TROIS DEMONSTRATIONS POUR UN THEOREME ELEMENTAIRE DE GEOMETRIE SENS DE LA DEMONSTRATION ET OBJET DE LA GEOMETRIE

Evelyne BARBIN

Nous trouvons dans l'histoire des mathématiques un bon nombre de démonstrations d'un théorème élémentaire de géométrie, à savoir que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits. Nous nous proposons d'étudier trois de ces démonstrations : celle des Eléments d'Euclide (IIIème siècle avant J.C.), celle des Eléments de géométrie de Clairaut (1765) et celle des Fondements de la géométrie d'Hilbert (1899). Ces trois démonstrations ont la particularité de reposer sur le même argument, tout en appartenant à des corpus où les objets de la géométrie n'ont pas le même statut, et où l'objet du savoir géométrique n'est pas le même.

Cette étude s'intéresse à la signification des démonstrations proposées. Elle tente de saisir le sens d'une démonstration dans le processus de construction d'un certain savoir. Elle cherche à analyser la manière dont s'opèrent simultanément la construction d'un concept -ici celui d'angle-, et l'élaboration de démonstrations qui tout à la fois utilisent le concept considéré et lui donnent sens.

Une géométrie des figures

La géométrie des Eléments d'Euclide est une géométrie des figures. Le Livre I de cet ouvrage donne les définitions des objets étudiés : point, ligne, droite, angle, cercle, triangle, quadrilatère. Les figures planes sont envisagées selon deux aspects : la forme et la grandeur. D'une part, un angle peut être obtus ou aigu, un triangle peut être isocèle, équilatéral ou scalène[1], un quadrilatère peut être carré, rectangle ou rhombe, etc.. D'autre part, les notions communes du Livre I donnent les axiomes permettant de comparer deux grandeurs. L'une de ces notions stipule que "les grandeurs qui s'adaptent entre elles, sont égales entre elles". Les grandeurs peuvent s'ajouter, se retrancher, se comparer et être mises en rapport. Les Eléments d'Euclide proposent une géométrisation des grandeurs : la sommation de deux grandeurs, segments, aires ou angles, s'obtient de façon implicite, par juxtaposition des grandeurs (fig.1).

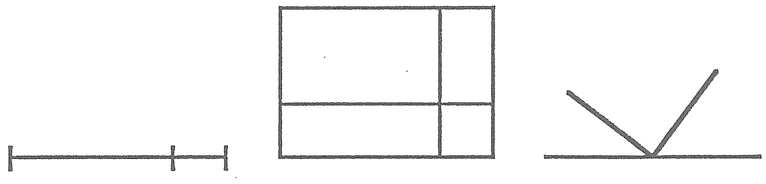

fig.1

[1] un triangle scalène a ses trois côtés inégaux

Forme et grandeur sont les deux paramètres selon lesquels peuvent s'effectuer les comparaisons entre deux figures. Si on change la grandeur en gardant la forme, on obtient, par exemple, un problème de duplication ou l'un des nombreux problèmes de similitude du traité euclidien. Si on change la forme en gardant la grandeur, on obtient, par exemple, un problème de quadrature. Les mesures des grandeurs géométriques se ramènent donc à des mises en rapport entre deux grandeurs homogènes - dont l'une peut être plus accessible que l'autre - et non pas à des énoncés de formules. Ainsi, Euclide démontre que les surfaces de deux cercles sont dans le rapport des surfaces des carrés ayant pour côtés les diamètres de ces deux cercles[1] et ne donne pas une formule permettant de calculer la surface du cercle à partir du carré du rayon de ce cercle. Quant à Archimède, il démontre que la surface d'un cercle est égale à celle d'un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont égaux au rayon et à la circonférence du cercle.

La géométrie d'Euclide est une science selon la conception exposée par Aristote : "Nous estimons posséder la science d'une chose d'une manière absolue, et non pas, à la façon des Sophistes, d'une manière purement accidentelle, quand nous croyons que nous connaissons la cause par laquelle la chose est, et que nous savons que cette cause est celle de la chose, et qu'en outre il n'est pas possible que la chose soit autre qu'elle n'est. (...) Mais ce que nous appelons ici savoir c'est connaître par le moyen de la démonstration"[2]. Objets de démonstration, les objets de la géométrie doivent être "idéaux"[3]. D'une part, ils n'appartiennent pas au monde sensible, car il n'y a pas de science par la sensation : "Même s'il était possible de percevoir que le triangle a ses angles égaux à deux droits, nous en chercherions encore une démonstration, et nous n'en aurions pas une connaissance scientifique : car la sensation porte nécessairement sur l'individuel, tandis que la science consiste dans la connaissance universelle"[4]. D'autre part, puisque la science diffère de l'opinion, les objets de la géométrie doivent posséder un caractère objectif qui leur assure universalité et stabilité : " La science et son objet diffèrent de l'opinion, en ce que la science est universelle et procède par des propositions nécessaires, et que le nécessaire ne peut pas être autrement qu'il n'est"[5]. Les définitions des figures du Livre I des Eléments sont celles d'objets idéaux, parfaits et purement intelligibles. Par exemple, le point est "ce dont la partie est nulle"[6] et une ligne est "une longueur sans largeur".

La géométrie d'Euclide est une science démonstrative au sens d'Aristote. Cela signifie que chacun des livres des Eléments est constitué de définitions, puis d'axiomes - les demandes et les notions communes- et enfin de propositions et de corollaires obtenus par déduction à partir des axiomes et des résultats précédents. La démonstration qui nous intéresse est celle de la proposition XXXII du Livre I qui énonce que "ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés; et les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits". Il s'agit, en respectant l'esprit de la géométrie grecque, de comparer deux grandeurs : l'une obtenue en juxtaposant les trois angles d'un triangle et l'autre obtenue en juxtaposant deux angles droits. Cette proposition apparaît assez loin dans le livre I : nous reviendrons sur cette remarque. Elle est précédée par la proposition XVI qui énonce que "ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés". Ces deux propositions concernent deux objets, angle et triangle,

---

[1] EUCLIDE, Les Eléments, Livre XII, Proposition II

[2] ARISTOTE, Organon, Seconds analytiques, I.2

[3] Sur la constitution des objets mathématiques en objets idéaux, lire CAVEING, La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque, tome II

[4] ARISTOTE, op. cit., I.31

[5] ARISTOTE, op. cit., I.33

[6] Nous utilisons dans cet article la traduction des Eléments de Peyrard

dont la compréhension nécessite un aller-retour continuel entre l'un et l'autre, une dialectique qui fait l'objet de plusieurs propositions du Livre I et dont la proposition XXXII semble le point d'aboutissement.

Euclide : angle, triangle et angle engagé dans un triangle

La définition de l'angle plan est donnée immédiatement après celles du point, de la ligne, de la droite et d'une surface. Euclide écrit : "un angle plan est l'inclinaison mutuelle de deux lignes qui se touchent dans un plan, et qui ne sont point placées dans la même direction". Ainsi, Euclide envisage qu'un angle puisse être "l'inclinaison" entre deux lignes qui ne sont pas des droites, c'est à dire qu'un angle puisse être curviligne. Dans le Livre III, Euclide considère effectivement l'angle compris entre un cercle et la tangente en un point de ce cercle. L'angle rectiligne est défini comme le cas particulier où "les lignes, qui comprennent le dit angle, sont des droites".

Pour Euclide, l'angle n'est pas clairement une figure. En effet, il donne plus loin comme définition de la figure, "ce qui est compris par une seule ou par plusieurs limites", en ayant défini auparavant par limite "ce qui est extrémité de quelque chose". La première figure définie est le cercle qui est compris par une seule ligne, puis le demi-cercle qui est compris entre deux lignes. La première figure rectiligne -c'est à dire terminée par des droites- définie par Euclide est le triangle "terminé par trois droites". Le 6ème postulat énonce que "deux droites ne renferment point un espace". Par conséquent, l'angle rectiligne n'est pas une figure fermée. Ceci va être rapidement cause de difficulté.

La définition d'un angle comme "inclinaison mutuelle" correspond à ce qu' Aristote attend des définitions : "les définitions requièrent seule-ment d'être comprises"[1]. Elle peut évoquer les travaux des premiers géomètres grecs, les Ioniens ou Hippocrate de Chios, qui isolèrent la notion d'angle à partir de leurs préoccupations de navigateurs et d'astronomes[2]. L'angle d'Euclide peut alors être compris comme l'inclinaison entre deux rayons visuels, inclinaison qui est une indication déterminante pour les problèmes de navigation. Cependant, il est difficile d'imaginer comment une telle définition puisse être opératoire, c'est à dire intervenir effectivement comme instrument dans des démonstrations. De fait, cette définition n'est pas opératoire dans les Eléments d'Euclide, mais disons tout de suite qu'elle l'est dans les Eléments de géométrie de Clairaut. Si nous voulons appréhender pleinement la signification du concept d'angle euclidien, c'est à dire savoir comment il intervient dans un raisonnement, il nous faut entrer dans le détail même des démonstrations où ce concept intervient. Ce qui se dégage alors aussitôt est un concept plus restreint, celui que nous appellerons "l'angle engagé dans un triangle".

