimentalement, ne fût pas pris de façon nette et sans partage (car ainsi c'est tout le contraire qui arriverait et il deviendrait d'autant moins probable de découvrir le vrai rapport qu'on ferait de plus nombreuses observations), mais je voudrais que le rapport fût admis avec une certaine latitude, c'est-à-dire compris entre une paire de limites, pouvant être prises aussi approchées qu'on voudra. Assurément, si dans l'exemple des pierres proposé plus haut nous prenons les deux rapports $\frac{301}{200}$ et $\frac{299}{200}$, ou $\frac{3001}{2000}$ et $\frac{2999}{2000}$, etc. dont le sesquialtère est très près et du plus grand et du plus petit, on montrera que l'on peut arriver à ce que le rapport trouvé grâce à des expériences recommencées de nombreuses fois tombe entre ces limites du rapport sesquialtère plus probablement, de toute probabilité donnée, qu'en dehors"(14) .

Je peux maintenant envisager de vous proposer une approche de l'aspect technique de la démonstration qui fait l'objet du dernier chapître de AC où sa structure est la suivante :

Lemme 1
Lemme 2
Lemme 3
Lemme 4
Lemme 5
Scholie (à propos du lemme 4)
Proposition Principale
Application numérique.

Mais ici, j'adopte un ordre de présentation différent(15) qui consiste à donner en premier la proposition principale, à rendre perceptibles les bases de la démonstration à partir de l'exemple de l'urne, puis à intervertir les Lemmes 4 et 5.

---

(13) C'est moi qui désigne ainsi cet intervalle, pour éviter, puisque c'est ici possible, de confondre "a priori" cette notion avec le concept moderne d'"Intervalle de Confiance".

(14) AC, p. 226-227.

(15) Mon but est de permettre au lecteur qui ne dispose pas du texte complet et de l'autonomie de lecture qui en résulte d'avoir la vision la plus simple et la plus claire possible de la "logique" de la démonstration sédimentée dans sa gangue "Euclidienne" dans le texte de JB qui écrit :

"Pour expédier avec toute la brièveté et toute la clarté possibles une affaire dont la démonstration est longue, je vais m'efforcer de tout réduire à la mathématique abstraite. Celle-ci va me fournir les lemmes suivants. Une fois qu'ils auront été exposées, le reste en sera une pure et simple application", AC p. 228.

La présentation de JB représente la dernière étape d'une reformulation dans le style Euclidien qui voile les "intuitions" de la démarche heuristique. Bien entendu ma présentation ne les dévoile guère plus ! C'est l'utilisation des textes de 1685-1690 qui nous permettra de le faire... en partie.

Dans la présentation moderne, évoquée au début de cet article, ce n'est plus d'un voile dont il s'agit mais d'un mur en béton : cependant ce béton théorique n'est

"Propos. Princip. Il s'ensuit enfin la proposition elle-même, pour laquelle tout cela a été formulé, mais dont la démonstration se fait maintenant par la seule application des lemmes préparatoires à l'objet présent. Pour éviter la fatigue d'une circonlocution, j'appelerai "féconds" ou "fertiles" les cas dans lesquels un événement peut se produire, et "stériles" ceux dans lesquels le même événement ne peut se produire : de même, j'appellerai expériences "fécondes" ou "fertiles" celles pour lesquelles on constate qu'un des cas fertiles peut survenir, et "inféconds" ou "stériles" celles pour lesquelles on observe qu'un des cas stériles se produit. Soit donc le nombre de cas fertiles au nombre de cas stériles précisément ou approximativement dans le rapport $\frac{r}{s}$ et qu'il soit en conséquence, au nombre de tous dans le rapport $\frac{r}{r+s}$ ou $\frac{r}{t}$, rapport qu'encadrent les limites $\frac{r+1}{t}$ et $\frac{r-1}{t}$ Il faut montrer que l'on peut concevoir des expériences en un nombre tel qu'il soit plus vraisemblable d'autant de fois que l'on veut (soit c) que le nombre des observations tombe à l'intérieur de ces limites plutôt qu'en dehors, c'est-à-dire que le nombre des observations fertiles soit au nombre de toutes les observations dans un rapport ni plus grand que $\frac{r+1}{t}$, ni plus petit que $\frac{r-1}{t}$"(16) .

JB ici ne prend pas la précaution de mentionner que les cas "fertiles" et les cas "stériles" sont tous des cas d'égale facilité, comme il l'avait fait auparavant dans l'exemple de l'urne : il s'évertue à donner un énoncé général, mais en fait il ne parle que de l'urne, au point même que si nous oublions cet exemple qui prend le statut de modèle universel, il est difficile sinon impossible d'interpréter les notions de cas et d'expériences. Ne faisons donc pas comme si nous ne savions pas que r représente par exemple 3000 pierres blanches et s, 2000 pierres noires(17) .

Pour vous je vais prendre l'exemple le plus simple dans la même catégorie : r=3 et s=2 ; il y a 5 boules dans l'urne, je tire une boule "au hasard", c'est une expérience, je remets la boule dans l'urne, je recommence l'expérience 10 fois : en 10 fois j'ai pu obtenir entre 0 et 10 boules noires, et "intuitivement" 6 boules noires est un cas "remarquable". La méthode de Huygens, approfondie par JB, permet de calculer pour chacun de ces "cas" les degrés de probabilité ou "cas féconds" dans lesquels cet événement -par exemple le cas où j'observe 6 boules noires, mais tous nous intéressent- peut se produire(18) . Je suppose ici que vous voyez "facilement" comment des

---

nullement l'effet à ce moment-là d'un refoulement pervers ; tout simplement nous ne sommes plus alors dans le même réseau de concepts. D'un point de vue pédagogique, au sens le plus large possible de ce terme, ces considérations ne me paraissent pas totalement dérisoires et me semblent même être l'une des deux principales justifications d'une recherche épistémologico-historique ; la deuxième, car ce n'était pas une simple précaution !, est à mon sens d'ordre éthique : et vous ?

