

Aire du triangle, du quadrilatère, des polygones. Un P.A.E. dans le second cycle

Yvette HORAIN
Professeur de Mathématiques
Lycée Watteau à Valenciennes
I.R.E.M. de Lille

Durant l'année scolaire 1985-1986, une expérience d'enseignement des mathématiques, par l'introduction d'une perspective historique, a été tentée au lycée Watteau de Valenciennes dans le cadre d'un P.A.E. (Projet d'Action Educative) culturel centré sur l'Abbaye de Saint-Amand-les-Eaux, située à quinze kilomètres de Valenciennes. Du Monastère, élevé au 7ème siècle par le moine missionnaire AMAND, plusieurs fois saccagé, incendié, et restauré, il ne reste qu'une tour qui servait de portail à l'Eglise abbatiale, et l'échevinage, ancienne entrée principale de l'Abbaye, qui contenait les salles de réunion du magistrat, les salles de justice, et les prisons. Les moines bénédictins avaient des conditions d'existence dures et laborieuses, ils étaient obligés à la lecture et au travail manuel ou intellectuel. L'intérêt de ce célèbre Monastère réside surtout dans son rayonnement intellectuel, du 8ème au 18ème siècle, comme en attestent archives et manuscrits en provenance du scriptorium de l'Abbaye, conservés en Bibliothèque Municipale de Valenciennes. Une consultation de manuscrits du 9ème et du 17ème siècles a motivé un travail sur le calcul des aires, axé sur la problématique du quadrilatère:

- calcul de l'aire d'un quadrilatère dont on connaît les côtés;
- construction, avec quatre côtés donnés, d'un quadrilatère inscriptible dans un cercle;
- construction d'un quadrilatère inscriptible dans un cercle dont l'aire, les diagonales, les perpendiculaires, et divers autres segments, ainsi que le diamètre du cercle circonscrit, soient rationnels (quadrilatère de BRAHMEGUPTA).

L'arithmétique qui ne figure pas au programme de mathématique des classes de second cycle s'est imposée par l'étude du triangle rectangle en nombres entiers ou rationnels. Certains élèves se sont passionnés pour les

questions de FERMAT, tous se sont détournés des œuvres de GAUSS, trop difficiles à lire.

Durant toute l'année scolaire 1985-1986, les élèves ont eu un comportement actif, les difficultés étant essentiellement d'obtenir une trace écrite de leur travail. Les élèves de seconde (15-16 ans) ont avancé plus lentement que leurs aînés, et n'ont pas fait les raisonnements subtils en arithmétique, mais tous ont montré de la curiosité et de l'intérêt dans la résolution des problèmes. Ils ont pu saisir la portée des notions étudiées et l'efficacité des techniques mises en jeu dans la recherche de démonstrations simples et convaincantes, dans la formulation des résultats. Ils ont montré de l'attention pour le développement de la pensée scientifique et la progression des idées, par l'approfondissement des connaissances et la rectification des erreurs. En même temps, ils ont découvert la fragilité et les difficultés de communication du savoir scientifique.

Cet article donne un aperçu du cheminement des élèves. Un document plus complet peut être consulté à l'IREM de Lille.

I- Le projet de P.A.E.

septembre 1985

Notre projet de P.A.E. pour l'année scolaire 1985-1986, centré sur l'Abbaye de Saint-Amand-les-Eaux, vise d'abord à faire prendre conscience aux élèves comment un lieu précis se trouve avoir été traversé, pendant de longs siècles, par les différentes dimensions de l'Histoire Humaine. Du 8ème au 18ème siècle, l'Abbaye de Saint-Amand participa activement à l'histoire de chaque époque, sous différentes formes: Histoire de l'Art, Histoire des Sciences et des Lettres, Histoire de France, ... Cette prise de conscience doit amener les élèves à mieux vivre et à mieux connaître leur patrimoine culturel local. Ces objectifs seront mieux atteints dans le cadre d'une démarche pluridisciplinaire. Par elle, l'étude de la complexité et de l'interaction des différentes composantes de ce passé n'en sera que plus enrichissante pour les élèves. Ces objectifs généraux, partagés et pris en charge par les différents participants enseignants, se concrétisent de manière spécifique dans le cadre de chaque discipline impliquée: français, histoire, philosophie, mathématiques, ...

En mathématiques, le travail des élèves s'organisera autour de trois thèmes:

Le premier thème est: *Aire du triangle, du quadrilatère, des polygones*. Une consultation de manuscrits du 9ème et du 17ème siècles, en provenance du scriptorium de l'Abbaye de Saint-Amand, et disponibles en Bibliothèque Municipale de Valenciennes, donnera une idée des travaux des moines de l'Abbaye et des géomètres, jusqu'au 17ème siècle. A partir de là, on pourra approfondir l'étude de figures géométriques.

Le deuxième thème est: *La perspective linéaire*. On amènera les élèves à "lire" des tableaux à partir du problème de la perspective. On analysera notamment un tableau exposé au Musée des Beaux-Arts de Valenciennes: *L'Abbaye de Saint-Amand-les-Eaux*, œuvre de NEYTS (vers 1617-1687). On étudiera les différentes techniques de la perspective linéaire, après les avoir replacées dans leur contexte historique et culturel. Cette initiation aux règles de la perspective servira de préliminaire à l'étude de la géométrie dans l'espace.

Le troisième thème est: *Le nombre d'Or*. Après avoir donné un aperçu culturel et historique de la question, on introduira quelques problèmes mathématiques qui lui sont liés: irrationalité, polygones et polyèdres réguliers convexes ou étoilés, suites fibonacciennes géométriques ou non, ... On amènera ensuite les élèves à découvrir les applications esthétiques de ces données mathématiques, notamment dans l'analyse du plan de l'Eglise abbatiale reconstruite au 17ème siècle par l'Abbé DU BOIS (1622-1673) selon les indications de RUBENS dit-on, plan établi selon le thème du double carré.

D'autre part, à la veille du centenaire de la naissance de LE CORBUSIER (1887-1965), on présentera le Modulor et l'architecture nouvelle. De plus, en rapport avec l'actualité, on préparera une visite de l'exposition *Europalia 85 Espana- Picasso - Miro - Dali* qui doit avoir lieu du 26 septembre au 22 décembre 1985. On montrera la présence du nombre d'Or dans l'œuvre de DALI.

Les principaux partenaires de ce P.A.E. sont des élèves de second cycle (seconde (15-16 ans), première (16-17 ans), terminale (17-18 ans)) et les professeurs de français, histoire, philosophie, mathématiques, des classes concernées.

Les élèves de niveaux différents, par le recours à des exposés, mettront à la disposition des uns, le travail des autres. Par ailleurs, en obligeant les élèves à sortir du "texte", comme seule source de connaissances, ce travail cherche à faire découvrir d'autres formes d'expression traditionnellement négligées dans nos enseignements: peintures, enluminures, manuscrits, constructions architecturales, ... Par l'intégration des mathématiques à ce travail d'équipe, a priori plus littéraire, car centré sur le "culturel", il s'agira aussi de sortir de l'abstraction mathématique, et de viser à une compréhension des mathématiques appliquées, et donc de la possible mathématisation de situations concrètes.

Nous voudrions enfin ouvrir le travail des élèves sur l'extérieur, sur leur environnement socio-culturel, sur leur vécu, sortir le travail du lycée, de sa monotonie routinière et individualiste, tout en lui gardant sa rigueur et son objectif principal, la préparation à l'examen.

II- Le déroulement du P.A.E.

Le premier trimestre de l'année scolaire a été consacré à la découverte de l'Abbaye et de la ville de Saint-Amand-les-Eaux. Les élèves ont d'abord visité les monuments en place et une exposition de sculptures, tableaux, manuscrits, archives, ... concernant les anciennes églises du Valenciennois. En histoire, les élèves ont étudié le temporel de l'Abbaye. En mathématiques et en philosophie, les élèves ont monté une exposition sur la perspective et la notion d'espace: techniques de la mise en perspective de DURER, utilisation de la perspective dans la construction d'un tableau, perspective comme forme symbolique ... Si les élèves les plus scolaires, souvent peu sensibles aux arts, ont montré un enthousiasme modéré, beaucoup d'autres, habituellement en situation d'échec se sont révélés actifs et imaginatifs, sachant mener en géométrie dans l'espace des raisonnements délicats, logiques et rigoureux. Le thème du nombre d'Or a surtout motivé un travail sur les suites et une étude des polyèdres réguliers, le manque de temps n'ayant pas permis d'autres considérations.