Comme nous l'avons noté plus haut, le fait d'avoir une figure non close est source de difficulté. En effet, on a besoin de considérer l'aspect grandeur de l'angle et d' opérer des comparaisons entre deux angles. Comment envisager une grandeur qui puisse occuper un espace infini et comment comparer deux telles grandeurs? Au début du XIXème siècle, Lacroix note très justement la difficulté : "Parmi les définitions qu'il convient de donner en ce moment, celle de l'angle mérite la plus grande attention; on en trouve une très vicieuse dans Euclide, et il paraît très difficile d'en donner une qui soit parfaitement exacte. En effet, si l'on dit que l'angle est la rencontre de deux lignes, on emploie une expression qui ne rappelle que l'idée de sommet; en définissant l'angle par l'inclinaison de ces lignes on fait un pléonasme: enfin si l'on entend le mot angle de l'espace renfermé entre deux droites qui se coupent, où faudra-t-il arrêter cet espace?". La solution proposée par Lacroix est la suivante : "Mais est-il indispensable de définir l'angle? Ne suffit-il pas de le montrer, et d'observer ensuite que deux angles sont égaux

---

[1] ARISTOTE, op. cit., I.10

[2] CAVEING,ibid

lorsqu'étant posés l'un sur l'autre, leurs côtés coïncident chacun dans deux points, et qu'alors ils ne cesseront point de coïncider, quelque loin qu'on les prolonge? Il suit évidemment de là que la grandeur d'un angle ne dépend pas de la longueur de ses côtés"[1]. Cette solution fait explicitement référence à une perception de l'angle et elle suppose que l'imagination parcourt des droites infinies, elle ne satisfait donc pas aux préceptes aristotéliciens qui sont aussi les normes euclidiennes.

Euclide résout le problème en fermant l'angle et en raisonnant sur des angles engagés dans des triangles. Supposons que l'on veuille comparer deux angles de sommets A et D , il suffit de prendre sur deux des côtés de chacun des angles deux segments égaux AB et DE, de prendre sur les deux autres côtés deux autres segments égaux AC et DF, et de comparer les deux segments BC et EF (fig.2). Si les deux angles sont égaux, alors BC égale EF : cette proposition fait l'objet de l'une des premières propositions d'Euclide, la proposition IV, dont l'énoncé précise que les deux triangles ABC et DEF sont aussi égaux. Cette démonstration utilise la superposition des deux triangles : les deux figures "s'adaptent entre elles".

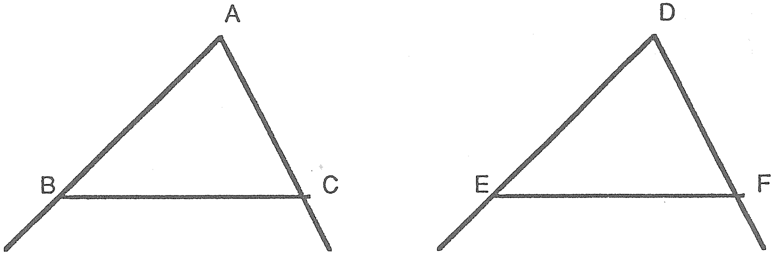

fig.2

Cette proposition constitue d'une certaine façon la définition de la grandeur angle, définition opératoire qui intervient dans les démons-trations suivantes. Euclide a besoin de la proposition inverse de la proposition IV. C'est l'objet de la proposition VIII qui énonce que "si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et s'ils ont la base égale à la base, les angles compris par les côtés égaux seront égaux". Ici, Euclide ne précise pas que les triangles seront égaux, ce qui peut renforcer l'idée que les propositions IV et VIII constituent tout autant un cadre pour comprendre ce qu'est l'égalité de deux angles que des énoncés de cas d'égalité des triangles.

Au XVIème siècle, Jacques Peletier du Mans écrit des Eléments géométriques d'Euclide où il commente et critique le traité grec. Jacques Peletier s'intéresse particulièrement à la nature de l'angle compris entre un cercle et l'une de ses tangentes, ce qui l'amène à une réflexion très poussée sur la définition de l'angle donnée par Euclide. A cette définition qualifiée de vulgaire, il préfère celle-ci jugée plus simple : "l'angle plan c'est la section de deux lignes en un plan". Avec la définition de l'angle rectiligne, il précise qu'il considère l'angle comme une quantité, c'est à dire comme une grandeur : "quelques uns ont débattu, si l'angle était quantité ou qualité : car en tant que l'angle est égal ou inégal, ils veulent qu'il soit quantité : mais en tant qu'il est droit, obtus ou aigu, ils veulent qu'il soit qualité. Mais moi j'estime entièrement que l'angle se doit considérer comme quantité". Aussi, est-il amené à limiter l'angle par une portion de cercle en

1 LACROIX, Eléments de géométrie, Discours préliminaire, p.xvij

remarquant que "le cercle est le principal enseigneur des angles : car leur quantité se prend selon les portions de la circonférence"[1].

Jacques Peletier critique sévèrement le principe de superposition utilisé par Euclide dans la démonstration de la proposition IV . Il écrit : "Ceci est la vulgaire démonstration de tous les interprètes, si toutefois on la peut appeler démonstration. Car si la superposition des lignes et des figures était reçue pour preuve, toute la géométrie serait farcie de telles applications; et à grande peine se rencontrerait-il une proposition, laquelle ne se prouvât en cette manière". Il poursuit en attribuant à cette proposition le rôle d'une définition : " On peut selon mon jugement, aller au devant de cette objection par ce moyen, à savoir en disant, que ce théorème est de soi si clair qu'il n'a besoin d'aucune preuve : ainsi le faut-il tenir au rang des définitions. Car quand nous commençons à discourir de quelque chose, cette chose là nous entre tacitement au cerveau par la définition. Ainsi ne penserai-je pas que deux angles sont égaux, si je ne conçois ce qu'est l'égalité d'angles. A quoi regardant Euclide, il a voulu proposer l'égalité des angles, et par même moyen la définir, afin que nous eussions ce théorème pour une définition. Car nul ne saurait expliquer plus facilement l'égalité des angles, que s'il disait que deux angles sont égaux, quand les deux côtés qui contiennent un angle, sont égaux aux deux côtés qui en contiennent un autre : et que les bases qui lient les côtés, sont égales"[2]

Les propositions XVI et XXXII d'Euclide

Avant d'aborder la proposition XVI qui énonce que "ayant prolongé un côté d'un triangle quelconque, l'angle extérieur est plus grand que chacun des angles intérieurs et opposés", Euclide démontre deux résultats fondamentaux concernant les angles. La définition de l'angle droit donnée au Livre I est la suivante : "Lorsque une droite tombant sur une droite fait deux angles de suite égaux entre eux, chacun des angles égaux est droit; et la droite placée au dessus est dite perpendiculaire à celle à laquelle elle est placée". Euclide démontre dans la proposition XIII que "si une droite placée sur une droite fait des angles, elle fera ou deux angles droits, ou deux angles égaux à deux droits". Lorsque les deux angles ABD et ABC ne sont pas droits, il construit la perpendiculaire EB à DC et utilise les notions communes sur les grandeurs (fig.3). Cette proposition lui permet de montrer la proposition XV qui énonce que "si deux droites se coupent mutuellement, elles font les angles au sommet égaux entre eux" (fig.4). La définition de l'angle comme inclinaison de deux lignes pourrait permettre de s'abstenir d'une telle démonstration. Euclide n'en fait rien, ce qui indique à nouveau le caractère particulier de la définition euclidiennne.

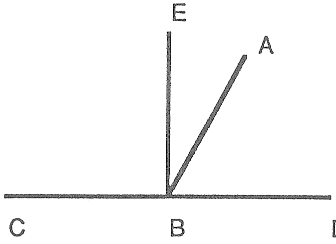

fig.3

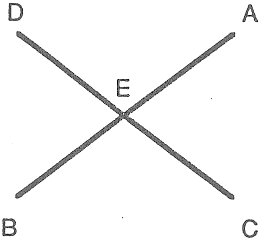

fig.4

[1] PELETIER DU MANS, Eléments géométriques d'Euclide, p.10

[2] PELETIER DU MANS, op. cit., p.34-35

La proposition XVI nécessite de comparer l'angle ACD avec chacun des angles BAC et ABC (fig.5). Pour cela, Euclide va construire à l'intérieur de l'angle ACD un angle ACZ égal à BAC. Cette construction utilise l'approche mutuelle angle-côté dans la figure triangulaire, c'est à dire la configuration de l'angle engagé dans un triangle. En effet, Euclide prend le point E de AC tel que AE égale EC et le point Z de BE tel que EZ égale BE. D'après la proposition XV, les angles AEB et CEZ sont égaux, ce qui signifie, d'après la proposition IV, l'égalité des triangles AEB et CEZ et celle des angles BAE et ECZ. Pour terminer la démonstration, il reste à affirmer que l'angle ACD est plus grand que l'angle ACZ. Ce qu' Euclide fait sans justification, car la figure géométrique montre bien que le point Z est à l'intérieur de l'angle ACD. Cette démonstration, comme d'autres démonstrations euclidiennes où il est besoin de s'appuyer sur un aspect topologique de la situation géométrique, s'appuie sur une lecture raisonnée du dessin[1]. Ceci distingue nettement, comme nous le verrons, la géométrie d'Euclide de celle d'Hilbert.

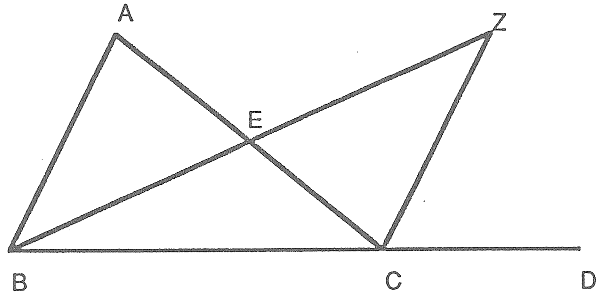

fig.5

Dans la proposition XVII, Euclide démontre que "deux angles d'un triangle quelconque, de quelque manière qu'il soient pris sont moindres que deux droits". Ainsi, la proposition XXXII est un prolongement des propositions XVI et XVII et constitue l'achèvement de la problématique angle-triangle, puisqu' elle énonce que l'angle extérieur est égal aux deux angles intérieurs et opposés et que les trois angles intérieurs du triangle sont égaux à deux droits. Cette proposition est séparée des précédentes par de nombreux résultats, car sa démonstration nécessite un autre argument que le triangle pour comparer des angles, à savoir la situation d'une droite coupant des parallèles.