(16) AC, p. 236.

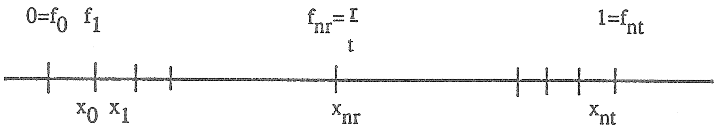
(17) Une confirmation de cela se trouve dans l'application numérique :
"... pour r et s je ne pose pas 3 et 2, mais 30 et 20, ou 300 et 200, etc..."
AC, p. 238.

(18) Il est conseillé de considérer avec le plus grand respect les différents types de "cas" qui se côtoient :
a) les cas "fertiles" ou "stériles" d'un événement : "cas 1" connus
b) les expériences "fertiles" cumulées qui deviennent de nouveaux événements : "cas 2" possibles.

considérations élémentaires de combinatoire permettent de mettre en évidence que ces degrés de probabilités ou "cas 3" sont donnés par les termes du développement de : $(r+s)^{10}$; ainsi pour 6 boules noires en 10 tirages : $\binom{10}{6} 3^6 2^4 = 2.449.440$ "cas 3" fertiles et $5^{10} - 2.449.440 = 9.765.625 - 2.449.440 = 7.316.185$ "cas 3" stériles.

JB, lui, traite d'emblée le cas général, $(r+s)^m$, mais c'est en général un tantinet particulier puisque $m = nt$ avec $t = r + s$[19].

Soient x_0, x_1,......., x_{nr}, ... x_{nt} les termes du développement de $(r+s)^{nt}$; $x_{nr} = \binom{nt}{nr} r^{nr} s^{ns}$ est donc le nombre de "cas 3" correspondant au fait d'obtenir nr fois une boule blanche et ns fois une boule noire en nt tirages d'une boule dans l'urne, c'est à dire une fréquence relative de tirage d'une boule blanche $f_{nt} = \frac{nr}{nt} = \frac{t}{r'}$, fréquence égale à la "probabilité a priori"[20] en un tirage dans l'urne d'obtenir une boule blanche.



Ainsi le nombre de "cas 3" qui permettent d'obtenir à peu près, par exemple dans un intervalle symétrique autour de cette valeur, une fréquence "observable"[21] égale à r/t, est égal à une somme de x_i : S_1 ; à l'extérieur de cet intervalle la somme des cas est S_2. Le principe fondamental de la démonstration de Jacques Bernoulli est alors de montrer que dans un intervalle égal à $\frac{1}{t}$[22] autour de $\frac{r}{t}$, quel que soit le nombre c, il suffit

---

c) les cas "fertiles" ou "stériles" de ces nouveaux événements : "cas 3" calculés par des méthodes combinatoires, ici le développement du binôme à une certaine puissance.

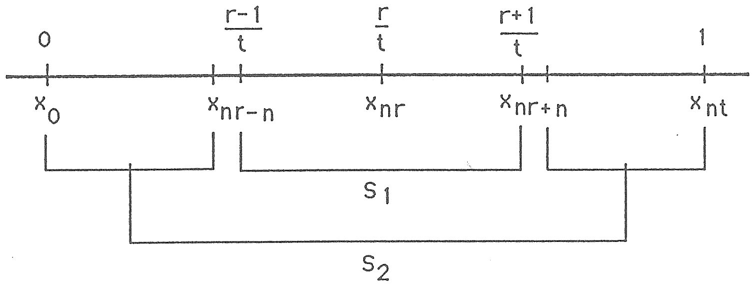
(19) Allez savoir pourquoi ? Mystère total à ce stade de la démonstration... Laissez-vous faire par elle et quand vous aurez retrouvé tout ce qu'elle a voilé vous comprendrez que c'est une limitation Ad Hoc : le style, vicieux le style, et en même temps gros d'une potentialité d'appropriation "active" du fond...

(20) Je m'éloigne ici du vocabulaire de JB qui ne parle que de cas et de rapports de cas, du vocabulaire mais pas de l'"idée"... Néanmoins, il est épistémologiquement indispensable de ne pas confondre le concept de "probabilité - degré de probabilité - rapport de cas" que construit JB et le concept moderne de la théorie ensembliste.

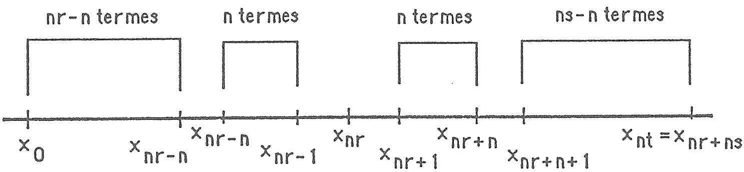
(21) Observable et non pas observée !

(22) Du point de vue de JB, ceci n'est pas une limitation : on peut prendre $t' = n_1 t$ de telle façon que t' soit aussi grand que l'on veut et donc $\frac{1}{t'}$ aussi petit que l'on veut, avec $r' = n_1 r$ et $s' = n_1 s$: $\frac{r'}{t'} = \frac{r}{t}$; on prend alors $m = nt'$ et c'est le développement de $(r' + s')^{nt'}$ qui intervient.

