# ARRIERE-PLANS PHILOSOPHIQUES DE LA DEMONSTRATION

Jacqueline GUICHARD

Une conception de la démonstration ne serait-elle pas fonction de la façon dont on conçoit le statut de la vérité, fondée par la nécessité logique, ou par la conformité à une réalité effective ou idéale etc... ?

Ce qui est en question, c'est la façon dont est conçu le travail de l'esprit dans l'activité de démonstration et son rapport postulé ou nié avec un ordre existant en dehors de lui.

L'histoire du vrai est ainsi balisée par deux conceptions opposées : le dévoilement du réel et une construction de l'esprit. La pensée grecque classique conçoit la vérité comme dévoilement du réel d'abord caché aux sens : c'est ce qu'exprime le mot qui en grec signifie vérité : *aletheia* . La vérité est atteinte au terme d'une démarche de découverte qui permet à l'esprit de voir l'essence des choses. C'est la connaissance - contemplation (*theoria* en grec) qu'illustre l'allégorie de la caverne de Platon[1]. Cependant, mettre le fondement de la connaissance dans la saisie intellectuelle (ou intuition) de natures simples comme le fait la philosophie cartésienne[2] c'est encore concevoir la vérité comme découverte d'une réalité extérieure à l'esprit. Et il est significatif que dans une telle perspective la question préliminaire concerne le chemin à faire emprunter à l'esprit pour qu'il parvienne à cette découverte du vrai : chemin pédagogique de l'allégorie de la caverne, chemin méthodologique du Discours de la Méthode. Il faut attendre le XVIIIè siècle et la philosophie critique de Kant pour que la question se déplace du "comment trouver le vrai ?" au "que puis-je connaître ?" et que le vrai soit conçu comme ce que l'esprit construit à l'aide de ses catégories et concepts. Le changement apparaît assez radical à son auteur pour qu'il fasse le parallèle avec la révolution copernicienne[3].

Analysant l'activité mathématique dans son déroulement, Wittgenstein y verra une création, l'esprit posant comme telles les règles qui fondent la nécessité source de la certitude[4].

## 1. La démarche démonstrative et sa place privilégiée en mathématiques.

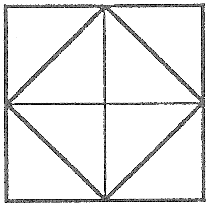
La démonstration est une démarche rationnelle au sens le plus littéral du terme : un enchaînement de raisons qui, à partir de points de départ déterminés établit la certitude du résultat qui en découle, comme l'indique la *métaphore visuelle* :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | dé - | monstration | |
| | | qui montre | à partir de |
| en grec : | apo - | deixis | |
| | | deixis = | fait de montrer, d'indiquer avec l'index. |

[1] PLATON, République, Trad., Garnier-Flammarion n° 90, Livre VII, 514a-519b, p. 273-277.
[2] DESCARTES R., Règles pour la direction de l'esprit, III et XII, in Oeuvres et Lettres de Descartes, ed. Bibliothèque de la Pléïade, Gallimard, p. 43-44 et p. 81-84.
[3] KANT E., Critique de la raison pure, Trad. Trèmesaygues et Pacaud, P.U.F. 1967, Préface à la seconde édition, p. 18-19.
[4] WITTGENSTEIN L., Remarques sur les fondements des mathématiques, NRF Gallimard, 1983, Première partie (1937-38) : § 33 p. 46.

C'est ce qui *met en évidence* la vérité d'une proposition, d'un énoncé en explicitant un enchaînement de raisons (*rationes* en latin, *logoï* en grec) qui la lie à ce qui est déjà établi, connu. Ce sont les "longues chaînes de raisons dont ont coutume d'user les géomètres..."[1].

Ce caractère *discursif* de la démonstration rend nécessaire de la distinguer du concept plus général de preuve. La production d'une preuve peut ne pas revêtir cette forme rationnelle, discursive, par exemple la construction d'une figure pour faire voir que le côté d'un carré de surface double du carré de côté 1 est $\sqrt{2}$ [2] :



ou des opérations de mesure, de découpage, de pliage, etc... ; et elle comprend des procédés historiquement bien antérieures à la démonstration.

La démonstration apparaît comme une démarche prépondérante en mathématiques, au point qu'elles peuvent apparaître comme la science démonstrative par excellence et que, tant qu'une proposition mathématique n'est pas démontrée, il reste un doute sur sa vérité, même si les mathématiciens sont convaincus de celle-ci. Elle reste une conjecture et non à proprement parler un théorème.

La conception des mathématiques comme science *hypothético-déductive* qui remonte à l'Antiquité Grecque et que Platon décrit dans la République[3] prend acte de ce rôle prépondérant de la démonstration qui fait des mathématiques une science à part : science démonstrative qui se distingue des sciences d'observation ou d'expérimentation.

## 2. Ce qui a pu rendre la démonstration nécessaire dans l'histoire des mathématiques

On peut envisager des raisons externes aux mathématiques qui les englobent et les dépassent, et qui sont plus généralement liées à l'avènement de la rationalité dans une civilisation qui privilégie le *Logos*, c'est-à-dire le discours de la raison, discours réglé qui éprouve sa puissance de conviction dans l'usage de ses règles et qui va donner naissance à la démocratie, à la science mathématique, à la philosophie, mais a aussi des manifestations repérables dans l'activité artistique...[4]. C'est ce qu'on a appelé le "miracle grec" qui pose le problème de l'interprétation de ses causes.

Faire naître la pensée rationnelle du cadre politique de la cité est-ce bien explicatif en fin de compte ?[5]. S'agit-il d'une causalité linéaire ou bien circulaire voire dialectique dans lesquels ce que nous analysons comme "termes en présence" : démocratie et rationalité, s'entredétermineraient dès le départ en un processus évolutif. Car les raisons du développement

---

[1] DESCARTES R., Discours de la méthode, in Oeuvres et Lettres de Descartes, ed. Bibliothèque de la Pléïade, Gallimard, deuxième partie, p. 137-138-139.