La consultation de manuscrits, en février, a été préparée en mathématiques, philosophie et français. Elle a motivé le travail des élèves pendant les deux derniers trimestres. En mathématiques, partant de notions très élémentaires sur l'aire de figures géométriques, la problématique du quadrilatère s'est montrée féconde et a débouché sur une recherche en arithmétique. Les comptes rendus d'activités montrent les objectifs visés, la préparation des séances par tous les élèves à partir de documents distribués, la prise en charge d'exposés par de petites équipes, la progression du travail et l'enchaînement des activités.

III- Aire du triangle

Ce thème a fait l'objet d'une activité en classe qui a duré une heure et demie, tant pour les élèves de première que pour les élèves de seconde. Les objectifs étaient d'établir quelques relations métriques du triangle et de préparer une consultation de manuscrits disponibles en Bibliothèque Municipale de Valenciennes. Les manuscrits en provenance du scriptorium du Monastère de Saint-Amand-les-Eaux traitent le problème des aires et permettent de se faire une idée du développement local des savoirs mathématiques, du 9ème au 17ème siècle.

L'activité a été préparée début janvier.

Les côtés d'un triangle mesurent 13cm, 14cm, 15cm. Quelle est l'aire de ce triangle ?

Les élèves dessinent le triangle donné. A l'aide d'une équerre ou d'un compas, ils tracent une hauteur, la mesurent, puis, appliquant la formule $S = \frac{b \times h}{2}$, annoncent une aire qui est comprise entre $83,5 \text{ cm}^2$ et $85,4 \text{ cm}^2$.

Quelle est l'aire exacte de ce triangle ?

Les élèves ne connaissent que la formule $S = \frac{b \times h}{2}$ pour calculer l'aire du triangle, et la méthode graphique pour obtenir la hauteur du triangle. Les tracés soignés mais imprécis ne leur permettent pas de se mettre d'accord.

Le triangle 13 - 14 - 15 apparaît dans les traités de géométrie de tous les peuples, depuis les temps les plus reculés. L'aire de ce triangle a été étudiée par les moines du monastère de Saint-Amand-les-Eaux. Voici deux extraits de leurs manuscrits:

- * Comment sont mesurés les triangles scalènes, des *Oeuvres Mathématiques et Astronomiques* de Jean BAYART, Valencenois, 1652.
- * *Sifuirit trigonum scalenum*, d'un manuscrit anonyme du 9ème siècle, *Traité de Grammaire, de Rhétorique, de Musique*.

Chez vous, essayez de lire ces textes, écrivez et effectuez les calculs indiqués, retrouvez la méthode employée.

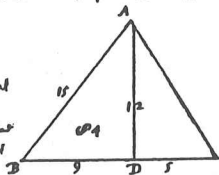
Au début de son texte, Jean BAYART fait appel à la 2. du 2. d'EUCLIDE *Livre des Eléments*, puis à la 47. du 1. d'EUCLIDE. Il s'agit de la Proposition XLVII du Livre I, et de la Proposition XIII du Livre II, dont voici les textes. Qui veut bien, dans quinze jours, nous exposer ces propositions ?

Les textes sont distribués à tous les élèves. Trois volontaires se désignent.

Essayez de vous documenter sur les propriétés exceptionnelles du triangle 13 - 14 - 15, et de trouver d'autres triangles également intéressants.

Proposition 4
Comment sont mesure les triangles
Scalenes.

Pour les tringlets Grands il y a plus de difficultés de lous-
ner sans perdition d'écrits qu'en tringlets petits de
lousner sept ou quatre à la fois de leur bas, le plus
de la grosseur de l'oreille et du 2. d'écrit. car de lous-

[illegible][illegible]

Bz: dunt poud ofter goud edinen poudpoudt lous poud poudy du
 plant goud, 228. ofter vout vol van AB. il le plant q'poudt, si foy
 qu'on ne fust 228. puis plant biffz q'poudt le plant goudy d'ituy
 d'elc bief BD. q'uz 7 Fg. foy qu'on ne fust 22. quil remittit poud
 d'ituy 228. vif f'ituy 144. d'ut le 22. of 12. poud le lous
 plus de le poudpoudt AB.

Michiel pour la punition du plus petit resté A.C. qui est 13. soy qu'on
se place 169. duquel estant soustrait 25. qu'on de la plus petite
place, est devint le plus 144. dont la $\sqrt{x}$ est 12. remue
des lieux.

finalelement pour donner l'aire dudit triangle GLH ABC.
il faut multiplier la perimétre de la base, défendue par y. par la per-
pendiculaire 12. et donner pour l'aire et content de la superficie
de dudit triangle 124,

$$\begin{array}{r}
 CB \quad AB \quad AC \\
 14 \quad 15 \quad 13 \\
 14 \quad 15 \quad 12 \\
 \hline
 136 \quad 135 \quad 139 \\
 14 \quad 15 \quad 13 \\
 \hline
 136 \quad 135 \quad 139 \\
 \hline
 421 \\
 169 \\
 \hline
 252 \\
 126
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 252 \\
 14
 \end{array}
 \left. \begin{array}{l}
 252 \\
 14
 \end{array} \right\} 9$$

$$\begin{array}{r}
 AB \quad DB \\
 15 \quad 9 \\
 15 \quad 9 \\
 \hline
 157 \\
 157 \\
 \hline
 214 \\
 214 \\
 \hline
 428
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 157 \\
 9 \\
 157 \\
 9 \\
 214 \\
 214 \\
 428
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 134 \\
 12 \\
 12
 \end{array}$$

Oeuvres Mathématiques et Astronomiques de Jean BAYART, Valencenois (1652)

Fol 100 — Proposition 4 — Comment sont mesurés les triangles scalènes

(Transcription élèves de première: 16-17 ans)

Pour les triangles scalènes, il y a plus de difficultés à trouver leurs perpendiculaires qu'aux autres triangles, en raison de leurs côtés inégaux et de la section de leur base, la façon de les trouver est tirée de la 2. du 2. d'EUCLIDE, *Livre des Eléments*.

Il faut ajouter le carré de la base du triangle au carré de l'un de ses côtés, puis de l'addition déduire le carré de l'autre côté et après avoir divisé la moitié de ce qu'il reste par toute la base, ou le total par le double de la base, le quotient sera la partie de la base qui est entre la perpendiculaire et le côté du carré qui a été ajouté, c'est-à-dire qu'il en viendra la plus petite partie de la base si le carré du plus petit côté a été ajouté, ou la plus grande, si le carré du dit plus grand, laquelle partie connue restitue l'autre partie de la base.

Comme par exemple, soit le triangle scalène ABC, duquel le côté AB soit 15, celui de AC 13, et la base 14. Ajoutons le carré de la base qui est 196 au carré de AB 225, et on aura 421 duquel il faut soustraire le carré de AC 169, il restera 252, la moitié duquel est 126 qui est à diviser par 14, longueur de la base du dit triangle. Viendra un quotient 9 pour la plus grande section de la base, et 5 sera pour la plus petite section. Et pour trouver la perpendiculaire, les sections étant trouvées, faire suivant la doctrine qu'avons enseignée du triangle isocèle et selon la 47. du 1. d'Euclide.

Si donc nous cherchons la dite perpendiculaire par le moyen du plus grand côté, comme ici AB, il le faut carrer, et son carré sera 225, puis faut aussi carrer la plus grande section de la base BD qui est 9, son carré sera 81 qu'il conviendra soustraire de 225. Viendront 144 dont la racine carrée est 12 pour la longueur de la perpendiculaire AD.

Mais par le moyen du plus petit côté AC qui est 13, son carré en sera 169 duquel étant soustrait 25 carré de la plus petite section, viendront de même 144 dont la racine carrée est 12, comme avant.

Finalement, pour trouver l'aire du dit triangle scalène ABC, il faut multiplier la moitié de la base, c'est-à-dire 7, par la perpendiculaire 12. On aura pour l'aire de toute la superficie du dit triangle 84.

A regular hexagon with side length a .

SIQUIKIT opregonus
roques pordin areatit. s̄q. multiples sinu later infies e hoc duo equum d̄r
fit. d. hūmeducto. erant ter duobus hōc. x̄x. reliqui. cccē lxx. sumptis patre
inmida fit. ccxxv. tot pdam. ē. huius opregoni ara urchius optegoni manifestum

Traité de Grammaire, de Rhétorique, de Musique
Manuscrit anonyme du 9ème siècle

Les élèves n'ont pas traduit le texte latin, mais ont lu les chiffres romains et retrouvé les calculs indiqués.