La définition de deux droites parallèles est la dernière définition donnée par Euclide : "les parallèles sont des droites, qui, étant situées dans un même plan, et étant prolongées à l'infini de part et d'autre, ne se rencontrent ni d'un côté ni de l'autre". Le fameux axiome d'Euclide constitue la cinquième demande, il est énoncé sous la forme suivante : "si une droite, tombant sur deux droites, fait les angles intérieurs du même côté plus petits que deux droits, ces droites, prolongées à l'infini, se rencontreront du côté où les angles sont plus petits que deux droits" (fig.6). Le Livre I des Eléments est constitué de telle sorte que cet axiome est utilisé seulement à partir de la proposition XXIX et dans quasiment toutes les démonstrations suivantes du Livre I[2]. On peut aussi remarquer qu'à partir de la proposition XXVII apparaît une autre configuration où il est possible de comparer des angles, celle de deux droites parallèles coupées par une sécante. Les propositions XXVII, XXVIII et XXIX définissent les rapports mutuels entre parallélisme

---

1 sur cet aspect de la démonstration euclidienne, lire BKOUCHE, De la démonstration

2 sur cette remarque lire CHABERT, Les géométries non euclidiennes

et égalité d'angles. Ainsi, cette dernière proposition énonce qu' "une droite qui tombe sur deux droites parallèles, fait les angles alternes égaux entre eux, l'angle extérieur, égal à l'angle intérieur opposé et placé du même côté, et les angles intérieurs placés du même côté, égaux à deux droits" (fig.7). Le livre I est donc bâti de telle sorte que l'on sache ce que l'on est capable de démontrer en utilisant uniquement la configuration de l'angle engagé dans un triangle, et ce que l'on peut démontrer si l'on ajoute la configuration angle-parallèles.

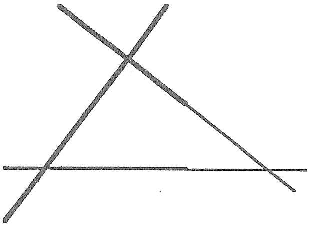

fig.6

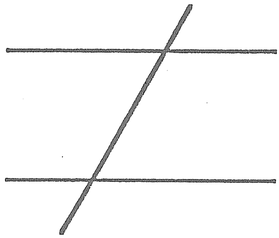

fig.7

L'introduction d'une parallèle dans la démonstration de la proposition XXXII permet de mettre côte à côte trois angles dont la somme est égale à deux angles droits, et dont la proposition XXIX peut nous assurer qu'ils sont égaux aux trois angles du triangle. En effet, Euclide mène la parallèle CE au côté AB du triangle ABC (fig.8), en appliquant la configuration angles-parallèles aux droites AB et EC coupées par BC il obtient que les angles ABC et ACE sont égaux, et en appliquant cette même configuration aux droites AB et CE coupées par AC il obtient que les angles BAC et ACE sont égaux. L'introduction de la droite CE paraît tout à fait naturelle en cette partie du Livre I, entièrement consacrée aux propriétés des parallèles et à la configuration angle-parallèles.

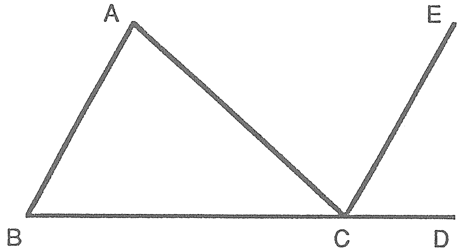

fig.8

La proposition XXXII correspond à un nouvel aspect de l'angle et apporte une nouvelle compréhension des rapports qu'entretiennent l'angle et le triangle. Si on essaie de se demander ce qu'est un angle à trois moments différents du Livre I - après la définition, dans les raisonnements des propositions IV à XVI et dans les raisonnements des propositions XVII à XXXII -, nous avons trois approches du "phénomène"[1] angle différentes. La signification du concept angle se construit donc au fur et à mesure, à

---

[1] pour une approche phénoménologique des concepts mathématiques, on pourra se reporter à l'ouvrage de FREUNDENTHAL, Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel Publishing Company, 1983

travers les situations, les problèmes et les démonstrations où ce concept intervient. Par ailleurs, dans la géométrie d'Euclide, la signification de l'objet géométrique - la figure- est liée aux configurations spatiales dans lesquelles il peut intervenir et être mis en relation avec d'autres objets pour établir des démonstrations.

La configuration "angle engagé dans un triangle" permet de comparer deux angles, c'est à dire, d'affirmer qu'ils sont égaux ou que l'un est inférieur à l'autre. Elle ne permet pas d'effectuer une mise en rapport des deux angles, c'est à dire, de mesurer des angles "considérés comme quantités" pour reprendre l'expression de Jacques Peletier du Mans. Au XVIIème siècle, les Nouveaux éléments de géométrie d'Arnauld donne un exposé systématique des différentes façon de concevoir et de mesurer la grandeur angle.

Les quatre manières de mesurer l'angle d'Arnauld

Arnauld et Nicole, jansénistes et amis de Pascal, ont écrit en 1674 La logique ou l'art de penser. Dans cet ouvrage, ils énumèrent les défauts qui se rencontrent d'ordinaire dans la méthode des géomètres et qu'ils trouvent à la lecture même des Eléments d'Euclide[1]. Le traité de géométrie d'Arnauld, écrit en 1667, est donc intéressant à lire à la lumière de ces critiques. Le titre complet de cet ouvrage indique les points sur lesquels Arnauld estime avoir apporté, vis à vis du traité euclidien, des nouveautés et des améliorations : "Nouveaux éléments de géométrie, contenant, outre un ordre tout nouveau, et de nouvelles démonstrations des propositions les plus communes, de nouveaux moyens de faire voir quelles lignes sont incommensurables, de nouvelles mesures des angles dont on ne s'était point encore avisé, et de nouvelles manières de trouver et de démontrer la proportion des lignes". La mesure de l'angle est traitée dans le Livre VIII, alors qu'Arnauld a déjà étudié les lignes parallèles, les circonférences, les arcs et les lignes circulaires parallèles :"Après avoir parlé des lignes, c'est suivre l'ordre de la nature que de passer aux angles qui sont plus composés que les lignes tenant quelque chose des surfaces"[2].

La définition de l'angle est la suivante : "L'angle rectiligne est une surface comprise entre deux lignes droites qui se joignent en un point du côté où elles s'approchent le plus, indéfinie et indéterminée selon l'une de ses dimensions, qui est celle qui répond à la longueur des lignes qui la comprennent, et déterminée selon l'autre par la partie proportionnelle d'une circonférence dont le centre est au point où ces lignes se joignent". Ainsi, Arnauld définit l'angle dans une configuration angle-cercle où le sommet de l'angle coïncide avec le centre du cercle (fig.9). Pour que cette définition soit univoque, Arnauld affirme dans la "proposition fondamentale de la mesure des angles" que les arcs de toutes les circonférences qui ont pour centre le sommet de l'angle ont tous la même proportion à leurs circonférences, et par conséquent déterminent la même grandeur de l'angle.

---

[1] sur ces critiques voir BARBIN, La démonstration mathématique : significations épistémologi-ques et questions didactiques

[2] ARNAULD, Nouveaux éléments de géométrie, p.142

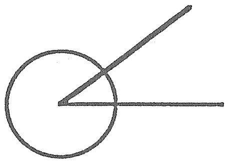

fig.9

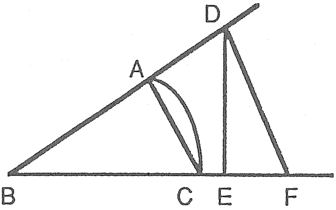

fig.10

Arnauld définit quatre mesures de l'angle : l'arc AC, la corde AC, le sinus DE et la base DF (fig.10). Pour chacune de ces grandeurs, il démontre le théorème qui permet de justifier que cette grandeur puisse légitimement définir une mesure de l'angle, et il indique les problèmes que cette conception de la mesure de l'angle peut permettre de résoudre. Après avoir défini la mesure sinus et avant de passer à la mesure base, Arnauld donne un autre moyen de comparer les grandeurs des angles dans une partie consacrée aux "angles faits par les lignes entre parallèles". En effet, l'oblique BC permet de mesurer l'angle BCX, car toute oblique entre deux parallèles fait des angles alternes égaux, et deux obliques entre deux parallèles sont égales si et seulement si elles font des angles égaux (fig.11).

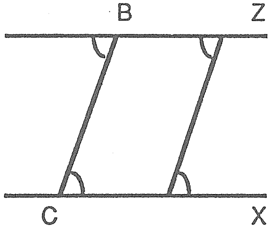

fig.11

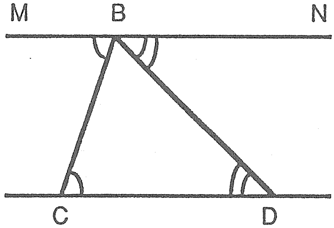

fig.12

Le théorème sur la somme des angles d'un triangle prend la forme d'une propriété de l'angle : "tout angle plus les deux angles que font ses côtés sur la base sont égaux à deux droits"[1]. Si BC et BD sont les côtés d'un angle et CD la base de cet angle, Arnauld mène la parallèle MN à CD et conclut en appliquant les résultats sur les angles et les obliques (fig.12).