[2] PLATON, Menon, Trad. E. Chambry in Protagoras et autres dialogues, Garnier Flammarion, n° 146, 1967, 97a 98a, p. 369-371.

[3] PLATON, République, Livre VI, 510c-511a, ib. p. 268.

[44] MILHAUD G., La géométrie grecque considérée comme oeuvre personnelle du génie grec, Revue des études grecques, T9, 1896, p. 371-413.

[5] VERNANT J.P., Les origines de la pensée grecque, Quadrige/P.U.F., 1988, 1er ed., 1962.

de ces institutions originales sont peut être à chercher dans ce privilège du *logos* qui ne peut lui-même développer ses règles générales et ses formes : rhétorique, philosophique et mathématique, que dans un contexte social qui fait de la parole l'instrument et le fondement du pouvoir. On trouvera des points de repère et des éléments de synthèse dans Dahan-Dalmenico[1].

Mais encore, les raisons extérieures à une discipline fonctionnent comme des raisons historiques générales qui, comme telles, ne peuvent à elles seules rendre raison de la nécessité de l'apparition de tel concept, de telle méthode. Si nécessité il y a, elle est à chercher dans le mouvement interne de l'activité mathématique, les problèmes qu'elle rencontre ou suscite et les solutions qu'elle y apporte, activité qui, bien entendu, utilise les ressources rationnelles de l'époque mais peut aussi en élargir le champ.

La distinction de ces deux niveaux de l'analyse : le contexte historique et le développement interne renvoie à deux perspectives différentes : la première, celle de l'historien des sciences et la seconde celle de l'épistémologue de la discipline[2 3 4].

Les raisons internes à l'apparition de la démonstration en mathématiques, on peut les chercher dans la nécessité de passer à une démarche démonstrative pour résoudre des problèmes sur lesquels ont buté les mathématiciens et qu'ils ne pouvaient pas résoudre avec leurs procédés habituels. C'est le cas du problème de l'irrationalité que l'histoire des sciences nous dit être contemporain de l'apparition de la démonstration. Il importe de distinguer deux aspects du problème pour discerner ce qui en lui a pu rendre nécessaire ce changement, qui avec l'introduction de la démonstration est plus qu'un changement de méthode : c'est aussi un changement dans la conception des mathématiques elles-mêmes et dans celle du statut du nombre[5] :

L'irrationalité de $\sqrt{2}$
et l'incommensurabilité de la diagonale du carré avec son côté[6].

Le premier est un problème arithmétique qui concerne une propriété du nombre 2 : ne pas avoir de racine carrée rationnelle.

Le second n'exprime pas une propriété de la diagonale : l'incommensurabilité n'existe que dans la mise en rapport avec le côté du carré ; avec un autre segment il peut y avoir commensurabilité.

La prise en compte de ces deux problèmes implique une démarche démonstrative, même si sa forme est différente dans les deux cas.

L'incommensurabilité n'est pas affaire de constat ou de mesure :

- la considération de la figure incite à conclure à la commensurabilité : il n'y a de ce point de vue aucune différence perceptible avec les représentations des racines carrées rationnelles ;

- il semble toujours possible de mesurer la diagonale et le côté avec le même instrument donc avec la même unité, comme le remarque Aristote[7] :

---

[1] DAHAN-DALMENICO A., Une histoire des mathématiques - Routes et dédales, Points, Sciences n° 49, Editions du Seuil 1986, Chap. 2, p. 43 sq.
[2] BACHELARD G., La formation de l'esprit scientifique, Vrin, 1967, 5è édition, Ch. I-II, p. 17.
[3] CAVAILLES J., Méthode axiomatique et formalisme, Hermann, 1981.
[4] SINACEUR H., L'épistémologie de Jean Cavaillès, Critique n° 461, Octobre 1985, p. 974-988.
[5] DESANTI J.T., Une crise de développement exemplaire : la "découverte" des irrationnelles. In Logique et connaissance scientifique, p. 439-464, Encyclopédie de la Pléiade, Gallimard, 1967.
[6] ARSAC G., L'origine de la démonstration : essai d'épistémologie didactique, In Recherches en didactique des mathématiques, V 8/3, 1988, p. 267-312, Ed. La pensée Sauvage.
[7] ARISTOTE, Métaphysique, Trad. J. Tricot, 2 Tomes, Vrin 1970, T 1, Livre A. 2, 982a 15, p. 20.

"il semble en effet étonnant à tout le monde qu'une quantité donnée ne puisse être mesurée, même par l'unité minime".

Par conséquent, l'incommensurabilité n'a pas de statut empirique. Elle renvoie à un objet idéal et elle ne peut être qu'objet de démonstration.

L'irrationalité ne peut être démontrée que par un raisonnement par l'absurde, à partir du moment où probablement les tentatives de calcul font douter de l'existence d'une racine carrée rationnelle[1 2]. Le procédé est familier aux philosophes éléates. Zénon d'Elée, disciple du fondateur de l'Ecole éléate, Parménide, a la réputation d'en faire grand usage pour défendre les thèses de son maître. Le procédé en lui-même ne conduit peut-être pas à ce qui deviendra une construction axiomatisée de la pensée mathématique qui procède par déduction à partir de définitions..., mais il est cependant de l'ordre de la démonstration.

Ce sont donc les problèmes engendrés par l'activité mathématique qui ont entraîné un changement dans la méthode de cette activité d'abord incapable de résoudre les problèmes qu'elle avait engendrés. Mais il s'agit en même temps d'un changement dans la conception du statut des objets mathématiques, non plus conçue à la façon du Pythagorisme primitif comme grandeur physique mais de façon idéelle et se prêtant à une activité opératoire elle-même intellectuelle. De cette conception, qui sera développée par Aristote[3], Platon prend acte dans la République[4].