Exemples:

Aire du pentagone de côté $a = 10$

$$S = \frac{300 + 10}{2} = \frac{310}{2} = 155 \quad \text{d'où} \quad S = \frac{3a^2 + a}{2}$$

Aire de l'hexagone de côté $a = 10$

$$S = \frac{400 + 20}{2} = \frac{420}{2} = 210 \quad \text{d'où} \quad S = \frac{4a^2 + 2a}{2}$$

Aire de l'heptagone de côté $a = 10$

$$S = \frac{500 - 30}{2} = \frac{470}{2} = 235 \quad \text{d'où} \quad S = \frac{5a^2 - 3a}{2}$$

L'aire du polygone régulier de k côtés, $k \geq 7$, est le nombre polygonal de l'ordre k .

$$\text{Pour } k \geq 7, S_k = P_a^k = \frac{(k-2)a^2 - (k-4)a}{2}.$$

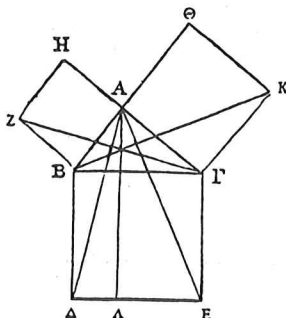
LE PREMIER LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION XLVII.

Dans les triangles rectangles, le carré du côté opposé à l'angle droit est égal aux carrés des côtés qui comprennent l'angle droit.

Soit $AB\Gamma$ un triangle rectangle, que $B\Lambda\Gamma$ soit l'angle droit; je dis que le carré du côté BR est égal aux carrés des côtés BA , $A\Gamma$.

Décrivons avec BR le carré $B\Delta E\Gamma$, et avec BA , $A\Gamma$ les carrés HB , $A\Gamma$; et par le point A conduisons AA parallèle à l'une ou à l'autre des droites $B\Delta$, ΓE ; et joignons AA , $z\Gamma$.



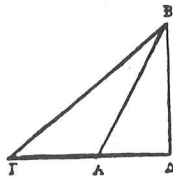
Puisque chacun des angles BAT , BAH est droit, les deux droites AT , AH , non placées du même côté, font avec la droite BA au point A de cette droite, deux angles de suite égaux à deux droits; donc la droite TA est dans la direction de AH ; la droite BA est dans la direction $A\Theta$, par la même raison. Et puisque l'angle ΔBT est égal à l'angle ZBA , étant droits l'un et l'autre, si nous leur ajoutons l'angle commun ABT , l'angle entier ΔBA sera égal à l'angle entier ZBT (not. 4). Et puisque ΔB est égal à BT , et ZB à BA , les deux droites ΔB , ΔA sont égales aux deux droites TB , BZ , chacune à chacune; mais l'angle ΔBA est égal à l'angle ZBT ; donc la base ΔA est égale à la base ZT , et le triangle ABA égal au triangle ZBT (4). Mais le parallélogramme BA est double du triangle ABA (41), car ils ont la même base BA et ils sont entre les mêmes parallèles BA , AA ; le carré BH est double du triangle ZBT , car ils ont la même base BZ et ils sont entre les mêmes parallèles ZB , HT ; et les grandeurs qui sont doubles de grandeurs égales, sont égales entr'elles; donc le parallélogramme BA est égal au carré HB . Ayant joint AE , BK , nous démontrerons semblablement que le parallélogramme TA est égal au carré BT ; donc le carré entier ΔAET est égal aux deux carrés HB , BT . Mais le carré ΔAET est décrit avec BT , et les carrés HB , BT sont décrits avec BA , AT ; donc le carré du côté BT est égal aux carrés des côtés BA , AT . Donc dans les triangles, etc.

LE DEUXIEME LIVRE DES ELEMENTS D'EUCLIDE.

PROPOSITION XII.

Dans les triangles obtusangles, le carré du côté qui soutend l'angle obtus est plus grand que les carrés des côtés qui comprennent l'angle obtus, de deux fois le rectangle compris sous celui des côtés de l'angle obtus sur le prolongement duquel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise extérieurement de la perpendiculaire à l'angle obtus.

Soit le triangle obtusangle ABT , ayant l'angle BAT obtus; du point B conduisons BA perpendiculaire sur TA prolongé; je dis que le carré de BT est plus grand que les carrés des côtés BA , AT , de deux fois le rectangle compris sous TA , ΔA .



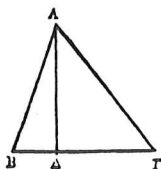
Car puisque la droite $\Gamma\Delta$ est coupée d'une manière quelconque au point Λ , le carré de $\Gamma\Delta$ est égal aux carrés des droites $\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Delta$, et à deux fois le rectangle compris sous $\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Delta$ (4. 2). Ajoutons le carré commun de $\Delta\Gamma$; les carrés de $\Gamma\Delta$, $\Delta\Gamma$ seront égaux aux carrés des droites $\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Delta$, $\Delta\Gamma$, et à deux fois le rectangle compris sous $\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Delta$. Mais le carré de $\Gamma\Delta$ est égal aux carrés des droites $\Gamma\Lambda$, $\Delta\Gamma$ (47.), car l'angle en Δ est droit, et le carré de $\Delta\Gamma$ est égal aux carrés des droites $\Lambda\Delta$, $\Delta\Gamma$; donc le carré de $\Gamma\Delta$ est égal aux carrés des droites $\Gamma\Lambda$, $\Delta\Gamma$, et à deux fois le rectangle compris sous $\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Delta$; donc le carré de $\Gamma\Delta$ est plus grand que les carrés des droites $\Gamma\Lambda$, $\Delta\Gamma$ de deux fois le rectangle sous $\Gamma\Lambda$, $\Lambda\Delta$. Donc, etc.

PROPOSITION XIII.

Dans les triangles acutangles, le carré du côté qui soutend un angle aigu est plus petit que les carrés des côtés qui comprennent cet angle aigu, de deux fois le rectangle compris sous le côté de l'angle aigu sur lequel tombe la perpendiculaire, et sous la droite prise intérieurement de la perpendiculaire à cet angle aigu.

Soit le triangle acutangle $\Lambda\Gamma\Delta$ ayant l'angle aigu en Δ ; du point Λ conduisons sur la droite $\Gamma\Delta$ la perpendiculaire $\Lambda\Delta$; je dis que le carré de $\Lambda\Gamma$ est plus petit que les carrés des droites $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$, de deux fois le rectangle compris sous $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$.

Car puisque la droite $\Gamma\Delta$ est coupée d'une manière quelconque au point Δ , les carrés des droites $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$ sont égaux à deux fois le rectangle compris sous $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$ et au carré de $\Lambda\Gamma$ (7. 2). Ajoutons le carré commun de $\Delta\Lambda$; les carrés



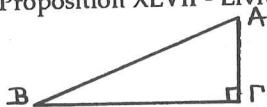
des droites $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$ seront égaux à deux fois le rectangle compris sous $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$, et aux carrés des droites $\Lambda\Delta$, $\Lambda\Gamma$. Mais le carré de $\Lambda\Gamma$ est égal aux carrés des droites $\Delta\Lambda$, $\Lambda\Gamma$ (47. 1), car l'angle en Δ est droit, et le carré de $\Lambda\Gamma$ est égal aux carrés des droites $\Delta\Lambda$, $\Lambda\Gamma$; donc les carrés des droites $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$ sont égaux au carré de $\Lambda\Gamma$ et à deux fois le rectangle compris sous $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$; donc le seul carré de $\Lambda\Gamma$ est plus petit que les carrés des droites $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$ de deux fois le rectangle compris sous $\Gamma\Delta$, $\Delta\Lambda$. Donc, etc.

Le jour de l'activité, les élèves présentent une transcription du texte de Jean BAYART, et exposent les Proposition D'EUCLIDE dont les démonstrations claires, mais subtiles et inhabituelles les amusent un peu. Les formules sont énoncées en toutes lettre.

Pouvez-vous donner une formulation actuelle de ces Propositions ?

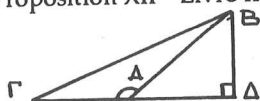
Très vite, les élèves écrivent:

Proposition XLVII - Livre I - Théorème de PYTHAGORE



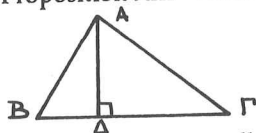
Dans un triangle rectangle ABΓ,
 $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$

Proposition XII - Livre II -



Dans un triangle obtusangle ABΓ,
 $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 + 2 A\Gamma \cdot A\Delta$

Proposition XIII - Livre II -



Dans un triangle acutangle ABΓ,
 $A\Gamma^2 = BA^2 + B\Gamma^2 - 2 B\Gamma \cdot B\Delta$

Ces notations sont celles de LEGENDRE (1752-1833) dans les *Eléments de Géométrie*, propositions XII et XIII du Livre III.