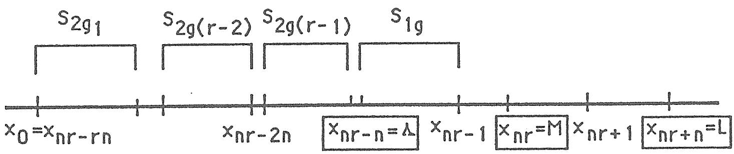
que r soit suffisamment grand pour que $S_1 > c\, S_2$; ce qui est donné à voir dans le schéma suivant :



S_2 est composée d'une partie "gauche" et d'une partie "droite" (par rapport à x_{nr} qui joue un rôle pivot) : S_{2g} et S_{2d}
S_1 également : S_{1g} et S_{1d}



Le nombre de termes dans S_{2g} est égal à $n(r - 1)$, dans S_{1g} à r ; le rapport entre les deux est donc $(r - 1)$, à droite $(s - 1)$, Lemme 1 [(23)] et ces rapports sont constants.
JB décompose S_{2g} en $(r - 1)$ sommes partielles à partir de x_0, S_{2g_1}, S_{2g_2}, etc... $S_{2g(r-1)}$ et montre que $S_{2g_1} < S_{2g_2} \leq \ldots < S_{2g(r-1)} < S_{1g}$



---

(23) Le lemme 2 énonce le fait (trivial ?) qui dans le développement de $(a + b)^n$ il y a $n + 1$ termes ! ?

et $S_{2g} = S_{2g_1} + S_{2g_2} + ... + S_{2g_{(r-1)}} < (r - 1)\, S_{2g_{(r-1)}}$.

Si $S_{1g} > c(r-1)S_{2g_{(r-1)}}$ alors $S_{1g} > c\, S_{2g}$. De même à droite.

Mais $S_1 = S_{1g} + x_{nr} + S_{1d}$, donc $S_1 > S_{1g} + S_{1d}$

et alors $S_1 > c\,(S_{2g} + S_{2d}) = cS_2$ C.Q.F.D. !

Tout revient donc à montrer que S_{1g} est avec $S_{2g_{(r-1)}}$ dans un rapport aussi grand que l'on veut, et ceci repose sur l'étude des rapports entre les termes du développement de $(r + s)^{nt}$.

Il montre très facilement que $x_{nr} = M$ est le plus grand de tous Lemme 3,1, que tous les autres sont d'autant plus petits qu'on s'éloigne à gauche ou à droite de lui Lemme 3,1 et que le rapport -c'est le point "vital" du phénomène- va en augmentant :

Soit $x_{nr} > x_{nr-1} > x_{nr-2}$ ... etc... $> x_2 > x_1 > x_0$

et $x_{nr} > x_{nr+1} > x_{nr+2}$ ... etc... $> x_{nr+ns1} > x_{nt}$

avec $\frac{x_{nr}}{x_{nr-1}} < \frac{x_{nr-1}}{x_{nr-2}} <$ .... etc .... $< \frac{x_1}{x_0}$ Lemme 3,2

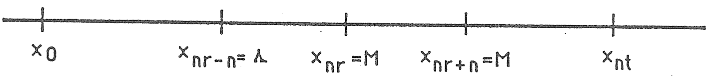
Les termes étant décroissants on doit pouvoir s'éloigner suffisamment de M par exemple vers la gauche pour trouver un terme Λ (sur la droite L)(25) tel que

$\frac{M}{\Lambda} > c\,(r-1) = b$ et que Λ soit x_{nr-n} ; en effet tous les termes de S_{1g} seront alors b fois

(25) Une source de difficultés dans les notations de JB provient du fait qu'il a désigné implicitement le terme qui correspond à nt expériences fertiles : "terme 0", etc... à partir du Lemme 3, ce qui entraîne que le terme qui correspond à (nr-n) expériences fertiles que je note x_{nr-n}, qui se trouve "à gauche de M", avec $M = x_{nr}$, est dans ses notations le terme "ns+n" qui est "à droite" de M lui-même considéré comme terme "ns" ! C'est pourquoi, afin de retrouver ses notations pour L et Λ sans en changer le sens, tout en adoptant des notations qui me paraissent plus claires je pose :

$x_{nr-n} = \Lambda$ et $x_{nr+n} = L$; (voyez AC, p. 228-231).

Plus simplement, JB "lit" le schéma suivant de droite à gauche, ou dans un miroir : ainsi L est "à gauche" pour lui et Λ est "à droite".



plus grands que ceux de $S_{2g(r-1)}$ <u>Lemme 5</u>[24] . Nous sommes bien dans les conditions imposées plus haut pour que : $S_1 > cS_2$

Il ne reste donc plus qu'à montrer qu'on peut trouver n tel que :

$\frac{M}{\Lambda} = \frac{x_{nr}}{x_{nr-n}} > b = c\,(r-1)$ et "symétriquement" $\frac{M}{\Lambda} = \frac{x_{nr}}{x_{nr+n}} > b' = c\,(S-1)$

C'est l'objet du Lemme 4 et du Scholie, techniquement le passage le plus délicat de la démonstration :

$$\frac{M}{L} = \frac{\binom{nt}{nr} r^{nr} s^{ns}}{\binom{nt}{nr+n} r^{nr+n} s^{ns-n}}$$

$$\frac{M}{L} = \frac{\binom{nt}{ns} r^{nr} s^{ns}}{\binom{nt}{ns-n} r^{nr+n} s^{ns-n}}$$

$$\frac{M}{L} = \frac{(nt-ns+n)\ldots\ldots\ldots(nt-ns+1)}{(ns-n+1)\ldots\ldots\ldots\ldots ns} \left(\frac{s}{r}\right)^n$$

$$\frac{M}{L} = \frac{(nr+n)(nr+n)\ 1\ldots\ldots\ldots(nr+1)}{(ns-n+1)(ns-n+2)\ldots ns} \left(\frac{s}{r}\right)^n$$

$$\frac{M}{L} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{nr+n-1}{ns-n+(i+1)} \frac{s}{r}$$

Il faut donc montrer que ce produit est aussi grand que l'on veut pourvu que n soit assez grand.

JB, dans le <u>lemme 4</u>, fait alors une "démonstration" de type impressionniste:

n "étant supposé infini", i est négligeable, et (i+1) aussi, et

$$\frac{M}{L} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{nr+n}{ns-n} \frac{s}{r} = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{rs+s}{rs-r} = \left(\frac{rs+s}{rs-r}\right)^n$$

---

(24) D'après le Lemme 3,2 : $\frac{x_{nr}}{x_{n-1}} < \frac{x_{nr-n}}{x_{nr-n-1}}$ donc $\frac{x_{nr}}{x_{nr-n}} < \frac{x_{nr-1}}{x_{nr-n-1}}$ et $\frac{x_{nr-1}}{x_{nr-n-1}} > b$; de même $\frac{x_{nr-2}}{x_{nr-n-2}} > b$ etc... Donc $x_{nr-1}+x_{nr-2}+\ldots x_{nr-n} > b(x_{nr-n-1}+\ldots+x_{nr-2n})$ c'est à dire $S_{1g} > b\,S_{2g(r-1)}$.