### 3. La théorie de la démonstration élaborée par Aristote

Aristote, père de la logique classique détermine au IVè s av. JC, les éléments d'une théorie de la démonstration qui va servir de référence jusqu'à l'époque moderne[5].

Son maître Platon avait décrit la démarche des mathématiciens comme activité déductive à partir d'hypothèses. L'hypothèse, ce qui est posé comme point de départ de la démonstration, mais ne sera pas lui-même objet de démonstration, est selon l'étymologie une supposition : ce dont on suppose l'existence pour examiner ce qui s'ensuit :

"ils posent par hypothèse l'existence du pair et de l'impair..."[6].

Raisonner par hypothèse, c'est procéder à l'examen des conséquences d'une possibilité et de son contraire :

"Quand on... demande, à propos d'une surface, par exemple, si tel triangle peut s'inscrire dans tel cercle, un géomètre répondra : "je ne sais encore si cette surface s'y prête ; mais je crois à propos pour le déterminer de raisonner par hypothèse de la manière suivante : si telles conditions se présentent, le résultat sera ceci et dans telles autres conditions il sera cela. Ainsi est-ce par hypothèse que je puis te dire ce qui arrivera pour l'inscription du triangle dans le cercle, si elle sera possible ou non"[7].

---

1 ARISTOTE, Premiers analytiques, Trad. J. Tricot, Vrin,1966, Livre I, 44, 50a 38, p. 188 (Tome III de l'Organon).
2 DESANTI JT., Une crise de développement exemplaire etc., ib. p. 439-464.
3 ARISTOTE, Métaphysique, T II, Livres M et N, en part. 1084b 20... ; 1087b 33, 1088 ab... (ib. p. 776-77 ; p. 801 à 807).
4 PLATON, République, Trad., Livre VI, 510c-511a, ib. p. 268.
5 ARISTOTE, Seconds analytiques, Trad. J. Tricot, Vrin 1970 (Tome IV de l'Organon).
6 PLATON, République, ib.
7 PLATON, Ménon, 86e-87b, ib. p. 354-355 ; ici dans la traduction de A. Croiset, Ed. Les Belles Lettres, 1965, p. 260.

L'enchaînement des conséquences est nécessaire, mais la vérité de la conclusion est soumise à celle des points de départ. Les mathématiques constituent une connaissance hypothétique inférieure en valeur à la connaissance non-hypothétique du philosophe qui procède dialectiquement en remontant jusqu'au principe qui n'est soumis à aucune condition. Les mathématiques ne sont pas le plus haut degré du savoir.

Aristote théorise la démarche démonstrative des mathématiques en définissant le concept de démonstration, les éléments constitutifs du raisonnement déductif et les exigences auxquelles elle doit satisfaire :

- le concept de démonstration définie comme raisonnement déductif qui prend la forme générale du syllogisme[1], mais constitue une catégorie de syllogisme particulier : le *syllogisme scientifique* [2], fait de deux propositions, les prémisses dont l'enchaînement conduit nécessairement à une troisième, la conclusion par l'intermédiaire de leur terme commun ou moyen terme : "ce que nous appelons ici **savoir**, c'est connaître par le moyen de la démonstration. Par **démonstration**, j'entends le syllogisme scientifique, et j'appelle syllogisme scientifique, un syllogisme dont la possession même constitue la science" ;

- les éléments constitutifs du raisonnement déductif, en précisant les concepts et les rôles des différentes propositions : thèse, hypothèse, axiome, principe[3].

PRINCIPE
T
qui est au commencement (à l'origine) et commande à la suite

IMMEDIAT
T
qui ne résulte pas d'autre chose, qui n'a pas d'antécédent sans intermédiaire

AXIOME : connu par intuition s'impose à l'esprit

THESE

pose l'existence de son objet ou sa non existence affirme ou nie ) = HYPOTHESE

pose la nature de son objet, le sens d'un mot ) = DEFINITION

- les exigences auxquelles la démarche démonstrative doit satisfaire : l'ordre de la connaissance et le statut des points de départ d'une part, la précision dans les définitions des principes d'autre part.

La connaissance ne peut être assurée que si ses points de départ sont vrais : la démonstration doit partir de prémisses premières et indémontrables, plus connues que la conclusion qu'on en tire et antérieures à elle ; les prémisses sont cause de la conclusion[4].

La méthode cartésienne[5] [6] rappellera qu'il faut conduire par ordre ses pensées et que l'ordre de la connaissance va de ce qui est premier : les idées simples saisies immédiatement par

---

1 ARISTOTE, Premiers analytiques, I,1 24b 15-30 p. 4-5 et Topiques, Trad. J. Tricot, Vrin 1965, I,1, 100a 25, p.2.

2 ARISTOTE, Seconds analytiques, I,1 71b 15-20 p. 8 et Premiers analytiques, I,1, 24a 15 et 20-25, p. 2-3.

3 ARISTOTE, Seconds analytiques, I,2, 72a 15-25, p. 11-12.

4 ARISTOTE, Seconds analytiques, I,2, 71b 20 à 72a 5, p. 8-9.

5 DESCARTES R., Discours de la méthode, Deuxième partie, ib. p. 137-138-139.

6 DESCARTES R., Secondes réponses (aux objections faites... aux méditations...), ib. particulièrement p. 387-389.

l'esprit (intuition) au complexe qui résulte de leur composition et dont la compréhension relève des "longues chaînes de raison" (démonstration).

La définition des principes doit être précise pour éviter erreur et indécision et Aristote prend comme cas exemplaire les mathématiques pour montrer qu'alors que l'enchaînement bon, la conclusion demeure problématique lorsque la thèse n'est pas suffisamment précisée[1].