On vous donne la formule $a^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cos \hat{A}$ pour le triangle ABC de côtés $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

Comparez cette formule aux Propositions D'EUCLIDE, et établissez-la, en considérant $\vec{BC}^2$.

Dans la géométrie grecque, la notion d'aire est fondamentale, et de plus, les vérités sont enchaînées à la réalité. Dans la géométrie algébrique rendue possible par les progrès de l'algèbre jusqu'au 16ème siècle, les démonstrations sont plus aisées, et permettent de recouvrir tous les cas particuliers par l'étude d'un seul cas général. La géométrie algébrique ouvre la voie à la géométrie sans figure du 20ème siècle.

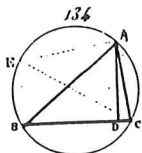
Dans l'introduction au Livre III de ses *Eléments de Géométrie*, LEGENDRE écrit: "... Nous devons avertir aussi que plusieurs de nos démonstrations sont fondées sur quelques-unes des règles les plus simples de l'algèbre ... en cas de difficulté, il sera bon de consulter les livres d'algèbre, et d'entre-mêler ainsi l'étude des deux sciences." Voyons comment LEGENDRE démontre, dans la Proposition XXXII du Livre III, quelques propriétés métriques du triangle. Nous donnerons ensuite les notations actuelles.

Eléments de Géométrie de LEGENDRE

PROPOSITION XXXII.

THÉORÈME.

fig. 134. Dans tout triangle ABC, le rectangle des deux côtés AB, AC, est égal au rectangle compris par le diamètre CE du cercle circonscrit et la perpendiculaire AD abaissée sur le troisième côté BC.



Car, en joignant AE, les triangles ABD, AEC, sont rectangles, l'un en D, l'autre en A; de plus l'angle B=E; donc ces triangles sont semblables, et ils donnent la proportion $AB:CE::AD:AC$; d'où résulte $AB \times AC = CE \times AD$.

Corollaire. Si on multiplie ces quantités égales par la même quantité BC, on aura $AB \times AC \times BC = CE \times AD \times BC$. Or, $AD \times BC$ est le double de la surface du triangle*; donc le produit des trois côtés d'un triangle est égal à sa surface multipliée par le double du diamètre du cercle circonscrit.

Le produit de trois lignes s'appelle quelquefois un solide, par une raison qu'on verra ci-après. Sa valeur se conçoit aisément, en imaginant que les lignes sont réduites en nombres, en multipliant les nombres dont il s'agit.

Scolie. On peut démontrer aussi que la surface d'un triangle est égale à son périmètre multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit.

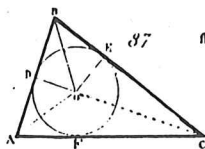


fig. 87.

Car les triangles AOB, BOC, AOC, qui ont leur sommet commun en O, ont pour hauteur commune le rayon du cercle inscrit; donc la somme de ces triangles sera égale à la somme des bases AB, BC, AC, multipliée par la moitié du rayon OD; donc la surface du triangle ABC est égale à son périmètre multiplié par la moitié du rayon du cercle inscrit.

Comme la géométrie grecque, la géométrie du 18^{ème} siècle utilise les triangles semblables. Les cas d'égalité et les cas de similitude des triangles ne figurent pas au programme des classes de lycée, mais les élèves suivent facilement les démonstrations. Ils remarquent la notation de la proportion

$AB : CE :: AD : AC$. Actuellement, les propriétés s'énonceraient ainsi: soient un triangle ABC , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $p = \frac{a+b+c}{2}$, et soient R et r les rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit au triangle ABC ,

$$abc = 4RS$$

$$S = pr$$

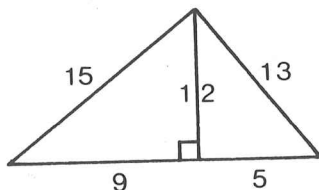
La formule $S = pr$ se généralise aux polygones convexes circonscriptibles à un cercle.

Le triangle 13 - 14 - 15 a pour aire $S = 84$. Calculez R et r .

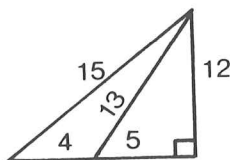
$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{65}{8} = 8,125$$

$$r = \frac{S}{p} = 4$$

Le triangle 13 - 14 - 15 est obtenu en accolant les triangles rectangles 5 - 12 - 13 et 9 - 12 - 15 par leur côté commun 12, pour former un triangle acutangle. Il est remarquable que S , R , r s'expriment par des nombres rationnels.



Le triangle obtusangle 4 - 13 - 15 a les mêmes propriétés, mais il est moins propre à servir d'exemple, c'est pourquoi il n'apparaît pas dans les *Traités de Géométrie*.



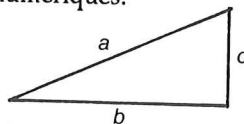
En 1223, dans sa *Pratique de la Géométrie*, LÉONARD DE PISE, dit FIBONACCI, considère le triangle 13 - 11 - 20. Quelle est l'aire de ce triangle ? Quels sont le rayon R de son cercle circonscrit et le rayon r de son cercle inscrit ?

L'activité se poursuit par l'étude des deux manuscrits en provenance du scriptorium du monastère de Saint-Amand-les-Eaux, cités précédemment. Des photocopies faites à partir de photographies de ces manuscrits, et une projection de diapositives ont facilité la présentation des documents, et leur commentaire collectif. Mystère et charme de l'écriture romane, jeu des chiffres romains, abondance de figures dans le texte ... le manuscrit anonyme

n° 337, *Traité de Grammaire, de Rhétorique, et de Musique*, contenant cinq feuillets d'un traité de la mesure des figures, a retenu l'attention des élèves. L'auteur donne de nombreux exemples numériques, sans généraliser le problème. Les élèves n'ont pas traduit le document latin, mais ils ont, assez facilement, suivi les calculs indiqués en toutes lettres, et dégagé les formules suggérées. Ont été présentés:

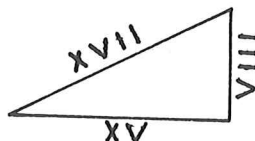
* Aire du triangle rectangle, sur cinq exemples numériques:

$$S = \frac{bc}{2}$$

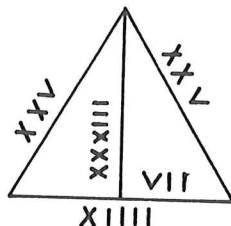


* Méthode de PLATON (427 - 347 avant J.-C.) pour former, en nombres entiers un triangle rectangle de côté pair $a = 8$ donné, c'est-à-dire le triplet:

$$\left(a; \left(\frac{a}{2} \right)^2 - 1; \left(\frac{a}{2} \right)^2 + 1 \right)$$



* Aire du triangle isocèle 14 - 25 - 25. L'auteur calcule la hauteur h par le théorème de PYTHAGORE (6ème siècle avant J.-C.), puis l'aire du triangle par la formule $S = \frac{b \times h}{2}$.



* Aire du triangle équilatéral. On a successivement deux méthodes:

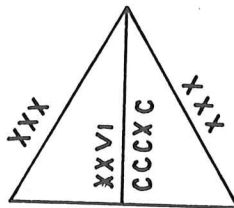
a) *Méthode dite géométrique* pour le triangle de côté $a = 30$.

On trouve $S = 15 \times 26 = 390$.

Les élèves calculent l'aire exacte

$$S = \frac{30^2 \sqrt{3}}{2} \approx 389,71$$

Cette méthode dite géométrique est exposée dans les écrits des auteurs latins du 1er siècle, tels FRONTINUS et COLUMELLE.

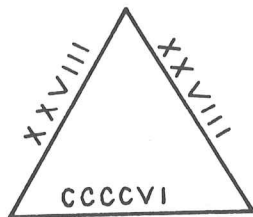


L'approximation de $\sqrt{3}$ est $\frac{26}{15} \approx 1,733$. Dans ses *Métriques*, HÉRON D'ALEXANDRIE (vers le 1er siècle) donne une méthode d'extraction des racines carrées.

b) *Méthode dite arithmétique*, avec démonstration, pour le triangle de côté $a = 28$.

On trouve $S = \frac{28^2 + 28}{2} = \frac{812}{2} = 406$ d'où la

formule $S = \frac{a^2 + a}{2}$ nombre triangulaire de côté a .



Les élèves s'esclaffent: le triangle de côté 28 a une aire supérieure à celle du triangle de côté 30, quel illogisme !