"rapport infiniment grand, lorsque le nombre b est supposé infini"[26]. Ce qui est ici remarquable c'est que JB écrit à la fois :

$$\text{"}\frac{M}{L} = \frac{(rs+s)(rs+s)(rs+s)\ldots rs}{(rs-r)(rs-r)(rs-r)\ldots rs}\text{"},$$

et "quantité qui est composée, comme on le voit, d'autant de rapports $\frac{(rs+s)}{(rs-r)}$ qu'il y a de facteurs" ! A ce prix JB a produit -à la fin du XVIIème siècle, n'oublions pas ce détail !- une démonstration dont la rigueur lui paraît certainement entière "pour ceux qui sont habitués à faire des observations sur l'infini"[27]. Néanmoins, il faut bien convaincre aussi les autres, et condescendant, pour "apaiser ce scrupule", il reprend son argumentation :

"Scholie. Il peut être objecté aux 4ème et 5ème Lemmes par ceux qui ne sont pas habitués à faire des observations sur l'infini, que même si dans le cas du nombre n infini, les facteurs des quantités qui expriment les rapports $\frac{M}{L}$ et $\frac{M}{\Lambda}$, $nr\ell n$ 1.2.3. etc et $ns\gamma n$ 1.2.3. etc. valent autant que $nr\ell n$ et $ns\gamma n$, alors que les nombres 1, 2, 3 etc. des facteurs pris un à un s'évanouissent normalement, il peut cependant arriver que pris tous ensemble ou bien considérés en soi, ils croissent à l'infini (à cause du nombre infini de facteurs) et qu'ainsi ils diminuent infiniment le rapport infiniment multiple du rapport $\frac{(rs+s)}{(rs-r)}$ ou $\frac{(rs+r)}{(rs-s)}$, c'est-à-dire qu'ils le rendent fini. Je ne puis mieux apaiser ce scrupule, que si je montre maintenant un mode d'assignation, en fait un nombre n fini, soit une puissance finie du binôme, dans laquelle la somme des termes entre les limites L et L soit à la somme de ceux qui sont en dehors dans un rapport supérieur à un rapport donné, si grand soit-il, rapport que je désigne par la lettre c ; il va de soi qu'après avoir montré cela l'objection s'écroule nécessairement d'elle-même"[27*].

Puisque les termes du produit $\frac{M}{L}$ progressent de :

$\frac{nr+1}{ns}\,\frac{s}{r}$, $\frac{nr+2}{ns-1}\,\frac{s}{r}$ etc.... à $\frac{nr+n}{ns-n+1}\,\frac{s}{r}$, c'est-à-dire (à peu près quand n est grand) de 1 à $\frac{nr+1}{rs-r}$, on peut choisir un terme intermédiaire T, et l'élever à une puissance m telle que :

$T^m > c\,(s-1)$; a fortiori on a alors $\frac{M}{L} > c\,(s-1)$

---

(26) AC, p. 231.

(27) AC, p. 233. Ce commentaire de JB, légèrement méprisant, est d'autant plus savoureux quand on prend en considération les petits tourments qu'allaient rencontrer par la suite les mathématiques dans "l'observation de l'infini" !

(27*) AC, p. 233. Ce commentaire de JB, légèrement méprisant, est d'autant plus savoureux quand on prend en considération les petits tourments qu'allaient rencontrer par la suite les mathématiques dans "l'observation de l'infini" !

JB prend $T = \frac{rs+s}{rs} = \frac{r+1}{r}$[28]. L'usage des logarithmes lui permet d'écrire qu'il faut:

$$m > \frac{\log c\,(s-1)}{\log (r+1) - \log r}$$

Il ne reste plus qu'à trouver dans la suite des termes du produit celui qui est égal à $\frac{r+1}{r}$ pour en déduire la valeur correspondante de n. Or ce terme est tel que dans l'ordre croissant il y ait (m-1) termes à sa suite jusqu'au dernier qui est : $\frac{nr+n}{ns-n+1}\,\frac{s}{r}$; ainsi $T = \frac{nr+n-(m-1)}{ns-n+m}\,\frac{s}{r} = \frac{r+1}{r}$

Soit $n = m + \frac{ms-s}{r+1}$ et $nt = mt + \frac{mst - st}{r+1}$[29].

En échangeant les rôles de r et de s on obtient, en tenant le même raisonnement pour $\underset{\Lambda}{\underline{M}}$:

$$m' > \frac{\log c\,(r-1)}{\log (s+1) - \log s}$$

et $n' = m' + \frac{m's-s}{s+1}$ et $n't = m't + \frac{m'st-st}{s+1}$

Ce qui lui permet alors de proposer une application numérique avec : $r = 30$, $s = 20$ et $c = 1000$.

On obtient alors : $nt = 24728$ et $n't = 25550$.

"De là on déduit, grâce à ce qui a été démontré ici, qu'ayant fait 25550 expériences, il est vraisemblable de bien plus de mille fois que le rapport du nombre des observations fertiles au nombre de toutes sera compris entre les limites $\frac{31}{50}$ et $\frac{29}{50}$ plutôt qu'en dehors"[30].

---

(28) Les termes progressent de $\frac{rs+s}{rs+s}$ à $\frac{rs+s}{rs-r}$; une valeur intermédiaire "évidente" est bien sûr : $\frac{rs+s}{rs}$ qui possède de plus une expression très simple : $\frac{r+1}{r}$.