Arnauld considère que l'arc est la seule mesure "vraie et naturelle" de l'angle. Cependant, la connaissance de la longueur des lignes courbes est un problème difficile pour un géomètre du XVIIème siècle, et Arnauld explique que l'on est donc "obligé d'avoir recours à d'autres mesures". Parmi ces autres mesures, la base lui paraît "la plus imparfaite" car la comparaison de deux angles nécessite la construction de deux triangles. Il explique sa préférence pour la mesure arc à la fin du chapitre consacré aux angles : "il n'y a que l'arc qui donne la véritable proportion entre les angles inégaux"[2]. Par exemple, si un arc est triple d'un second arc, l'angle correspondant au premier arc sera également triple de l'angle correspondant au second arc, et on ne peut pas énoncer des propriétés similaires pour les trois autres mesures. Ainsi, les cordes ne sont pas proportionnelles à

---

[1] ARNAULD, op. cit., p.154
[2] ARNAULD, op.cit., p.157

leurs arcs, "d'où vient la difficulté de la trissection de l'angle" comme le note Arnauld. Cette explication nous permet également de comprendre la raison de la définition de l'angle adoptée par Arnauld. Pour reprendre l'expression de Jacques Peletier du Mans, l'arc est le meilleur "enseigneur" de l'angle en tant que grandeur, car il permet d'établir des proportions entre des angles.

La démarche d'Arnauld, dans ce chapitre sur les angles, doit être mise en parallèle avec les conceptions de La logique ou l'art de penser. Dans cet ouvrage, le principal défaut qu'Arnauld et Nicole attribuent à la "méthode des géomètres" -c'est à dire à la manière d'Euclide et de ses commentateurs- est "d'avoir plus de soin de la certitude que de l'évidence, et de convaincre l'esprit que de l'éclairer"[1]. Ils estiment que l'on possède la vraie science -la science parfaite d'une vérité-, lorsque l'on "pénètre par des raisons prises de la nature de la chose même pourquoi cela est vrai". Ils introduisent ainsi une exigence absente des préceptes aristotéliciens : la démonstration doit éclairer l'esprit, elle doit apporter l'évidence et la clarté. Cette exigence condamne les démonstrations qui n'ont pas besoin de preuves, les démonstrations par l'absurde,et les démonstrations tirées par des voies trop éloignées. Par contre, cette exigence réclame une mise en ordre et un dénombrement méthodique des connaissances qui sont absents du traité euclidien. Arnauld justifie ses Nouveaux éléments de géométrie en écrivant dans la préface de l'ouvrage : "Ce qui lui a donc fait croire (à Arnauld) qu'il était utile de donner une nouvelle forme à cette science (à la géométrie) est, qu'étant persuadé que c'était une chose fort avantageuse de s'accoutumer à réduire ses pensées à un ordre naturel, cet ordre étant comme une lumière qui les éclaircit toutes les unes par les autres, il a toujours eu quelque peine de ce que les Eléments d'Euclide étaient tellement confus et embrouillés, que bien loin de pouvoir donner à l'esprit l'idée et le goût du véritable ordre, ils ne pouvaient au contraire que l'accoutumer au désordre et à la confusion".

Comme nous l'avons vu, le chapitre sur les angles constitue une véritable mise en ordre des conceptions de l'angle, chacune de ces conceptions étant suivie des résultats que l'on peut "naturellement" en tirer "sans recourir à des voies étrangères". La volonté d'éclairer le lecteur anime également l'auteur d'un ouvrage de géométrie écrit un siècle plus tard, il s'agit de Clairaut dans ses Eléments de géométrie de 1765.

Clairaut : une géométrie problématisée

Dans la préface de son ouvrage, Clairaut indique qu'il a voulu écrire un traité qui "réunisse les deux avantages d'intéresser et d'éclairer les commençants". Il estime que les difficultés éprouvées par ces derniers proviennent de la manière même dont la géométrie est enseignée dans les "Eléments ordinaires" : "On y débute toujours par un grand nombre de définitions, de demandes, d'axiomes, et de principes préliminaires, qui semblent ne promettre rien que de sec au lecteur. Les propositions qui viennent ensuite ne fixant point l'esprit sur des choses plus intéressantes, et étant d'ailleurs difficiles à concevoir, il arrive communément que les commençants se fatiguent et se rebutent, avant que d'avoir aucune idée distincte de ce qu'on voulait leur enseigner". Il constate également que le recours à des applications pratiques atténue la sécheresse du sujet et prouve l'utilité de la géométrie, mais ne résout pas les difficultés rencontrées par les débutants.

La démarche adoptée par Clairaut pour atteindre les deux objectifs, intéresser et éclairer le lecteur, serait qualifiée aujourd'hui d'épisté-mologique : il recherche dans l'histoire l'origine de la géométrie et il étudie la façon dont cette science s'est "formée par degrés". Cette épistémologie que nous dirions aussi historique et génétique le conduit à écrire une géométrie problématisée, c'est à dire une géométrie dans laquelle les savoirs et

---

[1] ARNAULD & NICOLE, La logique ou l'art de penser, p.326

les concepts sont introduits pour résoudre des problèmes. Les problèmes proposés par Clairaut s'organisent autour d'une même problématique, celle de la mesure des terrains : "La mesure des terrains m'a paru ce qu'il y avait de plus propre à faire naître les premières propositions de géométrie; et c'est, en effet, l'origine de cette science, puisque géométrie signifie mesure du terrain".

Puisqu'il s'agit, non d'éblouir ou de convaincre le lecteur, mais de l'éclairer, et aussi de l'intéresser, la forme euclidienne de la démons-tration ne peut convenir à l' ouvrage : "J'évite avec soin de donner aucune proposition sous la forme de théorèmes, où l'on démontre que telle vérité ou telle vérité est, sans faire voir comment on est parvenu à la découvrir". Jamais Euclide ne mentionne la manière dont il est parvenu à ses résultats: " Si les premiers auteurs de mathématiques ont présenté leurs découvertes en théorèmes, ç'a été, sans doute, pour donner un air plus merveilleux à leurs productions, ou pour éviter la peine de reprendre la suite des idées qui les avaient conduits dans leurs recherches". Tandis que Clairaut veut accoutumer l'esprit de son lecteur à chercher et à découvrir, et par conséquent, il lui paraît "plus à propos d'occuper continuellement ses lecteurs à résoudre des problèmes" : "En suivant cette voie, les Commencants aperçoivent, à chaque pas qu'on leur fait faire, la raison qui détermine l'inventeur; et par là ils peuvent acquérir plus facilement l'esprit d'invention".

L'esprit des démonstrations de Clairaut est bien différent de l'esprit euclidien, comme nous le verrons avec la démonstration qui concerne la somme des angles d'un triangle. Aussi, Clairaut prévient-il une objection qui pourrait lui être adressée : "On me reprochera peut-être, en quelques endroits de ces Eléments, de m'en rapporter trop au témoignage des yeux, et de ne m'attacher pas assez à l'exactitude rigoureuse des démonstrations". Il y répond, qu'en effet, il n'hésite pas à recourir au dessin lorsqu'il s'agit d'établir une proposition évidente, mais ceci parce que "tout raisonnement qui tombe sur ce que le bon sens seul décide d'avance, est aujourd'hui en pure perte , et n'est propre qu'à obscurcir la vérité, et à dégoûter les lecteurs". Certes, Euclide s'est donné la peine de démontrer des propositions qui n'en avaient pas besoin, mais il avait à convaincre des "Sophistes obstinés" et "à fermer la bouche à la chicane". Le problème de Clairaut n'est pas de convaincre un lecteur récalcitrant, mais d'intéresser un lecteur de bonne foi à une science jugée difficile.

Le traité de Clairaut a une vocation pédagogique. Cependant, cette constatation ne doit pas le faire ranger à l'écart des autres "Eléments de géométrie" parus aux XVIème, XVIIème et XVIIIème siècles. Tous ces ouvrages proposent une organisation des connaissances de la géométrie élémentaire, ce ne sont pas des exposés de recherche mais des traités d'enseignement. La seule particularité du traité de Clairaut est d'être un traité d'enseignement réussi, dont l'intérêt reste très actuel[1].

L'angle comme inclinaison

Le concept d'angle n'est introduit qu'à la page vingt neuf du traité de Clairaut. Contrairement à Euclide, qui donne au début de chacun des livres des Eléments une longue liste de définitions, Clairaut n'introduit les concepts qu'au fur et à mesure, au moment où ces concepts deviennent nécessaires à la résolution d'un problème. Ainsi, il définit dès la troisième page une ligne perpendiculaire à une autre. Cette définition intervient comme réponse à un problème de mesure : elle est nécessitée par le besoin de mesurer la distance d'un point à une ligne. "Un homme, par exemple placé en D sur le bord d'une rivière, se propose de savoir combien il y a du lieu où il est à l'autre bord AB. Il est clair que, dans ce cas, pour mesurer la différence cherchée, il faut prendre la plus courte de toutes les lignes droites DA, DB, etc., qu'on peut tirer du point D à la droite

---

1 lire BKOUCHE, La pédagogie de Clairaut et l'histoire de l'éducation.

AB. Or il est aisé de voir que cette ligne la plus courte dont on a besoin, est la ligne DC qu'on suppose ne pencher ni vers A, ni vers B. C'est donc sur cette ligne, à laquelle on a donné le nom de perpendiculaire, qu'il faut porter la mesure connue, pour avoir la distance DC, du point D, à la droite AB"[1] (fig.13). Clairaut donne donc comme définition d'une perpendiculaire à une ligne, "une ligne qui tombe sur une autre sans pencher sur elle d'aucun côté". Cette définition correspond à la situation dans laquelle Clairaut fait intervenir la notion de perpendicularité, mais cette définition est également opératoire dans les autres problèmes posés ensuite. Ainsi, il est nécessaire de savoir élever du point C d'une droite AB la perpendiculaire CD à AB (fig.14). Clairaut explique que si C est à égale distance de A et de B, puisque la droite CD ne penche d'aucun côté "il est clair que chacun des points de cette ligne sera également éloigné de A et de B". Ce qui lui permet de proposer la construction au compas de la perpendiculaire CD, construction qui permet de trouver D sans tâtonner, car "le tâtonnement ne satisfait pas l'esprit qui veut une méthode qui l'éclaire".