Pascal au XVIIè siècle précise la nature des définitions en mathématiques[2]. Il reprend la distinction scolastique entre définition nominale et définition réelle. La première, définition de nom, ne fait qu'attribuer un nom à quelque chose, en cela elle éclaircit et abrège le discours. Mais à la différence de la définition réelle ou définition de chose, elle ne dit rien de la nature, des caractéristiques de ce qui est dénommé. A cette différence correspond la distinction entre un idéal de démonstration et le seul mode accessible à l'homme. L'idéal serait de tout définir réellement et de tout prouver. C'est le "véritable ordre" qui dépasse la démonstration mathématique et qui est inaccessible à l'homme. Le seul qui lui soit accessible c'est celui des mathématiques qui consiste à partir de choses claires pour la lumière naturelle, c'est-à-dire qui se passent de définition et qui sont impossibles à définir. Tout ce qu'on peut en dire sera moins clair qu'elles. Ce sont des "mots primitifs" à partir desquels il convient de déterminer le sens que l'on attribue aux autres mots. C'est un ordre inférieur à l'ordre idéal parce qu'il est moins convaincant, mais il est tout aussi certain : il est parfaitement véritable parce que, partant de définitions qui nomment ce qui est, il a son fondement dans l'être, comme chez Aristote.

### 4. Au fondement de la démonstration une conception de la connaissance et du vrai

La démonstration établit une connaissance nécessaire de quelque chose parce qu'elle nous donne sa cause nécessaire[3]. La scolastique, philosophie enseignée dans les Ecoles du Moyen-Age et jusqu'au XVIè siècle, fondée sur le commentaire d'Aristote par Saint Thomas d'Aquin (XIIè siècle), résumera cette conception du savoir par la formule : "connaître c'est connaître par les causes". La voie avait été tracée par Platon qui dans Ménon[4] distingue la science de l'opinion vraie par l'enchaînement d'un raisonnement de causalité dont la seconde est dépourvue.

En reliant l'ordre des raisons à l'ordre des causes, cette conception fonde la pensée vraie dans l'être. Au "dire vrai c'est dire ce qui est " d'Aristote répond le "verum adéquation est rei et intellectus" (le vrai est l'accord de la chose et de l'esprit) de la Scolastique.

La démonstration établit donc une connaissance absolument certaine parce qu'elle exhibe l'ordre des causes qui est celui de l'enchaînement réel des choses. Ce qui suppose un en-deça de la démonstration : le point de départ qui lui est antérieur (voir 3.) et qui comme tel ne relève pas d'elle, mais d'un autre mode de connaissance, qui lui n'est pas discursif, sans quoi l'esprit serait condamné à la régression à l'infini dans l'établissement de la vérité des points de départ. "Il est nécessaire de s'arrêter" (*Anankê sthénaï* ) une des formules aristotéliciennes qui passeront dans la scolastique comme parole de Maître dont la vérité est imposé par l'incontestable "*Magister dixit* " ("le Maître a dit").

Refus de la régression à l'infini, affirmation de l'existence d'un indémontrable et affirmation de la possibilité d'une connaissance intuitive sont trois façons différentes d'exprimer ce qui assure la vérité de la démonstration. La connaissance intuitive est la saisie immédiate des principes premiers. Axiomes au sens propre du terme, par lesquels le réel

---

[1] ARISTOTE, Topiques, Trad. J. Tricot, Vrin 1965, VIII, 3, 158 b 10 à 35 p. 332-333 (Tome V de l'Organon).

[2] PASCAL B., De l'esprit géométrique, Section I in Oeuvres complètes, l'Intégrale, Le Seuil, 1963, p. 349-350.

[3] ARISTOTE, Seconds analytiques, I,2, 71b 10-15, p. 7-8.

[4] PLATON, Menon, 97a 98a, ib. p. 369-371.

s'impose à l'esprit dans l'évidence, ils sont par nature indémontrables parce qu'ils sont absolument premiers et que tout le reste en dépend. De surcroît ils n'ont nullement besoin de démonstration en raison de leur évidence.

Il en résulte une *conception déductive* des mathématiques. A la différence de son maître Platon, qui voyait dans les mathématiques une connaissance hypothético-déductive, Aristote élabore une conception de la connaissance et de la démonstration qui fait des mathématiques une connaissance certaine en son genre. Elle n'est pas la connaissance absolue puisque la vérité de ses points de départs est en dehors d'elle et relève en dernier ressort de ce qui s'appellera ensuite la métaphysique, "science de l'Etre en tant qu'être"[1], "science des premières causes et des premiers principes"[2]. Mais le vrai mathématique est absolument certain, compte tenu de la vérité de ses points de départ et de la nécessité de l'enchaînement de ses raisons.

De même, Descartes dès sa formation au Collège de La Flèche remarque les mathématiques, qui entre toutes les disciplines, lui plaisent "à cause de l'évidence et de la certitude de leurs raisons"[3]. Les vérités mathématiques sont des vérités de raison, indubitables en elles-mêmes, et il faudra toute l'artificialité de l'hypothèse du Malin Génie, fiction d'une puissance rusée et trompeuse pour les remettre en question dans l'entreprise du doute radical[4]. Cependant, là encore le fondement dernier du savoir est dans l'Etre : Dieu, Etre infini, non trompeur, garant de la vérité de tout savoir parce qu'il en est le concepteur, comme il est le créateur, concepteur et producteur de toutes chose. En Dieu, entendement, volonté et création ne font qu'un[5]. La métaphysique définie comme connaissance de Dieu et de notre nature spirituelle (substance pensante) est la base de l'édifice des sciences, ce qu'illustre l'image de l'arbre :

"Ainsi toute la philosophie est comme un arbre, dont les racines sont la métaphysique que, le tronc est la physique, et les branches qui sortent de ce tronc sont toutes les autres sciences, qui se réduisent à trois principales, à savoir la médecine, la mécanique et la morale..."[6].

Mais par delà la généralité de ces points communs, Descartes prend ses distances avec les Anciens en se faisant leur critique à partir de la distinction de ces deux grands types de démonstration que sont l'analyse et la synthèse.