(29) Il parait encore plus simple de prendre pour $m^{ième}$ terme $\frac{nr+1}{ns(m-1)}\,\frac{s}{r}$, le $m^{ième}$ terme à partir du premier. Le calcul donne alors $n = \frac{m(r+1)-(r+1)}{s}$; mais dans l'application numérique on trouve alors nt = 38172 ! approximation encore plus "décourageante" que celle qu'effectue JB.

(30) AC, p. 238.

B. La génèse heuristique du problème et de la démonstration (1685-1690)

En 1684 ou 1685, Jacques Bernoulli a commencé à s'intéresser de près à la solution mathématique de certaines questions issues du contexte des jeux de hasard et son journal scientifique Meditationes a préservé plusieurs étapes de sa démarche. Il a débuté cette recherche par l'étude du seul ouvrage de l'époque qui abordait ce thème, le traité de Huygens De ratiociniis in ludo aleae (1657) et la résolution des 5 problèmes proposés à la fin de celui-ci. En 1685(31) dans l'article 77 -p. 101-106 des Meditationes-, à propos de la comparaison des valeurs de différents types de contrats de mariage, JB est conduit à tenir compte du fait incontournable que des personnes âgées et des jeunes ne sont pas exposés à la mort de la même façon(32). C'est ainsi qu'il écrit : "Pour ces choses la voie la plus sûre pour estimer les probabilités n'est pas a priori, ou par la cause, mais a posteriori, ou par l'événement observé fréquemment dans des exemples semblables"(33). Mais à ce moment-là, il n'en dit pas plus. Immédiatement après, dans l'article 77a -p. 106, 116- écrit en 1685 ou 1686 et qui porte sur le Jeu de Paume (Annexe 1), il essaye de légitimer le passage de l'a priori à l'a posteriori dans la détermination des degrés de probabilités grâce "à une analogie tirée des jeux que seul le sort gouverne". Puis dans l'article 133a -p. 171- écrit entre 1686 et 1690, apparaît la première version, très "empirique" de la Loi des grands nombres : "**Je peux d'autant moins m'éloigner de la vraie proposition que j'observe plus souvent plutôt que plus rarement**" (Annexe 2). Quelques pages après, dans l'article 151a -p. 185-191-(34) écrit entre 1685 et 1686 il élabore une démonstration algébrique de la proposition qui correspond, à quelques détails près, à la version définitive de AC de 1703-1705 étudiée plus haut. Deuxième version de la loi : "**Il est possible de faire tant d'observations qu'il soit plus probable de toute probabilité donnée que les nombres des jeux gagnants de chacun des deux tombent entre des limites données, aussi rapprochées soient-elles, plutôt qu'en dehors**" (p. 185)(35). Cet article comprend deux parties parfaitement parallèles, la première développant l'"intuition" de l'article 133a, pour des joueurs de force égale et en repartant d'une description numérique des cas possibles dans le cas particulier où le rapport des cas des forces de chaque joueur est comme 10 à 10 et l'intervalle de vraisemblance égal à [9, 11]. Puis en s'appuyant sur l'écriture explicite du triangle arithmétique, avant d'utiliser l'écriture symbolique, JB construit une démonstration tout à fait semblable dans ses étapes à celle de la version définitive de AC(36). Enfin, il étend cette démonstration au cas général de 2 joueurs de forces inégales comme m à n et la développe selon le même schéma que précédemment(37).

---

(31) Pour plus de détails voir les références [2] et [3] de la bibliographie.

(32) Un fait incontournable pour JB en 1685 mais nullement un fait pour n'importe qui à n'importe quelle époque dans n'importe quel champ culturel !

(33) Meditationes, p. 104. C'est la formulation que l'on trouve presque mot pour mot dans AC. p. 224.

(34) Je ne peux pas donner ici, faute de place, la traduction de cet article.

(35) Dans la Lettre à un amy sur les parties du Jeu de Paume (1690 ?) -voir [2]- nouvelle version, sur le modèle de l'urne cette fois :"Etant même une chose démontrée, qu'on en peut tant faire (des observations) qu'il sera à la fin probable de toute probabilité donnée, et par conséquent qu'il sera moralement certain, que la raison d'entre ces nombres, que l'on aura ainsi trouvée par expérience, difère (sic) de la véritable d'aussi peu que l'on voudra : qui est tout ce qu'on peut souhaiter" p. 3.

(36) En application numérique, il prend ici :
$r=s=10$; $c = 1000$ et il obtient $nt = 3610$.

(37) Nouvelle application numérique avec :$r=10$;$s =15$;$c =1000$; il obtient $nt = 5875$.

Dans ces textes qui s'échelonnent entre 1685 et 1690 nous pouvons je pense déceler une rupture de continuité qui passe entre l'article 77a sur le Jeu de Paume et l'article 133a dans lequel "jaillit" l'intuition de la loi. La première période [1685-1686] est celle de l'élaboration du problème initial fondamental de l'estimation des probabilités a posteriori, la deuxième [probablement 1688-1690] met en scène un nouveau problème : celui de la possibilité de calculer la valeur de ces estimations. "Ce qui est commun à ces deux structures problématiques c'est une recherche de légitimation de cette estimation des probabilités" a posteriori, ou par l'événement observé fréquemment dans des exemples semblables"(38). J'ai présenté plus haut le système d'argumentation de la démonstration de la proposition en jeu dans la deuxième structure ; considérons maintenant la première argumentation, celle qui s'appuie sur l'exemple du Jeu de Paume et qui s'établit sur une analogie avec les jeux de hasard, en utilisant l'intermédiaire des jeux mixtes. Je décris schématiquement le fonctionnement de cette analogie(39).