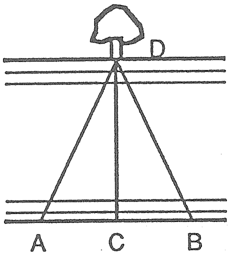

fig.13

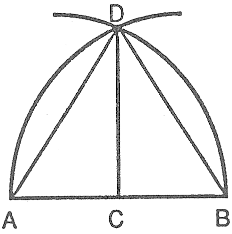

fig.14

L'impératif qui dicte l'ordre d'introduction des concepts et des propositions n'est pas, dans le traité de Clairaut, de nature logique comme chez Euclide, ni de nature méthodique comme chez Arnauld, il est tout entier dans la problématique choisie, c'est à dire dans la mesure des terrains. Après la perpendiculaire, Clairaut définit et construit les figures du rectangle et du carré. Ce qui le conduit à la construction des ouvrages, tels que remparts, canaux et rues, où il est besoin de mener des lignes parallèles, qu'il définit comme "des lignes dont la position soit telle que leurs intervalles aient partout pour mesures des perpendiculaires de même longueur"[2]. La construction d'une parallèle à une ligne passant par un point donné se ramène donc à la construction d'un rectangle. Ainsi, la signification de la notion de perpendicularité est entièrement liée à l'idée de distance, et le rectangle est le moyen d'opérer des équidistances.

La figure du triangle intervient un peu plus loin lorsque l'on se trouve dans une situation où l'on doit mesurer une surface rectiligne ABCDE qui, elle même, peut être prise comme l'approximation d'une ligne courbe limitant un contour de terrain (fig.15). Dans ce cas, "on voit que, malgré l'infinie variété des figures rectilignes, on peut les mesurer toutes de la meme façon, en les partageant en figures de trois côtés nommées communément triangles; ce qu'on fera de la manière la plus simple et la plus commode, si, d'un point quelconque A du contour de la figure ABCDE, on mène les lignes droites AC, AD, etc."[3].

---

1 CLAIRAUT, Eléments de géométrie, p.3

2 CLAIRAUT, op.cit., p.10

3 CLAIRAUT, op.cit., p.14

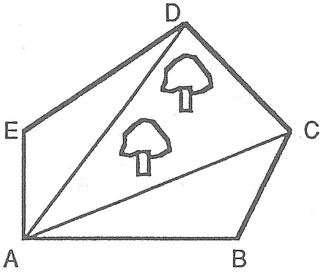

fig.15

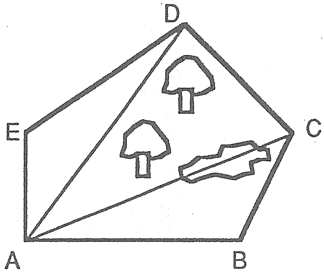

fig.16

Le concept d'angle est introduit lorsque la mesure des triangles constituant la surface ABCDE se trouve être empêchée : "Mais que dans l'espace ABCDE, il se trouve quelque obstacle, une élévation par exemple, un bois, un étang, etc. qui empêche qu'on ne mène les lignes dont on aura besoin, que faudra-t-il faire alors? Quelle méthode faudra-t-il suivre pour remédier à l'inconvénient du terrain?"[1] (fig.16). Nous trouvons ici la problématique des distances inaccessibles annoncée dans la préface du traité comme un moyen de faire "découvrir aux commençants les principes de la géométrie". Le problème conduit naturellement ici à recourir à des triangles "égaux et semblables". Ainsi, supposons que l'on ne puisse mesurer que deux des trois côtés d'un triangle ABC, les deux côtés AB et BC par exemple, "il est clair qu'avec cela seul, on ne pourrait pas déterminer un second triangle égal et semblable à ABC". Si on prend DE égal à BC et DF égal à BA, on ne sait quelle position donner à l'une des deux droites relativement à l'autre (fig.17). L'angle va être la réponse au problème : "Pour lever cette difficulté, la ressource qui se présente est simple : on fait pencher DF, de la même manière sur DE, que AB penche sur BC; ou, pour s'exprimer comme les géomètres, on donne à l'angle FDE la même ouverture qu'à l'angle ABC". Clairaut donne alors la définition de l'angle : "Un angle est l'inclinaison d'une ligne sur une autre"[2].

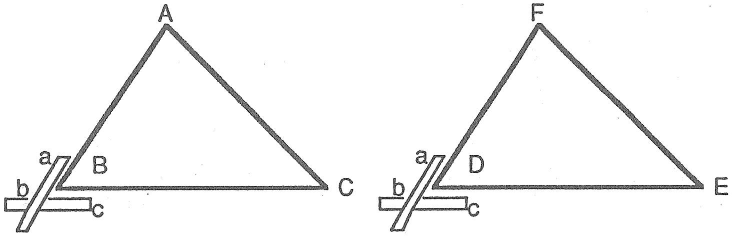

Fig.17

Clairaut explique, dans un premier temps, que l'égalité de deux angles peut être opérée en utilisant un instrument tel que abc composé de deux régles qui tournent autour de b (fig.17). Mais, plusieurs chapitres plus loin, il disqualifie cette façon de procéder car elle "expose souvent à bien des mécomptes" : " Tantôt l'ouverture de l'angle s'altérera dans le transport; tantôt la forme qu'on est obligé de donner à l'instrument pour en

---

1 CLAIRAUT, op.cit., p.27
2 CLAIRAUT, op.cit., p.29

faciliter l'usage, empêchera qu'on ne puisse l'appliquer sur le plan"[1]. Clairaut pose alors le problème de la mesure des angles : "Il était donc nécessaire de chercher une mesure fixe pour les angles, comme on en avait déjà une pour les longueurs". La solution, dit-il, a été facile à trouver. Lorsque a tourne autour de b, il suffira "de rendre sensible la trace du point a" par un crayon, et "cette trace, qui formera un arc de cercle, donnera exactement la mesure de l'angle". Par conséquent, "un angle a pour mesure l'arc de cercle qu'interceptent les côtés". Clairaut montre ensuite comment le cercle est partagé en degrés et en minute, et explique l'usage de deux instruments pour prendre la grandeur d'un angle, le demi-cercle et le rapporteur. Il propose donc une mesure intrinsèque des angles, et non pas une simple mise en rapport de deux angles. La proposition concernant la somme des angles d'un triangle intervient comme un moyen de vérifier des mesures d'angle.

Un problème de mesures d'angles

Le problème proposé par Clairaut est de trouver un moyen simple et efficace de s'assurer que les mesures des trois angles d'un triangle sont exactes. Si on considère un triangle ABC, Clairaut explique d'abord que l'on "sent que la grandeur" de l'angle C doit résulter de celles des angles A et B, car lorsque l'on change celles-ci, les droites AC et BC changent et l'angle C aussi. Pour trouver comment l'on peut conclure la grandeur de l'angle C à partir de celles des angles A et B, Clairaut suppose que BC tourne autour du point B vers la droite BE (fig.18). Il écrit alors : "Il est clair que pendant que BC tournerait, l'angle B s'ouvrirait continuellement; et qu'au contraire, l'angle C se resserre de plus en plus; ce qui d'abord pourrait faire présumer que, dans ce cas, la diminution de l'angle C égalerait l'augmentation de l'angle B, et qu'ainsi la somme des trois angles A,B, C, serait toujours la même, quelle que soit l'inclinaison des lignes AC, BC, sur la ligne AE"[2].

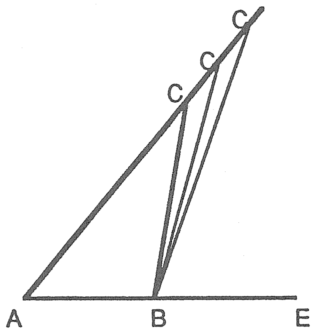

fig.18

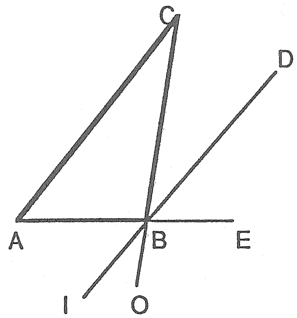

fig.19

Ce raisonnement, qui s'appuie sur le mouvement d'une droite, mérite quelques commentaires. La proposition IV des Eléments d'Euclide repose bien sur une superposition de figures, mais nous avons vu combien cela parraissait choquant à un commentateur du XVIème siècle. La géométrie grecque est, hormis quelques travaux

---

[1] CLAIRAUT, op.cit., p.55

[2] CLAIRAUT, op.cit., p.64

d'Archimède, une géométrie statique. Le bénéfice de l'introduction du mouvement dans les raisonnements géométriques apparaît dans les recherches du XVIIème siècle. D'une part, le mouvement apparaît dans certaines méthodes proposées par les géomètres pour "inventer" des quadratures et des tangentes[1]. Ainsi, la méthode de Roberval pour trouver les touchantes à une ligne courbe repose sur l'idée qu'une courbe est la trajectoire d'un point en mouvement. D'autre part, le changement continu d'une figure est au coeur des raisonnements de la géométrie perspective, dans les travaux de Desargues ou de Pascal. Dans le traité de Clairaut, l'idée de faire tourner la droite BC est naturelle puisqu'il s'agit de raisonner sur des angles conçus comme des inclinaisons. Ce qui paraît bien moins naturel et évident, c'est le sentiment que l'angle B augmente de ce que l'angle C diminue, c'est à dire la conservation de la somme des angles du triangle.