## 5. Les deux grands types de démonstration et le reproche de Descartes aux anciens

"La manière de démontrer est double : l'une se fait par l'analyse ou résolution, et l'autre par la synthèse ou composition"[7].

Avant de les préciser davantage, Descartes explicite ici brièvement leur sens étymologique qui est grec.

---

[1] ARISTOTE, Métaphysique, T1, Livre Γ1, début, p. 171.
[2] ARISTOTE, Métaphysique, T1, Livre A 2, 982 b, p. 15.
[3] DESCARTES R., Discours de la méthode, Première partie, ib. p. 130.
[4] DESCARTES R., Méditations métaphysiques, Première méditation, ib. p. 27a.
[5] DESCARTES R., Lettre au P. Mersenne, du 27 mai 1630, ib. p. 938.
[6] DESCARTES R., Principes de la philosophie, Lettre-Préface, ib. p. 566.
[7] DESCARTES R., Secondes réponses..., ib., particulièrement p. 387-389.

*Analueîn* c'est au sens premier délier : résoudre un tout en ses parties ; résoudre un problème : remonter aux causes et aux conditions par le moyen de la démonstration et l'"*analutikê épistémê* " c'est la science qui apprend à opérer cette remontée[1].

Par opposition *sunthesis* c'est l'action de mettre ensemble, de composer, de combiner.

Ce que Descartes reproche aux Anciens géomètres c'est de ne nous avoir transmis par leurs écrits que la seconde :

"non qu'ils ignorassent l'analyse, mais, à mon avis, parce qu'ils en faisaient tant d'état, qu'ils la réservaient pour eux seuls, comme un secret d'importance"[2].

Or, si la synthèse, en partant des causes ou raisons dont elle déduit les effets ou conséquences, est propre à "arracher le consentement des plus opiniâtres", elle n'est cependant qu'une méthode d'exposition : elle expose l'enchaînement logique, donc nécessaire, des antécédents aux conséquents, mais ne montre pas comment trouver les premiers, c'est-à-dire les causes ou raisons. Ce que fait l'analyse, méthode de découverte qui cherche les raisons en partant de la conclusion :

"et fait voir comment les effets dépendent des causes".

Aristote, déterminant ce que savants et ignorants tiennent pour science, explicite ses conditions qui sont celles du syllogisme scientifique ou démonstratif (cf. 3.) :

| | | |
|---|---|---|
| (...) "que nous connaissons la cause par laquelle la chose est" | = | la raison qui fait que Socrate est mortel : l'attribut *homme* qu'il a en commun avec tous : moyen terme, qui est la raison la conclusion. |
| "que nous savons que cette cause est celle de la chose" | = | que nous établissions une relation entre la raison et la conclusion. |
| et "qu'en outre, il n'est pas possible que la chose soit autre qu'elle n'est" | = | nécessité de la conclusion : exclusion de tout autre possibilité. |
| 1 | | 2 |

Le syllogisme démonstratif tire la conclusion des prémisses qui contiennent la cause, raison de la conclusion ; mais cette cause doit être connue antérieurement. Il ne dit rien de la façon dont on l'a trouvée. Il montre que la cause est bien celle-ci : est bien cause nécessaire de la conclusion, que Socrate est mortel parce qu'il est homme.

Il est bien synthétique au sens explicité par Descartes, il "examine les causes par les effets" en exposant ce qui résulte nécessairement de celles-ci.

On peut résumer les caractéristiques de ces deux démarches dans le schéma synoptique suivant :

---

[1] ARISTOTE, Premiers analytiques, Livre V, I,1, note 1.

[2] DESCARTES R., Secondes réponses... ib.

PREMISSES : RAISONS CAUSES

ANALYSE ou RESOLUTION

Tous les HOMMES sont mortels

Or Socrate est HOMME

SYNTHESE ou COMPOSITION

CONCLUSION : CONSEQUENCES EFFETS

Donc Socrate est mortel

=

Cherche les RAISONS en partant de la conclusion : fait voir comment les EFFETS DEPENDENT DES CAUSES

Méthode de DECOUVERTE

Méthode de COMPOSITION EXPOSITION

=

se refère aux RAISONS et les expose pour aboutir à la conclusion : EXAMINE LES CAUSES PAR LEURS EFFETS, en exposant ce qui en résulte

On trouvera une analyse des défauts reprochés par le XVIIè siècle à la méthode des Anciens dans l'étude de E. BARBIN[1].

Cependant, par-delà la distance prise par rapport aux Anciens et malgré la critique de leurs écrits, la pensée cartésienne qui ouvre l'époque moderne ne constitue pas pour autant une révolution dans la conception du savoir et les démarches de l'esprit qui y conduisent. Il s'agit toujours de découvrir, de voir ou de faire voir des vérités que l'esprit ne constitue pas, mais qui préexistent à son travail, vérités "qui ont été établies de Dieu et en dépendent entièrement, aussi bien que tout le reste des créatures"[2].

Et si ce changement dans la conception générale du savoir est opéré en philosophie au siècle suivant par la philosophie critique de Kant, ce n'est qu'au XIXè siècle que le statut des axiomes et par voie de conséquence celui des mathématiques avec son modèle euclidien se trouvent remis en question par le travail mathématique lui-même.

## 6. Le modèle de rigueur et sa mise en cause

Les Eléments d'Euclide (IIIè s avant J.C.), apparaissent mettre en application -ou réaliser- les exigences définies par Aristote concernant la science démonstrative. C'est la première construction des mathématiques sous forme d'un système déductif[3] qui explicite ses points de départ. En cela on peut dire qu'elle constitue la première forme d'axiomatique, en tant qu'elle est une théorie déductive à partir d'un nombre limité de principes de base :

- les définitions (cf. 3.)
- les postulats ou demandes
- les axiomes ou notions communes

à partir de quoi et à l'aide desquels pourront s'opérer les démonstrations de propositions mathématiques, dénommées de façon significative, théorèmes, dans cette conception qui fait du vrai un objet de découverte et de contemplation intellectuelle (theoria) : theorema c'est

1 BARBIN E., La démonstration mathématique, significations épistémologiques et questions didactiques, In : Bulletin APMEP, n° 366, déc. 88, p. 591-620.