Jeux de hasard :

un joueur qui a deux cas pour gagner, un cas pour perdre /	A
il PEUT GAGNER deux fois plus souvent /	B
ON DIT qu'il joue avec un sort deux fois plus favorable /	C

Jeux mixtes :

un joueur qui GAGNE deux fois plus souvent /	B'
ON DIT qu'il est deux fois plus fort /	C'
JE DIS alors qu'il est SUPPOSE avoir deux agilités ou deux cas pour gagner et un cas pour perdre /	A'

Schéma n° 1	A ---> B
	A <--> C
	B <--> C
Schéma n° 2	B' <--> C'
	C' ---> A'

En fait le schéma n° 1 prend la forme : A ---> B ---> C ---> A ; il est parfaitement réversible et l'analogie consiste à se servir de la similitude syntaxique et de la proximité sémantique de C et C' pour opérer le passage de C' à A' :

$$\begin{array}{ll} & \boxed{C} \dashrightarrow A \\ B' \longleftrightarrow & \boxed{C'} \dashrightarrow A' \end{array}$$

, A' n'étant que la traduction de A dans le contexte du schéma n° 2.

Ainsi, l'analogie permet-elle une légitimation de l'estimation des probabilités a posteriori, néanmoins considérées comme étant "supposées" et non pas effectives ; mais au terme de cette démarche, la réversibilité du schéma n° 2 :

(38) Meditationes, Article 77 p. 104.

(39) Voir, et lire, le texte "Sur le Jeu de Paume, de l'annexe 1.

A : ligne 11 A' : ligne 15
B : lignes 10-11 B' : ligne 13
C : lignes 9-10 C' : ligne 12

L'ordre de présentation de JB est :

C / B / A
C'/ B'/ A'

par lequel il met en évidence un parallélisme "rhétorique" de la suite des propositions ; j'essaye d'en mettre en évidence la structure "logique" implicite qui sans la rendre légitime ne la rend pas illégitime. Les "flèches" que j'utilise dans les schémas symbolisent une relation d'implication.

A ---> B ---> C ---> A ---> B
B' ---> C' ---> A' ---> B

et de la différence apparemment irréductible entre B' et B, entre "GAGNER EFFECTIVEMENT DEUX FOIS PLUS SOUVENT" et "POUVOIR GAGNER DEUX FOIS PLUS SOUVENT"(40). En bon logicien, JB est certainement sensible à la cohérence logique de sa légitimation analogique et s'en tient là ; peut-il alors se poser la question de savoir si une estimation est "plus sûre" qu'une autre, si en particulier c'est le cas lorsque le nombre des expériences augmente ? S'il ne la pose pas, est-ce parce que comme il l'écrit : "Il ne peut échapper à personne que, pour juger par ce moyen de quelque événement, il ne suffirait pas d'avoir fait choix d'une ou deux expériences, mais qu'il serait requis une grande quantité d'expériences : tout être des plus stupides, par je ne sais quel instinct naturel, par lui-même et sans le guide d'aucun enseignement (chose absolument admirable) tient pour évident que, plus on aura recueilli de nombreuses observations de ce genre, moins grand sera le danger de s'écarter du but"?(41) . Il nous faudrait donc enquêter sur ce qu'en pensent les gens stupides, surtout au XVIIème siècle, mais quoi qu'il en soit cette affirmation me semble un peu courte ; je la prends avant tout pour un effet de rhétorique visant à mettre en relief le caractère original et surprenant du phénomène mis en évidence et "démontré". Par contre, à supposer qu'il ait été particulièrement stupide, JB peut-il alors répondre : "c'est plus sûr quand on fait plus d'observations que moins" ? "Plus sûr" alors ne peut vouloir dire qu'une seule chose : s'écarter du "vrai" rapport à moins de "degrés de probabilités" dans le premier cas que dans le second ; il importe alors de prendre la mesure des contraintes et des obstacles auxquels se heurte cette problématique : le "vrai" rapport, certain, est inconnu, quand c'est le rapport connu qui est incertain. Si, à la rigueur, l'écart entre ces deux rapports est pensable comme objet conjectural, quel "événement" ou quels "événements" lui associer ? Aussi, ce sont les deux méthodes de calcul des probabilités qui se révèlent impuissantes : a priori et encore plus a posteriori(42) elles perdent prise. C'est pourquoi j'avance cette hypothèse que JB ne pose pas la question de la valeur de l'estimation des probabilités a priori(43) à ce stade là parce que le champ problématique dans lequel il se trouve ne permet pas de la résoudre ; quant à savoir s'il se l'est posée, faute de traces explicites l'important est d'avoir montré qu'il le pouvait, que le champ problématique le suggérait tout en l'interdisant.

Ceci étant, acceptée la légitimation analogique, que l'on s'arrête momentanément - deux jours ou trois ans-, satisfait ou non, si l'analyse, faite plus haut, des schémas qui la

---

(40) Si on gagne deux fois plus souvent, on peut gagner deux fois plus souvent : la réciproque n'est pas vraie.

(41) AC., p. 225.

(42) a priori : il y a une infinité de rapports et d'écarts possibles, ce qui d'ailleurs peut suggérer l'emploi d'intervalles pour se ramener au fini. Quels "poids" leur attribuer, ou comment les calculer ?
a posteriori : comment observer les événements fertiles ou stériles quand on ne sait même pas quels sont les événements ? Qui plus est la valeur de l'estimation, à supposer qu'elle soit réalisable, serait alors rejetée dans une récurrence infinie.

(43) Si j'appelle "problème direct" de l'estimation cette question, car c'est elle, comme nous venons de le voir, qui découle directement de la pratique de la recherche des probabilités a posteriori, on peut alors désigner comme "problème inverse" celui qui est énoncé et résolu dans la proposition principale et sa démonstration. Ainsi c'est cette "démarche" qu'il y a lieu de tenir pour l'inversion du problème de Bernoulli, avant celle de Thomas Bayes -publiée en 1763- qui par une nouvelle inversion dont la nécessité fût probablement paralysée par le "succès" de JB puis de De Moivre retrouve le "problème direct" initial.