"Démonstration" de l'auteur: Soit un triangle équilatéral d'aire $S = 406$, alors

$$a = \frac{\sqrt{8 \times 406 + 1} - 1}{2} = \frac{57 - 1}{2} = 28$$

La prétendue démonstration n'est autre que le calcul de la solution positive

$$a = \frac{\sqrt{8S + 1} - 1}{2} \text{ de l'équation } S = \frac{a^2 + a}{2}$$

c'est-à-dire $a^2 + a - 2S = 0$.

Quelle confusion de l'auteur, et en même temps, quelle surprise, que les écolâtres du 9ème siècle aient connu la solution positive de l'équation du second degré à coefficients positifs $ax^2 + bx = c$, soit encore $x^2 + px = q$ en divisant par a .

Les Babyloniens (vers 1500 avant J.-C.) en donnaient la solution numérique

$$x = \sqrt{\frac{p^2}{4} + q} - \frac{p}{2}$$

et EUCLIDE (vers 300 avant J.-C.) traitait cette équation géométriquement à l'aide de la notion d'aire et de figures équivalentes. La théorie des équations du second degré est née dans le *Précis sur le Calcul de al-jabr et al-muqabala* d'Al-KHOWARIZMI (825).

CHASLES (1793-1880) indique, dans *Aperçu historique des Méthodes en Géométrie*, que les deux méthodes de calcul de l'aire du triangle équilatéral, avec "démonstration" sont données sur les exemples numériques respectifs $a = 30$ et $a = 28$ dans un manuscrit du 11ème siècle en bibliothèque à Chartres, manuscrit qu'il croit pouvoir attribuer à FRONTINUS (1er siècle). La méthode dite arithmétique a été reconnue fausse, et l'erreur expliquée, par GERBERT (vers 930-1003), dans une lettre écrite vers 997.

L'utilisation absurde des nombres figurés se retrouve encore dans le calcul de l'aire d'un polygone régulier convexe de k côtés, $k \geq 7$. Ainsi,

$$S_k = P_a^k = \frac{(k-2)a^2 - (k-4)a}{2}$$

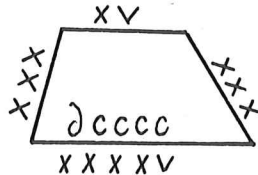
Cette erreur a persisté chez les Occidentaux jusqu'au 11^{ème} siècle.

* Aire du triangle scalène. Les deux exemples numériques ont déjà été étudiés: triangle 13 - 14 - 15 et triangle 15 - 25 - 20. L'auteur détermine les segments faits sur la base par la hauteur, puis calcule la hauteur, et enfin l'aire du triangle.

* Aire du quadrilatère. La figure est fausse, et on trouve:

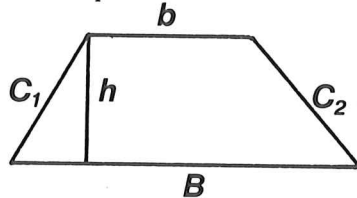
$$S = \frac{15+45}{2} \times \frac{30+30}{2} = 30 \times 30 = 900$$

On reconnaît la règle: "L'aire d'un quadrilatère est le produit des demi-sommes des côtés opposés du quadrilatère".



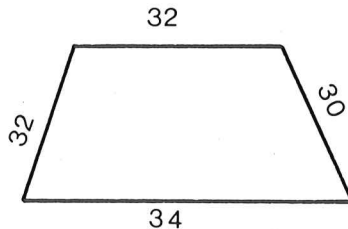
Les élèves vérifient vite que cette règle est exacte pour le carré et le rectangle, mais fausse pour le trapèze. En effet,

$$S = \frac{B+b}{2} \times h \quad \text{et} \quad h < \frac{C_1 + C_2}{2}$$

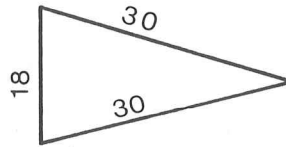


Et pourtant cette règle fausse était employée comme exacte par les arpenteurs romains des 1^{er} et 2^{ème} siècles, et on la trouve encore dans les œuvres de BOECE (vers 480-524), BEDE (673-735), ALCUIN (vers 735-804), GERBERT (vers 930-1003), et dans le manuscrit du 11^{ème} siècle découvert par CHASLES (1793-1880) en bibliothèque de Chartres. BEDE et ALCUIN donnent les exemples numériques suivants pour le quadrilatère et le triangle.

$$S = \frac{34+32}{2} \times \frac{3+30}{2} = 33 \times 31 = 1025$$



$$S = \frac{30 + 30}{2} \times \frac{18}{2} = 30 \times 9 = 270$$



On voit ainsi que le triangle est un quadrilatère particulier dont le quatrième côté est nul.

Cette erreur a persisté chez les Occidentaux jusqu'au 11^{ème} siècle. Par contre, elle est dénoncée par BRAHMEGUPTA, dans son traité de géométrie, *Ganita*, en 628. On note l'état d'ignorance et de stagnation, en géométrie, des Occidentaux, pendant un millénaire et, avec CHASLES, dans son ouvrage *Aperçu historique des Méthodes en Géométrie*, on s'interroge sur la communication des savoirs scientifiques et sur l'origine de ces règles fausses pratiquées en Inde et en Occident.

.. Ces deux règles, qui attestent que nous avons eu nos temps d'ignorance, auraient-elles pénétré dans l'Inde, où des géomètres, véritablement dignes de ce nom, les auraient reconnues fausses ? Et la proposition de Brahme Gupta aurait-elle été destinée à substituer, à cette pratique ignorante, une règle vraiment exacte et géométrique ?

Il semble, du moins à raison de leur identité, que ces règles des Occidentaux et celles que l'auteur hindou énonce comme fausses, ont une même origine. Car il n'en est pas de l'erreur comme de la vérité. La vérité, en Géométrie, est la loi commune ; elle est une, elle appartient à tous les temps, à toutes les intelligences qui savent la comprendre ; et sa présence sur plusieurs points, chez plusieurs peuples, n'est pas une preuve de communications entre eux. Mais quant à l'erreur, ses formes n'ont pas de loi ; elles sont diverses, innombrables ; et la conformité, dans ce cas, dénote une origine commune.

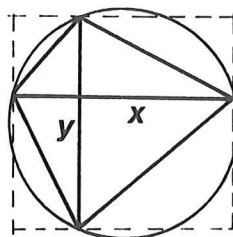
Cette circonstance offre peut-être quelque intérêt, comme fait historique attestant des communications scientifiques dans un temps éloigné, et prouvant, du reste, la haute supériorité des Hindous d'alors sur les Occidentaux contemporains.

Existe-t-il une formule qui donne l'aire d'un quadrilatère dont les côtés sont connus ?

Les élèves conjecturent la formule $S = \sqrt{abcd}$ qui est fausse pour le parallélogramme. En seconde, un devoir sera donné sur l'aire du quadrilatère dont les côtés sont connus.

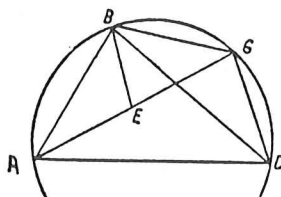
Dans son traité de géométrie, *Ganita*, BRAHMEGUPTA considère le quadrilatère inscriptible ayant ses diagonales perpendiculaires. Pouvez-vous exprimer son aire au moyen des côtés a, b, c, d ?

Les élèves dessinent dans un cercle deux cordes perpendiculaires, construisent le rectangle sur les diagonales, et donnent la formule $S = \frac{1}{2} xy$, mais ne savent pas exprimer que les sommets sont cocycliques.



Un extrait de l'*Almageste* de PTOLÉMÉE (2ème siècle), en notations modernes, et la Proposition XXIII du Livre III des *Eléments de Géométrie* de LEGENDRE sont distribués aux élèves, pour étude à la maison, préparatoire à une prochaine activité sur le quadrilatère de BRAHMEGUPTA.

Almageste de PTOLÉMÉE (vers 150)
Livre I - Chapitre IX



Soit un quadrilatère quelconque inscrit dans le cercle ABGD ; soient menées les diagonales AG, BD : il s'agit de prouver que

$$AG \times BD = AB \times GD + BG \times AD.$$

Soit fait l'angle ABE = l'angle DBG ; si nous ajoutons à chacun l'angle commun EBD, l'angle ABD = l'angle EBG. Mais BDA = BGE ; car ces deux angles sont inscrits et appuyés sur le même arc ; donc le triangle ABD est équiangle au triangle BGE. On a donc la proportion $BG : GE = BD : DA$; par conséquent $BG \times DA = GE \times BD$.