2 DESCARTES R., Lettre au P. Mersenne du 15 Avril 1630, ib. p. 933.

3 DHOMBRES J., etc, Mathématiques au fil des âges, Gauthier Villars, 1987, p. 235.

étymologiquement, ce qui est contemplé, vu ici "avec les yeux de l'esprit" et par suite est objet d'étude.

De même que la logique a pu apparaître être sortie quasi-achevée de la tête d'Aristote sans progrès notable, à tel point que Kant s'est pensé autorisé à juger que "selon toute apparence elle semble arrêtée et achevée"[1] de même, la construction d'Euclide a pu paraître comme un modèle de rigueur, la forme que doit prendre la pensée qui répond aux exigences d'une démarche mathématique.

"Il faut avouer que les Grecs ont raisonné avec toute la justesse possible dans les mathématiques et qu'ils ont laissé au genre humain les modèles de l'art de démontrer"[2].

En fait, l'histoire des mathématiques montre, comme R. Blanché le rappelle dans l'Axiomatique[3], que les mathématiciens n'ont pas attendu le XIXè siècle pour contester la rigueur de la construction euclidienne. Dès l'Antiquité l'intervention de postulats, distincts des axiomes, et qui apparaissaient comme des théorèmes à admettre a choqué puisque des démonstrations ont été tentées par les mathématiciens alexandrins, puis arabes, sans succès.

Ce qui est appelé *axiome*, c'est, au sens étymologique du terme ce qui est jugé juste. Les premiers axiomes sont définis par Aristote comme propositions évidentes en raison de leur simplicité. Ils sont par nature et statut indémontrables : impossibles à résoudre en éléments plus simples, opération qui serait de toute façon superflue puisque, en raison de leur simplicité, ils sont évidents. Ils s'imposent à l'esprit dans une saisie immédiate ; ils sont objets d'intuition ; on les traduit parfois par "*notions communes* " parce que leur vérité s'impose immédiatement à tous, par exemple "le tout est plus grand que la partie". Ce qu'on nomme *postulat* dans la pensée antique et classique c'est une proposition que l'on demande d'admettre sans démonstration parce qu'elle semble pouvoir s'en passer, mais à la différence de l'axiome, le postulat n'est pas par nature indémontrable : par exemple le Vè postulat qui a joué un rôle si important dans l'histoire des mathématiques : "par un point situé hors d'une droite, on ne peut mener qu'une seule parallèle à cette droite".

Cette différence de statut entre axiome et postulat dans les Eléments permet de dire que cette première construction mathématique n'est pas entièrement axiomatisée. Ce n'est qu'une première ébauche de ce qui deviendra à l'époque moderne une démarche axiomatique dont on trouvera les caractéristiques étudiées dans R. Blanché[4].

La contestation de cette différence par les essais de démonstration renouvelés pour transformer le Vè postulat en théorème, éclaire le rôle fondamental accordé à la démonstration dans la construction des mathématiques : facteur de rigueur et par là (c'est-à-dire dans la nécessité de ses enchaînements) critère incontestable de la certitude.

La constitution des géométries non-euclidiennes qui se construisent en prenant comme axiome l'une des deux négations possibles du Vè postulat (aucune ou plusieurs parallèles) :

- gomme la distinction entre axiome et postulat ;

- éclaire la nature axiomatique de la démarche mathématique ;

- contribue à orienter l'axiomatisation vers une exigence accrue de formalisation pour évacuer les pièges du langage et de l'intuition communs[5].

---

[1] KANT E., Critique de la raison pure, Préface à la seconde édition, ib. p. 15.
[2] LEIBNIZ G., Nouveaux essais sur l'entendement humain, Ed. Garnier Flammarion, n° 92, 1966, L. IV, Ch. II, §9, p. 326.
[3] BLANCHE R., L'Axiomatique, P.U.F., 1965, 3è édition, p. 4-5.
[4] BLANCHE R., L'Axiomatique, ib. ch. II-III.
[5] BLANCHE R., L'Axiomatique, ib. ch. III.

Dans cet accroissement des exigences de rigueur qui vise à se donner des moyens adaptés, ce qui est remis en question, ce n'est pas la démonstration, c'est-à-dire la déduction à partir de points de départ posés avant elle (cf. Aristote 3.), ce n'est pas la nécessité de démontrer, mais c'est ce que l'on va tenir pour une véritable démonstration qui est en cause, ainsi que le statut de la connaissance mathématique.

Si une géométrie construite contre l'intuition commune qui est celle de l'espace euclidien, peut prétendre au même statut de vérité mathématique que la géométrie euclidienne peut-on encore s'en tenir à la conception classique de la connaissance comme découverte d'une vérité extérieure à l'esprit ou bien faut-il en arriver à cette conception extrême d'une construction "arbitraire" (c'est-à-dire soumise à ses seules règles) de l'esprit engendrant des systèmes de pensée conventionnels en leurs points de départ et qu'on pourrait sélectionner par leur capacité à représenter de façon plus ou moins compréhensive, "plus commode" disait Poincaré à propos de la géométrie euclidienne[1], tel type de réalité étudié par ailleurs ?

## 7. Vers une conception des mathématiques comme construction autonome ?

La démonstration perd-elle de sa nécessité, et par conséquent, la connaissance de sa certitude voire même son statut de connaissance, si elle n'est plus l'expression de l'ordre des choses, mais ce que l'esprit élabore à partir de ses propres décrets ?