Cependant, lorsque la droite BC arrive à la position limite où elle est parallèle à AC, ce résultat pourra être démontré. Clairaut écrit que "cette induction présumée porte avec elle sa démonstration". Il mène la droite ID parallèle à AC et démontre que les angles ACB et CBD sont égaux (fig.19). Jusque là, aucun résultat concernant angles et parallélisme n'a été énoncé. Clairaut considère que l'égalité des angles est évidente : les droites AC et IB, sont parallèles donc également inclinées sur CBO, ce qui assure l'égalité des angles IBO et ACB, et la droite ID est pareillement inclinée sur CO d'un côté et de l'autre, ce qui assure l'égalité des angles CBD et IBO. Clairaut introduit ainsi la définition des angles alternes, "les angles renversés que forme de part et d'autre, une ligne qui tombe sur deux parallèles", et démontre l'égalité de ces angles. De même les angles DBE et CAE sont égaux, ce qui permet de conclure que les trois angles du triangle "pourraient être mis à côté les uns des autres" de sorte à égaler deux angles droits.

Ainsi, la définition de l'angle comme inclinaison de deux droites est opératoire dans la démonstration de Clairaut, puisqu'elle lui permet de montrer les propriétés concernant les angles faits par une droite tombant sur des parallèles. Ici, comme dans la mise en ordre effectuée par Arnauld, apparaît clairement que la démonstration concernant la somme des angles d'un triangle n'engage aucune définition ou conception de la mesure d'un angle. La configuration angles-parallèles est un moyen de comparer des angles sans donner explicitement une définition de l'angle comme grandeur.

L'analyse des démonstrations précédentes permet de relever un certain nombre de caractères communs aux géométries d'Euclide et de Clairaut. D'une part, ce sont des géométries de figures. Même si, dans le traité de Clairaut, le sens de la figure est de représenter et de rationaliser une situation problématique de mesures de terrains, la figure est bien l'objet idéal d'une science, la géométrie. La préface du traité nous en avertit : "Comme j'ai choisi la mesure des terrains pour intéresser les commençants, ne dois je pas craindre qu'on ne confonde ces Eléments avec les traités ordinaires d'arpentage? Cette pensée ne peut venir qu'à ceux qui ne considéreront pas que la mesure des terrains n'est point le véritable objet de ce livre, mais qu'elle me sert seulement d'occasion pour faire découvrir les principales vérités géométriques". D'autre part, les démonstrations d'Euclide et de Clairaut reposent sur une lecture raisonnée du dessin. En ce qui concerne l'angle, les propriétés topologiques concernant l'intérieur et l'extérieur de l'angle ne sont nullement explicitées puisqu'elles sont lues sur le dessin. Plus généralement, la nature de l'objet sur lequel raisonne le géomètre est au coeur de ses démonstrations : par exemple, la droite a la propriété d'être droite. Par conséquent, le recours à l'évidence est présent dans les démonstrations, de façon implicite chez Euclide et de façon explicite chez Clairaut. Tous ces caractères communs distinguent les <u>Eléments de géométrie</u> écrits jusqu'au XIXème siècle du traité d'Hilbert de 1899, intitulé <u>Les fondements de la géométrie</u>.

---

[1] lire CLERO & LEREST, <u>La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle</u>.

Le formalisme d'Hilbert

Les recherches mathématiques du XIXème siècle ont conduit les mathématiciens à modifier leurs conceptions des objets de la géométrie et de l'objet même de la géométrie, et à introduire une conception axiomatique et formaliste des mathématiques. Ce changement profond est la conséquence de plusieurs travaux que nous évoquons rapidement[1].

La Géométrie descriptive de Monge, parue en 1799, a pour principal objet de représenter sur un plan les corps de l'espace, mais il introduit aussi une nouvelle façon de démontrer des propositions de la géométrie plane par transformations des figures. Chasles écrit dans son Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie que la géométrie perspective de Monge constitue "un véritable moyen de recherche et de démonstration en géométrie" : " Les procédés par lesquels Monge transforme les figures de l'espace en figures planes, par les projections orthogonales sur deux plans rectangulaires qu'il suppose abattu l'un sur l'autre, offrent en particulier un moyen de découvrir une foule de propositions de géométrie plane sur les figures qui résultent de l'ensemble de ces deux projections"[2]. Ce moyen fécond de démontrer, qui suppose que l'on plonge les figures de la géométrie dans l'espace, fait de la géométrie "une science de l'étendue".

Le travail sur les géométries non euclidiennes conduit les mathé-maticiens à ne plus faire appel à la nature des objets géométriques dans leurs démonstrations. Les énoncés de géométries non euclidiennes vont à l'encontre de la nature de la ligne droite, puisque sur les figures les droites ne sont plus droites. Ainsi, dans la géométrie hyperbolique, la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux angles droits, et dans la géométrie elliptique, elle est supérieure à deux angles droits. De même, dans les modèles euclidiens de géométries non euclidiennes proposés à partir de la seconde moitié du XIXème siècle, on appelle droite ce qui n'est pas une droite de la géométrie euclidienne[3]. Ainsi, dans le modèle de géométrie hyperbolique de Poincaré, on appelle plan un demi-plan euclidien ouvert et on appelle droite une demi-droite ou un demi-cercle orthogonal à H. Ceci permet, par un point extérieur à une droite D, de faire passer deux parallèles D1 et D2 à D (fig.20).

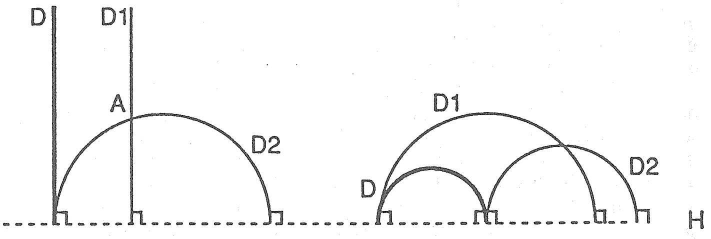

fig.20

Les géométries non euclidiennes, la géométrie projective, la théorie des groupes et la théorie des invariants de Cayley conduisent Klein à proposer dans son Programme d'Erlangen de 1872 une nouvelle façon de concevoir la géométrie et les géométries. Une géométrie est conçue comme un ensemble de points muni d'un groupe de transformations

---

1 pour une analyse détaillée lire BKOUCHE, Euclide, Klein, Hilbert et les autres

2 CHASLES, Aperçu historique..., Cinquième période, §3 à §5

3 lire CHABERT, op.cit.

G, et les propriétés géométriques sont les propriétés invariantes par G. Ces transformations opèrent sur l'espace et pas seulement sur les figures, c'est à dire que l'objet d'étude n'est plus les figures mais l'espace muni d'un groupe G. La structure du groupe de transformations caractérise la géométrie. Ainsi, la géométrie euclidienne, définie par le groupe des similitudes, est subordonnée à la géométrie projective, elle même définie par le groupe des transformations homographiques.

Le bénéfice d'une analyse structurale des mathématiques apparaît dans les résultats de Klein, il se manifeste aussi lors de la refonte de l'analyse opérée au XIXème siècle. Une telle analyse suppose que le raisonnement du mathématicien ne porte plus sur les objets -figures, nombres ou fonctions-, mais sur les relations entre les objets. Bourbaki définit ce qu'il faut entendre par "structure mathématique" en ces termes : " Le trait commun des diverses notions désignées sous ce nom générique, est qu'elles s'appliquent à des ensembles d'éléments dont la nature n'est pas spécifiée[1]; pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments (...); on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les axiomes de la structure envisagée. Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est déduire les conséquences logiques des axiomes de la structure, en s'interdisant toute autre hypothèse sur les éléments considérés (en particulier, toute hypothèse sur leur "nature" propre)"[2].

Les fondements de la géométrie d'Hilbert correspondent tout à fait à la conception axiomatique et formaliste définie par Bourbaki. Ce traité commence ainsi : "Nous pensons trois systèmes différents de choses ; nous nommons les choses du premier système des points; nous nommons droites les choses du deuxième système; nous appelons plans les choses du troisième système(...). Entre les points, les droites et les plans, nous imaginons certaines relations que nous exprimons par des expressions telles que "être sur", "entre", "congruent"; la description exacte et appropriée au but des mathématiques de ces relations est donnée par les axiomes de la géométrie"[3]. Hilbert ne définit pas les termes de point, droite et plan, il aurait même dit que l'on pouvait remplacer ces termes par chope de bière, chaise et table s'en rien changer à la portée de son traité. En 1921, Einstein commente le point de vue axiomatique et formaliste d'Hilbert en écrivant que "par les termes de point, droite, etc., il ne faut entendre dans la géométrie axiomatique que des concepts schématiques vides de contenu"[4]. Tout ce que nous devons savoir sur ces concepts, ce sont les relations données par les axiomes. Comme l'écrit Poincaré en 1909, "Que sont ces "choses"? Nous ne le savons pas et nous n'avons pas à le savoir; il serait même fâcheux que nous cherchions à le savoir; tout ce que nous avons le droit d'en savoir, c'est ce que nous en apprennent les axiomes"[5].

---

1 souligné par Bourbaki

2 BOURBAKI, L'architecture des mathématiques

3 HILBERT, Les fondements de la géométrie, p.12

4 EINSTEIN , La géométrie et l'expérience

5 POINCARE, Science et méthode

Hilbert classe les axiomes de la géométrie en cinq groupes. Le premier est constitué par les axiomes d'appartenance, qui expriment un lien entre les notions de point, de droite et de plan. Le second est constitué par les axiomes d'ordre qui définissent le terme "entre". Ainsi, le troisième axiome de ce groupe affirme que "de trois points d'une droite, il n'y en a pas plus d'un qui est entre les deux autres". Euclide n'avait pas besoin de ce type d'axiome, puisque la situation topologique de trois points d'une droite lui était immédiatement donnée par le dessin d'une droite et de deux de ses points. Il pouvait également se passer des propositions 3 et 4 déduites des axiomes d'ordre. Elles énoncent que "deux points A et C étant données, il existe sur la droite AC au moins un point D situé entre A et C" et que "de trois points alignés A, B et C, il y en a un qui est entre les deux autres".