Maintenant puisque l'angle ABE = l'angle DBG, et que l'angle BAE = l'angle BDG, le triangle ABE est équiangle au triangle BDG. On a donc la proportion

$$BD : DG = BA : AE ; \text{ donc } BA \times DG = BD \times AE.$$

Or il a été prouvé que $BG \times AD = BD \times GE$; par conséquent $BD \times AG = BA \times DG + BG \times AD$. Ce qu'il fallait montrer.

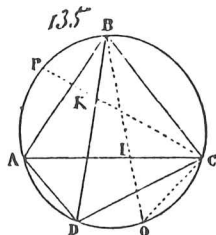
Eléments de Géométrie de LEGENDRE (1836)

PROPOSITION XXXIII.

THÉORÈME.

Dans tout quadrilatère inscrit ABCD, le rectangle des deux diagonales AC, BD, est égal à la somme des rectangles des côtés opposés, de sorte qu'on a

$$AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC.$$



Prenez l'arc $CO = AD$, et tirez BO qui rencontre la diagonale AC en I .

L'angle $ABD = CBI$, puisque l'un a pour mesure la moitié de AD , et l'autre la moitié de CO égal à AD . L'angle $ADB = BCI$, parce qu'ils sont inscrits dans le même segment AOB ; donc le triangle ABD est semblable au triangle IBC , et on a la proportion $AD:CI::BD:BC$; d'où résulte $AD \times BC = CI \times BD$. Je dis maintenant que le triangle ABI est semblable au triangle BDC ; car l'arc AD étant égal à CO , si on ajoute de part et d'autre OD , on aura l'arc $AO = DC$; donc l'angle $ABI = DBC$; de plus l'angle $BAI = BDC$, parce qu'ils sont inscrits dans le même segment; donc les triangles ABI, DBC , sont semblables, et les côtés homologues donnent la proportion $AB:BD::AI:CD$; d'où résulte $AD \times CD = AI \times BD$.

Ajoutant les deux résultats trouvés, et observant que $AI \times BD + CI \times BD = (AI + CI) \times BD = AC \times BD$, on aura $AD \times BC + AB \times CD = AC \times BD$.

Scholie. On peut démontrer de la même manière un autre théorème sur le quadrilatère inscrit.

Le triangle ABD semblable à BIC , donne la proportion $BD:BC::AB:BI$, d'où résulte $BI \times BD = BC \times AB$. Si on joint CO , le triangle ICO , semblable à ABI , sera semblable à BDC , et donnera la proportion $BD:CO::DC:OI$; d'où résulte $OI \times BD = CO \times DC$, ou, à cause de $CO = AD$,

$OI \times BD = AD \times DC$. Ajoutant les deux résultats, et observant que $BI \times BD + OI \times BD$ se réduit à $BO \times BD$, on aura,

$$BO \times BD = AB \times BC + AD \times DC.$$

Si on eût pris $BP = AD$, et qu'on eût tiré CKP , on aurait trouvé par des raisonnemens semblables,

$$CP \times CA = AB \times AD + BC \times CD.$$

Mais l'arc BP étant égal à CO , si on ajoute de part et d'autre BC , on aura l'arc $CBP = BCO$; donc la corde CP est égale à la corde BO , et par conséquent les rectangles $BO \times BD$ et $CP \times CA$ sont entre eux comme BD est à CA ; donc,

$$BD : CA :: AB \times BC + AD \times DC : AD \times AB + BC \times CD.$$

Donc les deux diagonales d'un quadrilatère inscrit sont entre elles comme les sommes des rectangles des côtés qui aboutissent à leurs extrémités.

Ces deux théorèmes peuvent servir à trouver les diagonales quand on connaît les côtés.

Vient pour terminer, la présentation du manuscrit n° 338, *Oeuvres Mathématiques et Astronomiques* de Jean BAYART, Valencenois, 1652. On lit sur le premier feuillet

"Oeuvres Mathématiques et Astronomiques contenant plusieurs traictez pour parvenir a une solide et parfaite cognoissance du cours des cieux, et tout ce quy despend des mouvements cœlestes, selon les plus fameux mathématiciens et astronomes tant anciens que modernes. La plus grande partie des opérations faicte et pratiqué par Jean BAYART, Valencenois. 1652."

et en tête de ce premier feuillet se trouve une note:

"Ex libris Rdi admodum domini D. NICOLAI DU BOIS abbatii monasterii S. Amandi. 1667. Livre à conserver soigneusement."

Ce manuscrit, peut-être autographe, a l'originalité d'être écrit en français. Les cent soixante quatre premières feuilles font la somme du savoir mathématique de l'époque, les six cents autres sont consacrées à l'astronomie et à l'horlogerie. C'est l'œuvre d'un amateur dont la pensée scientifique est stimulée par la vie pratique. Cet ouvrage correspond à un niveau de connaissances scientifiques encore élémentaire, mais sérieux et solide. Les élèves ont été intéressés par l'écriture cursive gothique, les dessins naïfs de macrométrie, d'holométrie et de stéréométrie. Ils ont étudié l'article: *Comme on pourat cognoistre l'heure par un festu mise entre les doigts*. Des propositions et des exercices de géométrie de Jean BAYART viendront étayer les prochaines activités en mathématiques.

La comparaison des deux manuscrits met en lumière l'évolution de la pensée scientifique au Monastère de Saint-Amand-les-Eaux, du 9ème au 17ème siècle, et permet de prendre conscience des tâtonnements et des errements qui précèdent les grandes découvertes.

IV- Consultation de manuscrits

La consultation de manuscrits en bibliothèque Municipale de Valenciennes a eu lieu début février. Elle a été préparée en philosophie, en français et en mathématiques par l'activité "Aire du triangle". Elle a motivé le travail des élèves pendant les deux derniers trimestres.

La Bibliothèque Municipale de Valenciennes est l'une des plus importantes du Nord de la France. Elle possède une collection de plus de mille manuscrits qui proviennent, pour une grande part du scriptorium de Saint-Amand-les-Eaux. Livres et archives de l'Abbaye furent transportés à Valenciennes, en 1790, lors de la suppression des établissements religieux.

Aux 9ème et 10ème siècles, le monastère bénédictin fut l'un des principaux foyers intellectuels du Nord de la Gaule, et ses écoles réputées avaient l'ambition de former des poètes et des savants. Dans le manuscrit n° 150, du 9ème siècle, ont été copiés d'une même main, la *Cantilène de Sainte Eulalie*, premier poème en langue romane, et le *Rythmus teutonicus*, premier poème en langue germanique. C'est à Saint-Amand-les-Eaux que le moine écolâtre HUCBALD (mort nonagénaire en 930) composa son ouvrage sur la musique polyphonique *Hucbaldi monachi Elnonensis musica enchiriadis*. Plus tard encore, aux 16ème et 17ème siècles, les gouverneurs de la célèbre Abbaye surent encourager les recherches intellectuelles. Textes exceptionnels, enluminures d'une rare beauté, simples reliures carolingiennes, somptueuses reliures armoriées, contribuent à faire de cette bibliothèque l'une des plus riches de France.

La bibliothécaire a guidé les élèves dans leur exploration de manuscrits et d'imprimés, apportant maints renseignements sur l'exécution, la matière, les auteurs ... Les manuscrits n° 337 et n° 338, présentés aux élèves lors de l'activité en classe "Aire du triangle", se sont trouvés entourés de monuments littéraires, de textes classiques, et de simples curiosités. C'est avec émotion que les textes étudiés ont été retrouvés.

Par la suite, individuellement, les élèves ont fréquenté la bibliothèque, pour vérifier une note, étudier un article, ou, le plus souvent, consulter l'*Histoire littéraire de la France* (1746), ouvrage d'érudition des Religieux bénédictins de la Congrégation de Saint-Maur. Une recherche en histoire locale et en histoire des mathématiques s'est mise en place, et poursuivie hors P.A.E., l'année suivante. En effet, intrigués par les incertitudes d'attributions d'œuvres à BOECE (vers 480-524), BEDE (673-735), ALCUIN (vers 735-804), GERBERT (vers 930-1003), ... et attentifs aux ressemblances des écrits de ces auteurs avec le *Traité de mesure des figures* inséré dans le manuscrit anonyme n° 337, du 9ème siècle, de la Bibliothèque de Valenciennes et dans le manuscrit du 11ème siècle, de la Bibliothèque de Chartres copieusement décrit par CHASLES (1793-1880) dans *Aperçu historique des Méthodes en Géométrie*, les élèves ont recherché l'héritage grec et l'origine des manuscrits. Ils ont été amenés à approfondir la méthode de résolution géométrique de l'équation $x^2 + px = q$, à étudier l'aire des polygones réguliers ou non et la théorie des nombres polygonaux, à considérer la for-

mation en nombres entiers ou rationnels de triangles rectangles, et à s'intéresser à l'arithmétique.