L'analyse kantienne des fondements d'une connaissance certaine voit dans les mathématiques le modèle-même d'une connaissance rationnelle qui a su suivre dès l'Antiquité "chez l'admirable peuple grec, la route sûre de la science", et cela par l'effet d'une "révolution intellectuelle"[2] dont Kant repère la répétition aux XVIè - XVIIè siècles en physique et en chimie et dont il tire les conséquences en opérant un renversement dans la conception classique de la connaissance, renversement qu'il compare à celui opéré par Copernic en Astronomie : il n'y a pas d'intuition intellectuelle de la nature et de l'ordre des choses[3]. La réalité en elle-même demeure cachée -ou inaccessible- mais les catégories de l'entendement nous permettent d'élaborer une connaissance certaine de leur phénomène c'est-à-dire de ce qui se manifeste à nous dans l'expérience sensorielle (intuition sensible)[4]. Analysée dans son processus de production, la connaissance ne peut plus être pensée comme vision intellectuelle ou contemplation des essences ou idées (Platon) ou intuition intellectuelle des natures simples (Descartes), mais comme une construction de l'esprit qui à l'aide de ses catégories, principes et concepts, structure un donné intuitif qui lui est fourni par la sensibilité.

Les mathématiques s'élaborent par *construction de concepts* dans l'intuition pure des formes a priori de la sensibilité : le temps et l'espace ; "pure", "a priori" c'est-à-dire qui ne sont pas dérivés de l'expérience sensible (ou sensorielle).

"Le premier qui démontra le triangle isocèle (qu'il s'appelait Thalès ou comme l'on voudra) eut une révélation ; car il trouva qu'il ne devait pas suivre pas à pas ce qu'il voyait dans la figure, ni s'attacher au simple concept de cette figure comme si cela devait lui en apprendre les propriétés, mais qu'il lui fallait réaliser (ou construire) cette figure, au moyen de ce qu'il y pensait et s'y représentait lui-même A PRIORI par concepts (c'est-à-dire par construction), et

---

1 POINCARE H., La Science et l'Hypothèse, Flammarion Sciences, 1968, Ch. III : Les Géométries non-euclidiennes (1891), p. 76.

2 KANT E., Critique de la raison pure, ib. Préface à la seconde édition, p. 16-17.

3 KANT E., Logique Transcendantale, ib. p. 77.

4 KANT E., Critique de la raison pure, ib. Préface à la seconde édition, p. 20.

que, pour savoir sûrement quoi que ce soit A PRIORI, il ne devait attribuer aux choses que ce qui résulterait nécessairement de ce que lui-même y avait mis, conformément à son concept"[1].

Dans la Théorie transcendantale de la méthode, deuxième partie de la Critique de la raison pure[2], Kant explicite cette démarche constructive qui fait la nécessité de la connaissance mathématique :

"La Mathématique fournit l'exemple le plus éclatant d'une raison pure qui réussit à s'étendre d'elle-même et sans le secours de l'expérience (...).

La connaissance *philosophique* est la *connaissance rationnelle par concepts* et la connaissance mathématique est une connaissance rationnelle par *construction* des concepts. Mais *construire* un concept, c'est représenter (*darstellen* ) a priori l'intuition qui lui correspond. La construction d'un concept exige donc une intuition *non empirique*, qui, par conséquent, en tant qu'intuition, soit un objet (Object) *singulier*, mais, qui, néanmoins, comme construction d'un concept (d'une représentation générale) doit exprimer dans la représentation (*Vortellung* ) quelque chose d'universel qui s'applique à toutes les intuitions possibles appartenant à ce concept. Ainsi, je construis un triangle en représentant l'objet correspondant à ce concept, soit par la simple imagination (*Einbildung* ), -dans l'intuition pure,- soit, d'après celle-ci sur le papier, -dans l'intuition empirique,- mais, dans les deux cas, pleinement *a priori*, sans en avoir emprunté le modèle à une expérience quelconque. La figure singulière qu'on a dessinée est empirique et cependant elle sert à exprimer le concept malgré sa généralité, parce que dans cette intuition empirique on ne considère jamais que l'acte de la construction du concept, auquel beaucoup de déterminations comme celles de la grandeur, des côtés et des angles, sont tout à fait indifférentes et qu'on fait, par suite, abstraction de ces différences, qui ne changent pas le concept du triangle".

Les propositions mathématiques sont donc *synthétiques a priori* [3], *synthétiques* puisqu'elles expriment une construction de concepts et non un simple développement analytique ou explicitation : en cela elles augmentent nos connaissances ; et *a priori* , c'est-à-dire ayant la certitude de la nécessité puisqu'elles n'empruntent rien à la relativité de l'expérience sensible ou empirique : elles tiennent leur nécessité de structures internes à l'esprit.

Les analyses de Wittgenstein, regroupés dans Remarques sur les fondements des mathématiques[4] qui rassemblent des fragments s'étendant de 1937 à 1944, permettent de prolonger cette perspective en même temps qu'elles la déplacent.

Analysant comment procède l'esprit dans l'activité mathématique, Wittgenstein y voit une activité de construction, créatrice de normes ou règles qui déterminent non ce qui est, mais ce qui doit être. Au fondement de la nécessité source de la certitude se trouve *la règle* c'est-à-dire ce que l'esprit reconnait comme une règle.

"Quand je dis : "cette proposition suit de celle celle-ci", c'est là la reconnaissance d'une règle. Elle s'effectue sur la base de la preuve. C'est-à-dire que j'admets cette chaîne (cette figure) comme preuve. - "Mais pourrais-je faire autrement ? Dois-je ne pas l'admettre ?" - Pourquoi dis-tu que tu dois ? C'est bien parce qu' à la fin de la preuve tu dis par exemple : "Oui. - je dois reconnaître cette inférence". Mais ce n'est là que l'expression de ta reconnaissance inconditionnelle (...)[5]

---

[1] KANT E., Critique de la raison pure, ib. Préface à la seconde édition, p. 16-17.