décrit a mis en évidence l'écart entre B et B', elle met également en relief que cette analogie pourrait se prolonger sur la réversibilité elle-même et assurer ainsi un terrible renforcement de la légitimation :

$$B' \dashrightarrow C' \dashrightarrow \boxed{A' \dashrightarrow B'}$$

Absurdité ! vont s'écrier les esprits légèrement imbibés par la "démarche probabilité"... Or, c'est précisément cette affirmation provocante et incongrue, si elle n'est pas resituée dans la perspective de l'article 77a, que nous découvrons dans l'article 133a où JB affirme : "**Si autant de cas sont pour moi que contre moi il DOIT se produire un rapport d'égalité dans le nombre des jeux où je gagne et où gagne mon adversaire**"(44) et l'analogie justifiante se trouve désormais en position d'induire un nouveau champ problématique au sein duquel peuvent se mettre en place les termes de sa propre justification. Le jeu de la réversibilité dans l'analogie et le retournement ou l'inversion du problème de la valeur des estimations apparaissent donc comme indissolublement liés dans la constitution de ce nouvel état de la problématique qui permet l'élaboration de la démonstration et de la proposition visant à légitimer l'estimation des probabilités a posteriori, élaboration que ponctuent les étapes d'un projet désormais rationalisable et mathématisable.

C. Conclusion

Au terme de cet itinéraire archéologique dans les sédiments de la genèse heuristique du "théorème de Bernoulli" et l'"invention" d'une interprétation possible du mode de fonctionnement de la rupture épistémologique dont nous gardons la trace dans les articles 77a et 131a des <u>Meditationes</u>, le rôle de la "Proposition Principale" et de sa démonstration apparaît comme celui d'un liant qui dans la nouvelle problématique du champ des "choses incertaines" assure le fonctionnement cohérent d'un nouveau concept de probabilité(45), d'un concept d'"intervalle... de vraisemblance" et du modèle "universel" de la réversibilité entre cas a priori et cas a posteriori, celui de l'urne, qui permet de penser le problème direct de la valeur des estimations comme qualitativement résolu(46). Aucun élément de ce nouveau champ problématique, de la proposition à l'urne ne peut exister sans les autres et tous sont associés dans la redéfinition du projet d'une science générale de la conjecture.

[Paris - Septembre 1989]

---

(44) <u>Meditationes</u>, Article 133a p. 171?
Remarquez aussi que le problème est désormais posé dans la configuration la plus simple possible, celle de deux joueurs de forces égales, seule à permettre l'utilisation quasiment "brute" des propriétés du triangle arithmétique, bien sûr parfaitement présentes à l'esprit de JB.

(45) Un nouveauconcept de probabilité qui tout en restant lié à la combinatoire des cas a priori, introduit au coeur du modèle mathématique, sur le terrain de la liaison entre probabilités a priori et a posteriori, le double visage d'une probabilité certaine mais inconnue attachée aux choses et une probabilité incertaine mais connue dépendant de notre connaissance des choses.

(46) Problème direct résolu dans la mesure où étant considéré un événement dont on affirme qu'il possède une probabilité de se réaliser, que cette probabilité soit connue ou inconnue, le fait seul qu'elle existe assure d'après la proposition principale que l'estimation est d'autant plus sûre qu'on fait un plus grand nombre d'observations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERNOULLI Jacques, Die Werke von Jakob Bernoulli, Band III, Nirkhaüser Verlag, Bâle, 1975.

[2] MEUSNIER Norbert, Jacques Bernoulli et l'Ars Conjectandi, I.R.E.M. de Rouen, (contient une traduction de la 4è partie de l'Ars Conjectandi), 1987.

[3] MEUSNIER Norbert, "Problèmes de partage au fondement de la stochas-tique," dans Actes du colloque Histoire et Epistémologie des mathéma-tiques, I.R.E.M. de Montpellier, 1985.

[4] HACKING Ian, The emergence of Probability. A philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference, Cambridge University Press, Cambridge, 1975.

[5] STIGLER Stephen, The history of statistics. The measurement of Uncertainty before 1900, Belknap Harvard, 1986.

[6] TODHUNTER Isaac, History of the theory of Probability, Mac Millan, London, réimprimé en 1949-1965, Chelsea, New York, 1865.

ANNEXE 1

Extrait de Meditationes, p. 106-116

Sur le Jeu de Paume

Dans les jeux, et les autres pratiques humaines, qui dépendent ou de l'adresse et du génie comme le jeu des échecs, ou de l'agilité du corps comme le jeu de Paume, ou dans les jeux mixtes qui sont gouvernés par l'adresse et le sort tels que les jeux de hasard et la plupart des jeux de cartes on ne peut pas déterminer a priori par combien de degrés l'un l'emporte sur l'autre en génie, en industrie ou en agilité, ou joue mieux, car ni la nature de l'âme ni la disposition des organes humains auxquelles six cents [mille] causes occultes concourent ne nous sont pas assez bien connus. Aussi nous faisons cela a posteriori par une analogie tirée des jeux que seul le sort gouverne : en effet, de même que dans ces jeux, on dit que l'un joue avec un sort deux fois, trois fois plus favorable que l'autre parce qu'il a deux, trois cas pour gagner, un pour perdre, et qu'ainsi il peut gagner deux ou trois fois plus fort que l'autre joueur, celui qui gagne deux fois, trois fois plus qu'il ne perd, les deux ayant bien sûr la même [fortune] chance, si de ceci le jeu dépend en partie : en effet, c'est ainsi que je dis alors que celui-là est supposé avoir deux vivacités de l'esprit ou deux agilités comme autant de cas ou de causes par lesquelles il peut gagner des parties quand l'autre n'en a qu'une seule : par exemple celui-là joue aux échecs avec deux fois plus d'ingéniosité qui gagne cent fois quand l'autre ne gagne que cinquante fois. Avec ceci posé pour le jeu de Paume (que je suppose connu du lecteur) :

N.B. Il est préférable d'avoir observé plus souvent que moins parce que le danger est moindre de s'éloigner de la véritable proportion.