Ayant noté les fréquents séjours D'ALCUIN, disciple de BEDE, au monastère de Saint-Amand-les-Eaux (entre 782 et 799) et l'intervention du moine écolâtre HUCBALD dans la réorganisation des écoles de Reims (entre 886 et 900), sachant d'autre part que GERBERT, directeur de l'école diocésaine de Reims (de 972 à 982) eut pour élève FULBERT (vers 960-1029) le futur directeur de l'école épiscopale de Chartres élu évêque de Chartres en 1006, il parut établi par les élèves que le rayonnement intellectuel de l'Abbaye de Saint-Amand-les-Eaux, au 9ème siècle, s'est propagé à Reims, puis Chartres. Ainsi, la Bibliothèque de Chartres a pu s'enrichir de l'un des six exemplaires répertoriés du traité de musique écrit par HUCBALD à Saint-Amand-les-Eaux, *Hucbaldi monachi Elnonensis musica enchiridiadis* (manuscrit n° 148 de la Bibliothèque de Chartres) et de traités de géométrie dont le manuscrit du 11ème siècle décrit par CHASLES n'est qu'une copie plus récente.

V- Aire du quadrilatère

Devoir à faire à la maison, à rendre sur copie, pour les élèves de la classe de seconde (15-16 ans). Ce devoir fait suite à la consultation de manuscrits qui pose le problème du calcul de l'aire d'un quadrilatère dont on connaît les longueurs des côtés, et généralise au quadrilatère la formule de HÉRON établie pour le triangle ($d = 0$).

1° Etude d'une famille de losanges

On considère la famille de losanges ayant un côté commun $[AB]$.

* Quel est le lieu géométrique des points C et D ?

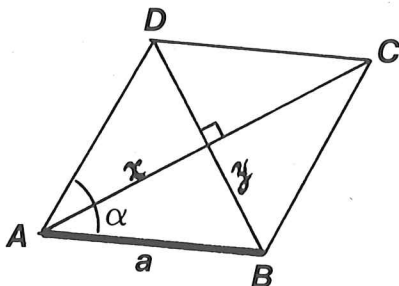
* Rechercher les invariants de la famille de losanges: périmètre, somme des carrés des diagonales, ...

* On pose $AB = a$, et $\widehat{BAD} = \alpha$

Exprimer, au moyen de a et α , les longueurs des diagonales $AC = x$ et $BD = y$.

Etudier les variations de x et y .

Existe-t-il un losange de la famille inscriptible dans un cercle ?



* Exprimer, au moyen de a et α , l'aire S du losange ABCD.
Quel est le losange de la famille ayant une aire maximum ?

2°/ Etude de formules

* On vous propose la formule

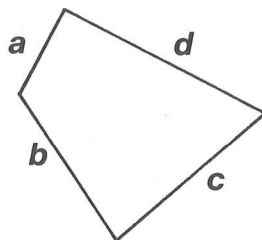
$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

pour le calcul de l'aire d'un quadrilatère dont on connaît les longueurs des côtés

$$a, b, c, d; \quad p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

Cette formule est-elle exacte pour la carré ? pour le rectangle ? pour le losange ? pour le parallélogramme ? pour le trapèze isocèle ?

Cette formule est exacte pour certains quadrilatères. Trouver une propriété commune à ces quadrilatères particuliers.



* On vous propose la formule

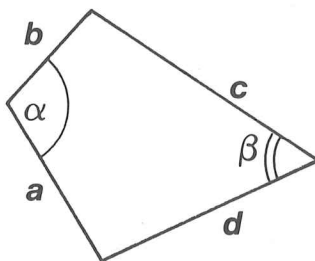
$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

pour le calcul de l'aire d'un quadrilatère dont on connaît les longueurs des côtés a, b, c, d et les mesures de deux angles opposés α et β ;

$$p = \frac{a+b+c+d}{2}$$

Cette formule est-elle exacte pour le carré ? pour le rectangle ? pour le losanges ? pour le parallélogramme ? pour le trapèze isocèle ?

En admettant cette formule, montrer que, de tous les quadrilatères ayant même côtés a, b, c, d , le quadrilatère d'aire maximum est le quadrilatère inscrit dans un cercle.



VI- Le quadrilatère de BRAHMEGUPTA

Cette activité du mois de mai fait suite aux activités: *Construction avec quatre côtés donnés d'un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle*, et *Construction d'un triangle rectangle en nombres entiers*. Elle a pour objectifs d'examiner le quadrilatère rationnel, de montrer comment

CHASLES (1793-1880) comprend l'œuvre de BRAHMEGUPTA, et de faire le point sur les connaissances en Mathématiques des Hindous au 7ème siècle.

Préparation de l'activité:

Les écrits de BRAHMEGUPTA (né en 598) sont connus en Occident depuis 1817, grâce à une traduction anglaise de COLEBROOKE. La géométrie fait partie d'un traité d'Arithmétique. Les propositions ne sont accompagnées d'aucune démonstration et d'aucune figure, mais les notes d'un auteur hindou CHATURVEDA contiennent des figures et des applications numériques qui s'y rapportent. Dans *Aperçu historique des Méthodes en Géométrie* (1889), CHASLES analyse et commente l'œuvre de BRAHMEGUPTA.

Quinze jours avant l'activité, des extraits de la traduction de COLEBROOKE et des commentaires de CHASLES sont distribués aux élèves.

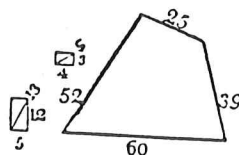
Construction d'un "trapèze"

§38. *Les côtés des cathètes de deux triangles rectangles, multipliés réciproquement par les hypoténuses, sont les quatre côtés inégaux d'un trapèze. Le plus grand est la base, le plus petit la corauste, et les deux autres sont les flancs.*

38. The uprights and sides of two rectangular triangles reciprocally multiplied by the diagonals are four dissimilar sides of a trapezium. The greatest is the base; the least is the summit; and two others are the flanks.

Example: In one oblong the diagonal is five, the upright three, and the side four. In the second the diagonal is thirteen, the upright twelve, and the side five.

The uprights and sides of each of the two rectangular triangles, viz. 12, 5, 3, and 4, being multiplied by the diagonal (hypotenuse) of the other, give 60, 25, 39 and 52. Here the greater number 60 is the base; the least 25 is the summit; the remaining two, 39 and 52, are the flanks.



Depuis le milieu du 18ème siècle, en France, le mot "trapèze" désigne un quadrilatère ayant deux côtés parallèles et deux autres côtés non parallèles. CHASLES s'interroge sur la signification du mot "trapèze" dans la géométrie des Hindous. Il fait son étude en supposant le quadrilatère inscrit dans un cercle.

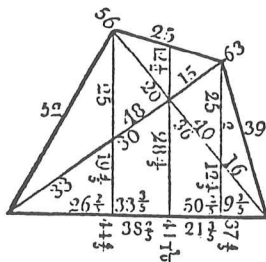
1°/ Montrer que les diagonales du quadrilatère sont perpendiculaires.

2°/ Calculer le diamètre du cercle circonscrit au quadrilatère.

3°/ Montrer que les diagonales, les segments déterminés sur les diagonales par leur point d'intersection, les perpendiculaires, ainsi que l'aire du quadrilatère, sont rationnels.

4°/ BRAHMEGUPTA préserve-t-il la généralité du problème ?

5°/ CHATURVEDA forme son quadrilatère à l'aide des triangles rectangles $(a, b, c) = (4, 3, 5)$ et $(a', b', c') = (5, 12, 13)$. Vérifier ses résultats.



Construction d'un triangle rectangle en nombres rationnels:

La règle pour la construction d'un triangle rectangle, en nombres rationnels, s'exprime algébriquement ainsi:

Soit a un côté du triangle, et b une quantité quelconque, le second côté sera:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} - b \right); \text{ et l'hypoténuse } \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} + b \right).$$

Cette règle repose sur l'identité:
$$\frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{b} + b \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{b} - b \right)^2 + a^2.$$

BRAHMEGUPTA ne prononce pas, dans son énoncé, le mot *rationnel*; mais on trouve la même règle au paragraphe 38 de son Algèbre, et il l'intitule: *Règle pour la construction d'un triangle rectangle en nombres rationnels*.