[2] KANT E., ib. Théorie transcendantale de la méthode, Ch. I, Première Section, ib. p. 77.

[3] KANT E., Critique de la raison pure, Introduction, Ib. p. 40-41 et Prolégomènes à toute métaphysique future qui pourra se présenter comme science, Trad. J. Gibelin, Vrin 1968, Avant propos, § 2 p. 23-25.

[4] WITTGENSTEIN L., Remarques sur les fondements des mathématiques, NRF Gallimard, 1983.

[5] WITTGENSTEIN L., ib. Première partie (1937-38) : § 33 p. 46.

(...) "L'on pourrait dire que la preuve ne montre pas simplement qu'il en va ainsi mais : comment il en va ainsi. Elle montre comment 13 + 14 font 27.

"On doit pouvoir avoir une vue d'ensemble de la preuve" - signifie : nous devons être prêts à l'employer comme principe de nos jugements.

Quand je dis que "la preuve est une image" - on peut la voir comme une image cinématographique.

On fait la preuve une fois pour toutes.

Naturellement, la preuve doit être exemplaire.

La preuve (la figure démonstrative) nous montre le résultat d'un processus (de construction) ; et nous sommes persuadés qu'un processus réglé de cette façon conduit toujours à cette image.

(La preuve nous montre un fait synthétique)[1].

"Qu'y a-t-il d'inébranlablement certain dans ce qui est prouvé ? Reconnaître une proposition comme d'une certitude inébranlable -dirais-je- signifie l'appliquer comme une règle grammaticale : c'est par là qu'on la soustrait à l'incertitude"[2].

*La règle est posée comme telle* par l'esprit dans son activité opératoire.

L'"inexorabilité" des mathématiques tient à la détermination précise et fixe des règles posées dans l'énoncé des propositions mathématiques par lesquelles les mathématiques construisent des concepts :

"Le Doit mathématique n'est qu'une autre expression du fait que les mathématiques construisent des concepts. Et les concepts servent à concevoir. Ils correspondent à un traitement déterminé des états de fait. Les mathématiques constituent un réseau de normes"[3].

Par conséquent, loin de signifier une quelconque réalité empirique ou idéelle dont elles tiendraient leur sens, les propositions mathématiques sont des *déterminations de sens*, de ce que l'on peut faire et "dire avec sens"[4].

Créatrice de normes et par voie de conséquence de sens, les mathématiques sont création de part en part sans qu'on puisse délimiter a priori leur champ d'extension, celui-ci s'ouvrant à mesure qu'elles se développent : pas de préexistence d'un "champ" mathématique avec des objets existant antérieurement à l'activité de construction des concepts mathématiques ; et toute nouvelle preuve, toute nouvelle démonstration sont *créatrices* de nouveaux objets ou concepts ou de nouvelles relations entre des concepts antérieurement construits, rendant ainsi possibles de nouvelles utilisations de ceux-ci.

(...) "La preuve crée un nouveau concept en tant qu'elle est ou crée un nouveau signe. Ou bien en tant qu'elle donne une nouvelle place à la proposition qui est son résultat (car la preuve n'est pas un cheminement, mais un chemin)"[5].

(...) "Que signifie : "Une preuve est une entité propre qui ne se laisse remplacer par aucune autre ?". Cela signifie que toute preuve particulière a son utilité propre qui n'est celle d'aucune autre. L'on pourrait dire que toute preuve même d'une proposition déjà prouvée est une contribution aux mathématiques"(...) La nouvelle preuve montre (ou crée) une nouvelle connexion"[6].

---

[1] WITTGENSTEIN L., ib. Troisième partie (1939-1940) ; § 22 p. 150.
[2] WITTGENSTEIN L., ib. Troisième partie, § 39 p. 157.
[3] WITTGENSTEIN L., ib. Septième partie (1941 et 1944) : § 67 p. 341.
[4] WITTGENSTEIN L., ib.Troisième partie, § 28 p. 153.
[5] WITTGENSTEIN L., ib. Troisième partie, § 41 p. 159.
[6] WITTGENSTEIN L., ib, Troisième partie, § 60 p. 172-173 ; § 31 p. 154.

Le processus de preuve rationnelle qu'est la démonstration trouve donc son fondement dans l'activité-même par laquelle il se construit, institue ses règles et s'institue comme règle, dans une autonomie intégrale où se trouve récusé ce qu'on a appelé à la suite de P. Bernays[1] le platonisme mathématique.

Ne pourrait-on voir là l'accomplissement du renversement dans l'ordre du savoir que Kant jugeait indispensable pour rendre compte de l'existence effective de connaissances rationnelles certaines -nécessaires et universelles- telles qu'on en trouve dans les sciences exactes ? Voir en toute connaissance véritable cette activité de construction par laquelle mathématiques et physique se sont constituées en sciences et par conséquent supposer que "ce sont les objets qui se règlent sur l'esprit" et non "l'esprit sur les objets à connaître", tel était le fil conducteur de la Critique de la raison pure, que Kant présentait dans la Préface à la seconde édition[2] et ce pourquoi il comparait sa démarche à celle de Copernic.

Cependant, en mettant l'accent sur la création a priori non délimitable de règles qui font que le champ mathématique est toujours ouvert, Wittgenstein ne nous renvoie-t-il pas "au-delà" de l'analyse de Kant et du projet qui définissait son entreprise comme critique, à savoir visant la détermination des limites de toute connaissance possible, c'est-à-dire en fait celle de l'esprit humain, dans le but, il est vrai, non pas de déterminer la limite des mathématiques mais la possibilité d'une connaissance métaphysique de toutes choses ?

---

[1] BERNAYS P., Le platonisme dans les mathématiques, in l'Enseignement mathématique, Genève 34/1935/1.2.
[2] KANT E., Critique de la raison pure, ib. Préface à la seconde édition, p. 18-19.