De ludo palmarum

In ludis, reliquisque actionibus humanis, quæ dependent vel ab arte & ingenio, ut ludus latrunculorum; vel ab agilitate corporis, ut ludus palmarum: vel in ludis mixtis, qui ab arte & sorte reguntur, qualis est ludus aleæ & plerique chartarum ludi, nequit determinari à priori quot gradibus alter altero ingenio, industriâ, vel agilitate præstet meliusve ludat, cum nec mentis naturam nec organorum humanorum constructionem, ad quam sexcentæ causæ occultæ concurrunt, satis perspectam habeamus. Quare id faciemus à posteriori per analogiam petitam à ludis, quos sola sors gubernat: sicut enim in istis ludis duplò, triplò faventiore sorte quis altero ludere dicitur, cum duos, tres habet casus ad lucrandum, unum ad perdendum, adeoque toties bis vel ter lucrari potest, quoties alter semel: ita quoque duplò, triplò præstantior quis altero collusor nobis dicetur, qui duplò, triplò pluries vincit, quam perdit, utentes sc. pari fortunâ, si et ab hâc ex parte dependeat ludus: sic enim duas ut ita dicam, ingenii acies, duasve agilitatis quot totidem casus vel causas, quibus vincere potest partes habere is sumitur, ubi alter unam tantum; ex. gr. ille duplò ingeniosius latrunculorum ludum ludit, qui centies vincit, cum alter tantum quinquagies*).

*) NB.[1]) satius est pluries observasse, quam rarius, quia minus aberrandi à verâ proportiones periculum est.

His positis in ludo palmarum (cujus cognitionem in lectore suppono):

I. Si les deux joueurs sont d'une égale force, & à deux, ou trente un, ou quinze un, il est évident, qu'il n'y a plus d'apparence de gagner deux coups de suite, & de faire ainsi le jeu, ni pour *A*., ni pour *B*. c'est pourquoy le sort de chacun est estimé $^1/_2$ jeu.

ANNEXE 2
Extrait de Meditationes, supplément aux p. 106-116

Je peux d'autant moins m'éloigner de la vraie proportion que j'observe plus souvent plutôt que plus rarement.

Par exemple : si autant de cas sont pour moi que contre moi, il doit se produire un rapport d'égalité dans le nombre des jeux où je gagne et où gagne mon adversaire ; on pose un rapport qui ne diffère guère du rapport d'égalité, par exemple 2 à 1 ; je dis que la probabilité que le rapport des jeux s'écarte davantage du rapport d'égalité est plus petite avec 6 jeux qu'avec 3 et encore plus petite avec 9 ou 12 et au contraire que la probabilité est plus grande d'être entre trois termes si nous jouons plus [de jeux] que moins. Voici le calcul :

Avec 3	jeux joués, pour que je gagne jeux	3	2	1	0										
	les cas sont	1	3	3	1	= somme des cas 8									
6	jeux	6	5	4	3	2	1	0							
	cas	1	6	15	20	15	6	1	= 64						
9	jeux	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0				
	cas	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	= 512			
12	jeux	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	
	cas	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1	= 4096

C'est pourquoi, pour que je gagne plus de 2/3 ou moins de 1/3 [des parties] de tous les jeux, si on a joué

3	jeux les probabilités sont	1/8
6		7/64
9		46/512
12		299/4096

Il est vrai que 1/8 > 7/64 > 46/512 > 299/4096 ce qui se poursuit ainsi de suite. Bien plus, il est utile et plaisant d'observer qu'il se produit qu'on parvient en augmentant le nombre de jeux à une probabilité plus petite que n'importe laquelle donnée puisque le rapport de chacun au suivant est plus grand que le rapport de 8 à 7 de telle sorte que je peux tant en observer que je peux certainement conclure à peu près à une égale probabilité comme si je les avais eues a priori.

Question : combien d'observations faut-il faire pour qu'il soit 100.000 fois ["mal" en allemand] plus probable que le rapport des jeux que je gagne à ceux que je perds soit plus près du rapport d'égalité que 101 à 99.

Suprà ad pag. 104 & 106.

Minùs à verâ proportione aberrare possum, si sæpiùs quam si variùs oberservem. 171.

Ex. gr. Si tot sint casûs pro me, quot contrà me, prodire debet ratio æqualitatis in numero ludorum quos ego & quos adversarius vincit, ponatur ratio quæ à ratione æqualitatis parum differat, putà 2 ad 1, dico minorem esse probabilitatem ut ludorum ratio ab æqualitatis ratione magis recedat, cùm 6 ludos ludimus quam cùm tres, & adhuc minorem cùm 9 aut 12 etc. & contrà majorem esse probabilitatem ut intrà tres terminos contineatur cùm plures ludimus quam cùm pauciores. En calculum:

Cum luduntur ludi 3,	ut vincam ludos	3,	2,	1,	0										
	casûs sunt	1,	3,	3,	1	= summa casuum 8									
6	ludos	6,	5,	4,	3,	2,	1,	0							
	casûs	1,	6,	15,	20,	15,	6,	1	= 64						
9	ludos	9,	8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1,	0				
		1,	9,	36,	84,	126,	126,	84,	36,	9,	1	= 512			
12	ludos	12,	11,	10,	9,	8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1,	0	
	casûs	1,	12,	66,	220,	495,	792,	924,	792,	495,	220,	66,	12,	1	= 4096

Quare ut plus quam 2/3 partes aut minùs quam 1/3 partem omnium ludorum vincam, cum luduntur ludi 3 probabilitates sunt 1/8

6 .... 7/64

9 .... 46/512

12 .... 299/4096

Est verò 1/8 > 7/64 > 46/512 > 299/4096 quare constat &c.

Imò quod utile & jucundum observare est, fit ut augendo numerum ludorum perveniatur ad probabilitatem datâ quâlibet minorem, quoniam ratio singularum ad proximè sequentem maior est ratione 8 ad 7. adeò ut toties observare possim, ut ferè æquè certò probabilitate concludam ac si illas à priori haberem. Quæstio. quot observationes faciendæ, ut 100000 mal probabilius sit, ut ratio ludorum, quos vinco, ad illos, quos perdo, magis accedat ad rationem æqualitatis, quam 101 ad 99.