38. Rule for the construction of a rectangular figure with rational sides: Be a surd the perpendicular. Its square, divided by an assumed number, has the arbitrary quantity added and subtracted. The least is the base: and half the greater number is the flank. Tose surds, the product whereof is a square, are to be abridged.

Construction d'un rectangle (oblong)

35. The square of the side assumed at pleasure, being divided and then lessened by an assumed quantity, the half of the remainder is the upright of an oblong tetragon; and this, added to the same assumed quantity, is the diagonal.

§35. Le côté est pris arbitrairement; son carré est divisé par une quantité quelconque; du quotient on retranche cette quantité; la moitié du reste est la cathète de l'oblong; et, si l'on y ajoute la quantité, on aura la diagonale.

Ainsi soient a le côté de l'oblong, b la quantité prise arbitrairement: la cathète et la diagonale seront

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} - b \right); \quad \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} - b \right) + b = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} + b \right)$$

En effet, on a
$$\frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{b} + b \right)^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{a^2}{b} - b \right)^2 + a^2$$

D'après ce que nous avons déjà dit de cette formule, appliquée à la construction du triangle rectangle, on ne peut douter qu'il ne s'agisse ici de la construction d'un oblong dont les diagonales soient exprimées, comme les côtés, en nombres rationnels.

L'aire de l'oblong sera rationnelle aussi; et il en sera de même du diamètre du cercle circonscrit à l'oblong, puisque ce diamètre est égal aux diagonales.

1°/ Etablir l'identité:

$$(1) \quad a^2 + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} - b \right) \right]^2 = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{b} + b \right) \right]^2$$

Vérifier que, pour $b = 1$, on retrouve la formule de PYTHAGORE (585-500 avant J.-C.)

$$a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2} \right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2} \right)^2$$

et pour $b = 2$, on retrouve la formule de PLATON (428-348 avant J.-C.)

$$a^2 + \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 - 1 \right]^2 = \left[\left(\frac{a}{2} \right)^2 + 1 \right]^2$$

2°/ Montrer que l'identité (1) prend la forme générale (2), employée par DIOPHANTE (3ème siècle) et par les mathématiciens des 17ème et 18ème siècles FERMAT (1601-1665), EULER (1707- 1783), LEGENDRE (1752-1833).

$$(2) \quad (a^2 - b^2)^2 + (2ab)^2 = (a^2 + b^2)^2$$

3°/ En posant $t = \frac{a}{b}$, montrer que la formule (2) s'écrit encore:

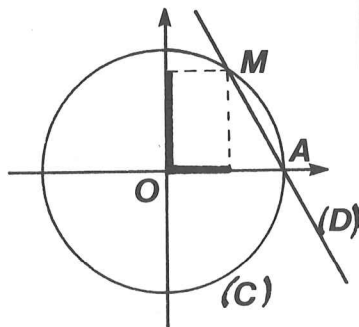
$$(3) \quad \left(\frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} \right)^2 + \left(\frac{2t}{t^2 + 1} \right)^2 = 1$$

où l'on reconnaît la formule: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, avec $t = \tan \frac{\alpha}{2}$.

4°/ Soient, en repère orthonormal $(O, \hat{i}, \hat{j})$, le cercle (C) de centre O, de rayon 1, d'équation $x^2 + y^2 = 1$, et la droite (D) issue de $A(1;0)$, de pente t , d'équation $y = t(x - 1)$.

Montrer que (D) recoupe (C) au point M de coordonnées:

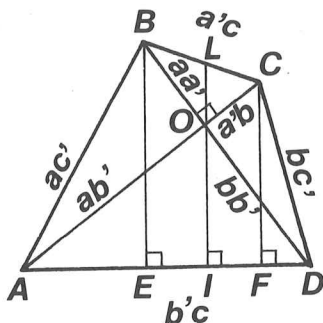
$$x = \frac{t^2 - 1}{t^2 + 1} ; \quad y = \frac{-2t}{t^2 + 1}$$



En déduire une méthode générale pour résoudre en nombres rationnels l'équation $x^2 + y^2 = 1$.

Application: Construire en nombres rationnels un triangle rectangle d'hypoténuse donnée A.

Lors de l'activité, les élèves ont montré que, le quadrilatère ayant ses diagonales perpendiculaires, CHATURVEDA a pu former son "trapèze", à partir des triangles rectangles (a, b, c) et (a', b', c') , en accolant les triangles rectangles (aa', ba', ca') , (ab', bb', cb') , $(a'a, b'a, c'a)$, $(a'b, b'b, c'b)$. CHASLES pense que dans la géométrie des Hindous, "le mot trapèze s'applique exclusivement au quadrilatère qui a ses diagonales à angle droit".



Le quadrilatère formé est rationnel. C'est là l'objet de la proposition de BRAMEGUPTA, selon CHASLES. Mais avec les côtés ac' , $a'c$, bc' , $b'c$, par permutation de ces côtés, on peut former deux autres quadrilatères inscriptibles dans le même cercle, dont une diagonale est un diamètre du cercle, de sorte que ces deux nouveaux quadrilatères aient deux angles droits opposés. Ces

nouveaux quadrilatères, étant rationnels, sont solutions du problème que BRAHMEGUPTA semble chercher à résoudre.

Sachant construire, en nombres rationnels, un triangle rectangle d'hypoténuse donnée A , indiquer une nouvelle méthode pour construire un quadrilatère rationnel, et retrouver les quadrilatères obtenus par la méthode de BRAHMEGUPTA.

En 1848, KUMMER a donné une méthode pour obtenir tous les quadrilatères rationnels.

Le traité d'Arithmétique de BRAHMEGUPTA témoigne d'un haut niveau de connaissances scientifiques, en Inde, au 7ème siècle. Il semble que, les siècles suivants, les savants indiens étaient d'une ignorance profonde en Mathématiques.

VII- Conclusion

Une équipe bien soudée de professeurs volontaires pour ouvrir le travail des élèves sur leur environnement et sur leur vécu, un sujet riche, suffisamment complexe pour motiver une démarche pluridisciplinaire, une administration locale favorable à l'expérimentation pour l'attribution de classes communes aux professeurs concernés, l'aménagement des horaires, et les autorisations de sorties, sont indispensables à la mise en place et au bon déroulement d'un P.A.E. culturel. Par souci de préparer les élèves à l'examen, les difficultés sont ensuite d'adapter les activités au programme de la classe et de guider la progression des idées. Tout au long de l'année scolaire, la technique a été de distribuer une documentation de base à tous les élèves, de rechercher quelques volontaires pour approfondissement du sujet et expositions à toute la classe. La répartition du travail, et la mise à niveau des connaissances ont permis de progresser, tout en respectant l'acharnement, voire l'obstination, de certains, pour des questions particulières. Le détachement des élèves à l'égard des notes a favorisé leur épanouissement, et de nouvelles relations ont pu s'établir.

En mathématiques, les élèves se sont montrés imaginatifs et volontaires. Leur curiosité les a conduits dans une voie inattendue, celle de l'arithmétique, où ils ont montré beaucoup de finesse et de passion.

Cette recherche en Mathématiques a pu être menée grâce à l'I.R.E.M. de Lille, pour la réflexion dans les groupes de travail et la fourniture des documents.

Bibliographie

- CHASLES, *Aperçu historique sur l'origine et le développement des Méthodes en Géométrie*. Gauthier-Villars, Paris 1889. 3ème édition.
- DAHAN-DALMEDICO et PEIFFER, *Routes et dédales*. Etudes vivantes. Paris, 1982.
- DEDRON ET ITARD, *Mathématiques et Mathématiciens*. Magnard. Paris, 1959.
- DHOMBRES, *Nombre, mesure et continu*. Cedric-Nathan. Paris, 1978.
- DIOPHANTE, *Les six livres arithmétiques et le livre des nombres polygones*. Traduction VER EECHE. Blanchard, 1959, nouveau tirage.
- EUCLIDE, *Œuvres*. Traduction PEYRARD. Blanchard, 1966.
- FERMAT, *Œuvres*. Publications Tannery et Henry. Gauthier-Villars, 1894. Tomes II et III.
- FOURREY, *Curiosités géométriques*. Vuibert, Paris, 1938. 4ème édition.
- LEGENDRE, *Eléments de géométrie*. Firmin Didot Frères. Paris, 1836. 12ème édition.
- LEGENDRE, *Théorie des Nombres*. Blanchard. Paris, 1955. Tomes I et II.
- LÉONARD DE PISE, *Le livre des nombres carrés*. Traduction Ver Eecke. Desclée de Brouwer. Bruges, 1952.