L'angle d'Hilbert

La définition de l'angle est donnée dans la partie consacrée au troisième groupe d'axiomes concernant la notion de congruence. Hilbert définit d'abord la congruence de deux segments, à l'aide de trois axiomes : le premier assure la possibilité du report des segments, le second affirme la transitivité de la relation de congruence et le troisième permet d'additionner les segments. Puis, il donne la définition suivante : "Soient h et k deux demi-droites différentes d'un plan, issues d'un point O et appartenant à des droites différentes. L'ensemble des demi-droites h et k est appelé un angle; nous le désignerons par <(h,k) ou par <(k,h)"[1]. Le traité est pauvre en dessins, et ici aucune représentation de l'angle n'est donnée. Par contre, Hilbert définit immédiatement l'intérieur et l'extérieur d'un angle. Tout comme un point peut être ou non entre deux autres points, un segment peut être ou non à l'intérieur d'un angle. Hilbert énonce les propriétés relatives au régionnement du plan par l'angle, c'est à dire qu'il précise la situation topologique introduite par l'angle dans un plan. Ainsi, il écrit que l'on "démontre facilement" que si H est un point de h et K un point de k, alors le segment HK appartient à l'intérieur de l'angle (h,k).

Le premier axiome définissant la congruence des angles assure la possibilité de reporter les angles de façon unique. Le second axiome concerne ce que nous avons appelé l'angle engagé dans un triangle : "Si dans deux triangles ABC et A'B'C' les congruences suivantes sont satisfaites : AB = A'B', AC = A'C' et <BAC = <B'A'C', alors la congruence <ABC = <A'B'C' l'est aussi". Cet axiome, comme l'écrit Hilbert, "établit un lien entre des congruences de segments et d'angles". Il permet, en particulier, de démontrer par l'absurde l'unicité du report des segments.

Hilbert donne ensuite les conséquences des axiomes de congruence. Il définit la congruence de deux triangles par l'égalité de tous les côtés correspondants et de tous les angles correspondants. Il démontre alors, par l'absurde, le premier cas de congruence des triangles, et il énonce le second cas de congruence des triangles. Il définit deux angles supplé-mentaires comme deux angles ayant même sommet, un côté commun et les côtés distincts portés par une même droite, et il appelle angle droit, un angle congruent à un de ses suppléments. Il démontre alors que deux angles congruents ont des suppléments congruents, ce qui lui permet de montrer l'existence des angles droits.

Le théorème 15 permet d'additionner des angles. Nous avons vu qu'Euclide somme les angles par juxtaposition sur un dessin. Hilbert ne peut pas se référer à une figure : il utilise le régionnement topologique du plan par l'angle. L'énoncé de ce théorème est le suivant : "Soient h, k et l trois demi-droites d'un plan, issues d'un point O et h', k' et l' trois demi droites d'un plan issues du point O' telles que si h et k sont d'un côté de l ou de côtés opposés de l, il en est de même de h' et k' par rapport à l'. Si les

---

[1] HILBERT, op.cit, p.21

congruences suivantes sont satisfaites : <(h,l) = <(h',l') et <(k,l) = <(k',l'), nous avons aussi <(h,k) = <(h'k')"[1]. Ce résultat nécessite une assez longue démonstration -la plus longue depuis le début du traité- accompagnée d'une figure. Seul le cas où h et k sont du même côté de l est considéré dans la démonstration, ce qui permet de dire que h est intérieur à l'angle (k,l) ou que k est intérieur à l'angle (h,l). Dans la première hypothèse, on peut choisir des points K, K', L, L' tels que OK = O'K' et OL = O'L'. Puisque les segments KL et K'L' sont à l'intérieur des deux angles, on peut terminer la démonstration en s'appuyant sur le premier cas de congruence des triangles (fig.21). Le théorème 15 permet ensuite de démontrer le troisième cas de congruence des triangles. Dans Les fondements de la géométrie d'Hilbert, congruence de segments, congruence d'angles et congruence de triangles se trouvent donc très liées.

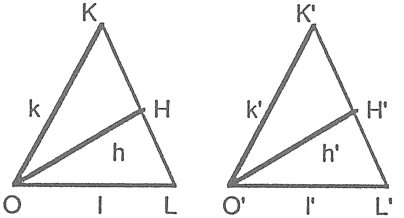

fig.21

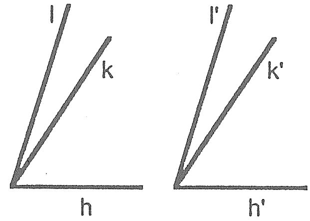

fig.22

Hilbert aborde la comparaison des angles dans le théorème 20. Cette comparaison s'effectue grâce au régionnement topologique du plan par l'angle : "Soient deux angles (h,k) et (h',l'). Si le report de l'angle (h,k) à partir de h' du côté de l' donne une demi-droite k' intérieure à l'angle (h',l'), le report de l'angle (h',l') à partir de h du côté de k donne une demi-droite extérieure à l'angle (h,k) et réciproquement"[2] (fig.22). Dans le cas où la demi-droite k' est intérieure à l'angle (h',l'), on dit que l'angle (h,k) est inférieur à l'angle (h',l'); si elle est extérieure, on dit que l'angle (h,k) est supérieur à l'angle (h',l'). Ce théorème permet de comparer les angles, ce qui suffit à Hilbert pour démontrer l'axiome d'Euclide qui postule que "tous les angles droits sont congruents entre eux", et pour comparer les angles d'un triangle.

Les angles d'un triangle dans Les fondements de la géométrie

Hilbert démontre, en théorème 22, qu'un angle extérieur d'un triangle est supérieur à chacun des deux angles non adjacents[3]. Pour cela, il effectue une double réduction à l'absurde. Le procédé par l'absurde est extrêmement fréquent dans Les fondements de la géométrie : il concerne quatre des cinq démonstrations concernant les comparaisons d'angles. Etant donné CAD un angle extérieur du triangle ABC, Hilbert démontre d'abord que les angles CAD et ACB ne sont pas congruents, et ensuite que l'angle CAD n'est pas inférieur à l'angle ACB (fig.23). Le point D est choisi tel que AD = CB. Si les angles CAD et ACB sont congruents, d'après le second axiome sur la congruence des angles, les angles ACD et CAB sont congruents. Par conséquent, l'angle ACD est congruent au supplément de l'angle ACB, et, d'aprés l'axiome assurant l'unicité du report de l'angle, D appartient à la droite CB. Ceci contredit l'axiome selon lequel il n'existe pas plus d'une droite à laquelle appartiennent deux points. Si l'angle CAD est

---

1 HILBERT, op.cit., p.27
2 HILBERT, op.cit., p.30
3 HILBERT, op.cit., p.32-33

inférieur à l'angle ACB, on se ramène à la même contradiction en reportant l'angle ACD à l'intérieur de l'angle ACB. Dans cette démonstration, la signification de l'angle est de permettre un régionnement topologique du plan. En conséquence du théorème 22, Hilbert démontre que dans un triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté.

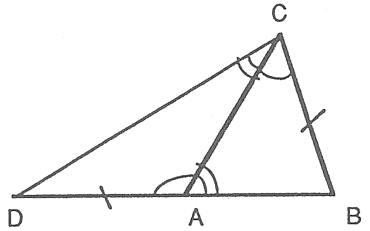

fig.23

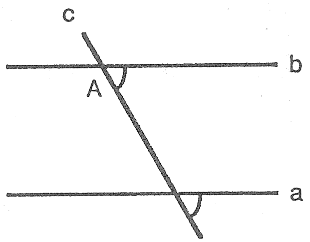

fig.24

Le théorème concernant la somme des angles d'un triangle est énoncé, bien sûr, dans la partie consacrée au quatrième groupe d'axiomes concernant les parallèles. D'après le théorème 22, il existe des droites qui ne se coupent pas. En effet, étant donnés une droite a et un point A qui n'appartient pas à a, on peut mener par A dans le plan déterminé par a et A, une droite c qui coupe a, et une droite b telle que c coupe a et b sous des angles correspondants congruents. Le théorème 22 permet d'affirmer que les droites a et b ne se coupent pas (fig.24)[1]. Hilbert appelle parallèles des droites coplanaires qui ne se coupent pas, et il énonce l'axiome des parallèles de la façon suivante : "Soient une droite a et un point A extérieur à a; dans le plan déterminé par a et A, il existe au plus une droite qui passe par A et qui ne coupe pas a". Il commente cet énoncé en écrivant que l'introduction de l'axiome des parallèles "simplifie les fondements de la géométrie et allège notablement l'élaboration de cette science". Selon la conception formaliste, "les axiomes sont des créations libres de l'esprit humain"[2] énoncés sans référence à un quelconque sentiment d'évidence ou à une vérification par l'expérience .

Hilbert poursuit en écrivant que "les axiomes de congruence et des parallèles conduisent facilement" à deux théorèmes qu'il ne démontre pas : le théorème 30 établit l'équivalence entre parallélisme et congruences des angles alternes-internes et alternes-externes, et le théorème 31 énonce que les angles d'un triangle font ensemble deux angles droits[3]. Le traité d'Hilbert n'a pas pour but de convaincre un lecteur, ni de l'éclairer, ni de l'intéresser. Il a pour objectif de fonder une science, c'est à dire, de déduire, à partir des axiomes, des relations entre les éléments de cette science. Par conséquent, la démonstration bien connue du théorème 30 n'a pas sa place dans Les fondements de la géométrie. Par contre, Hilbert s'attache, comme nous l'avons vu, à démontrer des propositions évidentes pour ses prédécesseurs. Par contre également, il s'intéresse à l'équivalence entre l'axiome des parallèles et le théorème 30.

---

1 il n'y a pas de figure dans le traité d'hilbert

2 EINSTEIN, La géométrie et l'expérience

3 HILBERT, op.cit., p.39

Si les axiomes sont conçus de façon purement formelle, il devient nécessaire de s'assurer que le système d'axiomes que l'on s'est donné n'est pas contradictoire. Les fondements de la géométrie reposent sur cinq groupes d'axiomes -le cinquième concerne la continuité, il est constitué de l'axiome d'Archimède et de l'axiome d'intégrité linéaire. Dans le second chapitre de son traité, Hilbert s'intéresse à la compatibilité et à l'indépendance des cinq groupes d'axiomes de sa géométrie. Plusieurs propositions concernent l'indépendance de l'axiome des parallèles, et donc les géométries non euclidiennes. Hilbert démontre que l'on peut déduire des trois premiers groupes d'axiomes et de l'axiome d'Archimède le théorème de Legendre[1], c'est à dire que la somme des angles d'un triangle est égale ou inférieure à deux droits. Il énonce également les résultats de Dehn qui expriment la dépendance entre le théorème de la somme des angles d'un triangle et l'axiome d'Archimède : si l'on exclut l'axiome d'Archimède, la somme des angles d'un triangle peut être supérieure à deux droits, si l'on admet l'axiome d'Archimède, l'axiome des parallèles est équivalent à l'hypothèse que la somme des angles d'un triangle est égale à deux droits[2].

Au terme des investigations d'Hilbert, le théorème sur la somme des angles d'un triangle peut donc devenir légitimement un axiome de la géométrie en place de l'axiome des parallèles. Le sens des démonstrations d'Euclide ou de Clairaut était d'établir la vérité de ce théorème en s'appuyant sur l'évidence de l'axiome des parallèles Dans la conception axiomatique et formaliste de la géométrie, l'évidence n'est plus de mise et la vérité signifie seulement une non contradiction.

Sens de la démonstration et objet de la géométrie

Chacune des démonstrations que nous avons analysées ne prend son sens qu'à l'intérieur du savoir géométrique auquelle elle appartient. En effet, savoir que la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits implique trois choses : une certaine conception du savoir, une certaine façon de relier des objets -angles et triangles- et un certain mode de connaissance de ces objets. Résumons de ce point de vue notre analyse.

Le théorème sur la somme des angles d'un triangle établit une relation entre des objets. Les objets de la géométrie des Eléments d'Euclide sont des figures. Euclide donne des définitions, mais des définitions qui ne sont pas opératoires. Les objets vont donc prendre sens au fil des propositions, grâce aux liens que ces propositions établissent entre ces objets. Des relations ainsi obtenues, nous avons dégagé des configurations qui sont le noeud commun à plusieurs propositions. L'angle est défini comme inclinaison, mais l'angle prend d'abord sens dans une configuration "angle engagé dans un triangle". En effet, cette configuration permet d'égaler des angles, sans superposer des angles ou comparer des inclinaisons. Le théorème sur la somme des angles d'un triangle constitue donc un aboutissement de la dialectique angle-triangle. Les objets des Eléments de géométrie de Clairaut sont aussi des figures, mais ces objets sont définis comme instruments pour résoudre des problèmes. L'angle est le moyen de connaître un côté inaccessible d'un triangle. Les objets entretiennent donc également entre eux une relation d'utilité dans le contexte d'une problématique, celle de la mesure des terrains. L'angle se trouve dès son introduction engagé dans un triangle, mais dans un triangle dont deux côtés tournent et il est utile en tant qu'inclinaison de ces côtés. Le théorème sur la somme des angles d'un triangle est conçu comme un moyen de vérifier les mesures de trois angles d'un triangle, et donc de s'assurer des mesures du triangle. Son résultat est introduit en faisant tourner l'un des côtés du triangle, c'est à dire en faisant varier l'inclinaison de deux angles du triangle. L'inclinaison est donc la bonne façon de

[1] HILBERT, op.cit., p.59

[2] HILBERT, op.cit.,p.67-68

concevoir l'angle dans ses relations au triangle, y compris comme argument dans une démonstration. Les objets des Fondements de la gécmétrie d'Hilbert sont purement formels. Les choses, point, droite et plan ne sont pas définis, et les autres objets sont définis à partir de ces choses de façon ensembliste. L'angle est un ensemble de deux demi-droites. Cette définition conduit à voir l'angle comme un régionnement du plan, puisqu'il y a des points du plan à l'intérieur de l'angle et d'autres à l'extérieur. La connaissance de l'angle, et en particulier la relation de congruence entre deux angles, passe par l'énoncé d'axiomes. Le second de ces axiomes relie la congruence des angles à la congruence des segments, et engage l'angle dans un triangle. Le théorème sur la somme des angles d'un triangle est présenté d'abord comme une conséquence de l'introduction de l'axiome des parallèles, il apparaît plus loin comme équivalent à cet axiome si l'on suppose un autre axiome. Il joue donc un rôle important dans le système des propositions géométriques.

Dans Les éléments d'Euclide, savoir c'est reconnaître le caractère absolu, universel et nécessaire d'une proposition. La pertinence de ce savoir dans la philosophie grecque antique est de permettre de distinguer la science de l'opinion. Le lecteur de la proposition XXXII d'Euclide sera convaincu que pour tout triangle, la somme des angles d'un triangle est égale à deux angles droits. En effet, le raisonnemment part de prémisses vraies et procède par déduction, ce qui rend irréfutable la conclusion. L'ordre des connaissances des Eléments d'Euclide est celui qu'impose la procédure de déduction. Dans les Eléments de géométrie de Clairaut, savoir suppose une exigence supplémentaire. Savoir c'est aussi savoir comment l'on sait, c'est à dire que le savoir implique le processus par lequel on sait. Cette manière de savoir s'impose dès le XVIIème siècle à des savants qui ont soif d'inventer. Pourquoi une connaissance devient-elle l'objet de recherche du géomètre? Comment le géomètre parvient-il à la vérité? Comment le géomètre invente-t-il son savoir? Pour Clairaut, le savoir du géomètre est un moyen de résoudre des problèmes : son lecteur apprend donc quel problème amène à s'interroger sur la somme des angles d'un triangle. Il apprend aussi quelles investigations conduisent à construire la parallèle à l'un des côtés du triangle. Le lecteur peut faire sien le savoir, il est éclairé. L'ordre des connaissances des Eléments de géométrie de Clairaut est l'ordre des inventions organisées autour d'une problématique.

Dans Les fondements de la géométrie d'Hilbert, le savoir devient d'une certaine façon extérieur au mathématicien puisqu'il n'est pas demandé au lecteur d'être convaincu ou éclairé. Les objets géométriques ont un statut ontologique, ils existent en tant que tels à travers un système de relations. Les propositions n'ont plus le caractère absolu que confère le poids de la vérité, elles sont simplement non contradictoires avec un système d'axiomes -donc relatives à ce système d'axiomes- conçu lui même de façon formelle. La force de ce savoir est d'unifier les connaissances géométriques du XIXème siècle et de donner un fondement à la géométrie. Il semble difficile d'imaginer que le lecteur d'Hilbert n'ait aucune connaissance de la géométrie ordinaire. L'idée de remplacer point, droite et plan par chope de bière, table et chaise est une boutade, car la compréhension du traité serait rapidement impossible. L'absence totale de dessins rendrait également cette compréhension quasi impossible. En revanche, le lecteur averti pourra assister au magistral spectacle que constitue l'organisation en système des propositions géométriques. L'ordre des connaissances des Fondements de la géométrie résulte de la mise en ordre des groupes d'axiomes, qui permet de distinguer les géométries et de les subordonner les unes aux autres.

Bibliographie

ARISTOTE, Seconds analytiques, Vrin, Paris, 1979.
ARNAULD, Nouveaux éléments de géométrie, édition I.R.E.M. de Dijon,1982.
ARNAULD & NICOLE, La logique ou l'art de penser, P.U.F., Paris, 1965.
BARBIN, La démonstration mathématique: significations épistémologiques et questions didactiques, Bulletin A.P.M.E.P.n°366, 1988.
BKOUCHE, Euclide, Klein, Hilbert et les autres in La rigueur et le calcul, Cedic, Paris, 1981.
BKOUCHE, La pédagogie de Clairaut et l'histoire de l'éducation, I.R.E.M. de Lille, 1985.
BKOUCHE, De la démonstration, Actes du colloque inter-I.R.E.M. de géométrie, I.R.E.M. de Montpellier, 1989.
BOURBAKI, L'architecture des mathématiques in LE LYONNAIS, Les grands courants de la pensée mathématique, Blanchard, Paris, 1962.
CAVEING, La constitution du type mathématique de l'idéalité dans la pensée grecque, Université de Lille II, 1982.
CHABERT, Les géométries non euclidiennes, Actes de l'Université d'été sur l'histoire des mathématiques, I.R.E.M. de Toulouse, 1988.
CHASLES, Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie, réédition I.R.E.M. de Lille.
CLAIRAUT, Eléments de géométrie, réédition Siloë, Laval, 1986.
CLERO & LEREST, La naissance du calcul infinitésimal au XVIIème siècle, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences n°16,1980.
EINSTEIN, La géométrie et l'expérience in Réflexions sur l'électrodynamique, l'éther, la géométrie et la relativité, Gauthier-Villars,1982
EUCLIDE, Les éléments, traduction Peyrard, Blanchard, Paris, 1966.
HILBERT, Les fondements de la géométrie, édition du C.N.R.S., Dunod, 1971.
KLEIN, Le programme d'Erlangen, édition Gauthier-Villars, 1974.
LACROIX, Eléments de géométrie, 1802.
MONGE, Géométrie descriptive, Gauthier-Villars, 1798.
PELETIER DU MANS, Les six premiers livres des Eléments géométriques d'Euclide, édition Jean de Tournes, 1628
POINCARE, Science et méthode, réédition Flammarion, Paris, 1946.